arXiv:2304.08573v1 [math.GR] 17 Apr 2023

单位圆的一个同构，以及经典群的一个同构

Markus J. Stroppel

摘要

本文证明了两个厄米单位圆之间的一个同构，并用它来研究经典群的同构；这些经典群同构与某些A型和D型（秩3）实单李代数之间的同构有关。

本文利用两个厄米单位圆之间的一个同构，研究与A型$^{\mathbb{C}\,1}_{3}$、和D型$^{\mathbb{H}}_{3}$实单李代数之间的同构有关的经典群同构（按Tits [18, 第 28, 40], 页及Helgason [6, X § 2.1、§ 6.2]的记法，相关代数分别记为 $\mathfrak{su}(3,1)$和 $\mathfrak{so}^*(6)$）。

我们采用的关联几何方法补充了 [12, 2.14] 中使用的代数方法，为经典群的例外同构提供了几何解释。该代数方法适用范围广得多，包括某些特征2的情形；在这些情形下，四元数上的单位圆会退化为一条直线，因此该方法无法用于我们的目的。

1 厄米单位圆

我们将有限厄米单位圆的概念（见 [1, p. 104]）推广到无限域（且不一定是交换的）上的厄米形式情形，如下所述。

1.1 定义。设 K 为任意域（不一定是交换的），且 σ 为 K的反自同构，并且 $\sigma^2 = \mathrm{id} \neq \sigma$。

若 V 是 K 上的向量空间，且 $h\colon V \times V \to K$ 是非退化的 σ-厄米形式，我们定义集合 $U_h := \{Kv \in \mathrm{Gr}_1(V) \mid v \perp_h v\} = \{P \in \mathrm{Gr}_1(V) \mid P \leqq P^{\perp_h}\}$，其中包含绝对点（相对于 h）。若 $d := \dim V$ 有限，则厄米形式 h 定义了射影空间 $\mathrm{PG}(V) \cong \mathrm{PG}(d-1, K)$ 的一个极性 π_h（参见 [2, I，第 5 节，第 9 页及以下], [7, II.6，第 45 页及以下]）。于是集合 U_h 由 $\mathrm{PG}(V)$ 中所有与其在该极性下的像关联的点组成。

考虑一条直线 $L \in \mathrm{Gr}_2(V)$。若 $U_h \cap \mathrm{Gr}_1(L)$ 中位于 L 上的绝对点不止一个，则称其为 U_h 的一个区块 。所有这类区块组成的集合记为 $\mathcal{B}_h$。显然， U_h 中任意两点都由 $\mathcal{B}_h$ 的唯一一个元素连接。

若形式 h 的 Witt 指数为 1，我们称（U_h， $\mathcal{B}_h$， $\in$）为关于 h的厄米单位。

1.2 引理。 假设 $h\colon\ V\times V\to K$是 *Witt* 指数为1的非退化 σ-厄米形式。若 h 是迹值的，则经过给定点 $P\in U_h$ 的区块集为

$$\left\{U_h\cap \mathrm{Gr}_1(L)\;\middle|\; L\in \mathrm{Gr}_2(V), P<L\not\leqq P^{\perp_h}\right\}.$$

证明。 记 $h\colon\ V\times V\to K\colon\ (x,\ y)\ \mapsto \langle x|y\rangle$。回顾（见 [2, I，第 10 节，第 19]页），h 是迹值的，当且仅当集合 $\{\langle v|v\rangle \mid v\in V\}$ 包含于 $\{s+s^\sigma \mid s\in K\}$中。

考虑经过 $P\in U_h$的任意直线 $L\in \mathrm{Gr}_2(V)$ 。则 $P=Kv$，其中 $v\in V\smallsetminus\{0\}$ 满足 $\langle v|v\rangle=0$。若 $L\leqq P^{\perp_h}$，则每个 $w\in L\smallsetminus Kv$ 都满足 $\langle w|w\rangle\neq 0$，因为 h 的 Witt 指数为 1。因此， P是 L中的唯一绝对点，而 $U_h\cap\mathrm{Gr}_1(L)$ 不包含任何区块。

若 $L\not\leqq P^{\perp_h}$，我们任取 $x\in L\smallsetminus P$；于是 $\langle x|v\rangle\neq 0$。将 x替换为适当的标量倍数，即可得到 $\langle x|v\rangle=-1$。对于每个 $s\in K$，现在都有 $K(sv+x)\in L$ 且 $\langle sv+x|sv+x\rangle=\langle sv|sv\rangle+\langle sv|x\rangle+\langle x|sv\rangle+\langle x|x\rangle=s\langle v|v\rangle s^\sigma+s\langle v|x\rangle+\langle x|v\rangle s^\sigma+\langle x|x\rangle=0-s-s^\sigma+\langle x|x\rangle$。

如果形式 h 是迹值的，我们便找到 s 使得 $s+s^\sigma=\langle x|x\rangle$，而 $K(sv+x)$ 是 L上的第二个绝对点。因此，在这种情况下， $U_h\cap\mathrm{Gr}_1(L)$ 确实是一个区块。 □

根据 [2, I，第 10 节，第 19] 页，我们知道，域 K 上特征为 $K\neq 2$ 的每个 σ-厄米形式都是迹值的。此外，如果 σ 在 K 的中心上作用非平凡（特别是当 K 是交换的时），那么每个 σ-厄米形式都是迹值的。

1.3 例。 设 $C|R$ 是交换域的可分二次扩张，且 σ 是 $\mathrm{Gal}(C|R)$ 的生成元。那么该形式

$$h\colon C^3\times C^3\to C\colon \big((x_0,x_1,x_2),(y_0,y_1,y_2)\big)\mapsto x_0y_2^\sigma+x_1y_1^\sigma+x_2y_0^\sigma$$

