arXiv:2304.08617v2 [math.GR] 8 Jun 2024

$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ 的共轭类的分类

´CHRISTIAN TAFULA

~ABSTRACT. 本文对 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的共轭类进行分类。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的万有$\widetilde{\ }$覆盖映射群。对于任意非中心元素 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，我们证明，其共轭类可由三个不变量确定：

(i) 迹：其在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 中的像的迹（取值于正实数集 $\mathbb{R}_+$）；(ii) 方向类型：由提升 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}$ 所确定的、由 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^1$的作用诱导的自同胚的符号行为；~~(iii) 函数$\ell^\sharp$: S.~~ Mochizuki 在《数学科学研究》3 (2016), 3:6] 中引入的共轭不变长度函数 [。

1. INTRODUCTION

本文旨在对 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖$\widetilde{\ }$群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的共轭类进行分类；它是三维流形几何化中出现的八种瑟斯顿模型几何之一。我们依据 Zhang [7] 所述的 Szpiro 定理的群论证明（该证明最初由 Bogomolov 等人[1]提出），首先将 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 识别为 $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的一个子群；$\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 是 $\mathbb{S}^1$的保向自同胚群。此识别通过 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{S}^1$上的忠实连续作用实现。接着，将万有覆盖群 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 视为 $\mathbb{R}$上的递增自同胚群 $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ 的一个子群，由此得到中心扩张

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 1,$$

$\widetilde{\ }$借此，我们可以将 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 提升到更大的群中，从而构造 $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$。我们证明，$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ 中元素 $\alpha \in$ 的共轭类由某个 $\widetilde{\mathrm{H}}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)\big)$ 以及 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 中该共轭类某个代表元的典范提升（定义见第 2.3 小节）唯一确定。

1.1. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的共轭类。根据岩泽分解，每个 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 都有唯一的表示形式 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = \rho_\vartheta \mathrm{a}_\lambda \mathrm{u}_x$，其中 $\rho_\vartheta \in K$、$\mathrm{a}_\lambda \in A$ 和 $\mathrm{u}_x \in N$，其中

$$K := \left\{ \rho_\vartheta := \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \le \vartheta < \pi \right\},$$
$$A := \left\{ \mathrm{a}_\lambda := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda > 0 \right\},$$

2020年数学主题分类。主要分类 20E45；次要分类 22E46。关键词与短语。
$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$、万有覆盖群、共轭类。

$$N := \left\{ \mathrm{u}_x := \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

此外，对 $[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \in \overline{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$，记 $\mathrm{tr}([\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}]) := |a+d|$，并记 $\mathrm{Id} := \overline{=} [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]$。 n:

- 若 $\overline{\mathrm{tr}}([\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}]) > 2$，则存在唯一的 $\lambda > 1$，使得 $[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \sim \mathsf{a}_\lambda$；
- 若 $\overline{\mathrm{tr}}([\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}]) = 2$，则 $[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}]$ 与恒等元、u_1 或 u_{-1} 共轭；
- 若 $\overline{\mathrm{tr}}([\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}]) < 2$，则存在唯一的 $0 < \vartheta < \pi$，使得 $[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \sim \rho_\vartheta$。

将 $\widetilde{\rho}_\vartheta$、$\widetilde{\ }\mathsf{a}_\lambda$、$\widetilde{\ }\mathrm{u}_x$ 分别记为 ρ_ϑ、a_λ、u_x 在第 2.3 小节意义下的典范提升，我们将证明以下结论：

迹	方向 type	$\ell^\sharp$	共轭类于 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$
$\overline{\mathrm{tr}} < 2$	正向	$[(0,1)]$	$[\widetilde{\rho}_\vartheta]$
		$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_n \widetilde{\rho}_\vartheta]$
	反向	$[(0,1)]$	$[\mathcal{T}_{-1} \widetilde{\rho}_\vartheta]$
		$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_{-1-n} \widetilde{\rho}_\vartheta]$
$\overline{\mathrm{tr}} = 2$ ($\overline{\alpha} \neq$ 恒等元$_{\mathbb{S}^1}$)	正向	$[n]$	$[\mathcal{T}_n \widetilde{\ }\mathrm{u}_1]$
		$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_n \widetilde{\ }\mathrm{u}_{-1}]$
	半正向	$[(0,1)]$	$[\widetilde{\ }\mathrm{u}_{-1}]$
	半反向	$[(0,1)]$	$[\widetilde{\ }\mathrm{u}_1]$
	反向	$[n]$	$[\mathcal{T}_{-n} \widetilde{\ }\mathrm{u}_{-1}]$
		$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_{-n} \widetilde{\ }\mathrm{u}_1]$
$\overline{\alpha} =$ 恒等元$_{\mathbb{S}^1}$ (α 中心)	正向	$[n]$	$[\mathcal{T}_n]$
	恒等	$[0]$	[恒等元$_{\widetilde{G}}$]
	反向	$[n]$	$[\mathcal{T}_{-n}]$
$\overline{\mathrm{tr}} > 2$	正向	$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_n \widetilde{\ }\mathsf{a}_\lambda]$
	交替	$[(0,1)]$	$[\widetilde{\ }\mathsf{a}_\lambda]$
	反向	$[(n, n+1)]$	$[\mathcal{T}_{-n} \widetilde{\ }\mathsf{a}_\lambda]$

上述三个不变量可简要描述如下：

(i) 迹：$\mathrm{tr}(\overline{\alpha}) := |a+d|$，其中 $[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] = \overline{\alpha} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 是 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 经自然商映射所得的像；

(ii) 方向类型：将以这样的方式构造元素 $\alpha \in \mathrm{H}\widetilde{\ \ }\mathrm{omeo}_+(\mathbb{S}^1)$，使函数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha(x) - x \in \mathbb{R}$ 在平移 $\mathbb{R} \ni x \mapsto x+1 \in \mathbb{R}$ 下保持不变。$\alpha(x) - x$ 的符号行为可分类如下：严格为正（正向方向类型）、严格为负（

