arXiv:2304.08656v2 [hep-ph] 2 Oct 2023

2023年10月3日

扩展Jordan-Brans-Dicke引力的约束

Kunio Kaneta[1],Kin-ya Oda[2], 和 Motohiko Yoshimura[†3]

东京女子基督教大学数学系，东京 167-8585，日本

† 冈山大学跨学科科学研究所，日本冈山县冈山市北区津岛中 3-1-1，邮编 700-8530

摘要

本文在爱因斯坦度规框架下对扩展 Jordan-Brans-Dicke（eJBD）引力进行宇宙学分析，在该框架中，引力相互作用易于理解。我们的表述首次系统地探讨了如何在 eJBD 框架中引入标准粒子物理拉格朗日量，并使之符合自发破缺的规范对称性这一一般原理，从而能够将基于 eJBD 的宇宙学与由 eJBD 场时间演化所导致的参数、质量和耦合常数随时间变化的观测与实验室界限进行比较。我们提出将标准粒子物理拉格朗日量分解为相互独立的规范不变部分，以避免从 Jordan 框架变换而来的标准拉格朗日量可能引发的严重冲突。五个规范不变部分各自具有独立的共形因子。通过定义具有正则动能项的场，可以最明确地实现这一表述，并据此使用场论的正则量子化规则。这一构造的推论之一是，正则eJBD场 χ 除了与能量-动量张量的常规迹耦合外，还与普适费米子流（重子数流和轻子数流的线性组合） $\partial_\mu\chi(3j^\mu_B + j^\mu_L)$耦合。我们采用一类简化的多项式势和共形函数，分析了eJBD场方程及引力方程；在采用一组适当的模型参数时，所得辐射、物质和暗能量密度的时间演化与观测相符。我们还进一步计算了有限温度修正，得到eJBD场势中的温度相关项。

关键词：暗能量、精质、Jordan-Brans-Dicke 引力、有限温度效应、随时间变化的精细结构常数

[1]kaneta@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp，现地址：大阪大学物理学系[2]odakin@lab.twcu.ac.jp[3]yoshim@okayama-u.ac.jp

1 引言

标量场是暴胀宇宙模型的重要组成部分。此外，它对于解决暗能量问题也可能至关重要。在众多标量-张量引力理论中，扩展 Jordan-Brans-Dicke [1]（本文简称为 eJBD）理论属于很有前景的一类，近期已有许多研究从不同角度探讨其在暴胀模型 [2] 和暗能量模型 [3, 4, 5, 6]中的应用。

从历史上看，除张量场之外，标量场最早由 Jordan 和 Brans-Dicke（JBD）引入引力理论中 [1]。随后，Bergmann 和 Wagoner 将 JBD 理论扩展到更一般的标量-张量理论，其中实质上包含两个任意的标量场函数 [7, 8]。在本文中，我们将这一 JBD 标量-张量引力的扩展类别称为扩展 JBD 理论（eJBD）。根据所引入的两个函数的选择，可以描述一大类标量-张量引力。通过选择单一幂函数或单一指数函数，并在 Jordan 度规框架中引入宇宙学常数，广受欢迎的精质模型 [9] 属于 eJBD 理论。

eJBD 理论分为两类。I 型模型的势使 eJBD场在近期时期趋于某个有限的场值，从而产生具有有限宇宙学常数的广义相对论宇宙学；也就是说，在当前时代，它实际上给出 ΛCDM 模型。采用 [4, 5] 中给出的不同势的变色龙模型及相关模型属于这一类。在其中一些模型中，宇宙学常数的精细调节问题仍然十分严重。另一方面，如果所引入的两个函数的渐近比满足某一条件，II 型模型中的场将永远不会趋于稳定，而是渐近地逼近场无穷远。最初的精质模型 [9] 也属于这一类模型。我们模型的一个优点是，它可能为解决宇宙学常数的精细调节问题提供可能性，例如 [10] 所提出的方案。

我们认为，为了解释当前暗能量为何如此微小，约为 $(\text{meV})^4$ ，eJBD场必须随宇宙时间演化而变化 [10]。因此，在本研究中，我们将重点关注 II 型 eJBD模型。在本研究中，当场单调且缓慢地趋向无穷大时，eJBD的时间变化称为场滑移[1] 。一种类似的暗能量场概念是精质 [9] ，它引入了暗能量场的简单指数势或幂律势。我们选择了另一种势，因为我们的最终目标还包括将同一个 eJBD场归因于暴胀的起源。实现滑移所能选择的场势有限，但新的 eJBD引力表述所允许的自由度，使得选择一类有趣的势成为自然之举。

将标准粒子物理拉格朗日量纳入 eJBD引力，以便将 eJBD引力应用于宇宙学，需要处理若干重要问题。我们首先提出一个问题：基于 eJBD引力的宇宙学中，度规框架有何差异？关于 Jordan 框架和爱因斯坦框架中哪一个在宇宙学上更具物理相关性，已有一些令人困惑的说法 [11, 12, 13][2]。我们采取务实的观点，认为爱因斯坦框架更便于处理引力相互作用。此外，度规框架最好定义为能够提供恒定时间基准，从而明确时空结构。通常通过原子能级差来定义时钟，以获得精确且稳定的振荡周期。因此，我们认为，最好寻找一个爱因斯坦框架，使典型时钟的电子质量倒数保持恒定，并尽可能使精细结构常数也保持恒定。如此定义的度规框架假定引力常数G_N、电子质量 m_e $\hbar$和光速 c 均为时间不变量。不过，如果可接受的框架允许，我们可以让精细结构常数、质子质量、W玻色子质量和希格斯耦合等其他常数随宇宙学演化而变化。