是非退化的、迹值的，且 Witt 指数为 1。若 C 是阶为 e 的有限域，则厄米单位 $(U_h,\mathcal{B}_h,\in)$ 是阶为 e的有限厄米单位圆。

1.4 定义。 设 $\mathbb{U}:=(U_h,\mathcal{B}_h,\in)$ 是关于非退化厄米形式 $h\colon\ V\times V\to K$ 的厄米单位，且该形式的 Witt 指数为 1；设 $X\in U_h$是 $\mathbb{U}$中的一个点，$(P,\mathcal{L},I)$ 是任意关联结构。若映射 $\eta\colon\ U_h\to P$ 是从 $\mathbb{U}$ 到 $(P,\mathcal{L},I)$ 的同构，则 η 是双射；对每个区块 $B\in\mathcal{B}_h$，存在唯一的区块 $B'\in\mathcal{L}$，使得 $B^\eta=\{X\in P\mid (X,B')\in I\}$，且由此得到的映射 $\beta\colon\ \mathcal{B}_h\to\mathcal{L}\colon\ B\mapsto B'$ 是双射。照例， $\mathbb{U}$ 的自同构 是 $\mathbb{U}$ 到其自身的同构。

$\mathbb{U}$ 的自同构称为以 X 为中心的 $\mathbb{U}$ 平移，若其保持所有经过 X的区块不变。我们用 $\mathbf{T}_{[X]}$ 表示所有以 X 为中心的 $\mathbb{U}$ 平移所组成的集合。

若 h: $V \times V \to K$ 是 Witt 指数为 1 的 σ-厄米形式，则显然，由半相似变换诱导的共线变换群 PΓU(V, h)通过厄米单位 ($U_h, \mathcal{B}_h, \in$) 的自同构作用。平移的例子见下文 2.4 和 2.7。

1.5 定理。考虑域 K（不一定交换）上的反自同构 σ，其中 $\sigma^2 = \mathrm{id} \neq \sigma$。设 h: $V \times V \to K$: $(v, w) \mapsto \langle v|w\rangle$ 是 *Witt* 指数为 1 的非退化 σ-厄米形式。若该形式是迹值的（特别是当 $\mathrm{char}\, K \neq 2$ 或 K 交换时），且 $\dim V$ 有限，则群 $\mathrm{PU}(V, h)$ 在 U_h 上二重传递，因此在 $\mathcal{B}_h$ 上以及在 $(U_h, \mathcal{B}_h, \in)$ 的旗集上都传递。

证明。由于 h 的 Witt 指数为 1，存在 $a \in V \setminus \{0\}$ 使得 $\langle a|a\rangle = 0$，因此 Ka 属于 U_h。由于 h 非退化，存在 $x \in V$ 使得 $\langle a|x\rangle \neq 0$。在 $L := Ka + Kx$ 中还有第二个绝对点 Kb，见 1.2。

设 P、Q 是 U_h 中任意两个点。那么存在 v、$w \in V \setminus \{0\}$，使得 $\langle v|v\rangle = 0 = \langle w|w\rangle$，且 $P = Kv$ 和 $Q = Kw$。由于 h 的 Witt 指数为 1，因此我们有 $\langle v|w\rangle \neq 0$。将 v 替换为适当的数乘，可得 $\langle v|w\rangle = 1$。现在，维特定理（见 [2, § 11，第 21] 页）断言，存在 $A \in \mathrm{U}(V, h)$，使得 $aA = v$ 和 $bA = w$。由此诱导的共线变换 $\lfloor A \rfloor \in \mathrm{PU}(V, h)$ 将点对 (Ka, Kb) 映到 (P, Q)，并将连接 Ka 和 Kb 的区块映到连接 P 和 Q 的区块。 □

1.6 引理。设 $\mathbb{U} := (U_h, \mathcal{B}_h, \in)$ 为关于非退化 σ-厄米形式 h: $V \times V \to K$ 的厄米单位，其 *Witt* 指数为 1。

a. 对于每个点 $X \in U_h$，集合 $\mathrm{T}^{[X]}$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ 的子群，也是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ 中 X 的稳定子的正规子群。**b.** 对于经过 X 的每个块 $B \in \mathcal{B}_h$，子群 $\mathrm{T}^{[X]}$ 在集合 $B \setminus \{X\}$ 上传递作用。事实上，交集 $\mathrm{T}_{[X]} \cap \mathrm{PU}(V, h)$ 在该集合上传递作用。

证明。集合 $\mathrm{T}^{[X]}$ 是稳定子 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})_X$ 在集合 $\mathcal{B}_X$ 上作用的核，其中该稳定子是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ 中 X 的稳定子，而 $\mathcal{B}_X$ 是所有经过 X 的块组成的集合。因此，$\mathrm{T}^{[X]}$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{U})_X$ 的正规子群。

取 v、$w \in V$，使得 $X = Kv$ 和 $B = U_h \cap \mathrm{Gr}_1(L)$，其中 $L = Kv + Kw$。于是 $\langle v|v\rangle = 0$，且不失一般性，我们可以假设 $\langle w|w\rangle = 0$ 和 $\langle v|w\rangle = 1$。简单计算可得 $B = \{Kv\} \cup \{K(pv + w) \mid p \in K, p + p^\sigma = 0\}$。对于满足 $p + p^\sigma = 0$ 的每个 $p \in K$，由 $vM' = v$ 和 $wM' = pv + w$ 定义的线性映射 M' 是 h 在 $L \times L$ 上的限制的等距变换。由于该限制非退化，空间 $L^\perp$ 是 V 中 L 的向量空间补。我们将 M' 延拓为线性映射 M，使其在 $L^\perp$ 上恒等。于是 M 属于 $\mathrm{U}(V, h)$，并诱导出一个共线变换 $\lfloor M \rfloor \in \mathrm{T}_{[X]} \cap \mathrm{PU}(V, h)$，将 Kw 映到 $K(pv + w)$。这表明 $\mathrm{T}_{[X]} \cap \mathrm{PU}(V, h)$ 在 $B \setminus \{X\}$ 上传递，证毕。 □