后向方向类型）、为正但并非严格为正（半正向方向类型）、为负但并非严格为负（半后向方向类型），或符号交替（交替方向类型）。

(iii) 函数 $\ell^\sharp$：如上所述，$\alpha(x) - x$ 在平移 1 下保持不变；因此，为了确定 α 的行为，只需将注意力限制在紧集 $x \in [0,1]$ 上。特别地，$\ell(\alpha) := \sup_{x\in[0,1]} |\alpha(x) - x|$ 是一个定义良好的实数。于是，我们定义函数 $\ell^\sharp$：取 $\ell^\sharp(\alpha) := \{\lfloor \ell(\alpha) \rfloor, \lceil \ell(\alpha) \rceil\} \subseteq \mathbb{N}$。

方向类型和 $\ell^\sharp$ 函数在 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 中的共轭作用下保持不变（分别见引理 3.2 和命题 3.4）。$\ell^\sharp$ 函数将在第 3.2 小节中介绍，其基础是 Mochizuki [5] 对 Bogomolov 的证明及 Szpiro 定理所作的阐述。

记号。设 G 是一个群。给定 g_1、$g_2 \in G$，若存在 $h \in G$ 使得 $g_1 = hg_2h^{-1}$，我们称 g_1 与 g_2共轭，此时记作 $g_1 \sim g_2$。共轭关系是一种等价关系；我们用 $= \{h \in G \mid g \sim h\}$ 表示 $g \in G$ 的共轭类，用 $\mathrm{C}\ell(G)$ 表示 G 的所有共轭类的集合。对于任意两个元素 g、$h \in G$，我们用 $[g,h]$ 表示它们的换位子：$= ghg^{-1}h^{-1}$。

2. Realizing $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$

我们首先简要回顾如何通过忠实连续作用 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^1$来构造 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$。更深入的阐述请参见 Ghys [3]。

2.1. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$在圆上的作用。考虑拓扑学中的以下基本引理：

引理 2.1. 设 X、Y、Z 为拓扑空间，其中 Y 为局部紧豪斯多夫空间，并设 $S \subseteq \mathcal{C}(Y, Z)$ 为赋予紧开拓扑的连续映射集合。给定映射 $\phi\colon X \to S$，以下各项等价：

(i) $\phi\colon X \ni x \mapsto \phi_x \in S$ 连续；(ii) 映射 $\Phi\colon X \times Y \ni (x, y) \mapsto \phi_x(y) \in Z$ 连续。

在我们的情形中，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ 上的自然作用由射影变换给出——即 Möbius 变换

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \ni \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, (z:1) \right) \longmapsto \left(\frac{az+b}{cz+d} : 1 \right) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}},$$

它们是连续的。于是，实射影直线可与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ 等同。因此，引理 2.1 给出了连续映射 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$，这相当于一个连续作用 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^1$。该作用是忠实的，这一点可由以下事实得出：若 $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 将一维子空间映射到同一个一维子空间，那么 MN^{-1} 是一个以原点为中心的位似，即具有形式 $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为某个值。由于 $\det(MN^{-1}) = 1$，这意味着 $\lambda = \pm 1$，从而 $\overline{M} = \overline{N} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$。由此可知，映射 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 是拓扑群的一个嵌入。

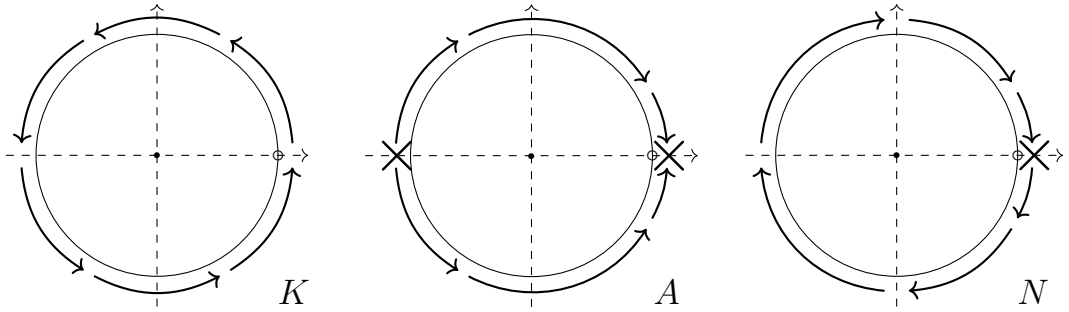


FIGURE 1. 示意 Iwasawa 分解中各群的典型元素如何作用于 $\mathbb{S}^1$。圆表示 $\mathbb{S}^1$，并采用通常的逆时针方向；箭头大致表示其下方扇区内变化率的方向和大小；“×”表示不动点。

2.2. $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的万有覆盖。这个群可以描述为

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1) := \big\{\alpha \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}) \;\big|\; \alpha(x+1) = \alpha(x) + 1 \text{ for all } x \in \mathbb{R}\big\}.$$

每个 $\alpha \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 都通过 $\overline{\alpha}(\overline{x}) := \alpha(x)$ 定义一个自同胚 $\overline{\alpha} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$。$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 中最简单的元素类型是平移 $\mathcal{T}_u$ $(u \in \mathbb{R})$，定义如下：

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{T}_u(x) := x + u. \tag{2.1}$$

由于 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 到 $\ni \alpha \mapsto \overline{\alpha} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的核由子群$\{\mathcal{T}_n\}_{k\in\mathbb{Z}}$构成，且该子群是离散的，因此此映射确实是一个覆盖态射。此外：

引理 2.2. $Z\big(\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)\big) = \{\mathcal{T}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $(\simeq \mathbb{Z})$。

