arXiv:2304.08606v1 [math.CA] 17 Apr 2023

算子相关 BMO 空间上的 Garnett–Jones 定理及其应用

PENGCHEN、XUAN THINH DUONG、JI LI、LIANG SONG 和 LIXIN YAN

摘要。设 X 是带有倍增测度的度量空间，L 是 $L^2(X)$ 上的非负自伴算子，其热核满足高斯上界。设 f 属于与算子 L 相关的 $BMO_L(X)$ 空间，并在 $BMO_L(X)$ 范数下定义其到子空间 $L^\infty(X)$ 的距离如下：

$$\operatorname{dist}(f, L^\infty) := \inf_{g\in L^\infty} \|f-g\|_{BMO_L(X)}.$$

本文证明，$\operatorname{dist}(f, L^\infty)$ 等价于空间 $BMO_L(X)$ 的 John–Nirenberg 不等式中常数 ε 的下确界：

$$\sup_B \frac{\mu(\{x\in B : |f(x)-e^{-r_B^2 L}f(x)|>\lambda\})}{\mu(B)} \le e^{-\lambda/\varepsilon} \quad \text{for large } \lambda.$$

这推广了 Garnett 和 Jones 的著名结果 [20]，该结果针对经典 BMO 空间（由 John 和 Nirenberg 引入）。作为一项应用，我们证明，具有紧支撑的 $BMO_L(X)$ 函数可以分解为一个 L^∞ 函数与热核（与 L 相关）对 $X \times [0,\infty$ 上有限 Carleson 测度的积分之和。关键的新技术是涉及半群 e^{-tL} 的几何构造。我们还采用了若干基本工具，包括停时论证和随机二进格。

1. 引言

1.1. 背景。设 B 表示欧几里得空间中的一个球，$\mathbb{R}^n$ and |B| 表示 B 的勒贝格测度。若欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的实值局部可积函数 f 具有有界平均振荡，即 f $\in$ BMO($\mathbb{R}^n$)，则

$$\|f\|_* := \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|\,dx < \infty, \tag{1.1}$$

其中

$$f_B := \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

众所周知，$L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$。在 [20] Garnett 和 Jones 给出了距离的可比上界和下界

$$\operatorname{dist}(f, L^\infty) := \inf_{g\in L^\infty} \|f-g\|_* \tag{1.3}$$

日期：2023年4月19日。2010年数学主题分类。42B35,42B37,47F05。关键词和短语：Garnett–Jones 定理，BMO 空间，John–Nirenberg 不等式，非负自伴算子，高斯上界，Carleson 测度。

由常数的下确界 ε 在 John–Nirenberg 不等式中 [28]。更准确地说，考虑 John–Nirenberg 不等式

$$\sup_B \frac{|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \lambda\}|}{|B|} \le e^{-\lambda/\varepsilon} \quad \text{for } \lambda \text{ large}, \tag{1.4}$$

并定义

$$\varepsilon(f) = \inf\{\varepsilon > 0 : (1.4) \text{ holds}\}.$$

Garnett–Jones [20] 断言存在正常数 c_1 和 c_2，它们仅依赖于维数n，使得

$$c_1\varepsilon(f) \le \inf_{g \in L^\infty} \|f - g\|_* \le c_2\varepsilon(f). \tag{1.5}$$

正如 [20], 所指出的，齐性型空间 1.5的推广 [9] 可以通过对论证稍作修改来证明（参见 [29]）。

Garnett–Jones 定理有若干重要应用。其中一个例子是 BMO函数的分解。注意，Fefferman–Stein [18] 证明了，$f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^n R_j g_j, \tag{1.6}$$

其中 R_j 是第 j 个黎斯变换，且 $g_0, g_1, \ldots\ldots, g_n \in L^\infty$，其中 $\|f\|_* \sim \inf \sum_{j=0}^n \|g_j\|_\infty$: (1.6)成立。结果（1.5）可改写为

$$\varepsilon(f) \sim \inf\Big\{ \sum_{j=1}^n \|g_j\|_\infty : (1.6) \text{ holds for some } g_0 \in L^\infty \Big\}. \tag{1.7}$$

另一个应用是高维 Helson–Szegő 定理，参见 [20, 推论 1。2]在[32], 中，Jones 还利用它推导出了冠问题解的一个估计。Bourgain [5] 将其应用于研究L^1 在L^1/H^1, 中的嵌入，证明L^1 同构于L^1/H^1的一个子空间。近几十年来，Garnett–Jones 定理得到了广泛研究，例如参见[5, 19, 20, 21, 30, 31, 32, 43, 44, 45] 及其中的参考文献。

1.2. 主要结果。本文中我们始终采用如下设定。
设 (X, d, μ) 为一个度量测度空间，且 μ 满足倍增条件

$$\mu(B(x, \lambda r)) \le C\lambda^n \mu(B(x, r)), \quad \forall x \in X,\ \lambda > 1,\ r > 0, \tag{1.8}$$

其中 C 和 n 为正常数，μ(B(x,r)) 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球 B(x,r) 的体积。

设 L 是作用于 $L^2(X)$ 上并满足以下性质的算子：

(H1) L 是 $L^2(X)$ 上稠密定义的非负自伴算子；

(H2) e^{-tL} 的核记为 $h_t(x, y)$，是 $X \times X$ 上的可测函数，并满足高斯上界，即，

$$|h_t(x,y)| \le \frac{C}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{ct}\right)$$

对所有 $t > 0$ 和 $x, y \in X$，其中 C 和 c 为正常数。

接下来，我们回顾 [13] 中引入的新 BMO 空间。对于某个 $x_0 \in X$ 和 $\beta > 0$，令 $\mathcal{M}_{x_0,\beta}$ 表示由以下函数构成的集合

$$\mathcal{M}_{x_0,\beta} := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X) : \int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x_0,x))^{\beta}\mu(B(x_0,1+d(x_0,x)))} d\mu(x) < \infty \right\}.$$

于是，用 $\mathcal{M}$ 表示由以下函数构成的集合

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x_0 \in X} \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{M}_{x_0,\beta}.$$

在 [13]，中，Duong 和 Yan 利用 Martell 在 [33] 中引入的极大函数，引入并发展了一个与算子 L 相关的新函数空间 $\mathrm{BMO}_L(X)$。给定一个满足 (H1) 和 (H2) 的算子 L，[13] 中的关键思想是将 $e^{-tL} f$ 视为 f 的平均值版本（尺度为 t），并使用量

$$e^{-r_B^2 L} f(x) = \int_X h_{r_B^2}(x,y) f(y)\, d\mu(y) \tag{1.9}$$

来替代经典 BMO 空间定义（1.2）中的平均值 f_B。于是，若$f \in \mathcal{M}$ 属于 $\mathrm{BMO}_L(X)$，即属于与 L 相关的 BMO 空间，则有

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} := \sup_B \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - e^{-r_B^2 L} f(x)|\, d\mu(x) < \infty. \tag{1.10}$$

在[13, 第 2] 节中证明了，经典 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 与由标准拉普拉斯算子 Δ 在 $\mathbb{R}^n$上关联的空间一致，即 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}_{\Delta}(\mathbb{R}^n)$。当 e^{-tL} 的核 $h_t(x, y)$ 满足 $\int_X h_t(x, y)d\mu(y) = 1$ 对几乎处处的 $x \in X$ 成立时，可以直接验证 $\mathrm{BMO}(X) \subseteq \mathrm{BMO}_L(X)$。根据所选算子 L 的不同，例如 Schrödinger 算子或散度型算子，$\mathrm{BMO}_L(X)$ 可能与 BMO(X) 有本质区别，参见例如 [1, 11, 14, 16, 23] 及其中的参考文献。经典 BMO 空间的许多重要性质在新的 BMO_L 空间中仍得以保留，例如 John–Nirenberg 不等式、复插值和对偶性（见 [16, 13, 14, 23]）。更具体地说，Duong 和 Yan [13, 定理 3.1] 建立了如下的 John–Nirenberg 不等式：当且仅当 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$ 时，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, f)$，使得

$$\sup_B \frac{\mu(\{x \in B : |f(x) - e^{-r_B^2 L} f(x)| > \lambda\})}{\mu(B)} \le e^{-\lambda/\varepsilon} \tag{1.11}$$

每当 $\lambda > \lambda_0$。

与经典 BMO 类似，显然有 $L^\infty(X) \subsetneq \mathrm{BMO}_L(X)$。因此，我们提出以下问题：给定 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$，在 $\mathrm{BMO}_L(X)$ 范数下，它到子空间 $L^\infty(X)$ 的距离是多少?

I本文将给出该距离的相当精确的上界和下界

$$\operatorname{dist}(f, L^\infty) := \inf_{g\in L^\infty} \|f-g\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}, \tag{1.12}$$

它们可用 $\mathrm{BMO}_L(X)$ 空间的 John–Nirenberg 不等式中的一个常数表示。定义

$$\varepsilon_L(f) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : (1.11) \text{ holds for all } \lambda \ge \lambda_0(\varepsilon, f)\Big\}.$$

根据 John–Nirenberg 不等式 [13], , 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$ 使得 (1.11) 成立时，$f \in \mathrm{BMO}_L(X)$；事实上，$\varepsilon = c\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$，其中 $\lambda_0 = c'\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。若 $f \in L^\infty$，则对所有 $\varepsilon > 0$，f 都满足 (1.11)，因此 $\varepsilon_L(f) = 0$。

本文的首要目标是证明以下结果。

定理 1.1。设 L 是作用于 $L^2(X)$ 上的一个算子，满足***(H1)*** 和 ***(H2)***。设 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$。则存在常数 c_1 和 c_2，它们仅依赖于 (1.8) 中的 C 和 n，使得

$$c_1\varepsilon_L(f) \le \inf_{g\in L^\infty} \|f-g\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \le c_2\varepsilon_L(f). \tag{1.13}$$

证明这一结果的主要思路如下：

（1）（1.13）中的第一个不等式由将（1.11）应用于 $f-g$ 得到；

（2）（1.13）中的第二个不等式通过证明以下结果得到：对于每个 $\varepsilon > \varepsilon(f)$，存在两个正常数 C_1 和 C_2 使得

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{1.14}$$

with

$$\|g\|_{L^\infty} \le C_1\lambda_0 \quad \text{and} \quad \|h\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \le C_2\varepsilon.$$

然而，若尝试利用 Garnett–Jones [20, 21] 在经典 BMO 情形下的证明来建立（1.14），便会立即遇到一些关键困难。与经典 BMO 空间不同，[21, 28], 我们没有与算子 $_L$ L 相关的二进 BMO 理论。另一个事实是，在二进系统下，标准的 Calder´on–Zygmund 停时论证表明，对于一个较大的二进立方体 Q_0，

$$\Big(f(x) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(x)\Big)\chi_{Q_0}(x) = g_{Q_0}(x) + h_{Q_0}(x),$$

其中 $g_{Q_0} \in L^\infty$ 且

$$h_{Q_0}(x) = \sum_Q a_Q(x)\chi_Q(x), \tag{1.15}$$

见下文命题 3.1。我们遇到的技术难点在于，对于 (1.15) 中的函数 $h_{Q_0}(x)$，系数 $a_Q(x)$ 是一个函数，$a_Q(x)$ 的支集不是紧的，而且 $h_{Q_0}(x)$ 振荡过大。因此，函数 $h_{Q_0}(x)$ 不属于 $\mathrm{BMO}_L(X)$ 空间。我们证明的主要思路是采用随机二进格方法和 [21] 中的几何构造（另见 [25, 35]）；由于二进立方体{Q} 这一族是稀疏的，我们可以在 $h_{Q_0}(x)$ 中加入更多 L^∞ 函数，以降低振荡。我们将在下文第 3、4、5 节中通过构造性方法证明 (1.14)。

本文的第二个目标是利用证明 (1.13) 时所用的构造，给出 BMO_L 空间的 Carleson 刻画，将 Carleson 于[6] 1976年针对经典 John–Nirenberg BMO 空间得到的结果推广开来。回顾一下，若存在正常数 c_σ，使得对于 X 上的每个球 B，

$$\sigma(\widehat{B}) \le c_\sigma \mu(B),$$

其中 $B = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : x \in B, \ 0 < t < r_B\}$，且 r_B 是球 B 的半径。我们的结果可表述如下。

定理 1.2。设 L 是 $L^2(X)$ 上满足 (H1) 和 (H2) 的算子。设 $f \in BMO_L(X)$ 具有紧支撑。则存在 $g \in L^\infty(X)$ 以及有限的 Carleson 测度 σ，使得

$$f(x) = g(x) + \int_{X\times[0,\infty)} h_{t^2}(x,y)\, d\sigma(y,t),$$

其中 $h_{t^2}(x,y)$ 是条件 (H2) 中的函数，且 $\|g\|_\infty + \|\sigma\|_C \le C\|f\|_{BMO_L(X)}$。

将我们的定理 1.2 与经典 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 空间中的已知结果进行比较，我们注意到，Carleson 在 1976年证明，对于每个 f 属于经典 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 且具有紧支撑的函数，都存在 $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和有限的 Carleson 测度 σ，使得

$$f(x) = g(x) + \int_{\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} t^{-d} K((x-y)/t)\, d\sigma(y,t)$$

其中 $\|g\|_{L^\infty} + \|\sigma\|_C \le C\|f\|_{BMO}$，核 K(x) 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$，并假设满足 $\int K(x)dx = 1$, $|K(x)| \le (1+|x|)^{-n-1}$ 以及 $|\nabla K(x)| \le (1+|x|)^{-n-2}$，另请参阅 A. Uchiyama [42], 和 Garnett–Jones [21]的研究。 [6, 21, 42] 中的证明基于迭代论证。在 [45] 中，Wilson 针对 K 为 Poisson 核的情形给出了定理 1.2 的新证明，即

$$p(x) = c_n(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \tag{1.16}$$

利用 Poisson 半群性质和格林定理，避免了迭代，并使构造更加明确。近期，定理 1.2 在 [7] 的特殊情形下得到了证明：当 $L = -\Delta + V$ 是作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Schrödinger 算子，$n \ge 3$ 其中非负势 V 属于反向 H¨older 类 B_q，其中 $q \ge n$。

1.3. 关于证明的结果与方法的评述。 在我们的定理1.1 和 1.2中，我们仅假设核 $h_t(x,y)$ 满足 e^{-tL}的上界。对于空间变量 x 或 y (例如，关于空间变量 ¨x 或 y的 Hölder 连续性或 Hörmander 条件)，并未施加任何正则性条件。我们的结果还有一个特点，即不假设半群具有守恒性质

$$e^{-tL}1 = 1, \quad t > 0,$$

因此，经典 BMO 理论 [20, 21] 不适用于定理1.1和1.2的证明。空间变量缺乏正则性以及守恒性质的缺失，确实是本文的主要障碍，也使我们的理论颇为微妙和精细。

我们的方法使定理1.1 和1.2 适用于更广泛的一类算子L，例如$L = \mathcal{L} + V$，其中非负势V 定义在倍增空间X上，只要 $\mathcal{L}$ 是满足条件**(H1)**和**(H2)**的算子。如今人们已经认识到，存在一些重要例子，经典 BMO 理论并不适用；这些情形与超越拉普拉斯算子的偏微分方程理论息息相关，在某种意义上使我们回归到[28]最初的观点。也就是说，我们将考虑适配于线性算子$_L(X)$的 BMO 空间L，这与经典 BMO 空间适配于拉普拉斯算子的方式大致相同。另一方面，[18, 20, 21, 28, 41] 的实变函数方法在这里仍然至关重要。

本文的结构如下。第 2 节回顾齐次型空间上的随机二进格。定理 1.1 的证明将在第 3、4、5 节给出。定理 1.2 的证明将在第 6 节给出。最后，我们将在第 7 节通过提出一些评论和意见，探讨与算子相关的空间 BMO 上的定理 1.1和 1.2，以供进一步研究。$_L(X)$

2. 齐次型空间上的随机二进格

本节回顾齐次型空间中的二进立方体以及立方体的随机二进格。如 [26, 27], 基于 [8], 所示，存在一个适用于该空间 X 的二进系统$\mathcal{D}$。存在正的绝对常数 c_1, C_1 和 $0 < \delta < 1$，使得我们可以构造一组点 $\{x_\alpha^k\}_{k,\ \alpha}$ 以及 X 中的集合族 $\{Q_\alpha^k\}_{k,\ \alpha}$，并满足以下性质：

(2.1) if $\ell \le k$, then either $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^\ell$ or $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^\ell = \emptyset$;

(2.2) for every $k \in \mathbb{Z}$ and $\alpha \ne \beta$, $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k = \emptyset$;

(2.3) for every $k \in \mathbb{Z}$, $X = \cup_\alpha Q_\alpha^k$;

(2.4) $B(x_\alpha^k, c_1\delta^k) \subset Q_\alpha^k \subset B(x_\alpha^k, C_1\delta^k)$;

(2.5) if $\ell \le k$ and $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^\ell$, then $B(x_\alpha^k, C_1\delta^k) \subset B(x_\beta^\ell, C_1\delta^\ell)$.