2 两个厄米型及其单位圆

设 R 为交换域，$C|R$ 为二次域扩张。则伽罗瓦群 Gal($C|R$) 的阶为二，由对合 $\sigma\colon x \mapsto \overline{x}$ 生成。我们选取一个元素$i \in C \smallsetminus \{0\}$，满足 $i^\sigma = -i$。（如果 char $R = 2$，那么 j 属于 R；稍后我们将排除这种情况。）

我们假设在 C^2 上存在一个各向异性 σ-厄米形式。不失一般性（即相差一个相似变换），我们可以假设该形式的格拉姆矩阵为 $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$。

我们考虑四元数域

$$H := H^s_{C|R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ -s\overline{x} & \overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, x \in C \right\}.$$

利用 $w := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -s & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 以及将 C 嵌入 H 的嵌入 $c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{smallmatrix}\right)$，我们得到 $H = C + wC$，其乘法规则为 $(a + wb)(c + wd) = ac - s\overline{b}d + w(\overline{a}d + bc)$，其中 a、b、c、$d \in C$。

2.1 引理。 </style}映射 : $a + wb \mapsto \overline{a} + wb$（其中 $a, b \in C$）是 H 上的一个对合反自同构，其不动点为 $R + wC$ 中的点。

我们有 $(a + wb) + (a + wb)^\alpha = a + \overline{a} + 2wb$ 以及 $(a + wb)(a + wb)^\alpha = a\overline{a} - sb\overline{b} + 2w\overline{a} \quad b.$

证明。 事实上，对每个 $X \in H$，我们都有 $X^\alpha = i^{-1}X^\kappa i$，其中 $\kappa\colon\ a + wb \mapsto \overline{a} - wb$ 是 H 的标准对合。因此 α 是一个反自同构（即 κ）与一个（内）自同构的复合。直接计算即可得到其余断言。 □

注意，当 char $R = 2$ 时，α 是标准对合。

射影空间中的一个单性结构

2.2 定义。 在 C^4 上，我们考虑 σ-厄米形式

$$g\colon C^4 \times C^4 \to C\colon \big((x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)\big) \mapsto x_0 y_3^\sigma + x_3 y_0^\sigma + x_1 y_1^\sigma + s x_2 y_2^\sigma .$$

这个型的 Witt 指数为 1，因为 H 的范数型是各向异性的。

我们假设特征 char $R \neq 2$（因此 $i \notin R$），并考虑 $\Xi := \{\xi(u, p) \mid u \in C^2, p \in Ri\} \subseteq$ PGL$(4, C)$，其中

$$\xi\big((u_0, u_1), p\big) := \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_1 & p - \frac{1}{2}N(u_0 + wu_1) \\ 0 & 1 & 0 & -u_0^\sigma \\ 0 & 0 & 1 & -su_1^\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

（对于任意矩阵 $A \in$ GL$(4, C)$，我们用 $\lfloor A \rfloor$ 表示其在 PGL$(4, C)$ 中对应的元素，该元素由模标量陪集得到。）

2.3 命题。a. 我们有

$$U_g = \{C(0,0,0,1)\} \cup \{C(1,x_1,x_2,x_3) \mid x_3 + x_3^\sigma = -x_1x_1^\sigma - sx_2x_2^\sigma\}.$$

b. 集合 Ξ 是射影特殊酉群(C^4,g)的一个子群。该子群固定点 $C(0,0,0,1)$，并在 $U_g \setminus \{C(0,0,0,1)\}$上正则传递。

事实上，对于 $u,v \in C^2$和 $p,q \in Ri$， Ξ中的乘积为 $\xi(u,p)\,\xi(v,q) = \xi\left(u+v, p+q+\frac{1}{2}(vMu^\sigma - uMv^\sigma)\right)$，其中 $M = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&s\end{smallmatrix}\right)$。

证明。考虑 $x = (x_0,x_1,x_2,x_3) \in C^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$，其中 $Cx < x^{\perp_g}$。若 $x_0 = 0$，则 $0 = x_1x_1^\sigma + sx_2x_2^\sigma = N(x_1+wx_2)$，且 $Cx = (0,0,0,1)$，因为范数型 N是各向异性的。若 $x_0 \neq 0$，则可假设 $x_0 = 1$，于是得到 $x_3 + x_3^\sigma = -x_1x_1^\sigma - sx_2x_2^\sigma$，正如所述。

容易验证 $\Xi \subseteq$特殊酉群(C^4,g)，并且 Ξ中的每个元素都固定点 $C(0,0,0,1)$。注意 $M(u_0,u_1)^\sigma = M\binom{u_0^\sigma}{u_1^\sigma} = \binom{u_0^\sigma}{su_1^\sigma}$。经过直接计算可得 $N(u_0+wu_1) = (u_0,u_1)M(u_0,u_1)^\sigma$，进而 $-(u+v)M(u+v)^\sigma + 2(vMu^\sigma - uMv^\sigma) = -uMu^\sigma - vMv^\sigma - uMv^\sigma$得到

$$\begin{aligned}\xi(u,p)\,\xi(v,q) &= \begin{bmatrix}1 & u & p-\frac{1}{2}N(u_0+wu_1)\\ 0 & E & -Mu^\sigma \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & v & q-\frac{1}{2}N(v_0+wv_1)\\ 0 & E & -Mv^\sigma \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & u+v & p+q+\frac{1}{2}(vMu^\sigma - uMv^\sigma) - \frac{1}{2}N(u_0+v_0+w(u_1+v_1))\\ 0 & E & -M(u+v)^\sigma \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $E = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$。由于 $z := vMu^\sigma - uMv^\sigma$满足 $z + z^\sigma = 0$，我们得到 $\xi(u,p)\,\xi(v,q) = \xi\left(u+v, p+q+\frac{1}{2}(vMu^\sigma - uMv^\sigma)\right)$，如所述。因此 Ξ在乘法下封闭。$\xi(u,p)$的逆元为 $\xi(-u,-p) \in \Xi$。