为完整起见，我们给出一个简短的证明。

证明。我们将证明，若 $\zeta \in Z\big(\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)\big)$，则 $\zeta = \mathcal{T}_M$，其中 $M \in \mathbb{Z}$。对每个$q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $x \in \mathbb{R}$，令

$$\alpha_q(x) := x + \frac{|\sin(\pi q x)|}{\pi q}.$$

容易验证，α_q 严格递增，因为它的一阶（左或右）导数恒非负，且其零点集是离散的；此外，对所有$x \in \mathbb{R}$，都有 $\alpha_q(x+1) = \alpha_q(x) + 1$，因此 $\alpha_q \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$。由于 ζ 属于中心，我们有

$$\begin{aligned}\zeta(\alpha_1(0)) = \alpha_1(\zeta(0)) &\implies \zeta(0) = \zeta(0) + \frac{|\sin(\pi\zeta(0))|}{\pi}\\ &\implies |\sin(\pi\zeta(0))| = 0\\ &\implies \zeta(0) \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

我们断言，对于 $M := \zeta(0)$，$\zeta = \mathcal{T}_M$。为此，设 $\xi(x) := \zeta(x) - M$。只需证明将 ξ 限制在 $\mathbb{Q}$上时为恒等映射，因为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$中稠密，且 ξ 连续。固定 $q \geq 1$，对每个 $p \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$，我们有

$$\alpha_q\xi(p/q) = \xi\alpha_q(p/q) \implies \xi(p/q) + \frac{|\sin(\pi q\,\xi(p/q))|}{\pi q} = \xi\left(p/q + \frac{|\sin(\pi q\,(p/q))|}{\pi q}\right)$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow\ |\sin(\pi q\,\xi(p/q))|=0\\&\Longrightarrow\ q\,\xi(p/q)\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

由于 ξ 严格递增，对所有 $0\le p<q\in\mathbb{Z}_{\ge1}$，都有 $0\le\xi(p/q)<1$，因此

$$0<q\,\xi(1/q)<q\,\xi(2/q)<\cdots<q\,\xi(1-1/q)<q\in\mathbb{Z},$$

这意味着 $q\,\xi(p/q)=p$。由于 $\mathcal{T}_1\xi=\xi\mathcal{T}_1$，可得对所有 $r\in\mathbb{Q}$，$\xi(r)=r$，证明至此完成。□

因此，群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 可刻画为使下图交换的群，其行均为正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc}1&\longrightarrow&\mathbb{Z}&\longrightarrow&\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})&\longrightarrow&1\\&&Z\big(\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)\big)&&\downarrow&\ulcorner&\downarrow&&\\1&\longrightarrow&\{\mathcal{T}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}&\longrightarrow&\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)&\longrightarrow&\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)&\longrightarrow&1.\end{array}\tag{2.2}$$

注 2.3（另一种构造）。1964 年，L. Puk´anszky [6, 第 1.B 节，a.] 通过提升 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的岩泽分解中的元素 ρ_ϑ、a_λ、u_x，构造了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$；也就是说，无需求助于 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$。

2.3. 典范提升。考虑由以下方式定义的 $\varphi\in\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 到 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 的唯一提升族 $\widetilde{\varphi}\in$：

$$\widetilde{\varphi}(0):=\text{the unique real number in }[0,1)\text{ such that }\overline{\widetilde{\varphi}(0)}=\varphi(\overline{0})$$

并且，对于 $x\in[0,1)$，

$$\widetilde{\varphi}(x):=\text{the unique lifting of }\varphi(\overline{x})\text{ in }[\widetilde{\varphi}(0),\widetilde{\varphi}(0)+1).$$

对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，$\widetilde{\varphi}(x+n):=\widetilde{\varphi}(x)+n$。根据以下两个断言，我们称它们为典范提升。

• 断言 1：$\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$。

对于任意 $0\le t<1$，我们有 $\varphi\big([\overline{0},\overline{t})\big)=[\varphi(0)\ \varphi(\overline{t}))$，因此 $\widetilde{\varphi}\big([0,t)\big)=[\widetilde{\varphi}(0)\ \widetilde{\varphi}(t))$，这意味着 $\widetilde{\varphi}|_{[0,1)}$ 是双射、双连续且递增的。由于

$$\widetilde{\varphi}(x)=\lfloor x\rfloor+\widetilde{\varphi}|_{[0,1)}(x-\lfloor x\rfloor)$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}$，显然 $\widetilde{\varphi}$ 也是双射且双连续的。

• 断言 2：若 $\overline{\alpha}=\varphi$，则存在某个 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $\alpha=\mathcal{T}_n\widetilde{\varphi}$。

对于 $0\le t<1$，我们有 $\overline{\alpha(t)}=\overline{\alpha}(\overline{t})=\varphi(\overline{t})$；因此，根据构造，对于每个 $x\in\mathbb{R}$，$\alpha(x)-\widetilde{\varphi}(x)$ 都是整数。由于 α 和 $\widetilde{\varphi}$ 均连续，而 $\mathbb{Z}$ 是离散的，我们得出 $\alpha(x)-\widetilde{\varphi}(x)$ 是常数，因此 $\alpha\widetilde{\varphi}^{-1}\in\{\mathcal{T}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$。

注 2.4（替代提升）。在 Zhang [7], 的引理 3.5 第 150 页中，讨论了覆盖映射 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\twoheadrightarrow\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的另一种截面。此类替代提升的构造可简述如下。对于元素 $\gamma\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$，有两种可能：