这里对每个 k, $\in \mathbb{Z}$, α 遍历一个适当的指标集。我们称集合 Q_α^k 为二进立方体，称 x_α^k 为该立方体的中心。此外，k 称为该立方体的层级。我们用 $\mathcal{D}^k$表示层级为 k 的二进立方体的集合，用 $\mathcal{D}$表示所有二进立方体的集合。当 $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^{k-1}$时，我们称 Q_α^k 是 Q_β^{k-1}的子立方体，称 Q_β^{k-1}是 Q_α^k的父立方体。由于 X 是齐性型空间，因此存在一个一致的常数 N，使得每个立方体 $Q \in \mathcal{D}$ 至多有 N个子立方体。

记

$$E_j(Q_\alpha^k) := \{Q_\beta^{k+j} \subset Q_\alpha^k : d(Q_\beta^{k+j}, X \backslash Q_\alpha^k) \le C\delta^{k+j}\}$$

and

$$e_j(Q_\alpha^k) := \{x : x \in Q_\beta^{k+j} \text{ for some } Q_\beta^{k+j} \in E_j(Q_\alpha^k)\}.$$

我们有以下事实（[8, 第 12 页, （3.6）的证明]），存在一个绝对常数$\eta > 0$ 使得

$$\mu(e_j(Q_\alpha^k)) \le C\delta^{\eta j}\mu(Q_\alpha^k). \tag{2.6}$$

记 Q_α^k 为$_t$ 二进立方体 Q_α^k的环域，即 $Q_{\alpha,\ t}^k := \{x \in X\backslash Q_\alpha^k : \ d(x,Q_\alpha^k) \le t\delta^k\}$。由 (2.6 和倍增性质可得

$$\mu(Q_{\alpha,t}^k) \le Ct^\eta\mu(Q_\alpha^k). \tag{2.7}$$

事实上，注意集合 $\{x \in Q_\alpha^k : \ d(x,\ Q_\alpha^k) \le t\} \subset e_j(Q_\alpha^k)$，参见 p. 中 (3.6) 的证明。于是，$Q_{\alpha,\ t}$可由并集 $10Q^{k+}{}_{j\beta}$ 覆盖，其中 $Q^{k+}{}_{j\beta} \subset E_j(Q_\alpha^k)$，且 $\delta^j \sim t$。由倍增性质，

$$\mu(Q_{\alpha,t}^k) \le C10^n \sum_\beta \mu(Q_\beta^{k+j}) \le C\mu(e_j(Q_\alpha^k)) \le Ct^\eta\mu(Q_\alpha^k).$$

在 [27, 定理 5.2] Hyt¨onen 和 Tapiola 构造了齐次型空间上的随机二进格，从而推广了 Nazarov、Treil 和 Volberg [35] 以及 Hyt¨onen 和 Kairema [26]此前的结果。具体而言，存在一个概率空间 $(\Omega, \mathbb{P})$，使得对每个 $\omega \in \Omega$，都存在一个与二进点$\{x_\alpha^k(\omega)\}_{k,\alpha}$相关联的二进格 $\mathcal{D}(\omega) = \{Q_\alpha^k(\omega)\}_{k,\alpha}$，它具有上述性质 (2.1)–(2.5)，并且满足以下性质：存在绝对常数 C， $\eta > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : x \in \bigcup_\alpha \partial_\varepsilon Q_\alpha^k(\omega)\}\right) \le C\left(\frac{\varepsilon}{\delta^k}\right)^\eta \tag{2.8}$$

对所有 $x \in X$、$k \in \mathbb{Z}$ 和 $\varepsilon > 0$。这里 $\partial_\varepsilon A$ 表示集合 A $\subset$ X 的 ε-边界，其定义为

$$\partial_\varepsilon A := \{x \in A : d(x, A^c) < \varepsilon\} \cup \{x \in A^c : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

令 $\mathbb{E}_\omega$ 表示对函数族 $f^{(\omega)}$ （由$\omega \in \Omega$ 索引）在 $\omega \in \Omega$ 上取的期望

$$\mathbb{E}_\omega f^\omega(x) = \int_\Omega f^\omega(x)d\omega.$$

全文中，为简化记号，我们总是假设$\delta = 2^{-1}$，而且所有证明都可以直接推广到其他 δ。

3. 证明定理 1.1： stepone

本节将运用 John–Nirenberg 不等式（1.11）构造$f \in \mathrm{BMO}_L(X)$ 在二进系统下的一个分解，所用方法是类似于 John–Nirenberg 定理证明的停时论证 [13]。

为陈述我们的结果，我们需要引入以下分级序列和分级函数。令 $0 < \gamma < 1$。一个序列

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots$$

称为 γ-分级，如果

(1) 每个 E_k 都是若干互不相交的二进立方体的并，记为 $E_k = \cup_j Q^{(k)}{}_j$；(2) 每个 $Q^{(k)}{}_j$ 都必须包含于某个 $Q^{(k-1)}{}_{j'}$ 中；(3) 对任意 $Q^{(k-1)}{}_j$，$|E_k \cap Q^{(k-1)}{}_j| \le \gamma |Q^{(k-1)}{}_j|$。

在上述条件下，γ-分级函数的形式为

$$h(x) = \sum_k \sum_j a_{Q_j^{(k)}}(x) \chi_{Q_j^{(k)}}(x).$$

本节证明以下结果。

命题 3.1. 固定一个二进系统 $\mathcal{D}$ 和大二进立方体 $Q_0 \in \mathcal{D}$。存在一个常数 C，它仅依赖于 (1.8) 中的倍增常数和高斯上界，使得若 $f \in BMO_L(X)$, $\varepsilon > \varepsilon_L(f)$ 和 $\lambda > \lambda_0(\varepsilon, f)$，则

$$(f(x) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(x)) \chi_{Q_0}(x) = g_{Q_0}(x) + h_{Q_0}(x)$$

with

$$\|g_{Q_0}\|_{L^\infty} \le C\lambda$$

and

$$h_{Q_0}(x) = \sum_Q a_Q(x) \chi_Q(x),$$

其中 Q 遍历一个具有 $\gamma = 2^{-\lambda/\varepsilon}$ 的 γ-分级序列，并且 $a_Q(x)$ 满足对几乎所有 $x \in 2Q$,

$$|a_Q(x)| \le C\lambda, \tag{3.1}$$

and

$$|La_Q(x)| \le C\ell(Q)^{-2}\lambda. \tag{3.2}$$

证明。 令 $f \in BMO_L(X)$. 由 [13, 命题2.6] 可知，对每个 $t > 0$ 和每个 $K \ge 1$，存在一个常数 $c > 0$ 使得对几乎所有 $x \in X$,

$$|(e^{-tL} - e^{-KtL}) f(x)| \le c(1 + \log K) \|f\|_{BMO_L(X)}. \tag{3.3}$$

现在我们固定常数 $\lambda > C\|f\|_{BMO_L(X)}$，使得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(2Q_0)} \int_{2Q_0} |f(y) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\
&\le \frac{1}{\mu(2Q_0)} \int_{2Q_0} \left(|f(y) - e^{-4\ell(Q_0)^2 L} f(y)| + |e^{-4\ell(Q_0)^2 L} f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f| \right) d\mu(y) \\
&\le C\|f\|_{BMO_L(X)} \\
&< \lambda.
\end{aligned}$$

接下来，我们对函数 $(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)$ 相对于 λ 对 Q_0 进行 Calderón–Zygmund 分解。首先，我们得到二进立方体 Q_1，它们是满足以下条件的 Q_0 的极大二进子立方体

$$\lambda < \frac{1}{\mu(2Q_1)} \int_{2Q_1} |f(y) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(y)| d\mu(y). \tag{3.4}$$

记为

$$\mathcal{G}_1 := \{Q_1 \in \mathcal{D} : Q_1 \subset Q_0, \text{maximal and satisfies (3.4)}\}.$$

因此我们有

$$(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} = \left((f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0 \setminus \cup_{Q_1 \in \mathcal{G}_1} Q_1} + \sum_{Q_1 \in \mathcal{G}_1} (e^{-\ell(Q_1)^2 L} - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_1}\right)$$

$$+ \sum_{Q_1 \in \mathcal{G}_1} (f - e^{-\ell(Q_1)^2 L} f)\chi_{Q_1}. \tag{3.5}$$

对于上文（3.5）中的每个 $Q_1 \in \mathcal{G}_1$，我们对函数 $(f - e^{-\ell(Q_1)^2 L} f)$ 关于 λ 作 Calder´on–Zygmund 分解。由此得到一族二进立方体 $\{Q_2\}$，它们是 Q_1 的子立方体，并满足

$$\lambda < \frac{1}{\mu(2Q_2)} \int_{2Q_2} |f(y) - e^{-\ell(Q_1)^2 L} f(y)| d\mu(y). \tag{3.6}$$

现在我们将所有对应于不同 Q_2 的族Q_1'合并成一个新的集合 $\mathcal{G}_2$。也就是说，$\mathcal{G}_2 := \{Q_2 \in \mathcal{D}$：对于某个 Q_1,，$Q_2 \subset$是$_1$,极大的且满足（3.6）$\}$。

随后，对于每个自然数 $k \in \mathbb{N}$，我们得到一族互不重叠的立方体 Q_k，使得

$$\lambda < \frac{1}{\mu(2Q_k)} \int_{2Q_k} |f(y) - e^{-\ell(Q_{k-1})^2 L} f(y)| d\mu(y). \tag{3.7}$$

然后记为

$$\mathcal{G}_k := \{Q_k \in \mathcal{D} : \text{for some } Q_{k-1},\ Q_k \subset Q_{k-1}, \text{maximal and satisfies (3.7)}\}. \tag{3.8}$$

记 $\mathcal{G}_0 := \{Q_0\}$ 和 $Q^*{}_k \in \mathcal{G}_{k-1}$ 为包含 $Q_k \in \mathcal{G}_k$ 的二进立方体。现在

$$\begin{aligned}(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} = &\sum_{k=1}^{K} \sum_{Q_{k-1} \in \mathcal{G}_{k-1}} (f - e^{-\ell(Q_{k-1})^2 L} f)\chi_{Q_{k-1} \setminus \cup_{Q_k \in \mathcal{G}_k} Q_k} \\ &+ \sum_{k=1}^{K} \sum_{Q_k \in \mathcal{G}_k} (e^{-\ell(Q_k)^2 L} f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)\chi_{Q_k} \\ &+ \sum_{Q_K \in \mathcal{G}_K} (f - e^{-\ell(Q_K)^2 L} f)\chi_{Q_K}.\end{aligned}$$

注意，当 $K \to \infty$，$f - e^{-\ell(Q_K)^2 L} f \to 0$ 并且由下文引理 3.4 可知$\mu(\cup_{Q_K \in \mathcal{G}_K} Q_K) \to 0$。最后，可以看出

$$\begin{aligned}(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} = &\sum_{k \geq 1} \sum_{Q_{k-1} \in \mathcal{G}_{k-1}} (f - e^{-\ell(Q_{k-1})^2 L} f)\chi_{Q_{k-1} \setminus \cup_{Q_k \in \mathcal{G}_k} Q_k} \\ &+ \sum_{k \geq 1} \sum_{Q_k \in \mathcal{G}_k} (e^{-\ell(Q_k)^2 L} f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)\chi_{Q_k}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

我们进一步研究关于分解$Q_k \in \mathcal{G}_k$（如上文的(3.9)所示）中的立方体的若干基本性质，这些性质由以下引理给出：3.2–3.5。

引理 3.2。对于每个 Q_k,

$$\lambda < \frac{1}{\mu(2Q_k)} \int_{2Q_k} |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)|\, d\mu(y) \le 2^n \lambda.$$

证明。 左侧不等式由判据（3.7）得出。为证明右侧不等式，~我们将 Q_k 记为 Q_k的父立方体。根据我们对立方体的选取,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu(2Q_k)} \int_{2Q_k} |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\quad \le \frac{\mu(2\widetilde{Q_k})}{\mu(2Q_k)} \frac{1}{\mu(2\widetilde{Q_k})} \int_{2\widetilde{Q_k}} |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) < 2^n \lambda. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 3.3. 对每个 Q_k，几乎处处的 $x \in 2Q_k$,

$$|e^{-\ell(Q_k)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \le C 2^{2n} \lambda.$$

证明。 对每个 Q_k，由（3.3），

$$\begin{aligned} &|e^{-\ell(Q_k)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \\ &\le |e^{-\ell(Q_k)^2 L}(f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)(x)| + |e^{-(\ell(Q_k)^2 + \ell(Q_k^*)^2) L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \\ &\le |e^{-\ell(Q_k)^2 L}(f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)(x)| + \|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \end{aligned}$$

接着我们估计 $|e^{-\ell(Q_k)^2 L}(f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)(x)|$，其中 $x \in 2Q_k$。将 fQ_k^i 记为 Q_k 的第 i 个祖先，并令 i_0 为满足 $fQ_k^{i_0}$ 是 $Q^*{}_k$ 的一个子立方体的数。记

$$\begin{aligned} |e^{-\ell(Q_k)^2 L}(f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)(x)| &\le \int_X |h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)|\, |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\le \int_{2Q_k} |h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)|\, |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\quad + \int_{2\widetilde{Q_k}^{i_0} \setminus 2Q_k} |h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)|\, |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\quad + \int_{X \setminus 2\widetilde{Q_k}^{i_0}} |h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)|\, |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &=: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

对于项 I，根据热核的逐点上界 $h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)$ 以及引理3.2，有

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\le \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{2Q_k} |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\le \frac{2^n}{\mu(2Q_k)} \int_{2Q_k} |f(y) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(y)| d\mu(y) \\ &\le 2^{2n} \lambda. \end{aligned}$$