最后，我们注意到 $\xi(u,p)$ 将 $C(1,0,0,0)$ 映射到 $C\left(1,u_0,u_1,p-\frac{1}{2}N(u_0+wu_1)\right)$。这表明 Ξ 在 U_g 上正则传递。 □

2.4 注记。 集合 $\{\xi((0,0)\ p) \mid p \in Ri\}$ 既构成群 Ξ 的中心，也构成其换位子群。该换位子群是非元 $\mathbb{U}_g = (U_g, \mathcal{B}_g, \in)$ 的平移群 $\mathrm{T}_{[C(0,0,0,1)]}$，其中心为 $C(0,0,0,1)$。

对于点 $C(1,0,0,0) \in U_g$，我们得到

$$\mathrm{T}_{[C(1,0,0,0)]} = \left\{ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\p&0&0&1\end{bmatrix} \;\middle|\; p \in Ri \right\}.$$

四元数平面中的一个单位圆

2.5 定义。我们继续假设 char $R \neq 2$。在 H^3 上，我们考虑 α-厄米形式

$$h\colon H^3 \times H^3\colon \big((X_0,X_1,X_2),(Y_0,Y_1,Y_2)\big) \mapsto X_0Y_2^\alpha + X_1Y_1^\alpha + X_2Y_0^\alpha\,,$$

这里，α 是 2.1 中引入的对合。形式 h 的 Witt 指数为 1。

我们考虑群 PGL(3, H) 的子集 $\Psi := \big\{\psi(X,p)\big|\ X\in H, p\in Ri\big\}$，其中

$$\psi(X,p) := \begin{bmatrix} 1 & X & p-\frac{1}{2}XX^\alpha \\ 0 & 1 & -X^\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

（同样，对于 $A\in$ GL(3, H)，我们用 $\lfloor A\rfloor$ 表示 PGL(3, H) 中对应的元素；在这里，它是模中心标量的陪集。）

2.6命题。a. 我们有

$$U_h = \{H(0,0,1)\} \cup \{H(1,X,Y)\mid\ Y+Y^\alpha = -XX^\alpha\}\,.$$

b. 集合 Ψ 是$\mathrm{PU}(H^3,h)$的一个子群。该子群固定点 $H(0,0,1)$，并在 $U_h \smallsetminus \{H(0,0,1)\}$ 上正则传递。

Ψ中的乘法由下式给出

$$\psi(X,p)\,\psi(Y,q) = \psi\left(X+Y, p+q+\tfrac{1}{2}(YX^\alpha - XY^\alpha)\right)\,.$$

证明。 证明与 2.3 的证明相当类似。 □

2.7 注记。 群 Ψ 的中心和换位子群均与$\big\{\psi(0,p)\big|\ p\in Ri\big\}$重合。该群是非结合环形 $\mathbb{U}_h$ =(U_h, $\mathcal{B}_h$, $\in$) 的平移群 $\mathrm{T}^{H(0,0,1)]}$，其中心为 H(0, 0, 1)。

对于点 H(1, 0, 0) $\in U_h$，我们得到

$$\mathrm{T}_{[H(1,0,0)]} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, p\in Ri \right\}.$$

2.8 注记。 群 Ξ 和 Ψ 是广义海森堡群的例子（参见 [15],[5], [11]）。事实上，它们都同构于 GH(R^4, R, β)，其中 β 是 R^4上的任意非退化交替形式。我们将在下文 2.10 中明确给出一个直接同构。

单性几何的同构

2.9 定义。 对于每个 $u=(u_0,u_1)\in C^2$ 以及每个 $p\in Ri$，我们定义点

$$C\left(1,u_0,u_1,p-\tfrac{1}{2}N(u_0+wu_1)\right)^\eta := H\left(1,u_0+wu_1,p-\tfrac{1}{2}(u_0+u_1w)(u_0+u_1w)^\alpha\right).$$

此外，我们令 $C(0,0,0,1)^\eta := H(0,0,1)$。

由此得到一个双射 $\eta\colon U_g\to U_h\colon P\mapsto P^\eta$，见 2.3 和 2.6。

2.10 定理。 我们假设 特征 $R\neq 2$，并使用上文 *2.1*、*2.2*、*2.5* 和 *2.9* 中引入的记号。

a. *The map* $\varphi\colon \Xi\to\Psi\colon \xi\big((u_0,u_1),p\big)\mapsto\psi\big(u_0+wu_1,p\big)$ *is an isomorphism of groups.*

b. 对于每个 $u=(u_0,u_1)\in C^2$、每个 $p\in Ri$ 以及每个点 $P\in U_g$，我们有 $P^{\eta\psi(u_0+wu_1,p)}=P^{\xi(u,p)\eta}$；这里 $\eta\colon U_g\to U_h$ 是 *2.9* 中引入的映射。***c.*** 映射 $\eta\colon U_g\to U_h$ 将关联结构 $(U_g,\mathcal{B}_g,\in)$ 同构映射到 $(U_h,\mathcal{B}_h,\in)$。