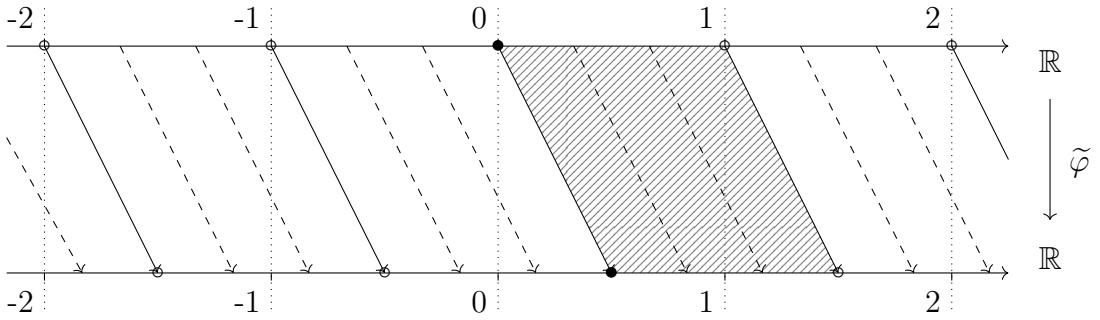


FIGURE 2. φ 的典范提升： $\mathbb{S}^1 \ni \overline{x} \mapsto \overline{x + 1/2} \in \mathbb{S}^1$。

(i) 不动点：如果 γ 有实特征空间，[1] 那么它所诱导的自同态$\frown\varphi_\gamma \in$ Homeo$_+(\mathbb{S}^1)$ 有一个不动点。因此，取 $\widehat{\gamma} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 为 φ_γ 的唯一一个具有不动点的提升。

(ii) 一般情形：设 $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$。若 $c = 0$，则 $(1, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ 是 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的一个特征向量，因此属于前一种情形。于是我们可以假设$c \neq 0$。由此可得

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0, \quad \text{where } x := b - \frac{(a-1)(d-1)}{c},$$

因此，$\det(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} - \text{恒等元}) = 0$，这意味着 $\mathfrak{u}_x, \gamma\mathfrak{u}_x^{-1} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 各自都有一个实特征空间，属于前一种情形。写作 $\gamma_1 := \gamma\mathfrak{u}_x^{-1}$，于是可定义 $\widehat{\gamma} := \widehat{\gamma_1}\widehat{\mathfrak{u}_x}$。注意，$x = x(\gamma)$ 是满足 $\det = 0$条件的唯一实数$\widetilde{\ }$，因此 $\widehat{\gamma} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 唯一确定。

3. INVARIANTS IN $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$

按照 Ghys [3], ，定义 $\alpha \in \widetilde{\mathrm{H}\text{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 的平移数为以下极限

$$\tau(\alpha) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n(x) - x}{n}, \tag{3.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$ 任意。函数 τ 定义良好，是一个齐次拟同态；[2]特别是，它在共轭下保持不变。本节旨在描述与元素 $\alpha \in \widetilde{\mathrm{H}\text{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 相关的另外两个不变量：

- 方向类型：由平移幅度 $|\tau(\alpha)| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和平移方向 $\sigma(\alpha) \in \{-1, 0, 1\}$组成；以及
- 函数 $\ell^\sharp : \widetilde{\mathrm{H}\text{omeo}}_+(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}^\sharp_{\geq[0]^\circ}$

[1]~~这意味着~~，如果 $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$，那么 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 或 $\left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 有一个正实特征值。[2]设 G 是一个群。函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 是拟同态，当且仅当 $\sup_{g,\ h\in G} |f(gh) - f(g) - f(h)| < \infty$此外，如果对于每个 $g \in G$、$k \in \mathbb{Z}$，都有 $f(g^k) = kf(g)$，则称 f 是齐次的。

这两个概念都以某种方式衡量 $\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 中的“位移”。平移方向 σ 是 τ符号的细化，因此，数对 $(|\tau|,\sigma)$ 所包含的信息比仅有 τ更多。这个数对给出了方向类型。

3.1. 方向类型。对于 $\alpha\in\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$，我们将 $\sigma(\alpha)$ 定义如下：

- 若 $|\tau(\alpha)|>0$，则 $\sigma(\alpha):=\tau(\alpha)/|\tau(\alpha)|$;
- 若 $\alpha\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$，$\tau(\alpha)=0$ 且 $\tau(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha)>0$ 对每个 $\varepsilon>0$ 都成立，则 $\sigma(\alpha):=+1$;
- 若 $\alpha\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$，$\tau(\alpha)=0$ 且 $\tau(\mathcal{T}_{-\varepsilon}\alpha)<0$ 对每个 $\varepsilon>0$ 都成立，则 $\sigma(\alpha):=-1$;
- 如果以上条件均不满足，则我们定义 $\sigma(\alpha):=0$。

当对所有 $\varepsilon>0$，$\tau(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha)>0$ 和 $\tau(\mathcal{T}_{-\varepsilon}\alpha)<0$ 均成立时，唯一满足条件的情形是恒等元。事实上，若 $\alpha\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$，则存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha(x)>x$ 或 $\alpha(x)<x$成立；因此，令 $\varepsilon:=|\alpha(x)-x|$，则 $\tau(\mathcal{T}_{-\varepsilon}\alpha)=0$ 或 $\tau(\mathcal{T}_\varepsilon\alpha)=$0成立。因此，对于 $\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 的所有元素，σ 都有良好定义。

定义 3.1（方向类型）。给定满足 $\alpha\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ 的 $\alpha\in\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$，称 α具有方向类型 $(\frac{\tau}{|\tau|},\ \sigma)$，其中定义 $\frac{\tau}{|\tau|}:=0$，若 $\tau(\alpha)=0$。

方向类型（$\frac{\tau}{\lvert\tau\rvert}$, σ）-对		描述
正向	(1, 1)	$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x)-x>0$
半正向	(0, 1)	α 有一个不动点；$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x)-x\geq 0$
交替	(0, 0)	$\alpha(x)-x$ 符号改变
半反向	$(0,-1)$	α 有一个不动点；$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x)-x\leq 0$
反向	$(1,-1)$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x)-x<0$

若 $\alpha=$恒等元$_{\mathbb{R}}$，则我们就称其为恒等元。

若 α 是交替型，则 α^{-1}也是交替型。若 α 是前向型（分别为半前向型），则 α^{-1}是反向型（分别为半反向型）；也就是说，$\frac{\tau}{|\tau|}(\alpha^{-1})=\frac{\tau}{|\tau|}(\alpha)$ 且 $\sigma(\alpha^{-1})=-\sigma(\alpha)$。由于 τ 在共轭下保持不变，$\frac{\tau}{|\tau|}$也如此；σ也同样如此：