对于项 II，我们考虑二进立方体 $nfQ_k^i o_{i_0\, i=1}$ 构成的链，该链按照由包含关系“⊆”定义的偏序排列，其中初始二进立方体 fQ_k^1 是 Q_k 的父立方体，而末端

二进立方体 $\mathrm{fQ}_k^{i_0}$ 是 $\mathrm{Q}^*{}_k$的子立方体。由热核 $\mathrm{h}_{\ell(Q_k)^2}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 的逐点上界 (H2)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &\le \sum_{i=1}^{i_0}\frac{1}{\mu(Q_k)}e^{-c2^i}\int_{2\widetilde{Q_k}^i\setminus 2\widetilde{Q_k}^{i-1}}|f(y)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(y)|d\mu(y)\\ &\le C\sum_{i=1}^{i_0}\frac{\mu(2\widetilde{Q_k}^i)}{\mu(Q_k)}e^{-c2^i}\frac{1}{\mu(2\widetilde{Q_k}^i)}\int_{2\widetilde{Q_k}^i}|f(y)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(y)|d\mu(y).\end{aligned}$$

因此，根据我们选取的立方体，还可进一步得到

$$\mathrm{II}\le C\lambda\sum_{i=1}^{i_0}2^{ni}e^{-c2^i}\le C\lambda.$$

现在考虑项 III。注意，在这种情况下，对于任意 $\mathrm{x}\in 2\mathrm{Q}_k$ 和 $\mathrm{y}\in \mathrm{M}\setminus 2\mathrm{fQ}_k^{i_0}$，都有 $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ge 2^{i_0}\mathrm{l}(\mathrm{Q}_k)=\mathrm{l}(\mathrm{Q}^*{}_k)$。于是我们看到，对于任意 $\mathrm{x}\in 2\mathrm{Q}_k$ 和任意 $\mathrm{y}\in \mathrm{M}\setminus 2\mathrm{fQ}_k^{i_0}$，

$$\begin{aligned}|h_{\ell(Q_k)^2}(x,y)| &\le C\frac{1}{\mu(Q_k)}e^{-\frac{d(x,y)^2}{\ell(Q_k)^2}}\\ &\le C\frac{\mu(Q_k^*)}{\mu(Q_k)}\frac{1}{\mu(Q_k^*)}e^{-\frac{d(x,y)^2}{\ell(Q_k^*)^2}}e^{-2^{i_0}/2}\\ &\le C\frac{1}{\mu(Q_k^*)}e^{-\frac{d(x,y)^2}{\ell(Q_k^*)^2}}.\end{aligned}$$

注意到

$$|e^{-2^{2i}\ell(Q_k^*)^2L}f-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f|\le Ci\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},\quad i=1,\dots,i_0.$$

与项 II 的证明类似，可得 $\mathrm{III}\le \mathrm{C}\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\le \mathrm{C}\lambda$。

结合项 I、II 和 III 的估计，我们完成了引理 3.3 的证明。 □

引理 3.4。对于任意 $\varepsilon'>\varepsilon$ 满足 ε John–Nirenberg 不等式 (1.11)，

$$\sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k,Q_k\subset Q_k^*}\mu(Q_k)\le Ce^{-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q_k^*).$$

证明。回顾 John–Nirenberg 不等式：

$$\mu(\{x\in Q:|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|>\lambda\})\le Ce^{-\lambda/\varepsilon}\mu(Q).$$

若集合 $\mathrm{E}\subset\mathrm{Q}$ 满足

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|\,d\mu(x)>\lambda,$$

则我们断言，对于任意 $\varepsilon'>\varepsilon$，有

$$\mu(E)\le C_{\varepsilon'}e^{-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q).\tag{3.11}$$

实际上，由詹森不等式可得

$$e^{\lambda/\varepsilon'}\le e^{\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|\,d\mu/\varepsilon'}\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E e^{|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|/\varepsilon'}\,d\mu(x).$$

接着

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\le e^{-\lambda/\varepsilon'} \int_E e^{|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|/\varepsilon'}\,d\mu(x)\\
&\le e^{-\lambda/\varepsilon'} \int_Q e^{|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|/\varepsilon'}\,d\mu(x)\\
&\le e^{-\lambda/\varepsilon'}\left(\int_{|f-e^{-\ell(Q)^2L}f|\le\lambda_0} e^{|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|/\varepsilon'}\,d\mu(x)\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k\ge1}\int_{k\lambda_0<|f-e^{-\ell(Q)^2L}f|\le(k+1)\lambda_0} e^{|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|/\varepsilon'}\,d\mu(x)\right)\\
&\le e^{-\lambda/\varepsilon'}\left(e^{\lambda_0/\varepsilon'}\mu(Q)+\sum_{k\ge1}e^{(k+1)\lambda_0/\varepsilon'}\mu(\{x\in Q:|f(x)-e^{-\ell(Q)^2L}f(x)|>k\lambda_0\})\right)\\
&\le e^{-\lambda/\varepsilon'}\left(e^{\lambda_0/\varepsilon}\mu(Q)+\sum_{k\ge1}e^{(k+1)\lambda_0/\varepsilon'}e^{-k\lambda_0/\varepsilon}\mu(Q)\right)\\
&\le C_{\varepsilon,\varepsilon',\lambda_0}e^{-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q).
\end{aligned}$$

由维塔利覆盖引理 [40, p. 9] 可知，我们可以从 $\{2Q_k\}$ 中选取$\{2Q_{k_i}\}$ 的一个互不相交子列，其中 $Q_k\in\mathcal{G}_k$、$Q_k\subset Q^*{}_k$ 满足

$$\sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k,Q_k\subset Q_k^*}\mu(Q_k)\le C\sum_i\mu(2Q_{k_i})=C\mu\Big(\bigcup_i 2Q_{k_i}\Big),$$

其中 C 仅取决于（1.8）中的倍增常数。对于每个球 $2Q_{k_i}$，由我们的选取准则（3.7）可得

$$\frac{1}{\mu(2Q_{k_i})}\int_{2Q_{k_i}}|f(x)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(x)|\,d\mu(x)>\lambda$$

因此

$$\frac{1}{\mu(\cup_i 2Q_{k_i})}\int_{\cup_i 2Q_{k_i}}|f(x)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(x)|\,d\mu(x)>\lambda.$$

由我们的断言（3.11），可得

$$\sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k,Q_k\subset Q_k^*}\mu(Q_k)\le C_{n,\varepsilon'}e^{-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q_k^*).$$

证明完毕。 □

引理 3.5. 对集合 $Q^*{}_k\setminus\cup_{Q_k\in\mathcal{G}_k,\ Q_k\subset Q_k^*}Q_k$ 上几乎处处的 x,

$$|f(x)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(x)|\le\lambda.$$

证明. 判据（3.7）表明，对于 $x\in Q^*{}_k\setminus\cup Q_k$，有

$$|f(x)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(x)|\le\overline{\lim_{\ell(R)\to0,x\in2R}}\frac{1}{\mu(2R)}\int_{2R}|f(y)-e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(y)|d\mu(y)\le\lambda,$$

其中，R 是包含 x 且未被选中的 $Q^*{}_k$ 的后代。 □

回到命题 **3.1** 的证明。由（3.9），我们将函数 $(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)$ 改写如下：

$$(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} = g_{Q_0} + h_{Q_0}, \tag{3.12}$$

其中

$$g_{Q_0} = \sum_{k\geq 1} \sum_{Q_{k-1}\in\mathcal{G}_{k-1}} (f - e^{-\ell(Q_{k-1})^2 L} f)\chi_{Q_{k-1}\setminus\cup_{Q_k\in\mathcal{G}_k} Q_k}$$

and

$$h_{Q_0} = \sum_{k\geq 1} \sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k} (e^{-\ell(Q_k)^2 L} f - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f)\chi_{Q_k}$$

由引理3.5可知 $\|g_{Q_0}\|_\infty \leq C\lambda$。由引理3.4，我们知道

$$\{E_k := \cup_{Q_k\in\mathcal{G}_k} Q_k\}_k$$

是 $2^{-\lambda/\varepsilon'}$-分级序列。记

$$a_{Q_k}(x) = e^{-\ell(Q_k)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x). \tag{3.13}$$

引理3.3 表明$a_{Q_k}(x)$ 满足条件（3.1）。

估计式（3.2）$a_{Q_k}(x)$ 的证明可由以下引理推出。该引理一经证明，命题3.1 的证明便完成。 □

引理 3.6. 若 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$，则对每个 $t > 0$ 以及每个 $K \geq 1$，存在一个常数 $C > 0$，使得对于几乎所有 $x \in X$，有

$$|(tL)(e^{-tL} - e^{-KtL})f(x)| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \tag{3.14}$$

证明。 (3.14) 的证明基于以下事实：函数$p_t(x, y)$ 的高斯上界也适用于 $p_t(x, y)$ 的时间导数。也就是说，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在两个正常数 c_k 和 C_k，使得

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} p_t(x,y)\right| \leq \frac{C_k}{t^k \mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{c_k t}\Big), \quad \forall\, t > 0, \tag{3.15}$$

对于几乎处处 x，$y \in X$ (例如参见 [36, 定理 6。17])。

现在，对于任意 $K > 1$，令 l 为一个整数，使得 $2^\ell \leq K < 2^{\ell+1}$。可以写成

$$\begin{aligned}|(tL)(e^{-tL} - e^{-KtL})f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{-k}|(2^k tL)(e^{-2^k tL} - e^{-2^{k+1}tL})f(x)| \\ + 2^{-\ell}|(2^\ell tL)(e^{-2^\ell tL} - e^{-KtL})f(x)|.\end{aligned}$$

由 (3.3) 和 (3.15)，可知

$$|(tL)(e^{-tL} - e^{-KtL})f(x)| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} + 2^{-\ell}|(2^\ell tL)(e^{-2^\ell tL} - e^{-KtL})f(x)|, \text{ a.e. } x \in X.$$

按照 [13, 第 1386–1387] 页中的论证可知，$\|(2^\ell tL)(e^{-2^\ell tL} - e^{-KtL})\, f\,(x)| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$，因此 $|(tL)(e^{-tL} - e^{-KtL})\, f\,(x)| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。这就证明了 (3.14)，并完成了引理 3.6 的证明。□

接下来，我们陈述函数族 $\{a_{Q_k}(x)\}$ 的以下性质，这些性质将在下文第5节中发挥作用。

引理3.7。 设 $\{a_{Q_k}\}$ 为式 (3.9)中给出的函数族。那么，对于几乎所有的 $x \in 2Q_k$以及 $0 < t \le l(Q_k)$,

$$|(I - e^{-t^2L})a_{Q_k}(x)| \le C\left(\frac{t}{\ell(Q_k)}\right)^2 \lambda \tag{3.16}$$

and

$$\int_X |h_{t^2}(x,y)|\,|(\ell(Q_k)^2L)^m a_{Q_k}(y)|d\mu(y) \le C\lambda, \quad m = 0, 1. \tag{3.17}$$

证明。 记 $1 - e^{-t^2\lambda} = \int_0^{t^2} \lambda e^{-s\lambda} ds$。 由式（3.14）可得

$$\begin{aligned}
|(I - e^{-t^2L})a_{Q_k}(x)| &\le [\ell(Q_k)]^{-2} \int_0^{t^2} |e^{-sL}(\ell(Q_k)^2L)(e^{-\ell(Q_k)^2L} - e^{-\ell(Q_k^*)^2L})f(x)|\, ds \\
&\le C[\ell(Q_k)]^{-2} \int_0^{t^2} \|(\ell(Q_k)^2L)(e^{-\ell(Q_k)^2L} - e^{-\ell(Q_k^*)^2L})f\|_{L^\infty}\, ds \\
&\le Ct^2[\ell(Q_k)]^{-2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \\
&\le Ct^2\lambda[\ell(Q_k)]^{-2}.
\end{aligned}$$

至此，式（3.16）得证。

现在证明式（3.17）。当 $m = 1$ 时，结论由式（3.14）及热核$h_t(x, y) \in L^1$ 关于 t 一致成立可得。对于 $m = 0$，可写为

$$\begin{aligned}
e^{-\ell(Q_k)^2L}f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2L}f(x) &= (e^{-\ell(Q_k)^2L} - e^{-(\ell(Q_k^*)^2+\ell(Q_k)^2)L})f(x) \\
&\quad + (e^{-(\ell(Q_k^*)^2+\ell(Q_k)^2)L} - e^{-\ell(Q_k^*)^2L})f(x).
\end{aligned}$$

由式（3.3）可得 $|(e^{-\ell(Q_k^*)^2}L - e^{-(\ell(Q_k^*)^2+l(Q_k)^2)}L)\,f(x)| \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L}(X)$。类似于引理 3.3 中估计式（3.10）的论证表明,

$$\int_X |h_{t^2}(x,y)|\,|e^{-\ell(Q_k)^2L}(I - e^{-\ell(Q_k^*)^2L})f(y)|\, d\mu(y) \le C\lambda,$$

并完成了3.17的证明。引理3.7 的证明至此完成。 □

4. 证明定理 1.1：第二步

定理1.1 包括固定 $\varepsilon > \varepsilon_L(f)$，选取一个较大的 $\lambda > \lambda_0(\varepsilon, f)$，并在 (1.14) 中构造 $h \in \mathrm{BMO}_L(X)$，使得 $\|h\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \le c\varepsilon$，且 $\|f - h\|_{L^\infty(X)} \le C\lambda$。也就是说，在构造 h 时，项 $\|h\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$ 应足够小。为此，我们继续进行以下构造：构造支集包含于给定立方体 Q_0 的 $\mathrm{BMO}_L(X)$ 函数。

命题 4.1. 假设 L 是 $L^2(X)$ 上满足 (H1) 和 (H2) 的稠密定义算子。固定一个二进系统 $\mathcal{D}$ 和一个较大的二进立方体 $Q_0 \in \mathcal{D}$。存在常数 A_1 和

A_2, ，它仅取决于(1.8) 中的倍增常数和高斯上界，使得如果 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$ 且 $\varepsilon > \varepsilon_L(f)$，那么

$$(f(x) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(x))\chi_{Q_0}(x) = g_{Q_0}(x) + h_{Q_0}(x)$$

with

$$\|g\|_{L^\infty} \le A_1 \lambda$$

and

$$h_{Q_0}(x) = \frac{\varepsilon}{\lambda} \sum_Q a_Q(x)\chi_Q(x),$$

其中，立方体 $\{Q\}$ 遍历一个 γ-分级序列，且 $0 < \gamma < 1$ anda$_Q$(x) 满足：对于几乎所有的 x, $\in 2Q$ 和 $0 < t \le l(Q)$,

$$|a_Q(x)| \le C\lambda, \tag{4.1}$$

and

$$|La_Q(x)| \le C\ell(Q)^{-2}\lambda. \tag{4.2}$$

首先，我们通过向分级序列 $\{E_k := \cup_{Q_k \in \mathcal{G}_k} Q_k\}_k$ 中添加更多立方体来对其进行调整。回忆一下，$\mathcal{G}_k$ 由（3.8）定义，而 $Q^*{}_k \in \mathcal{G}_{k-1}$ 是包含 $Q_k \in \mathcal{G}_k$ 的二进立方体。我们需要以下引理。