证明。 我们使用 2.3 和 2.6 中给出的乘法公式来证明断言 a。只需验证

$$\begin{aligned}&(v_0+wv_1)(u_0+wu_1)^\alpha-(u_0+wu_1)(v_0+wv_1)^\alpha\\&=(v_0+wv_1)(\overline{u_0}+wu_1)-(u_0+wu_1)(\overline{v_0}+wv_1)\\&=v_0\overline{u_0}-u_0\overline{v_0}+w^2(\overline{v_1}\,u_1-\overline{u_1}\,v_1)\\&=vMu^\sigma-uMv^\sigma;\end{aligned}$$

这里我们使用 $wc=\bar{c}w$（对于 $c\in C$）和 $w^2=-s$。

断言 b 很容易验证。由于厄米单位中的任意两点都由唯一一个块连接，接下来只需验证 $B^\eta\in\mathcal{B}_h$ 对每个块 $B\in\mathcal{B}_g$ 都成立。利用Ξ 在 $U_g\setminus\{C(0,0,0,1)\}$ 上的传递性，我们看到只需考虑经过 $C(0,0,0,1)$ 的块，以及经过 $C(1,0,0,0)$ 的块。

经过 $C(0,0,0,1)$ 的任意区块都具有 $B=U_g\cap L$ 的形式，其中 $L=C(0,0,0,1)+C(1,u_0,u_1,u_2)$。我们可以假设 $C(1,u_0,u_1,u_2)\in U_g$。于是，对某个 $p\in Ri$，有 $u_2=p-\frac{1}{2}N(u_0+wu_1)$ 成立。因此，所讨论的区块为

$$B=\left\{C(1,u_0,u_1,p-\tfrac{1}{2}N(u_0+wu_1))\;\middle|\;p\in Ri\right\}\cup\{C(0,0,0,1)\},$$

及其像

$$B^\eta=\left\{H(1,u_0+wu_1,p-\tfrac{1}{2}(u_0+wu_1)(u_0+wu_1)^\alpha)\;\middle|\;p\in Ri\right\}\cup\{H(0,0,1)\}$$

属于 $\mathcal{B}_h$。

现在考虑经过 $C(1,0,0,0)$的区块 B。存在 $u=(u_0,u_1)\in C^2$和 $x\in Ri$，使得 $C\left(1,u_0,u_1,x-\frac{1}{2}N(u_0+wu_1)\right)\in B\setminus\{C(1,0,0,0)\}$。我们将 $n:=N(u_0+wu_1)$简写为$B\setminus\{C(1,0,0,0)\}$中的每个点都具有如下形式：$P_a:=C\left(1,au_0,au_1,a(x-\frac{n}{2})\right)$，其中 $a=a_0+a_1i\in C$（满足 $a_0,a_1\in R$）满足

$$a\overline{a}n+2a_1ix-a_0n=0\,. \qquad (*)$$

因此 $P_a=C\left(1,au_0,au_1,y_a-a\overline{a}\frac{n}{2}\right)$，其中 $y_a:=a(x-\frac{n}{2})+a\overline{a}\frac{n}{2}$。注意，$y_a\in Ri$。

我们简记 $Z:=u_0+wu_1$，于是 $C(1,u_0,u_1,x-\frac{n}{2})^\eta=H(1,Z,x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)$。对于每个满足上述条件（$*$）的$a\in C$，我们得到

$$\begin{aligned} C\left(1,au_0,au_1,a(x-\tfrac{n}{2})\right)^\eta &= C\left(1,u_0a,u_1a,y_a-a\overline{a}\tfrac{n}{2}\right)^\eta \\ &= H\left(1,Za,y_a-\tfrac{1}{2}Za(Za)^\alpha\right) \\ &= H\left(1,Za,y_a-\tfrac{1}{2}a\overline{a}ZZ^\alpha\right)\,. \end{aligned}$$

这些点都包含在 $U_h=U_g^\eta$ 中。为了证明它确实包含在区块 $\big(H(1,0,0)+H(1,Z,x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)\big)\cap U_h$ 中，还需验证存在$Y\in H$ 使得 $Y(Z,x-\frac{1}{2}YY^\alpha)=(Za,y_a-\frac{1}{2}a\overline{a}ZZ^\alpha)$。左侧的项给出$Y=ZaZ^{-1}$。利用 $ZZ^\alpha=(u_0+wu_1)(\overline{u_0}+wu_1)=u_0\overline{u_0}-su_1\overline{u_1}+2w\overline{u_0}u_1$和 $ZaZ^{-1}=(u_0a+wu_1a)(\overline{u_0}-wu_1)\frac{1}{n}=a_0+a_1i\,\overline{ZZ^\alpha}\frac{1}{n}$，我们计算

$$\begin{aligned} ZaZ^{-1}(x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha) &= ZaZ^{-1}x-\tfrac{1}{2}ZaZ^\alpha \\ &= a_0x+a_1i\,\overline{ZZ^\alpha}x\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{2}a_0ZZ^\alpha-\tfrac{1}{2}a_1in \\ &= a_0(x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha)+a_1i(\overline{ZZ^\alpha}x\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{2}n) \\ &= a_0(x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha)+a_1i(xZZ^\alpha\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{2}n)\,; \end{aligned}$$

我们使用了 $i\,\overline{F}i^{-1}=F^\alpha$ 和 $x\in Ri$。另一方面，我们发现

$$\begin{aligned} y_a-\tfrac{1}{2}a\overline{a}ZZ^\alpha &= a(x-\tfrac{n}{2})+a\overline{a}\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}a\overline{a}ZZ^\alpha \\ &= ax-\tfrac{1}{2}an+\tfrac{1}{2}a_0n-a_1ix-\tfrac{1}{2}(a_0-2a_1ix\tfrac{1}{n})ZZ^\alpha \\ &= a_0x-a_1i\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}(a_0-2a_1ix\tfrac{1}{n})ZZ^\alpha\,, \end{aligned}$$