我们这样表述参数随时间变化的问题：在 Jordan框架中，标准粒子物理拉格朗日量中彼此独立的规范不变部分，分别由 eJBD理论的通用共形函数的独立幂次调节。随后，标准粒子物理的量子场论通常会受到各种宇宙学约束，这些约束涉及质量和耦合常数随时间的变化。近期

[1]我们倾向于使用这一术语，而不是常用的径向逃逸，以强调场的缓慢时间变化。[2] [14] 已证明，当纳入所有高质量维数项时，爱因斯坦框架与Jordan框架在物理上等价。表面上的差异源于所采用的框架不同，而在该框架中，作用量被假定具有某种特定的简化形式。

推导出的观测（及实验室）约束非常严格，我们发现，能够通过所有这些检验的 eJBD 理论十分有限。例如，若直接在 Jordan 度规框架中引入标准粒子物理拉格朗日量，再通过韦尔变换将其转换到爱因斯坦框架，推导出的拉格朗日量会与精细结构常数变化的严格界限不相容，因此该理论被排除。

关于参数随时间变化，已有严格的界限。这些观测界限是根据大爆炸核合成（BBN）及之后时期的宇宙学推导得出的。因此，在分析这一问题时，eJBD场作为暗能量成分的行为只在这些较晚的宇宙学时期才变得重要。不过，eJBD场或许能为更早时期宇宙学中的一些未解问题提供重要线索，例如重子不对称的产生和暴胀。讨论大爆炸核合成之前的宇宙学，需要了解eJBD场如何演化，包括有限温度效应。在本研究中，我们着手探讨eJBD理论中的有限温度效应，并运用新的形式体系阐明电弱自发对称性破缺的本质。

文献中许多人都注意到了扩展 Jordan-Brans-Dicke 理论中的宇宙学质量变化 [15], ，并提出将这种变化用于各自不同的目的。支持耦合常数或无量纲质量比随时间变化的理论动机，已有综述 [16]。但据我们所知，尚无系统研究探讨如何在基于扩展乔丹-布兰斯-迪克理论的引力中引入质量和耦合随时间变化，同时使之符合标准粒子物理的一般量子场论原理。我们希望，本研究提出的一般方法能为讨论 eJBD 引力中参数随时间变化提供一个基础框架。

与我们的工作思路最为接近的是 [17]。这项工作强调弦理论与膨胀子-物质耦合之间的联系，而我们的工作则采取了更务实的观点，着眼于将粒子物理学引入 eJBD引力的原则，并对标准粒子物理的规范不变性和可重整化性加以限制。我们的正则形式比 [17] 中以最小耦合原理 之名引入标准粒子物理的方式更为一般。此外，这项工作坚持采用无质量乔丹-布兰斯-迪克场，该场在最近的宇宙学时期最终固定在一个驻点上；而我们的工作考虑的是一种更一般的有质量的扩展乔丹-布兰斯-迪克场，它在当下仍随时间变化。

本工作的新贡献在于推导出扩展乔丹-布兰斯-迪克标量场与标准模型之间允许的耦合。这一推导与超弦理论 [17]的既有认识以及标准模型规范对称性的自发破缺相一致。识别出这一类一般的标量-张量理论，对于确定因未观测到精细结构常数的时间变化而受到约束的参数范围十分重要。文献 [18] 中使用这类理论的一个子集来讨论第五种力类型的约束，但此外还有该文未讨论的其他宇宙学约束。若要完整讨论观测约束，就需要全面纳入标准模型拉格朗日量，如本工作所做的那样，涵盖全部五个独立的规范不变部分。

本文的结构安排如下。在第2节中，我们解释了为何 eJBD 引力会遇到严重问题：它与标准粒子物理参数时间变化的观测界限（零结果）相矛盾。接着，我们介绍如何在不违背粒子物理学中自发破缺规范理论这一基本概念的前提下修改 eJBD 理论。附录A说明了如何推导这类扩展的正则形式，从而可以直接使用场论的正则量子化规则。本节总结附录A中推导出的结果。我们指出，正则eJBD场与 $(3j_B + j_L)^\mu$ 的普适费米子流之间存在一种新的导数耦合。

第3节探讨 eJBD标量动力学。这对于讨论时间变化的理论预测与观测界限之间的关系是必要的，而 eJBD 理论的正则形式对此大有裨益。文中给出了一些解析解，使得通过与观测界限比较来推导允许的模型参数区域变得更加容易。文中还展示了数值计算，说明如何通过选择适当的参数，使大爆炸核合成之后辐射、物质和暗能量密度以及状态方程因子的时间演化与观测和理论预测相符。此数值模拟采用了附录B中介绍的技术。第4节讨论了五项关于精细结构常数时间变化、质量比以及未发现等效原理