引理 4.2. 对于 $2^{-\lambda/\varepsilon'}$-分级序列 $\{E_k := \cup_{Q_k \in \mathcal{G}_k} Q_k\}_k$，我们可以构造一个新的 2^{-1}-分级序列 $\{E_{k,i}\}$, $0 \le i \le m$,$k \ge 1$，使得

$$E_k \subset E_{k,m-1} \subset E_{k,m-2} \subset \ldots \subset E_{k,1} \subset E_{k-1},$$

其中，我们用 $E_{k,0} = E_{k-1}$ 和 $E_{k,m} = E_k$ 表示。

证明。令 m 为小于 $\lambda/((n+1)\varepsilon')$ 的最大整数。第一步是构造 E_k 和 E_{k-1} 之间的 2^{-1}-分级序列，即

$$E_k \subset E_{k,m-1} \subset E_{k,m-2} \subset \ldots \subset E_{k,1} \subset E_{k-1}.$$

对于每个 $Q_k \in \mathcal{G}_k$，选取最小的 $Q'{}_k$，使得 $Q'{}_k$ 是 Q_k 的祖先，并且满足

$$2^{-n-1}\mu(Q'_k) \le \mu(E_k \cap Q'_k) \le 2^{-1}\mu(Q'_k).$$

现在考虑由所有 $Q_k \in \mathcal{G}_k$ 构造出的 $\{Q'{}_k\}$ 集合族。删除那些来自 $\{Q'{}_k\}$ 且包含于 $\{Q'{}_k\}$ 中另一个立方体的立方体。将删除后剩余的 $\{Q'{}_k\}$ 集合记为 $\mathcal{G}_{k,m-1}$。那么

$$E_{k,m-1} := \bigcup_{Q \in \mathcal{G}_{k,m-1}} Q.$$

重复上述过程，我们从 $E_{k,m-2}$ 得到 $E_{k,m-1}$ 以及所有其他 $E_{k,i}$，和相应的立方体集合 $\mathcal{G}_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$。这些 $E_{k,i}$ 根据构造自动构成 2^{-1}-分级序列。剩下要证明的是，从 $E_{k,1}$ 到 E_{k-1}仍然是 2^{-1}-分级的，也就是说，

$$\mu(E_{k,1} \cap Q_k^*) \le 2^{-1}\mu(Q_k^*).$$

事实上，由于 E_k 是 $2^{-\lambda/\varepsilon'}$-分级的，也就是说，

$$\mu(E_k \cap Q_k^*) \le 2^{-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q_k^*),$$

我们得到

$$\mu(E_{k,m-1} \cap Q_k^*) = \sum_{Q_k' \subset Q_k^*} \mu(Q_k') \le \sum_{Q_k' \subset Q_k^*} 2^{n+1}\mu(E_k \cap Q_k') \le 2^{n+1}\mu(Q_k^* \cap E_k).$$

归纳可得

$$\mu(E_{k,1} \cap Q_k^*) \le 2^{(n+1)(m-1)}\mu(Q_k^* \cap E_k) \le 2^{(n+1)(m-1)-\lambda/\varepsilon'}\mu(Q_k^*) \le 2^{-1}\mu(Q_k^*).$$

证明完毕。 □

现在我们证明命题 4.1。基于命题 3.1 中的分解，利用新的 2^{-1}-分级序列 $\{E_{k,i}\}$，$0 \le i \le m, k \ge 1$，我们将在 $h_{Q_0}(x) = P Q a_Q(x)\chi_Q(x)$ 中加入更多 L^∞ 函数，以降低振荡。不过，在此之前，由于 $a_Q(x)$ 不是常数，我们应通过对 $a_Q(x)$取某种平均值来改写命题 3.1 中的分解。

命题 4.1 的证明。由命题 3.1 可知，我们可以将函数 $(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} = g_{Q_0} + h_{Q_0}$ 分解，其中 h_{Q_0} 是一个 $2^{-\lambda/\varepsilon'}$-分级序列函数。基于这一分解以及引理 4.2 中构造的由 $\{E_{k,i}\}$ 组成的新 2^{-1}-分级序列，我们构造函数 $(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0}$ 的一个新分解。令 m 为小于 $\lambda/((n+1)\varepsilon')$ 的最大整数。记 $E_{k,i}$ 中与之相关的立方体为 $Q_{k,i}$，使得 $Q_k \subset Q_{k,i}$。再记满足 $Q_{k,i} \subset Q_{k-1}$ 的立方体为 $Q^* k,i$，其中 $Q_{k-1,i}$。

定义

$$Q_0^i := Q_0, \qquad 0 \le i \le m$$

and

$$E_{Q_k,L} := \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L}, \qquad k \ge 0.$$

然后将 $(\,)^{2L}$ 中的 $e^{-\ell(Q_k}$ 替换为 $E_{Q_k,L}$，得到

$$(f - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f)\chi_{Q_0} =: g'' + g''' + h,$$

其中

$$\begin{aligned} g'' &= \sum_{k\ge1}\sum_{Q_{k-1}\in\mathcal{G}_{k-1}} (f - E_{Q_{k-1},L} f)\chi_{Q_{k-1}\setminus\cup_{Q_k\in\mathcal{G}_k} Q_k}, \\ g''' &= \sum_{k\ge1}\sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k} (E_{Q_k,L} f - E_{Q_k^*,L} f)\chi_{Q_k} \\ &\quad - \sum_{k\ge1}\sum_{0\le i\le m}\sum_{Q_{k,i}\in\mathcal{G}_{k,i}} \frac{e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f - e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f}{m}\chi_{Q_{k,i}} \end{aligned}$$

and

$$h = \frac{1}{m}\sum_{k\ge1}\sum_{0\le i\le m}\sum_{Q_{k,i}\in\mathcal{G}_{k,i}} (e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f - e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f)\chi_{Q_{k,i}}.$$

接下来我们将证明 $\|g''\|_\infty \le C\lambda$ 和 $\|g'''\|_\infty \le C\lambda$。在证明之前，我们注意到立方体 $Q_{k,i}$, i , 0, m 是某个立方体 Q_k 的祖先。因此，$Q_{k,i}$ 不满足选取准则，其祖先也不满足选取准则，但 $Q_{k,i}$ 的祖先中 Q^* k 除外。于是，仿照引理 3.3 的证明可得，对于 x $\in$ 2 $Q_{k,i}$,

$$|e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \le C\lambda. \tag{4.3}$$

对于 g''，注意到求和 g'' 中的每个函数的支集互不相交。由引理 3.3 和 3.5 以及估计式（4.3）可知，对于 $x \in Q_k \setminus \cup_{Q_{k+1}\in\mathcal{G}_{k+1}} Q_{k+1}$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - E_{Q_k^*,L} f(x)| &\le \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} |f(x) - e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f(x)| \\
&\le \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} \Big\{ |f(x) - e^{-\ell(Q_k)^2 L} f(x)| + |e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \\
&\qquad + |e^{-\ell(Q_k)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| \Big\} \\
&\le \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} C 2^n \lambda \\
&\le C\lambda.
\end{aligned}$$

对于 g‴，注意到若 x $\in Q_k$，则 x $\in Q_{k,\,i}$ 对所有 i 都成立，因此

$$\sum_{k\ge 1}\sum_{Q_k\in\mathcal{G}_k} (E_{Q_k,L} f - E_{Q_k^*,L} f)\chi_{Q_k} - \sum_{k\ge 1}\sum_{0\le i\le m}\sum_{Q_{k,i}\in\mathcal{G}_{k,i}} \frac{e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f - e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f}{m} \chi_{\cup_{Q_k\subset Q_{k,i}} Q_k} = 0.$$

注意，对于不同的 k， k， $Q_{k,\,i} \setminus \cup_{Q_k\subset Q_{k,\,i}} Q_k$ 彼此不相交。固定 x 和相同的 k，满足条件的 Q 至多有 $Q_{k,\,i}$个，使得 $x \in Q_{k,\,i}$。因此，由引理3.3 和 3.5 以及估计式（4.3）可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 1}\sum_{0\le i\le m}\sum_{Q_{k,i}\in\mathcal{G}_{k,i}} \frac{e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f - e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f}{m} \chi_{Q_{k,i}\setminus\cup_{Q_k\subset Q_{k,i}} Q_k} \\
&\le \sup_{x\in Q_{k,i}\setminus\cup_{Q_k\subset Q_{k,i}} Q_k} |e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f(x)| \\
&\le \sup_{x\in Q_{k,i}\setminus\cup_{Q_k\subset Q_{k,i}} Q_k} |e^{-\ell(Q_{k,i})^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x)| + |e^{-\ell(Q_k^*)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^{**})^2 L} f(x)| \\
&\quad + |e^{-\ell(Q_{k,i}^*)^2 L} f(x) - e^{-\ell(Q_k^{**})^2 L} f(x)| \\
&\le C\lambda,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $Q^{**}{}_k = (Q^*{}_k)^* \in \mathcal{G}_{k-2}$ 满足 $Q_k \subset Q^*{}_k \subset Q^{**}{}_k$。

现在我们有

$$(f(x) - e^{-\ell(Q_0)^2 L} f(x))\chi_{Q_0}(x) = g_{Q_0}(x) + h_{Q_0}(x)$$

w其中 g_{Q_0} = g″ +g‴ 和 h_{Q_0} = h。根据 g″ 和 g‴的估计，我们有 e

$$\|g_{Q_0}\|_{L^\infty} \le A_1\lambda$$

对于 h_{Q_0}，我们写作

$$h_{Q_0} = h = \frac{1}{m}\sum_{k\geq 1}\sum_{0\leq i\leq m}\sum_{Q_{k,i}\in\mathcal{G}_{k,i}}(e^{-\ell(Q_{k,i})^2L}f - e^{-\ell(Q^*_{k,i})^2L}f)\chi_{Q_{k,i}} = \frac{\varepsilon'}{\lambda}\sum_{Q} a_Q(x)\chi_Q(x),$$

其中 $Q = Q_{k,i}$ 遍历我们已经构造出的所有 2^{-1}-分级序列，并且

$$a_Q(x) := (n+1)(e^{-\ell(Q_{k,i})^2L}f(x) - e^{-\ell(Q^*_{k,i})^2L}f(x)).$$

与（4.4）中的论证类似，可知（4.1）成立。由引理3.6中的（3.14），可直接推出（4.2）。命题4.1 的证明至此完成。 □

5. 定理 的证明1.1： 第三步

本节利用第 3 节中的二进制结果，给出 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$ 的分解（1.14）。

定理 5.1。 设 L 是作用于 $L^2(X)$ 上的一个算子，满足（H1）和（H2）。存在常数 A_1 和 A_2，，它们仅依赖于（1.8）中的倍增常数以及高斯上界，使得若 $f \in \mathrm{BMO}_L(X)$，且若 $\varepsilon > \varepsilon_L(f)$，则

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

with

$$\|g\|_{L^\infty} \leq A_1\lambda_0$$

and

$$\|h\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \leq A_2\varepsilon. \tag{5.1}$$

为了估计 $\mathrm{BMO}_L(X)$ 范数，我们将利用以下事实：$\mathrm{BMO}_L(X)$ 是与算子 $H^1_L(X)$ 相关的 Hardy空间 L 的对偶空间，这一结论已在[14]中证明。也就是说，

$$(H^1_L(X))^* = \mathrm{BMO}_L(X).$$

回忆一下，与 L 相关的二次算子定义如下：

$$S_L f(x) = \left(\int_0^\infty\int_{d(x,y)<t} |(t^2L)e^{-t^2L}f(y)|^2 \frac{d\mu(y)}{\mu(B(x,t))}\frac{dt}{t}\right)^{1/2}, \quad x\in X$$

其中 $f \in L^2(X)$。将空间 $H^1_L(X)$ 定义为 $L^2(X)$ 在平方函数 $\|f\|_{H^1_L(X)} := \|S_L f\|_{L^1(X)}$ 的 L^1 范数下的完备化。与 L 相关的 Hardy空间 $H^1_L(X)$ 最初由 Auscher、Duong 和 McIntosh 引入[2]，， 随后 Duong 和 Yan[14], 明确引入了专门适用于算子 L 的 Hardy 空间和 BMO 空间，其中 L 的热核满足逐点高斯上界（另请参见 Auscher 和 Russ 更早、更具体的工作[4]）； 参见 [3, 13, 14, 22, 23, 24] 及其中的参考文献。$H^1_L(X)$ 的原子分解由 [22]引入。以下与算子 L 相关的 $(1,\infty,M)$-原子于[38] 在 $\mathbb{R}^n$ 上以及于 [39]在齐次型空间上建立。给定

M ∈ ℕ，若存在函数 b ∈ $\mathcal{D}(L^M)$ 和球 B ⊂ X，使得函数 a ∈ $L^2(X)$ 满足以下条件，则称其为与算子 L 相关的 (1, ∞, M)-原子：

(i) a = L^Mb；(ii) supp L^kb ⊂ B，k = 0, 1，…，M；(iii) $\|(r_B^2L)^k b\|_{L^\infty(X)} \le r_B^{2M}\mu(B)^{-1}$，k = 0，1，…，M。

引理 5.2. 设 L 是作用于 $L^2(X)$ 上且满足 (H1) 和 (H2) 的算子。对于每个 M ∈ ℕ，f ∈ $H^1_L(X)$ 当且仅当存在 $\lambda_j \in \mathbb{R}$ 以及一个 (1, ∞, M)-原子 a_j，j = 1，2, ⋯，使得

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \quad \text{in } L^1(X)$$

and

$$c\|f\|_{H^1_L(X)} \le \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \le C\|f\|_{H^1_L(X)}.$$

证明。 证明过程请参阅 [22, 定理 2。5]。 □

现在我们来证明定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。 现在，对于二进系统 $\omega \in \Omega$，记 $Q_\alpha^K(\omega) \in \mathcal{D}^K(\omega)$ 为该二进系统中层级为 K 的二进立方体。注意，$\cup_\alpha Q_\alpha^K(\omega) = X$。$f$ 可以分解为

$$f(x) = \sum_\alpha f(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x).$$

对每个 $Q_\alpha^K(\omega)$，由定理 4.1 可知，我们可以将 f 分解为

$$\left(f(x) - e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L} f(x)\right)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) = g_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) + h_{Q_\alpha^K(\omega)}(x).$$

于是我们有

$$f = \sum_\alpha \left(e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L} f\chi_{Q_\alpha^K(\omega)} + g_{Q_\alpha^K(\omega)}\chi_{Q_\alpha^K(\omega)} + h_{Q_\alpha^K(\omega)}\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}\right). \tag{5.2}$$