而这等于 $ZaZ^{-1}(x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)$，正如所需。

因此，我们已经证明，对于每个 $B\in\mathcal{B}_g$，B^η 都包含在 $\mathcal{B}_h$ 的某个区块 B' 中。接下来只需证明 B^η 覆盖整个 B'。为此，我们利用如下事实：对于每个经过 $H(1,0,0)$ 的区块 $D\in\mathcal{B}_h$，由以 $H(1,0,0)$ 为中心的平移组成的群 $\mathsf{T}:=\mathsf{T}_{[H(1,0,0)]}=\left\{\left|\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\p&0&1\end{smallmatrix}\right|\;\middle|\;p\in Ri\right\}$ 在$D\setminus\{H(1,0,0)\}$上具有传递作用，参见 1.6 和 2.7。特别地，我们得到区块 $B'=\big(H(1,0,0)+H(1,Z,x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)\big)\cap U_h$等于集合

$\{H(1,0,0)\} \cup \{H(1+(x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)p, Z, x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha \mid p \in Ri\}$。因此，只需证明对于每个 $p \in Ri$，都存在满足条件 $(*)$ 的 $a \in C$，使得

$$H\big(1+(x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha)p, Z, x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha\big) = H\big(1, Za, ZaZ^{-1}(x-\tfrac{1}{2}ZZ^\alpha)\big);$$

右侧的描述由此可得，所讨论的点属于 B^η。

我们需要找到满足 $1+(x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)p = (ZaZ^{-1})^{-1} = Za^{-1}Z^{-1}$ 的 $a \in C$。我们将 $b := a^{-1}$ 写成 $b = b_0 + b_1 i$，其中 $b_0, b_1 \in R$，并将 $1+(x-\frac{1}{2}ZZ^\alpha)p = (1+xp) - \frac{1}{2}ZZ^\alpha p$ 与 $ZbZ^{-1} = b_0 + b_1 i\,\overline{ZZ^\alpha}\frac{1}{n}$ 进行比较。由于 $1+xp$ 属于 R 和 $\frac{1}{2}ZZ^\alpha p \in Ri + wC$，我们得到 $1+xp = b_0$ 和 $-\frac{1}{2}ZZ^\alpha p = b_1 i\,\overline{ZZ^\alpha}\frac{1}{n}$，因此 $b_1 i = -\frac{1}{2}pn$，且 $b = 1+xp-\frac{1}{2}pn$。

a 的条件（$*$）意味着 $n - 2b_1 ix - b_0 n = 0$，很容易验证。 □

3 平移群与群的同构

3.1 定义。设（P，$\mathcal{L}$，I）是一个关联结构，其中，在 P中任意两点之间至多有一条 $\mathcal{L}$ 中的直线与这两点都关联。(P，$\mathcal{L}$，I)中的***O'Nan*** 构型 由相交于6个点的4条直线组成（见下图1）。特别地，这4条直线中的任意两条都恰有一个公共点。

这些构形是为纪念 Michael O'Nan 而命名的；他在研究有限厄米单位圆的自同构时，使用了以下结果3.2的有限情形，见 [13]。在射影空间的（公理化）背景下，O' Nan 构形称为 Veblen-Young图形。

以下结果的证明取自 [4, 2.2]。

3.2 命题。设 V 是交换域 F 上的向量空间，并假设存在 F 的非平凡对合自同构 σ。设 $h\colon\ V \times V \to F\colon (u, v) \mapsto \langle u|v\rangle$ 是 ***Witt*** 指数为 1 的非退化 σ-厄米形式。那么厄米单位 $\mathbb{U} = (U_\sigma, \mathcal{B}_\sigma, \in)$ 不包含任何 ***O'Nan*** 构形。

证明。考虑射影空间 PG(V) 中的一个 O'Nan 构形。该构形的六个点包含在由 PG(V) 中任意两条直线张成的射影平面内。

因此，存在 线性无关向量 b_0, b_1, b_2，属于 V，使得该构型中的六个点依次为 Fb_0, Fb_1, $F(b_0+b_1)$、Fb_2, $F(b_0+b_2)$ 和 $F(b_1-b_2)$。若这些点属于 U_h，则对所有 $m < n < 3$, $\langle b_n|b_n\rangle = 0$ 和 $\langle b_n|b_m\rangle = -\langle b_m|b_n\rangle$ 均成立。矩阵 $(\langle b_m|b_n\rangle)_{m,\ n<3}$ 的行列式为 0（这里用到了 F 是交换的）。因此，f 是退化的，且 h 在 $Fb_0 + Fb_1 + Fb_2$ 上的限制的 Witt 指数至少为 2。但这样一来，h 的 Witt 指数就大于 1，这与我们的假设矛盾。 □

3.3 注记。 Kestenband [10] 声称，3.2 对斜域上的厄米单位圆也成立。这个说法是错误的。例如，考虑实数域 $\mathbb{R}$ 上的四元数域 $\mathbb{H} := H^1_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} = \mathbb{C} + j\mathbb{C}$，它由 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ 连同 $j^2 = -1$ 构造而成，标准对合 $\kappa\colon x \mapsto \bar{x}$，以及由下式给出的厄米形式

$$\langle (u_0,u_1,u_2) | (v_0,v_1,v_2) \rangle = u_0 i\overline{v_1} + u_0 j\overline{v_2} - u_1 i\overline{v_0} - u_1 ji\overline{v_2} - u_2 j\overline{v_0} + u_2 ji\overline{v_1}\,.$$

该形式非退化，且 Witt 指数为 1。然而，相应的厄米单位包含如下 O'Nan 构型，其点为 $\mathbb{H}(1,0,0)$、$\mathbb{H}(0,1,0)$、$\mathbb{H}(0,0,1)$、$\mathbb{H}(1,1,0)$、$\mathbb{H}(1,0,1)$ 和 $\mathbb{H}(0,1,-1)$。