违反现象的观测与实验室界限如何在我们的正则方法中约束模型参数。所有这些界限均根据大爆炸核合成时期及更近时期的观测和理论计算得出。

第5节开始讨论宇宙学的早期时期，并考察电弱对称性破缺可能如何受到修正。我们还将在第6节讨论有限温度效应，并计算有限温度修正对 eJBD场动能及势能的影响。最后，在两个附录中，我们将系统地介绍如何在附录A中得到与标准粒子物理相耦合的 eJBD 引力的正则形式，以及如何在附录B中数值计算各能量密度分量（辐射、物质和暗能量）随时间的演化，以及状态方程因子。

标量-张量引力中的参数约束已在许多不同类型的理论中得到广泛讨论。关于耦合常数变化的约束及支持这种变化的理论动机，详尽的综述可参见 [16]。我们对模型参数的宇宙学约束的讨论，基于不局限于特定模型的 eJBD 理论新的一般表述。部分参考文献 [4, 3]中简要讨论了这些约束。我们将在第4节稍后引用与本文约束相关的其他文献。

本文所呈现的内容包含一系列用途广泛的新可能性，其详细影响将留待我们未来关于早期宇宙学的研究加以探讨。在本文中，我们给出基本形式体系，并说明其与现有观测结果的一致性。我们仅概述若干可能的新研究方向。

我们采用自然单位 $c = 1 = \hbar$ 单位和玻尔兹曼常数 $k_B = 1$，除非另有说明 .

2 Sta 与规范 eJBD 场耦合 d

我们首先指出，将标准粒子物理学的拉格朗日量贸然引入eJBD引力时会遇到一个严重问题。

2.1 eJBD引力的问题

我们采用扩展的 Jordan-Brans-Dicke 标量-张量引力，而非广义相对论，作为引力理论。这些理论中的拉格朗日量的标量-张量部分为

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{16\pi G_N}F(\phi)R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_{st}\right). \tag{1}$$

为简单起见，我们采用单分量eJBD场 ϕ。后文将提及向多分量eJBD场的推广。 $\mathcal{L}_{st}$ 是标准粒子物理学的教科书式拉格朗日密度，完全不包含eJBD场 ϕ 。它与广义相对论的区别在于：Rici标量曲率 R前乘有共形函数 $F(\phi)$，并且包含势函数 $V(\phi)$；后者在原始JBD理论 [1]中并不存在。

通过度规缩放（称为韦尔缩放） $g_{\mu\nu} \to F(\phi)g_{\mu\nu}$，可以得到爱因斯坦度规框架。由此得到的爱因斯坦框架拉格朗日量为

$$\sqrt{-\bar{g}}\mathcal{L}^{\mathrm{E}}(\bar{g}_{\mu\nu},\phi) = \sqrt{-\bar{g}}\left(-\frac{1}{16\pi G_N}R(\bar{g}_{\mu\nu}) + \left(\frac{3}{16\pi G_N}(\partial_\phi \ln F)^2 + \frac{1}{2F}\right)(\partial\phi)^2 - \frac{1}{F^2}V(\phi) + \frac{1}{F^2}\mathcal{L}_{st}(\psi, \frac{\bar{g}_{\mu\nu}}{F})\right). \tag{2}$$

该方程中 F 因子的幂由度规 $\bar{g}^{\mu\nu}$ 的存在决定； $F\bar{g}^{\mu\nu}$ 对于每个 $\bar{g}^{\mu\nu}$（或等价地， $\bar{g}_{\mu\nu}/F$ 对于每个 $\bar{g}_{\mu\nu}$）。这种简单的操作会导致精细结构常数的时间变化遵循 α/F^2 [3]，而这受到严格的观测约束，除非 eJBD 场或 F

[3]正如后文将要讨论的，精细结构常数随时间变化的最终形式比此处所示的更复杂，但其时间变化仍受到严格约束。

在晚期保持近乎恒定（我们稍后解释修正 eJBD 理论中的观测界限时，这一结果会显而易见）。[4]

因此，我们需要扩展 eJBD 框架，以容纳标准粒子物理。我们的方案是重新制定引入标准粒子物理的规则：我们将 $\mathcal{L}_{st}$ 分解为五个规范不变部分，并将它们分别归于彼此独立的 F 因子[23]。这样，我们便遵循了规范不变性自发破缺这一基本思想，同时为 eJBD理论留出更大的自由度。未来，或许可以，也或许无法从高时空维度的超弦理论出发，将其紧致化到四维时空，从而为这种对共形因子的独立指派提供依据。在本文中，我们将采取一种更务实、更具唯象性的方法。

2.2 如何在 eJBD引力中引入标准模型

用正则场来定义量子场论在实践中十分重要，因为借此可以为玻色子和费米子建立正则等时对易与反对易规则。这可以通过一系列场重新定义来实现。拉格朗日量的其他部分——相互作用项和自发生成的质量项——则保持不变，同时我们允许耦合常数和质量随时间变化。这样，既可以运用量子场论的技术工具，也更便于与观测约束进行比较。我们在附录A中推导出具有标准动能项的正则场：玻色子的动能项为 $(\partial\phi)^2/2$ ，费米子的动能项为$_\psi i\gamma\cdot\partial\psi$ 。

以下总结了附录A中推导的正则表述。标准粒子物理由拉格朗日量的四个相互独立的规范不变部分构成：规范场 $\mathcal{L}_g$、费米子场 $\mathcal{L}_f$、希格斯场 $\mathcal{L}_H$、汤川耦合 $\mathcal{L}_Y$。此外，还存在一个 eJBD场的势。自然可以预期 [17] 弦理论会为这些拉格朗日算符引入五个相互独立的共形函数；$\sum_i F_i(\chi)\mathcal{L}_i$。我们最大限度地利用场重定义的自由度，将它们转化为正则量子化的标准形式。在爱因斯坦框架中写出实际公式时，我们采用由 $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\vec{x})^2$ [24]给出的弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克（FLRW）度规。