其中 $\|g_{Q_\alpha^K}(\omega)\|_\infty < C\lambda$，$^\alpha$ 且 $h_{Q_\alpha^K}(\omega) = \frac{\varepsilon}{\lambda} P\, Q_\omega a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}$，其中 a_{Q^ω} 和 Q^ω 如定理 4.1 中所述。回忆一下，Q^ω 属于 2^{-1}-分级序列。我们还回顾函数 $a_{Q^\omega}(x)$ 的性质：

i）大小条件：对几乎所有 x ∈ $2Q^\omega$，

$$|a_{Q^\omega}(x)| \le C\lambda; \tag{5.3}$$

ii）光滑条件：对几乎所有 x ∈ $2Q^\omega$，

$$|La_{Q^\omega}(x)| \le C\ell(Q^\omega)^{-2}\lambda, \tag{5.4}$$

其中C 仅取决于 n，且其满足倍增条件（1.8）。

由于 $P_\alpha g_{Q_\alpha^K(\omega)}\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}$ 在 $L^\infty(X)$ 中一致有界，因此对 K → ∞的某个子列，我们有弱 ∗型极限 g^ω。为简便起见，我们仍将该子列记为 K。定义 $h^\omega := f - g^\omega$。于是

$$f = g + h := \mathbb{E}_\omega g^\omega + \mathbb{E}_\omega h^\omega.$$

注意，$g \in L^\infty(X) \subset BMO_L(X)$ 且 $f \in BMO_L(X)$，这意味着 $h \in BMO_L(X)$。因此，我们需要证明的是 $\|h\|_{BMO_L(X)} \le C\varepsilon$，而根据对偶性，这等价于 $(H^1_L(X))^* = BMO_L(X)$

$$|\langle h, a\rangle| \le C\varepsilon$$

对所有 $(1,\infty,2)$ 原子 a。记 $h^\omega_K = \sum_\alpha h_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}$。由 h 的定义及等式 (5.2) 可得

$$\begin{aligned}\langle (h - \mathbb{E}_\omega h^\omega_K), a\rangle &= \langle (f - \mathbb{E}_\omega g^\omega - \mathbb{E}_\omega h^\omega_K), a\rangle \\ &= \Big\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_\alpha g_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)} - g^\omega\Big), a\Big\rangle + \Big\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_\alpha e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}\Big), a\Big\rangle \\ &=: \mathrm{I} + \mathrm{II}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于项 I，注意到 g^ω 是 $P_\alpha g_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}$ 的弱 $*$ 型极限。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，取充分大的 K 可得

$$\begin{aligned}\left|\Big\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_\alpha g_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)} - g^\omega\Big), a\Big\rangle\right| &\le \mathbb{E}_\omega\left|\Big\langle g_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)} - g^\omega, a\Big\rangle\right| \\ &\le \frac{1}{100}\varepsilon.\end{aligned}$$

记 Q 为原子 a 的支集。令

$$\begin{aligned}&\Lambda_k := \{\omega \in \Omega : \text{ there exists a cube } Q^\omega \in \mathcal{D}^{k+1}(\omega) \text{ such that } Q \subset Q^\omega\},\\ &\Lambda := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} (\Lambda_k)^c = \{\omega \in \Omega : \text{ there is no cube } Q^\omega \in \mathcal{D}(\omega) \text{ that contains } Q\}.\end{aligned}$$

注意到 $(\Lambda_k)^c \supset (\Lambda_{k-1})^c$。由条件 (2.8),

$$\mathbb{P}(\Lambda) = \lim_{k\to-\infty} P((\Lambda_k)^c) \le \lim_{k\to-\infty}\Big(\frac{\ell(Q)}{2^{-k}}\Big)^\eta = 0.$$

b b 为了处理项 II，我们将固定 $K = K(\omega)$ 的值，如下所示。对于几乎处处的 $\omega \in \Lambda^{c}$，存在一个包含 Q 的立方体 $Q^\omega \in \mathcal{D}^K(\omega)$。注意，$a \in L^1$ 且具有紧支撑，并且 $f \in L^1_{loc}$。容易看出

$$\mathbb{E}_\omega\left(\sum_\alpha \left\langle \left|e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}\right|, |a|\right\rangle\right) < \infty.$$

由 $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ 可得

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\sum_\alpha e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}\Big), a\Big\rangle &= \mathbb{E}_\omega\left(\sum_\alpha \Big\langle e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}, a\Big\rangle\right) \\ &= \int_{\Lambda^c}\sum_\alpha \Big\langle e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}, a\Big\rangle d\omega \\ &= \int_{\Lambda^c} \Big\langle e^{-\ell(Q^\omega_{\alpha,\widetilde{K}})^2 L} f\chi_{Q^\omega_{\alpha,\widetilde{K}}}, a\Big\rangle d\omega \\ &= \int_{\Lambda^c} \Big\langle e^{-\ell(Q^\omega_{\alpha,\widetilde{K}})^2 L} f, a\Big\rangle d\omega.\end{aligned}$$

设 a = L^{2}b 如 (1, ∞,2) 的定义所述。容易验证，l(Q)$^{-2}$Lb 是一个 (1, ∞,1) 原子，因此 ‖l(Q)$^{-2}$Lb‖$_{H^1_L}$ ≤ 1，这说明

$$\begin{aligned}\left|\left\langle e^{-\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2 L} f, a\right\rangle\right| &= \left|\left\langle Le^{-\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2 L} f(x), Lb\right\rangle\right| \\ &\le \frac{\ell(Q)^2}{\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2}\left|\left\langle \ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2 Le^{-\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2 L} f(x), \ell(Q)^{-2} Lb\right\rangle\right| \\ &\le \frac{\ell(Q)^2}{\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\|\ell(Q)^{-2} Lb\|_{H^1_L} \\ &\le \frac{\ell(Q)^2}{\ell(Q^{\omega}_{\alpha,\widehat{K}})^2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},\end{aligned}$$

由于乘子算子 $t^2Le^{-t^2}{}_L$ 在 H^1_L 上有界，并且根据对偶性在 BMO$_L(X)$上对 $t > 0$一致有界，参见例如[15, 定理 1。1]因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，取足够大的 K 可得

$$|\mathrm{II}| = \left|\left\langle \mathbb{E}_{\omega}\Big(\sum_{\alpha} e^{-\ell(Q^K_\alpha(\omega))^2 L} f\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}\Big), a\right\rangle\right| \le \frac{1}{100}\varepsilon.$$

由（5.5）以及对 I 和项 II 的估计可知，我们只需证明

$$\left|\left\langle \mathbb{E}_{\omega}\Big(\sum_{\alpha} h_{Q^K_\alpha(\omega)}\chi_{Q^K_\alpha(\omega)}\Big), a\right\rangle\right| \le C\varepsilon.$$

对于每个 $\omega \in \Lambda^c$，我们按照项 II 的证明，找到足够大的 K = K(ω) 和二进立方体 Q$^K_\alpha$(ω)，使得 Q ⊂ Q$^K_\alpha$(ω)。由于 $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$，只需证明

$$\left|\int_{\Lambda^c}\langle h_{Q^K_\alpha(\omega)}, a\rangle d\omega\right| \le C\varepsilon.$$

注意

$$h_{Q^K_\alpha(\omega)} = \frac{\varepsilon}{\lambda}\sum_{Q^{\omega}_k} \alpha_{Q^{\omega}_k}(x)\chi_{Q^{\omega}_k}.$$

因此只需证明

$$\left|\int_{\Lambda^c}\Big\langle \sum_{Q^{\omega}_k} \alpha_{Q^{\omega}_k}\chi_{Q^{\omega}_k}, a\Big\rangle d\omega\right| \le C\lambda.$$

我们根据大小将 $Q^{\omega}{}_k$ 分为两类。当 l($Q^{\omega}{}_k$) ≤ l(Q) 时，ω 的积分没有帮助。由 (4.1) 可得

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \sum_{\ell(Q^{\omega}_k)\le\ell(Q)} \alpha_{Q^{\omega}_k}\chi_{Q^{\omega}_k}, a\right\rangle\right| &\le \sum_{\ell(Q^{\omega}_k)\le\ell(Q)}\left|\left\langle \alpha_{Q^{\omega}_k}\chi_{Q^{\omega}_k}, a\right\rangle\right| \\ &\le \sum_{\ell(Q^{\omega}_k)\le\ell(Q)}\sup_{x\in Q^{\omega}_k}|\alpha_{Q^{\omega}_k}(x)|\,|\langle \chi_{Q^{\omega}_k}, a\rangle| \\ &\le C\lambda\sum_{\ell(Q^{\omega}_k)\le\ell(Q)}\mu(Q^{\omega}_k\cap Q)^{1/2}\|a\|_{L^2} \\ &\le C\lambda\sum_{\ell(Q^{\omega}_k)\le\ell(Q)}\left(\frac{\mu(Q^{\omega}_k\cap Q)}{\mu(Q)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

注意 $\{Q_k^\omega\}_k$ 是 $\gamma = 2^{-1}$ 分级序列，即二进立方体的稀疏集合。因此

$$\sum_{\ell(Q_k^\omega)\le\ell(Q)} \left(\frac{\mu(Q_k^\omega \cap Q)}{\mu(Q)}\right)^{1/2} \le C$$

因此

$$\left|\left\langle \sum_{\ell(Q_k^\omega)\le\ell(Q)} \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\right\rangle\right| \le C\lambda.$$

当 $l(Q_k^\omega) > l(Q)$ 时，我们需要对 ω 求积分。注意，当 $l(Q_k^\omega) > l(Q)$ 时，对于每一层二进立方体，只有有限个二进立方体与 Q 相交。因此，我们可以用层级指标 k（即边长为 2^k）来标记 Q_k^ω。接着，我们交换层级指标 k 的求和顺序与对 ω 的积分，得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Lambda^c}\left\langle \sum_{\ell(Q_k^\omega)>\ell(Q)} \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\right\rangle d\omega\right| \\
&= \left|\int_{\Lambda^c} \sum_{\ell(Q)<k\le K(\omega)} \left\langle \sum_{\ell(Q_k^\omega)=2^k} \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\right\rangle d\omega\right| \\
&\le \sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda^c} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\rangle|\, d\omega \\
&\le \sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\rangle|\, d\omega + \sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k^c} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\rangle|\, d\omega \\
&=: \mathrm{III} + \mathrm{IV}.
\end{aligned}$$

对于项 III，由于 $k > l(Q)$ 且 $\omega \in \Lambda_k$，于是 $Q \subset Q_k^\omega$，因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\rangle| d\omega &\le \sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x), a\rangle| d\omega = \sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x), L^2 b\rangle| d\omega \\
&= \sum_{k>\ell(Q)} \frac{1}{2^{2k}} \int_{\Lambda_k} |\langle (2^{2k}L)\alpha_{Q_k^\omega}(x), Lb\rangle| d\omega \\
&\le \sum_{k>\ell(Q)} \frac{1}{2^{2k}} \sup_{x\in Q, \omega\in\Lambda_k} |(2^{2k}L)\alpha_{Q_k^\omega}(x)| \cdot \|Lb\|_{L^1} \\
&\le C\lambda \sum_{k>\ell(Q)} \frac{\ell(Q)^2}{2^{2k}} \\
&\le C\lambda,
\end{aligned}$$

其中我们对 5.4）使用了估计 $L^{\alpha_{Q_k^\omega}}$。

对于 IV，现在我们没有 $Q \subset Q_k^\omega$，但 ω 的积分很小，也就是说，

$$\sum_{k>\ell(Q)} \int_{\Lambda_k^c} |\langle \alpha_{Q_k^\omega}(x)\chi_{Q_k^\omega}, a\rangle| d\omega \le \sum_{k>\ell(Q)} \sup_{x\in Q_k^\omega, \omega\in\Lambda_k^c} |\alpha_{Q_k^\omega}(x)| \cdot \|a\|_{L^1} \cdot \mathbb{P}(\Lambda_k^c)$$

$$\begin{aligned}&\le C\lambda \sum_{k>\ell(Q)} \mathbb{P}(\Lambda_k^c)\\&\le C\lambda \sum_{k>\ell(Q)} \left(\frac{\ell(Q)}{2^k}\right)^{\eta}\\&\le C\lambda.\end{aligned}$$

定理 5.1 的证明完毕。 □

在本节最后，我们给出定理 1.1 的一个直接应用。考虑 Schr¨丁格算子

$$L = -\Delta + V(x) \quad \text{on } \mathbb{R}^n, \quad n \ge 3, \tag{5.6}$$

其中 V . 0 是一个非负势。我们假设 V 属于某个 q ≥ n/2 的反向 H¨older 类 B_q，也就是说，V 局部可积且

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(y)^q\,dy\right)^{1/q} \le \frac{C}{|B|}\int_B V(y)\,dy, \quad \text{for every ball } B. \tag{5.7}$$

于是，算子 L 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的自伴算子。由 Feynman-Kac 公式可知，半群 e^{-tL} 的核 $p_t(x, y)$ 满足如下估计

$$0 \le p_t(x,y) \le \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}. \tag{5.8}$$

然而，除非 V 满足额外条件，否则热核可能是空间变量的不连续函数，H¨older 连续性估计可能不成立（例如，参见 [10]）。

由 Fefferman–Stein 定理 [17, 定理 1.7], 可知，对于 $f \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)$,

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j^* g_j \tag{5.9}$$

其中 $R_j = \partial_{x_j} L^{-1/2}$ 是与 $L = -\Delta + V$相关的黎斯变换，并且 $g_0, g_1, \cdots, g_n \in L^\infty$ 其中 $\|f\|_* \sim \sum^{n\,j=0} \|g_j\|_{\infty\circ}$ 定理 1.1 可表述为

推论 5.3. 假设在 $\mathbb{R}^n$ 上，$L = -\Delta + V(x)$，$n \ge 3$，其中 V 是一个非负且不恒为零的函数，满足 $V \in B_q$，对某个 $q \ge n/2$ 成立。那么存在常数 c_1 和 c_2，它们仅依赖于维数，使得

$$c_1\varepsilon_L(f) \le \inf\left\{\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_\infty : \text{(5.9) holds for some } g_0 \in L^\infty\right\} \le c_2\varepsilon_L(f)$$

我们还注意到，对于某些特殊的薛定谔算子，条件 $V \in B_q$ 对于某个$q \ge n/2$ 可能并非必要。一个典型例子是贝塞尔算子，由 Muckenhoupt–Stein 引入 [34] 如下：

$$S_\lambda f(x) := -\frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{\lambda^2 - \lambda}{x^2} f(x), \; x > 0. \tag{5.10}$$

算子 S_λ 在（5.10）中是 $\mathbb{R}_+$ 上的正自伴算子：$=$（0, ∞），并且可以写成如下散度形式：

$$S_\lambda = -x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{2\lambda}\frac{d}{dx}x^{-\lambda} =: A_\lambda^* A_\lambda,$$

其中 $A_\lambda := x^\lambda\, d\,\cancel{dx}\, x^{-\lambda}$ 且 $A_\lambda^* := -x^{-\lambda}\, d\,\cancel{dx}\, x^\lambda$ 是 A_λ 的伴随算子。S_λ 的热核满足高斯上界，并且 $BMO^{S_\lambda}(\mathbb{R}_+)$（与 S_λ 相关的 BMO 空间）具有与 (5.9) 中相同的分解，该分解通过黎斯变换 $R_\lambda = A_\lambda S_\lambda^{-1/2}$ 得到。也就是说，对于 $f \in BMO^{S_\lambda}(\mathbb{R}_+)$，有 $f = g_0 + R_\lambda g_1$，其中 g_0, $g_1 \in L^\infty$ 且 $\|f\|_{BMO^{S_\lambda}(\mathbb{R}_+)} \sim \sum_{j=0}^{1}\|g_j\|_\infty$。因此，推论 5.3 对于 $\mathbb{R}_+$ 上的 $L = S_\lambda$ 成立。

6. 证明定理 1.2

为证明定理 1.2，我们假设 $\omega \in BMO_L(X)$ 具有紧支撑。对于二进系统 $\omega \in \Omega$，记 $Q_\alpha^K(\omega) \in \mathcal{D}^K(\omega)$ 为该二进系统中层级为 K 的二进立方体。注意到 $\cup_\alpha Q_\alpha^K(\omega) = X$，因此有

$$f(x) = \sum_\alpha f(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x).$$