3.4 命题。 设 $\mathbb{U} = (U_h,\ \mathcal{B}_h,\ \in)$ 是一个厄米单位，且 X 是 U_h 中任意一点。若 $\mathbb{U}$ 不包含 ***O'Nan*** 构形，则平移群 $\mathrm{T}^{[X]}$ 对每个经过 X 的区块 B 在 $B \setminus \{X\}$ 上正则传递。

证明。 我们已从 1.6 知道，$\mathrm{T}^{[X]}$ 在 $B \setminus \{X\}$ 上传递。

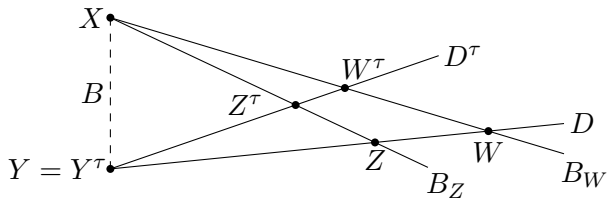


图 1：利用一个带固定点的平移构造 O'Nan 构型。

如果该作用不是正则传递的，那么存在 $\tau \in \mathrm{T}_{[X]} \setminus \{\mathrm{id}\}$，使得 τ 固定某个点 $Y \in B \setminus \{X\}$。令 Z 为 $U_h \setminus B$ 中满足 $Z^\tau \neq Z$ 的任意一点。由于 τ 是幺元中的一个平移，连接 X 和 Z 的区块 B_Z 在 τ 作用下保持不变，且包含 Z^τ。在连接 Y 和 Z 的区块 D 中，任取第三个点 W。于是，W^τ 位于 D^τ 与连接 X 和 W 的区块 B_W 的交集中。因此，六个点 X、Y、Z、Z^τ、W、W^τ 以及四个区块 D、D^τ、B_Z、B_W 在该幺元中构成一个 O'Nan 构型，这与我们的假设矛盾。见图 1。 □

3.5 推论。 设 $h\colon V \times V \to K$ 是一个 ***Witt*** 指数为 1 的非退化 σ-厄米形式。如果相应的厄米单位 $\mathbb{U}$ 不含 ***O'Nan*** 构形，则该单位的每个点都满足 $\mathrm{T}^{[X]} = \mathrm{T}_{[X]} \cap \mathrm{PU}(V,h)$。 □

3.6 推论。 设 $h\colon V\times V\to K$ 是一个 *Witt* 指数为 1 的非退化 σ-厄米形式。如果相应的厄米单位 $\mathbb{U}$ 不含 *O'Nan* 构形，则该单位的每个平移 $\mathbb{U}$均由射影空间 $\mathrm{PG}(V)$的一个幂零变换诱导；事实上，每个以 $X=Kv$ 为中心的平移都由一个幂零变换 $\tau_{\lambda,v}\in \mathrm{U}(V,h)$ 诱导，其中 $\ker\lambda=v^{\perp_h}$。 □

具体而言，对于这里讨论的两个单位圆系：2.4 和 2.7 中的换位子群 $\Xi'=\{\xi((0,0)\ p)\ \big|\ p\in Ri\}$ 和 $\Psi'=\{\psi(0,p)\big|\ p\in Ri\}$ 都是完整的平移群，其中心分别为 C(0, 0, 0, 1) 和 H(0, 0, 1)。

3.7 定理。 群 $\mathrm{PEU}(C^4,g)$ 和 $\mathrm{PEU}(H^3,h)$ 同构。

证明。 回顾一下，群 EU(C^4,g) 和 EU(H^3,h) 分别由所有幺幺幂零变换生成；这些幂零变换诱导出单位圆系的平移。由同构 $\eta\colon \mathbb{U}_g\to\mathbb{U}_h$ 进行共轭，会将 Aut($\mathbb{U}_g$) 映到 Aut($\mathbb{U}_h$)，并将群 $\mathrm{T}^{[X]}$ 映到 $\mathrm{T}^{[X^\eta]}$，对每个点 $X\in U_g$均如此。因此，由 η进行共轭会诱导出一个从 PEU(C^4,g) 到 PEU(H^3,h) 的同构。 □

3.8 例。我们取复数域 $\mathbb{C}$ 作为 C，其标准对合为 $\sigma\colon c\mapsto\bar c$生成 Gal($\mathbb{C}|\mathbb{R}$)；并取哈密顿四元数域 $\mathbb{H}=H^1_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}=\mathbb{C}+j\mathbb{C}$。2.1 中的对合 α代表 $\mathbb{H}$的对合反自同构中除标准对合 κ 以外的唯一一个类。对于分别在 2.2 和 2.5 中引入的形式 g和 h，我们得到群 PEU($\mathbb{C}^4$, g) $\cong$PSU$_4$($\mathbb{C}$, 1) 和 PEU($\mathbb{H}^3,h$) $\cong$PSαU$_3$($\mathbb{H}$)（按照 Tits [18, 第 28, 40], 页 [14, 94.33], 的记法，这些群分别属于 $\mathrm{A}_3^{\mathbb{C}\,1}$ 型, 和 $\mathrm{D}_3^{\mathbb{H}}$型；Helgason [6, X § 2.1，§ 6.2] 分别将相应代数记为 $\mathfrak{su}$(3, 1) 和 $\mathfrak{so}^*$(6)）。

3.9 注记。对于交换域 C，已知 EU(C^4,g) $=$ SU(C^4,g)，因此 PEU(C^4,g) $=$ PSU(C^4,g)。

此外，已知群 PEU(C^4,g) 和 PEU(H^3,h) 是单群：一般结果见 [2, II § 4]，关于交换基域的情形则参见 [17, 10.20] 或 [3, 11.26] 。由于我们将研究范围限制在特征不为二的情形，所讨论的所有形式都是迹值形式。