- 引力与 eJBD 标量场部分：作用量为

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{M_{\rm P}^2}{2}R + \frac{3}{4}M_{\rm P}^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu \ln F_{\rm g}\partial_\nu \ln F_{\rm g} + \frac{1}{2}\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{V_{\rm J}(\phi)}{F_{\rm g}^2}\right], \tag{3}$$

其中 $M_{\rm P} = 1/\sqrt{8\pi G_N} \sim 2.4\times10^{18}$GeV 为约化普朗克质量。原形式中存在的项 $-\frac{3}{2}M^2{}_{\rm P}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \ln F_{\rm g}$是一个表面项，已在此公式中删去。 χ 与ϕ 之间的关系取决于 $F_{{\rm d}\phi}$。正则归一化的模量场 χ 应定义为

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi \equiv \frac{3}{4}M_{\rm P}^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu \ln F_{\rm g}\partial_\nu \ln F_{\rm g} + \frac{1}{2}\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \tag{4}$$

其余标准　　模型的爱因斯坦框架拉格朗日量用重标度后的正则场表示　　.

- 规范场扇区：

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \sum_{a=1}^{3}\frac{1}{4}W^{a\mu\nu}W^a_{\mu\nu} - \sum_{A=1}^{8}\frac{1}{4}G^{A\mu\nu}G^A_{\mu\nu}. \tag{5}$$

[4]在共形不变理论中，树级的场重定义消除了精细结构常数的时间变化，但共形反常以及更高阶微扰理论中的量子修正使常数随时间变化不可避免。通过适当选择 F 因子，可以将这种时间变化纳入其中（包括采用非普适F函数的可能性，正如本文后文所讨论的）。[5]在弦圈展开的树级，有一个JBD拉格朗日量 $\sim e^{-2\phi}(-R + 4(\partial\phi)^2) + \mathcal{L}_{st}$ [19]，但弦圈效应会对其造成巨大修正 [17]。

- 费米子扇区 [6]:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{\psi} \overline{\psi} i\gamma^{\mu} \left(\nabla_{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \ln F_{\mathrm{df}} \right) \psi, \tag{6}$$

其中

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} - i g_{Y,\mathrm{eff}} Y_{\psi} A_{\mu} - i g_{2,\mathrm{eff}} W_{\mu} - i g_{3,\mathrm{eff}} G_{\mu} \tag{7}$$

其中 t 有效规范耦合 $g_{A,\ \mathrm{eff}} = F^{-1/2}{}_{\mathrm{dA}}\, g_A$。注意到 $(1/4)\omega_{\mu ab}\gamma^{ab} = \frac{3}{2}\dot{a}\gamma^0/a$.

- 希格斯扇区:

$$\mathcal{L}_H = g^{\mu\nu} (D_{\mu} H)^{\dagger} (D_{\nu} H) - V_{\mathrm{eff}}(H), \tag{8}$$

其中

$$V_{\mathrm{eff}}(H) = F_{\mathrm{g}}^{-2} V(H) - g^{\mu\nu} \left\{ (\partial_{\mu} \ln f_{\mathrm{dH}})(\partial_{\nu} \ln f_{\mathrm{dH}}) + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} \ln f_{\mathrm{dH}} \right\} |H|^2 \tag{9}$$

其中 $f_{\mathrm{dH}}^2 \equiv F_{\mathrm{dH}}/F_{\mathrm{g}}$。势 $V(H)$ 具有广义相对论宇宙学中常用的教科书式酒瓶形状。该方程的第二项具有有趣的结构，可以将其改写为

$$- \left(3(\partial_{\chi} \ln f_{dH})^2 \partial^{\mu}\chi \partial_{\mu}\chi + (\partial_{\chi} \ln f_{dH}) \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\chi \right) |H|^2 \,. \tag{10}$$

由此我们推导出与 [18] 在取 $F_{dH} \to 1$ 极限时所得结果完全相同。在FLRW度规下，第二个 $|H|^2$ 项的系数化简为

$$-3(\partial_{\chi} \ln f_{dH})^2 \dot{\chi}^2 - \partial_{\chi} \ln f_{dH} (\dot{\chi}^2 - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}) \,. \tag{11}$$

- 汤川耦合部分:

$$\mathcal{L}_y = -y_{u,\mathrm{eff}} \overline{Q} H^c u - y_{d,\mathrm{eff}} \overline{Q} H d - y_{e,\mathrm{eff}} \overline{L} H e - y_{\nu,\mathrm{eff}} \overline{L} H^c \nu_R + \cdots \,, \tag{12}$$

其中，有效汤川耦合由（$f = u,\ d,\ e,\ \cdots$）给出

$$y_{f,\mathrm{eff}} = F_{\mathrm{Y}} F_{\mathrm{df}} F_{\mathrm{dH}}^{-1/2} y_f. \tag{13}$$

在此公式中，我们假设了狄拉克型中微子质量，但通过引入带有马约拉纳质量项的SU(3)×SU(2)×U(1)单态 $N_R = \nu_R$ ，也可以纳入马约拉纳型中微子质量。