对于每个 $Q_\alpha^K(\omega)$，由命题 3.1 可知

$$\left(f(x) - e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L}f(x)\right)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) = g_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) + h_{Q_\alpha^K(\omega)}(x).$$

这意味着

$$f(x) = \sum_\alpha \left(e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L}f(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) + g_{Q_\alpha^K(\omega)}(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) + h_{Q_\alpha^K(\omega)}(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x)\right). \tag{6.1}$$

设 $\varepsilon = \lambda = C_0\|f\|_{BMO_L(X)}$。由命题 3.1，

$$\|g_{Q_\alpha^K(\omega)}\|_\infty < C\|f\|_{BMO_L(X)} \quad \text{and} \quad h_{Q_\alpha^K(\omega)} = C_0\sum_{Q^\omega} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega},$$

其中 a_{Q^ω} 满足估计式（3.1）、（3.2）、（3.16）和（3.17），且 $\{Q^\omega\}$ 是 2^{-1}-分级序列，它属于 $Q_\alpha^K(\omega)$，而 Q^ω 与命题 3.1中的定义相同。

由于 $f \in L^1_{loc}(X)$ 且具有紧支撑，

$$e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L}f(x) \to 0$$

当 $K \to \infty$ 时，对 x 一致成立。因此，存在一个正数 $K_0 = K_0(f)$，它与 ω、x 无关，使得当 $K > K_0$ 时，$\|P_\alpha e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L}f\,\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}\|_{L^\infty} \le \frac{1}{8}\|f\|_{BMO_L(X)}$。记 Q_{max} 为一个包含 $S_{\alpha,\omega}\{Q_\alpha^K(\omega) : Q_\alpha^K(\omega) \cap \operatorname{supp} f \neq \emptyset\}$ 的球。

我们对 $\omega \in \Omega$ 在（6.1）中取期望，得到

$$f(x) = g(x) + h(x), \tag{6.2}$$

其中

$$g(x) = \mathbb{E}_\omega\left(\sum_\alpha \left(e^{-\ell(Q_\alpha^K(\omega))^2 L}f(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x) + g_{Q_\alpha^K(\omega)}(x)\chi_{Q_\alpha^K(\omega)}(x)\right)\right) \tag{6.3}$$

and

$$h(x) = \sum_{k\le K} f_k(x) = \sum_{k\le K} \mathbb{E}_\omega \left(\sum_\alpha \sum_{\ell(Q_\alpha^\omega)=2^k} a_{Q_\alpha^\omega}(x) \chi_{Q_\alpha^\omega}(x) \right). \tag{6.4}$$

显然，$\|g\|_\infty < C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。定义

$$\Lambda = \{\omega \in \Omega : \text{ there is no cube } Q^\omega \in \mathcal{D}(\omega) \text{ that contains the support of } f\}.$$

根据条件（2.8），

$$\mathbb{P}(\Lambda) = 0.$$

如果 $\omega \in \Lambda^c$，则存在$K = K(\omega)$以及二进立方体$Q_\alpha^K(\omega)$，使得f的支集包含于$Q_\alpha^K(\omega)$中。从这个角度来看，当我们对 $\omega \in \Omega$取期望时，可以假设（α）的求和中只有一个。也就是说，

$$h(x) = \sum_{k\le K} f_k(x) = \sum_{k\le K} \mathbb{E}_\omega \left(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}(x) \chi_{Q^\omega}(x) \right).$$

回忆一下，a_{Q^ω} 满足估计式（3.1）、（3.2）、（3.16）和（3.17），并且 $\{Q^\omega\}$ 是如命题 3.1中所述的 2^{-1}-分级序列。

定理 1.2 将通过迭代论证得到证明。首先，我们有以下结果。

引理 6.1。设 $\{f_k\}$ 是(6.2)中的函数族。对于每个 $\delta > 0$，记 $d\sigma_k$为 $X \times \{t = \delta 2^k\}$上的曲面测度。则

$$d\sigma = \sum_{k\le K} f_k(x)\, d\sigma_k$$

是一个 Carleson 测度，其中 $\|\sigma\|_C \le C\delta^{-n}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。

证明。注意，对于任意 Q，由 Q^ω 的稀疏性质可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q\times[0,\ell(Q))} d\sigma &= \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \sum_{\delta 2^k \le \ell(Q)} f_k(x)\, d\mu(x) \\ &\le \frac{1}{\mu(Q)} \mathbb{E}_\omega \left(\sum_{\ell(Q^\omega)\le \delta^{-1}\ell(Q)} \mu(Q^\omega \cap Q) \left\| a_{Q^\omega} \right\|_{L^\infty(Q^\omega)} \right) \\ &\le C\delta^{-n} \|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

这就证明了引理6.1。 □

利用引理6.1，

$$\begin{aligned} \int_{X\times[0,\infty)} p_{t^2}(x,y)\, d\sigma(y,t) &= \sum_{k\le K} \int_X p_{(\delta 2^k)^2}(x,y) f_k(y)\, d\mu(y) \\ &= \sum_{k\le K} e^{-\delta^2 2^{2k} L} f_k(x). \end{aligned}$$

这使我们可以将（6.2）改写为

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \int_{X\times[0,\infty)} p_{t^2}(x,y)\,d\sigma(y,t) + \left(h(x) - \int_{X\times[0,\infty)} p_{t^2}(x,y)\,d\sigma(y,t)\right) \\ &= g(x) + \int_{X\times[0,\infty)} p_{t^2}(x,y)\,d\sigma(y,t) + \sum_{k\le K}\left(I - e^{-\delta^2 2^{2k}L}\right) f_k(x), \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中

$$\|g\|_{L^\infty} + \|\sigma\|_C \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \tag{6.7}$$

由高斯上界 **(H2)**，我们采用与 (6.5) 相同的论证，得到

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k\le K}\left(I - e^{-\delta^2 2^{2k}L}\right) f_k(x)\chi_{(2Q_{\max})^c}(x)\right| &= \left|\sum_{k\le K} e^{-\delta^2 2^{2k}L} f_k(x)\chi_{(2Q_{\max})^c}(x)\right| \\ &\le \sum_{k\le K}\left(\frac{\delta 2^k}{2^K}\right)\int_{Q_{\max}} \frac{|f_k(y)|}{\mu(Q_{\max})}d\mu(y) \\ &\le \delta\frac{1}{\mu(Q_{\max})}\int_{Q_{\max}}\sum_{2^k\le \ell(Q_{\max})}|f_k(y)|\,d\mu(y) \\ &\le C\delta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \\ &\le \frac{1}{4}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

注意　上述估计 (6.7) 和 (6.8) 与 K 无关。因此，只需证明 t

$$\left\|\sum_{k\le K}\left(I - e^{-\delta^2 2^{2k}L}\right) f_k(x)\right\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \le \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \quad \text{for } \delta \text{ small}, \tag{6.9}$$

那么，利用迭代论证即可证明定理 1.2 。(6.9) 的证明可由对偶论证以及以下引理6.2、6.3 和 6.4 得出。

引理 6.2. 设

$$f_k(x) := \mathbb{E}_\omega\left(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}(x)\chi_{Q^\omega}(x)\right). \tag{6.10}$$

于是存在一个足够大的常数 A ＞ 0 ，使得对于任意与 L 相关、支集为 Q 的 (1, ∞, 1)-原子 a ＝ Lb，以及任意数值 $0 < \delta < 1$，均有

$$\sum_{2^k > A\ell(Q)}\left|\left\langle (I - e^{-\delta^2 2^{2k}L}) f_k, a\right\rangle\right| \le \frac{1}{12}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \tag{6.11}$$

证明. 有

$$\text{LHS of (6.11)} \le \sum_{2^k > A\ell(Q)}|\langle f_k, a\rangle| + \sum_{2^k > A\ell(Q)}\left|\left\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L} f_k, a\right\rangle\right| =: \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

回顾

$$\Lambda_k := \{\omega \in \Omega\colon \text{存在一个立方体 } Q^\omega \in \mathcal{D}^k(\omega),\ \text{使得 } Q \subset Q^\omega\}。$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} \Big|\Big\langle \sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}, a\Big\rangle\Big|\, d\omega + \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k^c} \Big|\Big\langle \sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}, a\Big\rangle\Big|\, d\omega \\ &=: \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.\end{aligned}$$

对于 $\omega\in\Lambda_k$ 和 $2^k>\mathrm{Al(Q)}$，我们将满足 $\mathrm{Q}_0^\omega\in\mathcal{D}^k(\omega)$ 且 $\mathrm{Q}\subset\mathrm{Q}_0^\omega$ 的唯一立方体记为 Q_0^ω。然后应用与 L 相关的 $(1,\infty,1)$-原子的性质，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 \le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} |\langle a_{Q_0^\omega}, a\rangle|\, d\omega &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \frac{1}{2^{2k}} \|(2^{2k}L)a_{Q_0^\omega}\|_{L^\infty(Q_0^\omega)}\|b\|_{L^1} \\ &\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \sum_{2^k>A\ell(Q)} \Big(\frac{\ell(Q)}{2^k}\Big)^2 \\ &\le CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.\end{aligned}$$

对于项 I_2, 我们使用（2.8）得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2 &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \mathbb{P}(\Lambda_k^c) \sup_{\ell(Q^\omega)=2^k} \|a_{Q^\omega}\|_{L^\infty(Q^\omega)}\|a\|_{L^1} \\ &\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \sum_{2^k>A\ell(Q)} \left(\frac{\ell(Q)}{2^k}\right)^\varepsilon \\ &\le CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{I}\le \mathrm{CA}^{-\varepsilon}\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。

接下来估计项 II。可以写为

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} \Big|\Big\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}\Big(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big), a\Big\rangle\Big| d\omega \\ &\quad + \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k^c} \Big|\Big\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}\Big(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big), a\Big\rangle\Big| d\omega \\ &=: \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.\end{aligned}$$

对于项 II_2, , 我们采用与 I_2 的证明类似的论证，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_2 &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \mathbb{P}(\Lambda_k^c) \sup_\omega \Big\| e^{-\delta^2 2^{2k}L}\Big(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big)\Big\|_{L^\infty} \|a\|_{L^1} \\ &\le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \mathbb{P}(\Lambda_k^c) \sup_{\omega,Q^\omega} \|a_{Q^\omega}\|_{L^\infty(Q^\omega)}\|a\|_{L^1} \\ &\le C \sum_{2^k>A\ell(Q)} \left(\frac{\ell(Q)}{2^k}\right)^\varepsilon \|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \\ &\le CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.\end{aligned}$$

为估计项 II_1, , 令 Q_0^ω 为包含 Q 的二进立方体。记

$$\mathrm{II}_1 \le \sum_{2^k>A\ell(Q)} \int_{\Lambda_k} \Big|\Big\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}\Big(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k, Q^\omega\neq Q_0^\omega} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big), a\Big\rangle\Big| d\omega$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{2^k>A\ell(Q)}\int_{\Lambda_k}\left|\left\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}\left(a_{Q_0^\omega}\chi_{(Q_0^\omega)^c}\right),a\right\rangle\right|d\omega\\
&+\sum_{2^k>A\ell(Q)}\int_{\Lambda_k}\left|\left\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q_0^\omega}),a\right\rangle\right|d\omega\\
&=: \mathrm{II}_{11}+\mathrm{II}_{12}+\mathrm{II}_{13}.
\end{aligned}
$$

我们先估计 II_{13}。利用（3.17）以及与算子（1， ∞，1）相关的原子L的性质，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{13}&\le\sum_{2^k>A\ell(Q)}\frac{1}{2^{2k}}\left\|e^{-\delta^2 2^{2k}L}\left((2^{2k}L)a_{Q_0^\omega}\right)\right\|_{L^\infty(Q)}\|b\|_{L^1}\\
&\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\sum_{2^k>A\ell(Q)}\left(\frac{\ell(Q)}{2^k}\right)^2\\
&\le CA^{-2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.
\end{aligned}
$$

对于项 II_{12}，，我们考虑两种情况： $\delta 2^k \ge \mathrm{l(Q)}$ 和 $\delta 2^k < \mathrm{l(Q)}$。在$\delta 2^k \ge \mathrm{l(Q)}$的情况下，令

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{k,0}:=\left\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)<\delta 2^k\right\};\\
&\Lambda_{k,i}:=\left\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)\in[2^{i-1}\delta 2^k,2^i\delta 2^k)\right\},\ \ i=1,2,\dots,M;\\
&\Lambda_{k,M+1}:=\left\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)\ge 2^{M-1}\delta 2^k\right\},
\end{aligned}
$$

其中 M 是小于 $\log_2(2^k/\delta)$ 的最大整数。结合 $= \mathrm{Lb}$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{12}&\le\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=0}^{M+1}\int_{\Lambda_{k,i}}\left|\left\langle e^{-\delta^2 2^{2k}L}\left(a_{Q_0^\omega}\chi_{(Q_0^\omega)^c}\right),a\right\rangle\right|d\omega\\
&\le\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=0}^{M+1}\mathbb{P}(\Lambda_{k,i})\sup_{\omega\in\Lambda_{k,i}}\frac{1}{\delta^2 2^{2k}}\left|\left\langle(\delta^2 2^{2k}L)e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q_0^\omega}\chi_{(Q_0^\omega)^c}),b\right\rangle\right|.
\end{aligned}
$$

由（2.8）和（3.17），

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^k>A\ell(Q)}\mathbb{P}(\Lambda_{k,0})\sup_{\omega\in\Lambda_{k,0}}\frac{1}{\delta^2 2^{2k}}\left|\left\langle(\delta^2 2^{2k}L)e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q_0^\omega}\chi_{(Q_0^\omega)^c}),b\right\rangle\right|\\
&\le\sum_{2^k>A\ell(Q)}\left(\frac{\delta 2^k}{2^k}\right)^{\varepsilon}\frac{\|b\|_{L^1}}{\delta^2 2^{2k}}\sup_{\omega\in\Lambda_{k,i}}\left\|\int_X|h_{(\delta^2 2^{2k})}(x,y)||a_{Q_0^\omega}(y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)}\\
&\le\sum_{2^k>A\ell(Q)}\delta^{\varepsilon}\left(\frac{\ell(Q)}{\delta 2^k}\right)^2\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\\
&\le CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了条件 $\delta 2^k \geq \mathrm{l}(Q)$）。接着应用（2.8）、（3.15）和（3.17）可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=1}^{M+1}\mathbb{P}(\Lambda_{k,i})\sup_{\omega\in\Lambda_{k,i}}\frac{1}{\delta^2 2^{2k}}\left|\left\langle(\delta^2 2^{2k}L)e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q_0^\omega}\chi_{(Q_0^\omega)^c}),b\right\rangle\right|\\
&\leq\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=1}^{M+1}\left(\frac{2^i\delta 2^k}{2^k}\right)^{\varepsilon}\frac{\|b\|_{L^1}}{\delta^2 2^{2k}}\sup_{\omega\in\Lambda_{k,i}}\left\|\int_{(Q_0^\omega)^c}K_{(\delta^2 2^{2k}L)e^{-\delta^2 2^{2k}L}}(x,y)a_{Q_0^\omega}(y)\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)}\\
&\leq C\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=1}^{M+1}\left(2^i\delta\right)^{\varepsilon}\left(\frac{\ell(Q)}{\delta 2^k}\right)^2 2^{-Ni}\sup_{\omega\in\Lambda_{k,i}}\left\|\int_X|h_{(2\delta^2 2^{2k})}(x,y)||a_{Q_0^\omega}(y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)}\\
&\leq C\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i}\left(\frac{2^i\delta 2^k}{2^k}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{\ell(Q)}{\delta 2^k}\right)^2 2^{-Ni}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\\
&\leq CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},
\end{aligned}$$