引理 3.2. 方向类型在 $\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 中在共轭下保持不变。

证明。设 $\alpha,\beta\in\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$。若 α是前向型，则对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $\alpha(x)>x$，这意味着 $\alpha(\beta^{-1}(x))>\beta^{-1}(x)$；因此，由于 $\beta\beta^{-1}(x)=x$，可得 $\beta\alpha\beta^{-1}(x)>x$。半前向型的情形也同理，而 α 为反向型或半反向型的情形也可类似证明。

在 $\mathbb{R}$ 中具有不动点的 $\mathrm{H}\widetilde{\mathrm{omeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 元素集合显然在共轭下保持不变。根据定义 3.1，它可分解为半正向、半反向和交替三者的不交并。由于前两种情况在共轭下保持不变，第三种情况也必然如此。□

3.2. 位移长度。根据 Zhang 的引理 3.7 中的定义 [7], 现在考虑长度函数：

$$\ell:\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)\to\mathbb{R}_{\geq 0},\qquad \ell(\alpha):=\sup_{t\in[0,1]}|\alpha(t)-t|. \tag{3.2}$$

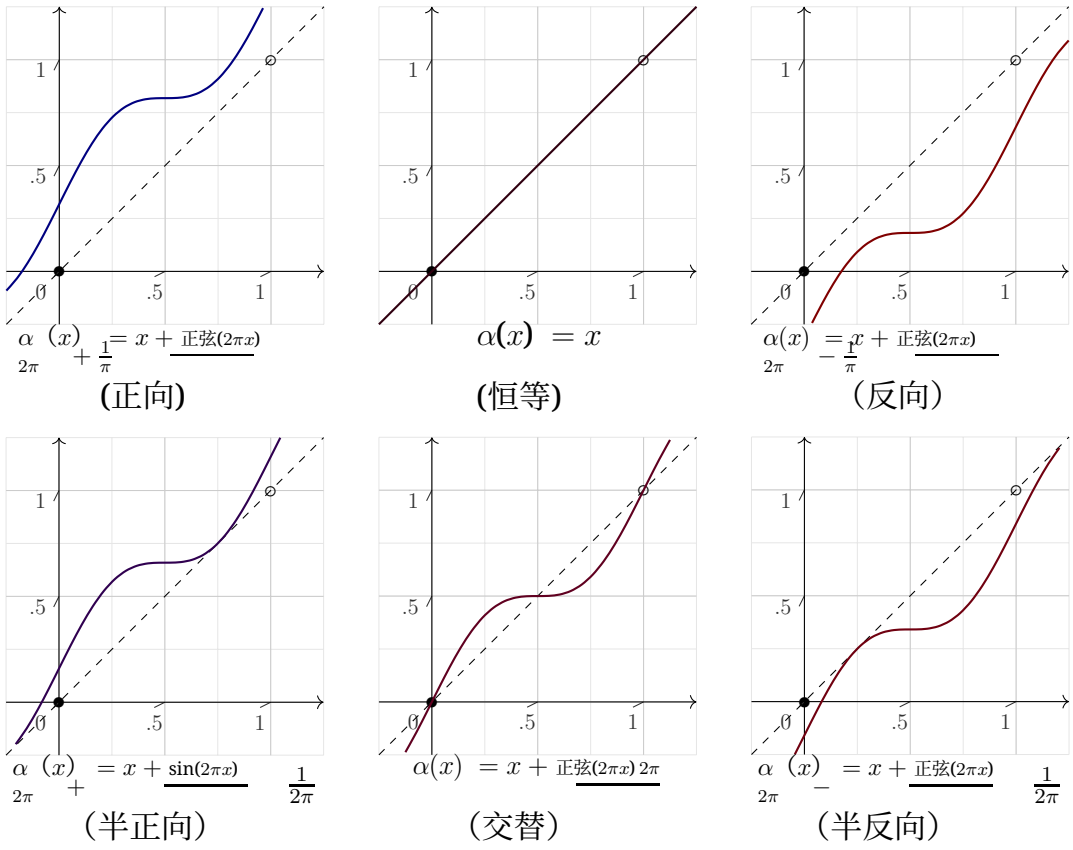


FIGURE 3. 每种方向类型的函数示例。

由于对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\alpha(t+1) = \alpha(t) + 1$，且 $[0,1]$ 是紧的，因此 ℓ 定义良好，并且对所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\ell(\alpha) = \max_{t\in[x,x+1]} |\alpha(t) - t|$；其中 $\ell(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha =$ 恒等元$_{\mathbb{R}}$。容易验证，ℓ 在 $\mathrm{H}\widetilde{\ }\mathrm{omeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的自然度量下是 1-Lipschitz 的，因而连续。此外，对于任意满足 $y \in \mathbb{R}$ 的平移 $\mathcal{T}_y$，都有 $\ell(\mathcal{T}_y) = |y|$。

引理 3.3（ℓ的基本性质）。设 $\alpha, \beta \in \mathrm{H}\widetilde{\ }\mathrm{omeo}_+(\mathbb{S}^1)$。以下结论成立：

(i) $|\tau(\alpha)| \le \ell(\alpha)$；(ii) $\ell(\alpha\beta) \le \ell(\alpha) + \ell(\beta)$；(iii) 若 α 有不动点，则 $\ell(\alpha) < 1$；(iv) $\ell([\alpha,\beta]) < 2$。

证明。对于 (i)，对每个 $n \ge 1$，我们有

$$\begin{aligned} |\alpha^n(x) - x| &\le |\alpha(\alpha^{n-1}(x)) - \alpha^{n-1}(x)| + |\alpha^{n-1}(x) - x| \\ &\le \ell(\alpha) + |\alpha^{n-1}(x) - x|, \end{aligned}$$