除此之外，乔丹框架拉格朗日量的残余效应还会出现在规范耦合和汤川耦合中:

$$g_{A,\mathrm{eff}} = F_{\mathrm{dA}}^{-1/2} g_A \,, \quad y_{f,\mathrm{eff}} = F_{\mathrm{Y}} F_{\mathrm{df}} F_{\mathrm{dH}}^{-1/2} y_f \,. \tag{14}$$

有效汤川耦合$y_{f,\ \mathrm{eff}}$ 在此将通过随时间变化的 χ反映在费米子质量变化中。

我们的一般形式体系中出现的不同共形函数 F_i 会带来过多不必要的复杂性，而且目前没有足够的宇宙学数据来约束这些函数。我们将提出一种

[6]在下列公式（6）中，$\partial_{\mu} \ln F_{\mathrm{df}} = F^{-1}{}_{\mathrm{df}}\ \partial_{\chi} F_{\mathrm{df}}\, \partial_{\mu}\chi$ 表明 eJBD 场与费米子存在导数耦合 $\propto \partial_{\mu}\chi$。[17]的研究忽略了这一重要费米子耦合的存在。其推导见附录 8.4，且源自该公式。

务实的折中方案：对一个共同的共形函数 F 取不同次幂，并用关于 χ[2]的简单多项式来描述。具体来说，我们作如下参数化：

$$F_{\rm g}=F^{\eta/2}\,,\quad F_{\rm df}=F^{p_{\rm df}}\,,\quad F_{\rm dA}^{-1/2}=F^{p_g}\,,\quad \frac{F_H}{F_{\rm g}^2}=F^{p_H}\,, \tag{15}$$

$$f_{\rm dH}=\sqrt{\frac{F_{\rm dH}}{F_{\rm g}}}=F^{p_{\rm dH}}\,,\quad F_{\rm Y}F_{\rm df}F_{\rm dH}^{-1/2}=F^{p_Y}\,, \tag{16}$$

因此我们可以写成

$$V_{\rm eff}(\chi)=\frac{V_{\rm J}(\chi)}{F^{\eta}}\,,\quad \frac{i}{2}(\partial_\chi\ln F_{\rm df})(\partial_\mu\chi)\overline{\psi}\gamma^\mu\psi=i\frac{p_{\rm df}}{2}\frac{\partial_\chi F}{F}(\partial_\mu\chi)\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,, \tag{17}$$

$$g_{A,\rm eff}=F^{p_g}g_A\,,\quad y_{f,\rm eff}=F^{p_Y}y_f\,. \tag{18}$$

我们提出的 eJBD场与标准模型粒子的耦合在 Jordan框架中是非普适耦合，不同于式（1）。正如下一节所述，这是规避其中给出的宇宙学约束所必需的。

正如附录A所述，对于单分量 eJBD标量，正则eJBD场与 Jordan框架中原始 eJBD场之间的关系可以明确推导出来。

总之，在爱因斯坦度规框架中，我们将正则归一化的有质量eJBD场 χ 耦合到五个相互独立的规范不变项[7]：

$$\mathcal{L}_{st}^{\rm E}=F^{p_g}\mathcal{L}_g+F^{p_{\rm df}}\mathcal{L}_f-F^{p_H}V_{\rm J}(H)+F^{p_{\rm dH}}(D_\mu H)^\dagger(D^\mu H)+F^{p_Y}\mathcal{L}_y\,. \tag{19}$$

在我们简化的扩展Jordan-Brans-Dicke引力中，有两个新函数： $V_J(\chi)$ 和 $F(\chi)$。对于这两个函数，我们将采用以下最简单的形式，具体解释见下一节：

$$F=1+f(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2\,,\quad f>0\,,\qquad V_{\rm J}=V_0\left(d_4(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^4+d_2(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2+1\right)\,,\quad d_4V_0>0\,. \tag{20}$$

方程（19）和（20）定义了我们的简化 eJBD理论，并加入了式（21）的附加项。

请注意，在这个简化框架中，物理常数通过六个参数随时间变化，即 η、$p_{\rm df}$、p_g、p_H、$p_{\rm dH}$、p_Y，其中两个参数将在本文中受到严格约束。

希格斯扇区（9）和具有新结构的费米子扇区中出现了无法表示为常规项乘以 $F-$ 的幂函数的非平凡项，

$$\frac{ip_{\rm df}}{2}(\partial_\chi\ln F)\,\partial_\mu\chi\sum_\psi\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,,\qquad \sum_\psi\overline{\psi}\gamma^\mu\psi=3j_B^\mu+j_L^\mu\,, \tag{21}$$

其中 j_B^μ、j_L^μ 分别为重子数流和轻子数流。除这种导数¯耦合外，eJBD场还会像膨胀子耦合通常那样，在电弱对称性破缺后与能量-动量张量的迹耦合，$\propto\sum_f m_f f f$

导数耦合（21）中出现的流对所有基本费米子都是普适的，由重子数流和轻子数流的线性组合给出。文献 [20]指出，这种形式的导数耦合可以产生化学势，从而区分物质和反物质；当引入某种违反重子数或轻子数的新相互作用（如大统一理论中的相互作用）时，最终会在场滑移的同时产生重子数不对称。因此，如果按文献 [21]所建议的那样，将标准粒子物理扩展至包含重马约拉纳粒子，这可能会对轻子生成产生新的重要影响。