3.10 注记。由于域 C 是交换的，C 上的对合 σ 是第二类对合（依照 Dieudonn´e [2, § 10, p. 19] 中的含义）。根据 [16, 5.6c], , 群 PU(C^4,g) 中的每个反射都是容许的，因此我们得到 Aut($U_g,\mathcal{B}_g,\in$) $=$PГU(C^4,g)。由结果 2.10，我们还可推出 Aut($U_h,\mathcal{B}_h,\in$) $\cong$PГU(C^4,g)。

3.11 注记。 设 F 是一个交换域，且 Q 是 F 上的四元数代数。那么 Q 是一个中心单 F-代数（参见 [9, 4.5，引理 3，第 232], 页），并且每个 F-线性自同构都是

内自同构（根据 Skolem-Noether定理，参见 [9, 第 222], 页；或者参见 [8, 第 2 个定理，第 67] 页，那里给出了直接证明）。因此，每个 F-线性反自同构 β 都是标准对合与某个内自同构的乘积，即设 $x \mapsto i^{-1}xi$ 满足 $i \in F \setminus \{0\}$，则有 $x^\beta = i^{-1}\bar{x}i$。由此可得，β 是对合当且仅当 $i^2 \in F$，也就是说，当且仅当 $i \in F$ 或 $\bar{i} = -i$。

若 $i \in F$，则 β 是标准对合。若 $i \notin F$，我们构造二次扩张 $C = F + Fi$。于是，Q 的标准对合的限制 σ 是 Gal($C|F$) 的生成元，而 β 则如 2.1 节所述得到。

参考文献

[1] P. Dembowski，有限几何，《数学及其边缘领域成果》第44卷，Springer-Verlag，柏林，1968年，doi:10.1007/978-3-642-62012-6。MR 0233275。Zbl 0865.51004。[2] J. A. Dieudonn´e，*La g´eom´etrie des groupes classiques*，《数学及其边缘领域成果》（新系列）第5卷，Springer-Verlag，柏林，1955年，doi:10.1007/978-3-662-59144-4。MR 0072144。Zbl 0221.20056。[3] L. C. Grove，经典群与几何代数，《数学研究生丛书》第39卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年，doi:10.1090/gsm/039。MR 1859189。Zbl 0990.20001。[4] T. Grundh¨ofer、B. Krinn 和 M. J. Stroppel，某些单位圆之间不存在同构，设计、码与密码学**60**（2011），第2期，197–201，doi:10.1007/s10623-010-9428-2。MR 2795696。Zbl 05909195。[5] M. Gulde 和 M. J. Stroppel，克莱因二次曲面相似变换下的子空间稳定子，以及海森堡代数的自同构，线性代数及其应用**437**（2012），第4期，1132–1161，doi:10.1016/j.laa.2012.03.018，arXiv:1012.0502。MR 2926161。Zbl 06053093。[6] S. Helgason，微分几何、李群与对称空间，《纯数学与应用数学》第80卷，学术出版社，纽约，1978年。MR 514561（80k:53081）。Zbl 0993.53002。[7] D. R. Hughes 和 F. C. Piper，射影平面，《数学研究生教材》第6卷，Springer-Verlag，纽约，1973年。MR 0333959。Zbl 0484.51011。[8] N. Jacobson，合成代数及其自同构，《巴勒莫数学学会学报》（第2辑）**7**（1958），55–80，doi:10.1007/BF02854388。MR0101253。Zbl 0083.02702。

[9] N. Jacobson，基础代数 *II*，W. H. Freeman and Company，纽约，第2版，1989年。MR 1009787。Zbl 0694.16001。[10] B. C. Kestenband，有限射影平面中不存在性定理的推广，《Geom. Dedicata》**44** （1992），第2期，123–126，doi:10.1007/BF00182943。MR1187635。Zbl 0772.51002。[11] N. Knarr 和 M. J. Stroppel，合成代数上的海森堡群，《Beitr. Algebra Geom.》**57** （2016），第3期，667–677，doi:10.1007/s13366-015-0276-0。MR 3535075。Zbl 06619596。[12] L. Kramer 和 M. J. Stroppel，霍奇算子与酉群之间的例外同构，《J. Lie Theory》**33** （2023），第1期，329–360，arxiv:2208.11044，https://www.heldermann.de/JLT/JLT33/jlt33.htm。[13] M. E. O'Nan，酉区组设计的自同构，《J. Algebra》**20** （1972），495–511，doi:10.1016/0021-8693(72)90070-1。MR 0295934。Zbl 0241.05013。[14] H. Salzmann、D. Betten、T. Grundh¨ofer、H. H¨ahl、R. L¨owen 和 M. J. Stroppel，紧射影平面，de Gruyter 数学论丛第21卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1995年，doi:10.1515/9783110876833。MR 1384300。Zbl 0851.51003。[15] M. J. Stroppel，齐次辛映射与几乎齐次海森堡群，《Forum Math.》**11** （1999），第6期，659–672，doi:10.1515/form.1999.018。MR 1724629。Zbl 0928.22008。[16] M. J. Stroppel 和 H. Van Maldeghem，酉设计的自同构，《Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin》**12** （2005），第5期，895–908，http://projecteuclid.org/euclid.bbms/1136902624。MR 2241352。Zbl 1139.51002。[17] D. E. Taylor，经典群的几何，Sigma 纯数学丛书第9卷，Heldermann Verlag，柏林，1992年。MR 1189139。Zbl 0767.20001。[18] J. Tits，单李群及其表示的表，Springer-Verlag，柏林，1967年，doi:10.1007/BFb0080324。MR 0218489。Zbl 0166.29703。Markus J. Stroppel，LExMath，斯图加特大学数学与物理学院，¨at f¨ur Mathematik und Physik Universit¨at Stuttgart，70550 斯图加特，德国