其中 N 是任意整数，且在上一个不等式中我们使用了条件 $\delta 2^k \geq \mathrm{l}(\mathrm{Q})$。现在，在 $\delta 2^k \leq \mathrm{l}(\mathrm{Q})$ 的情况下，令

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Lambda}_{k,0}:=\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)<\ell(Q)\};\\
&\tilde{\Lambda}_{k,i}:=\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)\in[2^{i-1}\ell(Q),2^i\ell(Q))\},\ i=1,\dots,\tilde{M};\\
&\tilde{\Lambda}_{k,\tilde{M}+1}:=\{\omega\in\Omega: d(Q,(Q_0^\omega)^c)\geq 2^{\tilde{M}}\ell(Q)\},
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{}\mathrm{M}$ 是小于 $\log_2(2^k/\mathrm{l}(\mathrm{Q}))$ 的最大整数。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{12}&\leq\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sum_{i=0}^{\tilde{M}+1}\mathbb{P}(\tilde{\Lambda}_{k,i})\sup_{\omega\in\tilde{\Lambda}_{k,i}}\left\|\int_{(Q_0^\omega)^c}K_{e^{-\delta^2 2^{2k}L}}(x,y)a_{Q_0^\omega}(y)\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)}\\
&\leq C\sum_{2^k>A\ell(Q)}\left[\left(\frac{\ell(Q)}{2^k}\right)^{\varepsilon}+\sum_{i=1}^{\tilde{M}+1}\left(\frac{2^i\ell(Q)}{2^k}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{2^i\ell(Q)}{\delta 2^k}\right)^{-N}\right]\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\\
&\leq CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},
\end{aligned}$$

其中在上一个不等式中我们使用了条件 $\delta 2^k \leq \mathrm{l}(\mathrm{Q})$。由上述两种情形下的估计可知，$\mathrm{II}_{12}\leq \mathrm{CA}^{-\varepsilon}\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。

最后，我们来估计项 II_{11}。由于满足 $\mathrm{dist}(\mathrm{Q}^\omega,\mathrm{Q}_0^\omega)\leq 2^k$ 的 $\mathrm{Q}^\omega\}$ 数目有限，因此，采用与估计 II_{12} 时类似的论证，即可得到这些 Q^ω 的估计。因此，接下来只需计算满足 $\mathrm{dist}(\mathrm{Q}^\omega,\mathrm{Q}_0^\omega)>2^k$ 的 Q^ω 的求和。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{11}&\leq\sum_{2^k>A\ell(Q)}\sup_{\omega}\frac{1}{\delta^2 2^{2k}}\left|\left\langle\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k,\mathrm{dist}(Q^\omega,Q_0^\omega)>2^k}(\delta^2 2^{2k}L)e^{-\delta^2 2^{2k}L}\left(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\right),b\right\rangle\right|\\
&\leq\sum_{2^k>A\ell(Q)}\left(\frac{1}{\delta 2^k}\right)^2\sup_{\omega}\left\|\int_{\mathrm{dist}(x,Q)>2^k}|K_{\delta^2 2^{2k}Le^{-\delta^2 2^{2k}L}}(x,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)}\|a_{Q^\omega}\|_{L^\infty(Q^\omega)}\|b\|_{L^1}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{2^k>A\ell(Q)} \left(\frac{\ell(Q)}{\delta 2^k}\right)^2 \delta^N \|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}, \quad \text{for any large number N,}$$
$$\leq CA^{-2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.$$

结合 II_{12} 和 II_{13}, 的估计可得 $\mathrm{II}_1 \leq \mathrm{CA}^{-\varepsilon}\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$，因此 II $\leq \mathrm{CA}^{-\varepsilon}\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}$。因此，结合 I 和 II 的估计可得

$$\sum_{2^k>A\ell(Q)} \left|\left\langle (I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})f_k, a\right\rangle\right| \leq CA^{-\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)} \leq \frac{1}{12}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},$$

只要 A 选得足够大即可。至此，引理 6.2 的证明完成。

□

引理 6.3。 设 f_k 满足 (6.10)，且大数 A 如引理 6.2所述。那么存在一个小的正常数 δ 使得对于任意与 L 相关的 $(1,\infty,1)$-原子，一个 $= \mathrm{Lb}$，其支集为 Q,

$$\sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \left|\left\langle (I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})f_k, a\right\rangle\right| \leq \frac{1}{12}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.$$

证明。回忆 $\mathrm{f}_k(\mathrm{x}) = \mathbb{E}_\omega\left(\mathrm{P}_{\mathrm{l}(Q^\omega)=2^k}\, \mathrm{a}_{Q^\omega}(\mathrm{x})\chi_{Q^\omega}(\mathrm{x})\right)$。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \left|\left\langle \left(I-e^{-\delta^2 2^{2k}L}\right)f_k, a\right\rangle\right| \\
&\quad\leq \sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \left|\left\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\big(I-e^{-\delta^2 2^{2k}L}\big)\Big(\sum_{\substack{\ell(Q^\omega)=2^k\\ d(Q^\omega,Q)\leq 2^k}} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big)\Big), a\right\rangle\right| \\
&\qquad+\sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \mathbb{E}_\omega\left(\left|\left\langle \Big(\big(I-e^{-\delta^2 2^{2k}L}\big)\Big(\sum_{\substack{\ell(Q^\omega)=2^k\\ d(Q^\omega,Q)>2^k}} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big), a\right\rangle\right|\right) \\
&\quad=: \ \mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2.
\end{aligned}$$

对于 II_2,，注意到当 $\mathrm{l}(\mathrm{Q}^\omega) = 2^k$ 且 $\mathrm{d}(\mathrm{Q}^\omega, \mathrm{Q}) > 2^k$ 时，$\mathrm{Q}^\omega \cap \mathrm{Q} = \emptyset$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_2 &\leq \|a_{Q^\omega}\|_{L^\infty(Q^\omega)} \sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \sup_\omega \left\|\int_{d(y,Q)>2^k} |K_{e^{-\delta^2 2^{2k}L}}(\cdot,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^\infty(Q)} \|a\|_{L^1} \\
&\leq C\sum_{\ell(Q)<2^k\leq A\ell(Q)} \left(\frac{2^k}{\delta 2^k}\right)^{-N} \|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}, \quad \text{for large N} \\
&\leq C\delta\log A\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},
\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中我们用到了 $0<\delta<1$。于是我们可以取 δ 足够小，使得 $\mathrm{C}\delta\log \mathrm{A} < 1/6$。

考虑 II_1。由于满足 Q^ω 的 $\mathrm{l}(Q^\omega) = 2^k$ 和 $d(Q^\omega,Q) < 2^k$ 的数量是一个仅依赖于（1.8）中倍增常数的常数，因此我们只需考虑一个 Q^ω。

对于任意固定的 x，若 $x \notin Q^\omega$，则 x 必须属于某个 $Q_0^\omega \in \mathcal{D}^k(\omega)$。记

$$\Theta_{k,0} := \left\{\omega \in \Omega : d(x,(Q_0^\omega)^c) < \delta 2^k\right\};$$

$$\Theta_{k,i} := \left\{\omega \in \Omega : x \text{ is in a dyadic ring } [2^{i-1}\delta 2^k, 2^i\delta 2^k) \text{ of the edge of } Q_0^\omega\right\},\ i = 1,\dots,M;$$

$$\Theta_{k,M+1} := \left\{\omega \in \Omega : d(x,Q_0^\omega) \geq 2^M\delta 2^k\right\},$$

其中，M 是小于 $\log 1/(2\delta)$ 的最大整数。于是，对 $x \notin Q^\omega$，有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})(x)\right)\right| &\leq \sum_{i=0}^{M+1}\int_{\Theta_{k,i}}\left|e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})(x)\right|d\omega \\
&\leq \sum_{i=0}^{M+1}\mathbb{P}(\Theta_{k,i})\sup_\omega\int_{Q^\omega}|h_{\delta 2^k}(x,y)||a_{Q^\omega}(y)|d\mu(y) \\
&\leq C\left(\delta^\varepsilon + \sum_{i=1}^{M+1}\left(\frac{2^i\delta 2^k}{2^k}\right)^\varepsilon\left(\frac{2^i\delta 2^k}{\delta 2^k}\right)^{-N}\right)\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}, \quad \text{for large N} \\
&\leq C\delta^\varepsilon\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

若 $x \in Q^\omega$，记

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})(x)\right) \\
&= \mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega})(x)\right) - \mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega}\chi_{(Q^\omega)^c})(x)\right). \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

由（6.13）右侧的第一项以及（3.16），可得

$$\left|\mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega})(x)\right)\right| \leq C\delta^2\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \qquad (6.14)$$

对于（6.13）右侧的第二项，我们采用与 $x \notin Q^\omega$ 的情形类似的论证。对于 $i = 0,1,\cdots M+1$，记

$$\Theta_{k,0} := \left\{\omega \in \Omega : d(x,(Q^\omega)^c) < \delta 2^k\right\},$$

$$\Theta_{k,i} := \left\{\omega \in \Omega : x \text{ is in a dyadic ring } [2^{i-1}\delta 2^k, 2^i\delta 2^k) \text{ of the edge of } Q^\omega\right\},$$

$$\Theta_{k,M+1} := \left\{\omega \in \Omega : d(x,(Q^\omega)^c) \geq 2^M\delta 2^k\right\},$$

其中 M 是小于 $\log_2 1/(2\delta)$ 的最大整数。因此，对于任意 $x \in Q^\omega$，由 3.17 以及 a_{Q^ω} 的性质可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}_\omega\left((I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})(a_{Q^\omega}\chi_{(Q^\omega)^c})(x)\right)\right| &\leq \sum_{i=0}^{M+1}\int_{\Theta_{k,i}}\left|e^{-\delta^2 2^{2k}L}(a_{Q^\omega}\chi_{(Q^\omega)^c})(x)\right|d\omega \\
&\leq \sum_{i=0}^{M+1}\mathbb{P}(\Theta_{k,i})\sup_\omega\int_{(Q^\omega)^c}|h_{\delta^2 2^{2k}}(x,y)||a_{Q^\omega}(y)|\,dy \\
&\leq C\left(\delta^\varepsilon + \sum_{i=1}^{M+1}\left(\frac{2^i\delta 2^k}{2^k}\right)^\varepsilon\left(\frac{2^i\delta 2^k}{\delta 2^k}\right)^{-N}\right)\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}, \quad \text{for large N} \\
&\leq C\delta^\varepsilon\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}. \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

结合式（6.12）–（6.15），我们已经证明

$$\mathrm{II}_1 \le C\delta^{\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\log A < \frac{1}{6}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)},$$

通过取 δ 足够小。因此，引理 6.3 的证明完成。 □

引理 6.4. 设 f_k 取自 (6.10) 且常数 A 如引理 *6.2*中所述。那么存在一个较小的正常数 δ 使得对于任意 (1, ∞,1)-原子 a = 与 L 相关联的 Lb，其支集为 Q，

$$\sum_{2^k\le \ell(Q)} \left|\left\langle (I-e^{-\delta^2 2^{2k}L})f_k, a\right\rangle\right| \le \frac{1}{12}\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.$$

证明. 回忆 $\mathrm{f}_k(\mathrm{x}) = \mathbb{E}_\omega\left(\mathrm{P}_{\mathrm{l}(Q^\omega)=2^k}\mathrm{a}_{Q^\omega}(\mathrm{x})\chi_{Q^\omega}(\mathrm{x})\right)$。在本引理的证明中，我们不会使用 ω 的平均值。令 $\mathrm{Q}^{(0)} = \mathrm{CQ}$ 为球，其中 C 为绝对常数 > 1，使得对于所有 $\omega \in \Omega$，若 Q^ω 满足 $\mathrm{l}(\mathrm{Q}^\omega) \sim \mathrm{l}(\mathrm{Q})$ 且 $\mathrm{Q}^\omega \cap \mathrm{Q} \neq \emptyset$，则 $\mathrm{Q}^\omega \subset \mathrm{Q}^{(0)}$。用与 $\mathrm{Q}^{(0)}$“全等”的立方体 $\mathrm{Q}^{(j)}$ 铺满 X。它们可能彼此相交，但具有有界重叠。球 $\{\mathrm{Q}_j\}$也具有以下性质：对于任意 $\omega \in \Omega$，若 $\mathrm{l}(\mathrm{Q}^\omega) \le \mathrm{l}(\mathrm{Q})$，则存在一个 $\mathrm{Q}^{(j)}$，使得 $\mathrm{Q}^\omega \subset \mathrm{Q}^{(j)}$。否则，我们可以将所有初始 $\mathrm{Q}^{(j)}$加倍。于是

$$\begin{aligned}\sum_{2^k<\ell(Q)} \left|\left\langle \left(I-e^{-\delta^2 2^{2k}L}\right) f_k, a\right\rangle\right| &= \sum_{2^k<\ell(Q)} \left|\left\langle \mathbb{E}_\omega\Big(\Big(I-e^{-\delta^2 2^{2k}L}\Big)\Big(\sum_{\ell(Q^\omega)=2^k} a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\Big)\Big), a\right\rangle\right| \\ &\le \mathbb{E}_\omega\left(\sum_j \sum_{Q^\omega\subset Q^{(j)}} \left|\left\langle \Big(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L}\Big)\big(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}\big), a\right\rangle\right|\right). \qquad (6.16)\end{aligned}$$

若 $\mathrm{Q}^\omega \subset \mathrm{Q}^{(j)}$，$\mathrm{j} \neq 0$，则有 $\mathrm{Q}^\omega \cap \mathrm{Q} = \emptyset$，因此

$$\begin{aligned}\left|\left\langle (I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}), a\right\rangle\right| &\le \sup_{x\in Q}\int_{Q^\omega} |K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L}}(x,y)|\,d\mu(y)\|a_{Q^\omega}\|_{L^\infty(Q^\omega)}\|a\|_{L^1} \\ &\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\left(\frac{d(Q,Q^\omega)}{\delta\ell(Q^\omega)}\right)^{-n-1}\sup_{y\in Q^\omega}\frac{1}{\mu((y,\delta\ell(Q^\omega)))}\mu(Q^\omega) \\ &\le \delta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\frac{\ell(Q)^{n+1}}{d(Q,Q^{(j)})^{n+1}}\frac{\mu(Q^\omega)}{\mu(Q^{(j)})}. \qquad (6.17)\end{aligned}$$

若 $\mathrm{Q}^\omega \subset \mathrm{Q}^{(0)}$，则

$$\begin{aligned}\left|\left\langle (I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega}), a\right\rangle\right| &\le \left\|(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})\right\|_{L^1(Q)}\|a\|_{L^\infty} \\ &\le \frac{1}{\mu(Q)}\left(\left\|(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})\right\|_{L^1((Q^\omega)^c)} + \left\|(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L})(a_{Q^\omega}\chi_{Q^\omega})\right\|_{L^1(Q^\omega)}\right) \\ &=: \frac{1}{\mu(Q)}\big(\mathrm{III}_1+\mathrm{III}_2\big). \qquad (6.18)\end{aligned}$$