[7]在 [17] 中采用最小耦合原理 这一假设，排除了该公式中某些非零幂次 p_i 的可能性。我们允许这些幂次取任意值，因为我们认为它们仅受观测结果的限制。第4节中发现，只有 p_g 和 p_Y 受到观测结果的约束。

文献 [22]曾假设，式（21）中出现的普适费米子流或其变体流会与一种极轻的规范玻色子耦合。该方案与我们的方案有一个重要区别：我们的 eJBD 场是标量场，而非矢量场，其质量会随宇宙学演化而变化。这一区别使得在加速器实验中探测我们的 eJBD 场十分困难。尽管如此，它在当前宇宙中的极轻质量仍使其与文献 [22] 中的规范玻色子具有一些共同特征，例如等效原理检验，后文将对此进行讨论。

3 eJBD标量场的时间演化

我们的讨论仅限于弯曲时空中的标准粒子物理自发破缺规范理论。除非讨论能标约为 10^{18} 吉电子伏特的普朗克时期，否则无须考虑量子引力。对于许多宇宙学后果，通常只需考虑一类有限的空间平直 FLRW 度规。

3.1 大爆炸核合成后的标量场动力学

我们将推导单个 eJBD 场[8], 的情形，以得到拉格朗日密度：

$$a^3\mathcal{L}_\chi = a^3\left(\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - V_{\rm eff}(\chi) + \sum_i F^{p_i}(\chi)\mathcal{L}_i\right), \quad V_{\rm eff}(\chi) = \frac{V_{\rm J}(\chi)}{F^\eta(\chi)}, \tag{22}$$

其中， $\mathcal{L}_i$ 是标准粒子物理拉格朗日密度中五个相互独立的规范不变部分。对 χ 应用变分原理，可得微分方程：

$$\ddot{\chi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} + \partial_\chi V_{\rm eff}(\chi) = \text{matter coupling contribution}\,. \tag{23}$$

右边的物质耦合贡献将在下文必要之处给出；对于能量密度为 ρ、压强为 p的理想流体，该贡献近似但并非精确地由 $(\rho-3p)\sum_i \partial_\chi F^{p_i}$给出。在辐射主导时期，由于爱因斯坦度规框架下物质能量-动量张量满足无迹条件，这一贡献通常较小。[9]

[8]多分量 N 标量场的情形可按如下方式处理。我们通过对势和共形函数施加对称性，简化多分量 eJBD 引力。以实 N分量 eJBD 理论为例。利用 N分量标量场的 O(N) 对称性，可以简化标量场方程，其中共形函数为 $F_{\rm g}$，势为 V [25]。作为示例，我们取最简单的 O(2) 模型；由于具有墨西哥帽型势，该模型允许自发对称性破缺（SSB）。双分量标量场的动能项可写成模 χ 和角向 θ 模式：

$$\frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \frac{1}{2}\chi^2(\partial\theta)^2\,.$$

由于 O(2) 对称性，角向模式不会出现在势项中，因此可以通过引入二维角动量 L 将其积分掉，写作 $\dot{\theta} = L^2\chi^2/a^3$。这会为模量场的拉格朗日量引入一个额外的离心项； $L^2/(2a^6\chi^2)$。对于 N分量标量场系统，也可以类似于这个 O(2) 情形引入非阿贝尔 O(N) 群的本征值。

[9]正如 [4]所示，情况未必如此，因为温度为 $\sim$ 粒子质量的非相对论粒子会对标量场产生推动作用；这一机制最早由[26]指出。然而，在所有 eJBD 模型中都必然存在的这种变色龙效应，在一般的 II 型模型（包括我们这个以小斜率 $\partial_\chi F^p$ 为特征的模型）中只是次要贡献，原因如下。物质-辐射相等时刻之后，背景光子是等式右侧唯一的主要贡献。不过，由于 χ 不与光子耦合，物质主导时期的物质耦合贡献可以忽略不计。因此，在 χ的整个演化过程中，我们可以放心地忽略物质耦合贡献。由此，我们模型中宇宙时间演化的主要部分无需考虑物质耦合贡献即可描述。但在讨论宇宙学界限和有限温度修正时，这些贡献会变得重要，正如第4节所述。

现在我们讨论如何选择共形函数和势函数， F， $V_{\rm J}$它们出现在有效势 $V_{\rm eff}(\chi) = V_{\rm J}/F^{\eta}$中。我们在本文中采用的指导原则是 $V_{\rm eff}(\chi)$ 在场无穷远 $\chi \to \infty$处的渐近形式。为了实现场滑移，这应当是一个单调递减函数（文献中有时称为径向逃逸），而最简单的选择是像 [9]中那样取负分数幂。对 $V_{\rm J}$ 和 F采用无穷幂级数并不实际，因此出于实用考虑，我们将这些函数截断为有限的正幂，分别为p_j 和 p_v。忽略与势力无关的常数项后，有效势的渐近极限可能递增（ $p_v \geq \eta p_J + 1$的情况），也可能递减（$p_v \leq \eta p_J - 1$的情况）。对于 $p_v = \eta p_J$，这两种行为都有可能，具体取决于参数的更多细节。