因此，$|\alpha^n(x) - x| \le n\,\ell(\alpha)$，这意味着 $|\tau(\alpha)| \le \ell(\alpha)$。

对于 (ii)，由于 β 是双射，且 $\beta(1) = \beta(0) + 1$，我们有

$$\begin{aligned} \ell(\alpha\beta) &= \max_{t\in[0,1]} |\alpha\beta(t) - t| \\ &\le \max_{t\in[0,1]} \big(|\alpha\beta(t) - \beta(t)| + |\beta(t) - t|\big) \end{aligned}$$

$$\leq \max_{u\in[\beta(0),\beta(1)]} |\alpha(u)-u| + \max_{t\in[0,1]} |\beta(t)-t| = \ell(\alpha)+\ell(\beta).$$

对于 (iii)，设 $x^*\in\mathbb{R}$ 是 α 的某个不动点。由于 $\ell(\alpha)=\sup_{t\in[x^*,x^*+1]}|\alpha(t)-t|$，取 $t^*\in[x^*,x^*+1]$ 使得 $\ell(\alpha)=|\alpha(t^*)-t^*|$。由 α 严格递增且 $\alpha(x^*+1)=\alpha(x^*)+1$，可推出 $\alpha([x^*,x^*+1])=[x^*,x^*+1]$。因此，我们有 $T^*:=\alpha(t^*)\in(x^*,x^*+1)$；区间的端点不包含在内，因为 $\alpha(x^*)=x^*$，由此可得 $\ell(\alpha)=|T^*-t^*|<1$。

对于 (iv)，根据引理 2.2，存在 $\varphi\in\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，使得$\alpha=\mathcal{T}_n\widetilde{\varphi}$，其中 $\widetilde{\varphi}$ 是 φ的典范提升。由于 $\mathcal{T}_n$ 是中心中的一个元素，因此可得 $[\alpha,\beta]=[\widetilde{\varphi},\beta]=\widetilde{\varphi}\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}$。由引理 3.2 可知，$\widetilde{\varphi}^{-1}$和 $\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}$ 具有相同的方向类型，因此，$\widetilde{\varphi}$和 $\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}$要么都具有不动点，要么方向相反（即 $\sigma(\widetilde{\varphi})=-\sigma(\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1})$）。我们分别考虑这两种情况：

情况 1：如果 $\widetilde{\varphi}$和 $\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}$ 都具有不动点，那么根据条目 (iii)，有 $\ell(\widetilde{\varphi})<1$ 和 $\ell(\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1})<1$。因此，根据条目 (ii)，可得 $\ell([\widetilde{\varphi},\beta])<2$。

情形 2：假设 $\sigma(\widetilde{\varphi})=1$。根据典范提升的构造，我们有$0\leq\widetilde{\varphi}(0)<1$，因此，$\max_{t\in[0,1]}|\widetilde{\varphi}(t)-t|\leq|\widetilde{\varphi}(1)-0|<2$。由于 β是 $\mathbb{R}$上的严格递增自同胚，因此

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}^{-1}(t) > t-2 && \text{(applying } \beta \text{ on both sides)}\\
\Longrightarrow\quad &\beta\widetilde{\varphi}^{-1}(t) > \beta(t)-2 && \text{(substituting } t\mapsto\beta^{-1}(u)\text{)}\\
\Longrightarrow\quad &\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}(u) > u-2,
\end{aligned}$$

这意味着 $\ell(\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1})<2$ 也成立。因此，由于 $\sigma(\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1})=-1$，对所有 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$0\leq\widetilde{\varphi}\big(\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}(t)\big)-\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}(t)<2,$$
$$-2<\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}(t)-t\leq 0,$$

从而

$$-2<\widetilde{\varphi}\beta\widetilde{\varphi}^{-1}\beta^{-1}(t)-t<2,$$

这等价于 $\ell([\widetilde{\varphi},\beta])<2$，正如所需。当 $\sigma(\widetilde{\varphi})=-1$时，证明过程类似。□

从概念上说，我们希望得到 ℓ的一个共轭不变版本。基于 Mochizuki 第 3 节中定义的“$\delta^{\sup}$”函数 [5]，，令

$$\mathbb{R}^\sharp := \mathbb{R}/\cong,\ \text{where } x\cong y \iff \begin{cases} x=y\in\mathbb{Z},\ \text{or}\\ x,y\in(k,k+1)\ \text{for some } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
$$=\{\ldots,[(-2,-1)],[-1],[(-1,0)],[0],[(0,1)],[1],[(1,2)],\ldots\},$$

并将商映射记为 $\mathbb{R}\ni x\mapsto x^\sharp\in\mathbb{R}^\sharp$。这个对象也可视为 $\mathbb{R}$ 在 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)$ 中固定 $\mathbb{Z}$ 的子群作用下所得的商，即 $\mathrm{Stab}_{\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)}(0)\curvearrowright\mathbb{R}$，其中

$$\mathrm{Stab}_{\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)}(0):=\{\alpha\in\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{S}^1)\mid\alpha(0)=0\}.$$

尽管 $\mathbb{R}^\sharp$ 与半整数 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 之间存在自然的序同构，但后者的群结构并不适用于前者，因此我们避免将两者等同。对 $x^\sharp$ 的另一种描述是集合 $\{\lfloor x\rfloor, \lceil x\rceil\}$，这突显了映射 $x \mapsto x^\sharp$ 所造成的信息损失的确切程度——Mochizuki 的第 3 节将其称为不确定性 [5]。

$\mathbb{R}^\sharp$ 的主要特征是，定义

$$\ell^\sharp(\alpha) := \big(\ell(\alpha)\big)^\sharp \in \mathbb{R}^\sharp, \tag{3.3}$$

我们有

命题 3.4。 $\ell^\sharp$ 在 $\mathrm{H}\widetilde{\ }\mathrm{omeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 中的共轭下是不变的。