对于项 III_1，，我们将 $(\mathrm{Q}^\omega)^c\backslash(2\mathrm{Q}^\omega)^c$ 分解为以下环域 $\{\mathrm{Q}^\omega{}_i\}_{i=0}^M$，其中 M ∼$\log\delta^{-1}$，$\mathrm{Q}_0^\omega := \{\mathrm{x} : \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{Q}^\omega) \le \delta\mathrm{l}(\mathrm{Q}^\omega)\}$，而 $\mathrm{Q}^\omega{}_i := \{\mathrm{x} : \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{Q}^\omega) \sim 2^i\delta\mathrm{l}(\mathrm{Q}^\omega)\}$，$\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M}$。于是我们有

$$\mathrm{III}_1 \le C\left\|\int_{Q^\omega} |K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2 L}}(\cdot,y)a_{Q^\omega}(y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1((Q^\omega)^c)}$$

$$\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\left(\left\|\int_{Q^\omega}|K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L}}(\cdot,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1((2Q^\omega)^c)}+\sum_{i=0}^{\log\delta^{-1}}\left\|\int_{Q^\omega}|K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L}}(\cdot,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1(Q_i^\omega)}\right)$$

$$\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\left(\mu(Q^\omega)\delta+\sum_{i=0}^{\log\delta^{-1}}2^{-iN}\mu(Q_i^\omega)\right)$$

$$\leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\mu(Q^\omega)\delta^\eta,$$

其中，在上一个不等式中我们用到了以下事实 $\mu(Q^{\omega}{}_i)\leq C2^{i\eta}\delta^\eta\mu(Q^\omega)$，根据 (2.7)。对于项 III_2,

$$\mathrm{III}_2\leq\left\|(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L})a_{Q^\omega}\right\|_{L^1(Q^\omega)}+\left\|(I-e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L})(a_{Q^\omega}\chi_{(Q^\omega)^c})\right\|_{L^1(Q^\omega)}$$
$$=:\mathrm{III}_{21}+\mathrm{III}_{22}.$$

由（3.16）可得

$$\mathrm{III}_{21}\leq\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\delta^2\mu(Q^\omega).$$

对于 $\mathrm{III}_{22},$，证明与 III_1 的证明非常相似。将 $(Q^\omega)^c\backslash(2Q^\omega)^c$ 分解为环域 $Q^{\omega}{}_i$，使得 $d(Q^{\omega}{}_i,Q^\omega)\sim 2^i\delta l(Q^\omega)$

$$\mathrm{III}_{22}\leq\left\|\int_{(2Q^\omega)^c}|K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L}}(\cdot,y)a_{Q^\omega}(y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1(Q^\omega)}+\sum_{i=0}^{\log\delta^{-1}}\left\|\int_{Q_i^\omega}|K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L}}(\cdot,y)a_{Q^\omega}(y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1(Q^\omega)}$$

$$\leq\delta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\mu(Q^\omega)+\|a_{Q^\omega}(y)\|_{L^\infty(2Q^\omega)}\sum_{i=0}^{\log\delta^{-1}}\left\|\int_{Q_i^\omega}|K_{e^{-\delta^2\ell(Q^\omega)^2L}}(\cdot,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^1(Q^\omega)}$$

$$\leq C\delta^\eta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\mu(Q^\omega),$$

其中，在第二个不等式中我们使用了（3.17）。结合 III_1 和 III_2, 中的估计，我们将（6.17）和（6.18）代入（6.16），得到

$$\sum_{2^k<\ell(Q)}\left|\left\langle(f_k(x)-e^{-\delta^2 2^{2k}L}f_k(x)),a\right\rangle\right|$$

$$\leq\mathbb{E}_\omega\left(\sum_{j\neq0}\sum_{Q^\omega\subset Q^{(j)}}\delta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\frac{\ell(Q)^{n+1}}{d(Q,Q^{(j)})^{n+1}}\frac{\mu(Q^\omega)}{\mu(Q^{(j)})}\right)+\mathbb{E}_\omega\left(\sum_{Q^\omega\subset Q^{(0)}}\delta^\eta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}\frac{\mu(Q^\omega)}{\mu(Q)}\right)$$

$$\leq C\delta^\eta\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(X)}.$$

这就完成了引理6.4的证明。 □

7. 进一步讨论

本节将讨论与算子相关的 BMO 空间1.1和1.2 上的一些研究方向$_L(X)$，这些讨论或许有助于进一步研究。

1）当底层空间 (X, d, μ) 是 Ahlfors 正则时，即 μ 满足

$$cr^n\leq\mu(B(x,r))\leq Cr^n \tag{7.1}$$

对所有 $r > 0$ 一致地对 $x \in X$，我们的定理 1.1 和 1.2 在用泊松半群替换热半群e^{-tL} 时仍然成立，其中泊松半群为算子 $e^{-t\sqrt{L}}$ 对应的 L。只需对定理 1.1 和 1.2证明中的论证稍作修改即可证明这些结果，这里省略细节。

2）回顾一下，权 $w(x) \in (A_2)$ 当且仅当

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{w} dx\right) < \infty.$$

众所周知，$w \in (A_2)$ 当且仅当黎斯变换在 $L^p(wdx)$ 上有界（例如参见 [41]）。正如 [20], 所指出的，Garnett–Jones 定理的一个推论 [20] 是高维 Helson–Szeg¨ő 定理。他们证明了以下结果。

命题 7.1. 假设存在正常数 $B_1(n)$，使得

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j g_j \tag{7.2}$$

其中 $\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_\infty < B_1(n)$，则 e^f满足 (A_2)。反之，若 $e^f \in (A_2)$，则 (7.2) 成立，其中 f 满足 $\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_\infty < B_2(n)$，这里常数 $B_2(n)$ 仅依赖于 n。

设 L 是 $L^2(X)$ 上满足 (H1) 和 (H2) 的算子。令 $w \in \mathcal{M}$ be $\mathbb{R}^n$上的一个正权函数。若权 $w(x) \in (A_{2,\,L})$，则称其为

$$\sup_t \left\|e^{-tL}(w)e^{-tL}(w^{-1})\right\|_{L^\infty(X)} < \infty.$$

文献 [37, 定理 0.8] 证明了，经典的 (A_2) 与标准拉普拉斯算子 Δ 在 $\mathbb{R}^n$上所对应的算子一致，即 $(A_2) = (A_{2,\,\Delta})$，另见 [12]。

本文的结果表明，当经典 Riesz 变换替换为与算子 7.1 L 相关的 Riesz 变换时，有可能建立类似于命题L的结果。我们将在未来的工作中研究与算子相关的权和 BMO 空间。

致谢：作者感谢王国谦的有益讨论。P. Chen、L. Song 和 L. Yan 得到了国家重点研发计划 2022YFA1005700 的资助。P. Chen 得到了国家自然科学基金 12171489 和广东省自然科学基金 2022A1515011157 的资助。X.T. Duong 得到了澳大利亚研究理事会（ARC）研究基金 DP190100970 的资助。J. Li 得到了 ARC DP 220100285 的资助。L. Song 得到了国家自然科学基金 12071490 的资助。

参考文献

[1] P. Auscher、T. Coulhon、X.T. Duong 和 S. Hofmann，流形上的 Riesz 变换与热核正则性，《高等师范学校科学年鉴》 ´巴黎高等师范学校，**37** （2004），第 6 期，911–957。3[2] P. Auscher、X.T. Duong 和 A. McIntosh，Banach 空间值奇异积分算子及 Hardy 空间的有界性。（2002）。未发表的预印本。18

[3] P. Auscher、A. McIntosh 和 E. Russ，黎曼流形上的微分形式 Hardy 空间，《几何分析杂志》，18（2008），192–248。18[4] P. Auscher 和 E. Russ，$\mathbb{R}^n$ 强 Lipschitz 域上的 Hardy 空间与散度算子，《函数分析杂志》，201（2003），148–184。18[5] J. Bourgain，将 L^1 嵌入 $L^1\backslash H^1$，《美国数学会汇刊》，278（1983），第 2 期，689–702。2[6] L. Carleson，关于 H^1 和 BMO 的两点注记，《数学进展》，22（1976年），269–277。5[7] P. Chen、X.T. Duong、J. LI、L. SONG 和 L.X. Yan，与 Schr¨odinger 算子相关的 Carleson 测度、BMO 空间与扫掠，《中国科学：数学》，60（2017），2077–2092。5[8] M. Christ，一则 T(b) 定理及关于解析容量和 Cauchy 积分的注记，《数学汇刊》，60/61（1990），601–628。6, 7[9] R.R. Coifman 和 G. Weiss，某些齐次空间上的非交换调和分析，《数学讲义》242。Springer，柏林—纽约，1971。2`E.B. Davies，热核与谱理论，剑桥大学出版社，1989。23[10] D.G. Deng、X.T. Duong、A. Sikora 和 L.X. Yan，经典 BMO 与算子相关 BMO 空间的比较及其应用，《伊比利亚数学杂志》，24（2008），第 1 期，267–296。3[11] K. Domelevo、C. Kriegler 和 S. Petermichl，次 Markov 半群在加权 L^2空间上的 H^∞ 演算，《数学年刊》，381（2021），第 3–4 期，1137–1195。34[13] X.T. Duong 和 L.X. Yan，新的 BMO 型函数空间、John–Nirenberg 不等式、插值及其应用，《纯粹与应用数学通讯》，58（2005），第 10 期，1375–1420。3, 4, 7, 8, 13, 18[14] X.T. Duong 和 L.X. Yan，具有热核估计的算子相关 Hardy 空间与 BMO 空间的对偶性，《美国数学会杂志》，18（2005），第 4 期，943–973。3, 18[15] X.T. Duong 和 L.X. Yan，满足 Davies-Gaffney 估计的非负自伴算子相关 Hardy 空间的谱乘子，《日本数学会杂志》，63（2011），第 1 期，295–319。21[16]J. Dziuba´nski、G. Garrig´os、T. Mart´ınez、J. Torrea 和 J. Zienkiewicz，与势满足反向 H¨older 不等式的 Schr¨odinger 算子相关的 BMO 空间，《数学杂志》，249（2005），329–356。MR2115447。3[17] J. Dziuba´nski 和 J. Zienkiewicz，与势满足反向 H¨older 不等式的 Schr¨odinger 算子相关的 Hardy 空间 H^1，《伊比利亚数学杂志》，15（1999），第 2 期，279–296。23[18] C. Fefferman 和 E.M. Stein，多变量 H^p 空间，《数学学报》，129（1972），第 3–4 期，137–193。2, 6[19] J. Garnett，《有界解析函数》，Academic Press，纽约，1981。2[20] J.B. Garnett 和 P.W. Jones，BMO 到 L^∞的距离，《数学年刊》，108（1978），373–393。1, 2, 4, 5, 6, 34[21] J.B. Garnett 和 P.W. Jones，从二进 BMO 到 BMO，《太平洋数学杂志》，99（1982），第 2 期，351–371。2, 4, 5, 6[22] S. Hofmann、G.Z. Lu、D. Mitrea、M. Mitrea 和 L.X. Yan，满足 Davies-Gaffney 估计的非负自伴算子相关 Hardy 空间，《美国数学会回忆录》，214（2011），第 1007 号。18, 19[23] S. Hofmann 和 S. Mayboroda，与散度型椭圆算子相关的 Hardy 空间和 BMO 空间，《数学年刊》，344（2009），37–116。3, 18[24] S. Hofmann、S. Mayboroda 和 A. McIntosh，具有复有界可测系数的二阶椭圆算子在 L^p、Sobolev 和 Hardy 空间上的性质，《高等师范学校科学年鉴》´巴黎高等师范学校´（第 4 辑），44（2011），第 5 期，723–800。18[25] T. Hyt¨onen，一般 Calder´on–Zygmund 算子的尖锐加权界，《数学年刊》，175（2012），1473–1506。4[26] T. Hyt¨onen 和 A. Kairema，倍增度量空间中的二进立方体系统，《数学汇刊》，126（2012），1–33。6, 7[27] T. Hyt¨onen 和 O. Tapiola，通过一种新的二进立方体随机化方法构造度量空间中近似 Lipschitz 连续的小波，《逼近理论杂志》，185（2014），12–30。6, 7[28] F. John 和 L. Nirenberg，关于有界平均振荡函数，《纯粹与应用数学通讯》，14（1961），415–426。2, 4, 6[29] P.W. Jones，有界平均振荡函数的构造。博士论文，加利福尼亚大学洛杉矶分校，1978。2[30] P.W. Jones，A_p 权的因子分解，《数学年刊》（第 2 辑），111（1980），第 3 期，511–530。2

[31] P.W. Jones，BMO(ℝ)的Carleson 测度与Fefferman–Stein分解，《数学年刊》（第2辑），111（1980），第1期，197–208。2[32] P.W. Jones，Corona问题的估计。《功能分析杂志》，39（1980），162–181。2[33] J.M. Martell，齐次型空间中与恒等算子的逼近相关的尖锐极大函数及其应用，《数学研究》，161（2004），113–145。3[34] B. Muckenhoupt和E. M. Stein，经典展开及其与共轭调和函数的关系，《美国数学会汇刊》，118（1965），17–92。23[35] F. Nazarov、S. Treil和A. Volberg，非齐次空间上的Tb定理，《数学学报》，190（2003），第2期，151–239。4, 7[36] E.M. Ouhabaz，区域上的热方程分析，伦敦数学会专著，第31卷，普林斯顿大学出版社，2005年。13[37] S. Petermichl和A. Volberg，Ahlfors-Beurling算子的热化：平面上的弱拟正则映射是拟正则映射。《杜克数学杂志》，112（2002），第2期，281–305。34[38] L. Song和L.X. Yan，满足高斯估计的非负自伴算子所关联的Hardy空间的极大函数刻画，《数学进展》，287（2016），463–484。18[39] L. Song和L.X. Yan，齐次型空间上与非负自伴算子相关联的Hardy空间的极大函数刻画，《演化方程杂志》，18（2018），第1期，221–243。18[40] E.M. Stein，奇异积分与函数的可微性，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。12[41] E.M. Stein，调和分析：实变方法、正交性与振荡积分，Timothy S. Murphy协助编写，普林斯顿数学丛书第43卷，调和分析专著第III卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。6，34[42] A. Uchiyama，关于BMO的Carleson 刻画的一个注记，《美国数学会会刊》，79（1980），35–41。5[43] A. Uchiyama，某些BMO函数的构造与Corona问题，《太平洋数学杂志》，79（1982），183–204。2[44] N. Th. Varopoulos，BMO上的Garnett–Jones 定理的一个概率证明，《太平洋数学杂志》，90（1980），201–221。2[45] J.M. Wilson，格林定理与扫掠，《密歇根数学杂志》，35（1988），21–27。2，5 Peng Chen，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 邮箱：chenpeng3@mail.sysu.edu.cn Xuan Thinh Duong，数学系，麦考瑞大学，新南威尔士州2109，澳大利亚 邮箱：xuan.duong@mq.edu.au Ji Li，数学系，麦考瑞大学，新南威尔士州2109，澳大利亚 邮箱：ji.li@mq.edu.au Liang Song，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 邮箱：songl@mail.sysu.edu.cn Lixin Yan，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 邮箱：mcsylx@mail.sysu.edu.cn