我们将研究 $p_v = 2$、$p_J = 1$、$\eta = 2 + \delta$ 的最简单情形，其中 δ 为一个较小的正值，可得出有趣的结果。较高的最高次幂情形同样适用，不过在中间时期的时间演化会比下文给出的最简单情形稍复杂。势 $V_{\rm eff}(\chi)$ 在场无穷远处具有较小的斜率 $\propto \chi^{-2\delta}$，对应较小的正值 δ。我们进一步将势和共形函数限制为可重整化形式，从而得到

$$F = 1 + f_1\frac{\chi}{M_{\rm P}} + f_2(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2\,, \quad f_2 > 0\,, \tag{24}$$

$$V_{\rm J} = V_0\left(d_4(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^4 + d_3(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^3 + d_2(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2 + d_1(\frac{\chi}{M_{\rm P}}) + d_0\right)\,, \quad d_4 V_0 > 0\,. \tag{25}$$

这种形式仍包含过多参数。为简便起见，我们进一步要求在 $\chi \to -\chi$ 下具有离散对称性，从而定义标准势和共形函数，

$$F = 1 + f(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2\,, \quad f > 0\,, \tag{26}$$

$$V_{\rm J} = V_0\left(d_4(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^4 + d_2(\frac{\chi}{M_{\rm P}})^2 + 1\right)\,, \quad d_4 V_0 > 0\,. \tag{27}$$

我们忽略了畴壁过量产生这一潜在的严重问题，因为只需引入χ 奇次项即可轻松解决。

标准有效势在大场极限下的形式为

$$V_{\rm eff} \approx d_4 f^{-2-\delta} V_0 y^{-2\delta}\,, \quad y = \frac{\chi}{M_{\rm P}}\,. \tag{28}$$

选择满足 $p_v = \eta p_J + 1$ 的更一般的 F 次幂，也会在大爆炸核合成后的宇宙学中产生类似但并不完全相同的结果。更一般地说，具有渐近行为$V_J/F^{\eta} \to O(\chi^{-2\delta})$ $\delta > 0$的模型，会得到与我们类似的结果。只要这种大场渐近行为得以维持，就可以导出类似的宇宙学约束，后文将对此进行讨论。

场原点附近的行为 $\chi = 0$ （$y = 0$ 也如此）更加复杂：通过幂级数展开可推导出，

$$V_{\rm eff}(y) = V_0\left(1 + (d_2 - 2f - \delta f)y^2 + \left\{d_4 - d_2 f(2+\delta) + 3f^2 + \frac{1}{2}\delta(5+\delta)f^2\right\}y^4 + O(y^6)\right)\,. \tag{29}$$

这种势的形式与幂律型精质势一致 [9], ，但在较小场值下，我们的势偏离了精质势。有趣的情形是选择一个负的 y^2系数和一个正的 y^4 系数，就像电弱对称性破缺中的酒瓶形势那样。

我们在图(1)中展示了典型的势形状。在势的正则形式 $V_{\rm J}/F^{2+\delta}$ 的分母中引入 F 幂，会显著改变小场区域内由 $V_{\rm J}$给出的原始势形状。这可能会使宇宙学应用中产生各种不同的物理后果，不同于简单的 $V_{\rm J}$ 情形。尽管如此，场无穷远处的渐近行为形状相同，因此会导致唯一的晚期宇宙学。我们采用的一个典型情形是负的 d_2 情形，如黑色实线所示。不过，图(1)中的局部极值并非总是存在；如果使二次和四次 F 幂的系数均为零，它们可能消失，从而使

eJBD场的函数单调递减。当系数 f 较大时，上述幂级数展开并无用处，即使场并非很大，也可能进入渐近区域。对于与暗能量问题相关的晚期宇宙学，这些 f依赖关系并不十分重要；但它们对暴胀时期则至关重要：若没有局部极值，暴胀就难以实现。这些问题将另行讨论。

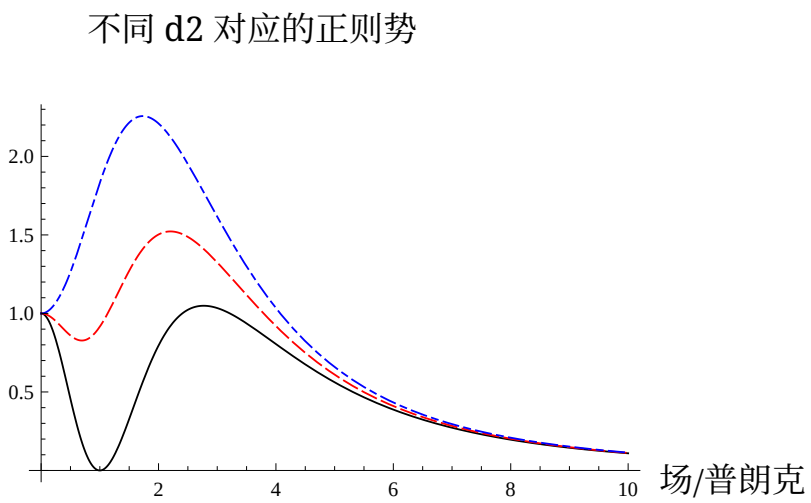

图 1：一组常见的 $d_4 = 1$、$\eta = 3.5$（$\delta = 1.5$） $f = 0.25$、$V_0 = 1$ 和 $d_2 = -2$ 对应的势形状：黑色实线、橙色虚线中的 0，以及蓝色点划线中的 2。