证明。设 α, $\beta \in \mathrm{H}\widetilde{\ }\mathrm{omeo}_+(\mathbb{S}^1)$。如果 $\alpha \neq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ 有一个不动点，那么根据引理 3.3 (iii)，我们有 $\ell^\sharp(\alpha) = [0,1)$, ；根据引理 3.2，我们还可知 $\beta\alpha\beta^{-1}$ 也有一个不动点，这意味着 $\ell^\sharp(\beta\alpha\beta^{-1}) = \ell^\sharp(\alpha) = [0,1)$。因此，假设 α 是前向型的。我们将证明

$$\ell(\alpha) < n \implies \ell(\beta\alpha\beta^{-1}) < n, \quad \ell(\alpha) \leq n \implies \ell(\beta\alpha\beta^{-1}) \leq n,$$
$$\ell(\alpha) > n \implies \ell(\beta\alpha\beta^{-1}) > n \quad \text{and} \quad \ell(\alpha) \geq n \implies \ell(\beta\alpha\beta^{-1}) \geq n.$$

如果 $\ell(\alpha) < n$，设 $\ell(\beta\alpha\beta^{-1}) \geq n$；也就是说，存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$\beta\alpha\beta^{-1}(x) \geq x + n.$$

由于 β^{-1} 递增且与 $\mathcal{T}_n$可交换，我们有 $\alpha(\beta^{-1}(x)) \geq \beta^{-1}(x) + n$，这意味着存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha(y) - y \geq n$，从而导致矛盾。当 $\ell(\alpha) \leq n$ 时，情形类似。

若 $\ell(\alpha) \geq n$，假设 $\ell(\beta\alpha\beta^{-1}) < n$；也就是说，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，我们都有

$$\beta\alpha\beta^{-1}(x) < x + n.$$

由于 β^{-1} 递增且与 $\mathcal{T}_n$可交换，我们有 $\alpha(\beta^{-1}(x)) < \beta^{-1}(x) + n$，这意味着对于每个 $y \in \mathbb{R}$，我们都有 $\alpha(y) - y < n$，从而导致矛盾。若 $\ell(\alpha) > n$，同理可得；当 α 为反向型时，情形也类似，由此完成证明。□

$\widetilde{\ }$4. Conjugacy classes of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的共轭类

记 $I := \mathrm{C}\ell(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$，并对每个 $i \in I$，选取并固定一个代表元 $\varphi_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$，使得 $\mathrm{C}\ell(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) = \{[\varphi_i] \mid i \in I\}$。由 (2.2) 可知， φ_i 的典范提升 $\widetilde{\ }$liftings $\widetilde{\varphi}_i$ 属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$。这些元素连同中心，足以描述 $\mathrm{C}\ell(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$。

$\widetilde{\ }$命题 4.1. 对于每个 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，都存在唯一的 $i \in I$（如上所定义）和唯一的 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\alpha \sim \mathcal{T}_k\,\widetilde{\varphi}_i$。

$\widetilde{\ }$证明。设 $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，并取如上定义的 $\varphi_i \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$，使得 $\overline{\alpha} = p\varphi_i p^{-1}$，其中 $p \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$。提升到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，由 (2.2) 可得 $\alpha = \widetilde{p}\,\mathcal{T}_k\widetilde{\varphi}_i\,\widetilde{p}^{-1}$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。由于 $\mathcal{T}_k\,\widetilde{\varphi}_i \sim \mathcal{T}_\ell\,\widetilde{\varphi}_j$ 蕴含 $i = j$，我们只需证明 $k = \ell$。

设 $\beta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 满足 $\mathcal{T}_{k-\ell}\,\widetilde{\varphi}_i = \beta\widetilde{\varphi}_i\beta^{-1}$。由于 $\mathcal{T}_{k-\ell}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的中心，对每个 $n \geq 1$，我们有

$$\mathcal{T}_{n(k-\ell)} = [\beta, \widetilde{\varphi}_i^n].$$

然而，根据引理 3.3 (iv)，对于每个 $n \geq 1$，我们有 $n(k-\ell) = \ell([\beta, \widetilde{\varphi}_i^n]) < 2$。因此，$k = \ell$。□

注 4.2（共轭类上的主齐性空间结构）。考虑表示群 G的中心扩张 E 的正合列：

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} G \longrightarrow 1.$$

命题 4.1 表明，对于 $Z = \mathbb{Z}$，$E = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$，上述正合列具有以下性质：

$\mathrm{C}\ell(E)$ 沿诱导映射 $\phi^{\mathrm{C}\ell} : \mathrm{C}\ell(E) \twoheadrightarrow \mathrm{C}\ell(G)$ 是 $\mathrm{C}\ell(G)$ 上的一个 Z-主齐性空间。这意味着，如果 $pq = qp$ 属于 G，那么对于任意提升 $\widetilde{p}$、$\widetilde{q} \in E$，都有 $\widetilde{pq} = \widetilde{qp}$。事实上，由于 $(pq) = (qp)$，我们有 $(pq) = \mathcal{T}_n\widetilde{pq}$ 且 $(qp) = \mathcal{T}_k\widetilde{qp}$，其中某些 k、$n \in \mathbb{Z}$，因此 $\mathcal{T}_n\widetilde{q} \sim \mathcal{T}_k\widetilde{q}$。根据命题 4.1，$n = k$，从而 $\widetilde{pq} = \widetilde{qp}$。

满足这一性质的其他值得关注的群扩张包括：

- 实辛群的万有覆盖 $Sp_{2n}(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$（参见 Barge–Ghys 的命题 2.3 (i) [2]）；
- $\widetilde{\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^n)} \twoheadrightarrow \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^n)$ 是 n 维环面自同胚群的单位连通分支的万有覆盖（参见 Herman 的 Remarque 2.12，第 22 页 [4]）。

作为一个反例，经典双覆盖 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 不满足这一性质。

定理 4.3。在第 1.1 小节的记号下，$\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ 的共轭类由下表描述，其中每个 $\vartheta \in (0, \pi)$、$\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 分别表示不同的共轭类：

共轭类	$\ell^\sharp$
$[\text{恒等元}_{\widetilde{\mathbb{R}}}]$	$[0]$
$[\widetilde{\mathrm{u}}_1]$, $[\widetilde{\mathrm{u}}_{-1}]$, $[\widetilde{\mathrm{a}}_\lambda]$, $[\widetilde{\rho}_\vartheta]$, $[\mathcal{T}_{-1}\,\widetilde{\rho}_\vartheta]$	$[(0,1)]$
$[\mathcal{T}_n]$, $[\mathcal{T}_{-n}]$, $[\mathcal{T}_n\,\widetilde{\mathrm{u}}_1]$, $[\mathcal{T}_{-n}\,\widetilde{\mathrm{u}}_{-1}]$	$[n]$
$[\mathcal{T}_{-n}\,\widetilde{\mathrm{u}}_1]$, $[\mathcal{T}_n\,\widetilde{\mathrm{u}}_{-1}]$, $[\mathcal{T}_n\,\widetilde{\mathrm{a}}_\lambda]$ $[\mathcal{T}_{-n}\,\widetilde{\text{啊}}_\lambda]$, $[\mathcal{T}_n\,\widetilde{\rho}_\vartheta]$, $[\mathcal{T}_{-1-n}\,\widetilde{\rho}_\vartheta]$	$[(n, n+1)]$

证明。根据命题 4.1，上面列出的共轭类彼此不等价$\widetilde{\ }$，并且涵盖了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的所有元素。我们只需检查每个共轭类的 $\ell^\sharp$ 值；根据命题 3.4，我们知道它是共轭不变的。

显然，$\ell^\sharp(\text{恒等元}_{\widetilde{\mathbb{R}}}) = [0]$ 且 $\ell^\sharp(\mathcal{T}_n) = \ell^\sharp(\mathcal{T}_{-n}) = [n]$。此外，由于 $\widetilde{\rho}_\vartheta = \mathcal{T}_{\vartheta/\pi}$，对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们都有 $\ell^\sharp(\mathcal{T}_k\,\widetilde{\rho}_\vartheta) = \ell^\sharp(\mathcal{T}_{-1-k}\,\widetilde{\rho}_\vartheta) = [(k, k+1)]$。由于 $\widetilde{\ }\mathrm{u}1$、$\widetilde{\ }\mathrm{u}_{-1}$ 和 $\widetilde{\ }\mathrm{a}_\lambda$ 都有不动点，根据引理 3.3 (iii)，有 $\ell^\sharp(\widetilde{\mathrm{u}}_1) = \ell^\sharp(\widetilde{\mathrm{u}}_{-1}) = \ell^\sharp(\widetilde{\mathrm{a}}_\lambda) = [(0,1)]$。根据 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{S}^1$ 的作用定义，可以验证 $\widetilde{\ }\mathrm{u}_{-1}$ 属于

半正向方向类型，而 $\tilde{\mathrm{u}}_1$ 属于半反向型。由引理 3.3 (iii)，我们知道 $\ell(\tilde{\mathrm{u}}_{-1})\ \ell(\tilde{\mathrm{u}}_1) < 1$，因此可得，对于每个 $n \geq 1$,

$$\ell^\sharp(\mathcal{T}_n\, \widetilde{\mathrm{u}}_1) = \ell^\sharp(\mathcal{T}_{-n}\, \widetilde{\mathrm{u}}_{-1}) = [n],$$
$$\ell^\sharp(\mathcal{T}_{-n}\, \widetilde{\mathrm{u}}_1) = \ell^\sharp(\mathcal{T}_n\, \widetilde{\mathrm{u}}_{-1}) = [(n, n+1)].$$

最后，对于 $\tilde{\mathrm{a}}_\lambda$，由于 $\ell(\tilde{\mathrm{a}}_\lambda) < 1$ 和 $\tilde{\mathrm{a}}_\lambda$ 属于交替型，$\ell^\sharp(\mathcal{T}_n\, \tilde{\mathrm{a}}_\lambda)$ 和$\ell^\sharp(\mathcal{T}_{-n}\, \tilde{\mathrm{a}}_\lambda)$ 必须都等于 $[(n, n+1)],$，从而完成证明。□

Acknowledgements

我要感谢望月新一和山下刚向我推荐这个课题，并耐心指导了这篇研究札记的早期版本。我还要感谢匿名审稿人对本文呈现方式提出的宝贵意见。

References

1. J. Amor´os、F. Bogomolov、L. Katzarkov 和 T. Pantev，《具有任意基本群的辛 Lefschetz 纤维化》，《微分几何杂志》54（2000），第 3 期，489–545。 2. J. Barge 和 E. Ghys，《欧拉与马斯洛夫余循环》，《数学年刊》294（1992），235–265。 3. E. Ghys，《作用于圆周的群》，《数学教学》47（2001），第 3–4 期，329–407。 4. M. R. Herman，《圆周微分同胚与旋转的可微共轭》，I nst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 49（1979），5–233。 5. S. Mochizuki，《从互宇宙 Teichm ¨uller 理论的角度看 Bogomolov 对 Szpiro 猜想几何版本的证明》，《数学科学研究》3（2016），3:6。 6. L. Puk´anszky，《SL(2, $\mathbb{R}$) 万有覆盖群的 Plancherel 公式》，Math. An- nalen 156（1964），96–143。 7. S. Zhang，《代数点的几何》，《第一届国际华人数学家大会》（北京，1998），AMS/IP 高等数学研究，第 20 卷，2001 年，第 185–198 页。

Département de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ Centre-Ville, Montreal, QC H3C 3J7, Canada电子邮箱地址:
christian.tafula.santos@umontreal.ca