有必要讨论一种更简单的势形式。最简单的选择是指数递减（或单调递减的单幂）函数 V_Q ，它常用于精质暗能量模型 [27]。然而，这类采用单指数势的模型会导致过量暗能量，除非对参数进行精细调节 [28]。这一点以及 V_Q/F^2 $(1/F^2$（同样单调递减）都会随着场增大而单调下降，因此无法为将 eJBD 场与暴胀联系起来提供有趣的可能性。基于此，我们将不再考虑精质类型的理论。我们选择的势和共形函数可产生多种有效势，如图（1）所示。尽管如此，我们要指出，本研究中的一些新发现同样适用于精质模型。

3.2 解析解

该渐近势的一个优点是，在 $a \propto t^{1/2}$ 的辐射主导时期存在一个幂律解。该解为

$$\chi = M_{\rm P} D (M_{\rm P} t)^{\beta}\,, \quad \beta = \frac{1}{1+\delta}\,, \quad D = \left(\frac{4\delta(\delta+1)^2}{\delta+3} f^{-2-\delta} \frac{d_4 V_0}{M_{\rm P}^4} \right)^{1/(2+2\delta)}\,. \tag{30}$$

物质主导时期的解类似：唯一的变化在于系数 D,

$$D \to D(\frac{2(\delta+2)}{\delta+3})^{1/(2+2\delta)}\,. \tag{31}$$

我们在图（1）中展示了几个按此定义的有效势示例。值得注意的是，势 $V_{\rm J}$ 的二次系数 d_2 取不同的大小和符号时，会呈现出截然不同的定性行为。这

是可以理解的，因为这个符号决定了原始标量场势是否允许自发对称性破缺。文献[10] 指出，图（1）中从橙色曲线到蓝色曲线所呈现的对称性破缺模式变化，是有限温度下量子修正导致的，这为解决宇宙学常数问题提供了线索。

宇宙尺度因子的爱因斯坦方程为

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi}{3} G_N \left(F^{\epsilon_r} N \rho_r + F^{\epsilon_m} M n_M + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + F^{-2-\delta} V_{\rm J} \right) , \quad \rho_r = a_B T^4 , \tag{32}$$

其中， N 为视为无质量的有效粒子自由度， a_B 为辐射能量常数，n_M为质量为 M 的冷暗物质数密度。无需说明 ϵ_r、ϵ_m 与我们先前引入的幂次之间的关系。我们假设暗物质的贡献与有质量的标准模型费米子以相同方式演化。标量场的贡献表现为暗能量，其中常数宇宙学常数 Λ 被替换为

$$\rho_{\rm DE} = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + F^{-2-\delta} V_{\rm J} , \quad F^{-2-\delta} V_{\rm J} \approx d_4 f^{-2-\delta} V_0 (\frac{\chi}{M_{\rm P}})^{-2\delta} . \tag{33}$$

在势能主导的暗能量区域，忽略标量方程中的势力项即可推导出解析解。解的形式为，

$$\chi = M_{\rm P} D_2 \, t^{1/\delta} \ , \quad D_2 = \left(\sqrt{\frac{3 d_4 f^{-2-\delta} V_0}{(\delta-1) M_{\rm P}}} \right)^{1/\delta} , \quad a(t) = (\frac{t}{t_0})^{(\delta-1)/3} , \tag{34}$$

在条件 $\delta > 1$ 下。

χ–上述场方程包含其随时间变化的质量以及与物质场的相互作用。 χ 质量由式 (28) 估算得出；在辐射主导时期的大部分阶段，它为

$$m_\chi \sim \sqrt{\frac{d_4 V_0}{M_{\rm P}^2}} \sqrt{2\delta(2\delta+1) f^{-2-\delta} y^{-2-2\delta}} , \quad \sqrt{\frac{V_0}{M_{\rm P}^2}} = O(10^{-33}\,{\rm eV}) , \tag{35}$$

在背景解 $y = \chi(t)/M_{\rm P} \propto t^{1/(1+\delta)}$ 的大场极限下，因此粗略地有 $O(10^{-33}\,{\rm eV})(t_0/t)$。即使在电弱时期，该量的大小也远小于电子质量，因此可以认为 χ场本质上是无质量的。

上述解析解由于适用的场范围较小，价值有限。因此，我们接下来给出详细的数值分析。大爆炸核合成之后的数值分析详见附录B，其中也解释了我们求解这组微分方程的方法。辐射、物质、暗能量的能量密度以及状态方程因子在正文图(2)和附录B图(4)中展示，这些结果与近期观测一致。附录B还展示了相同参数组下， $z = 100 \sim 0$ 最近时期的状态方程因子和eJBD场。请注意，eJBD场变化不大：如图(4)所示，它在 $z+1 = 3 \sim 1$ 最近时期的增幅为 ~ 0.025。

4 与时间变化界限的比较：宇宙学观测与实验室实验

4.1 早期宇宙的观测界限

我们将讨论范围限定于精细结构常数和质子与W玻色子质量比的时间变化界限。我们对有效精细结构常数的预测是

$$\alpha_{\rm eff} = \alpha (\frac{t}{t_0})^{8p_g/\delta} , \quad \frac{\delta\alpha_{\rm eff}}{\alpha_{\rm eff}} = \frac{8p_g}{\delta}\frac{\delta t}{t} , \tag{36}$$

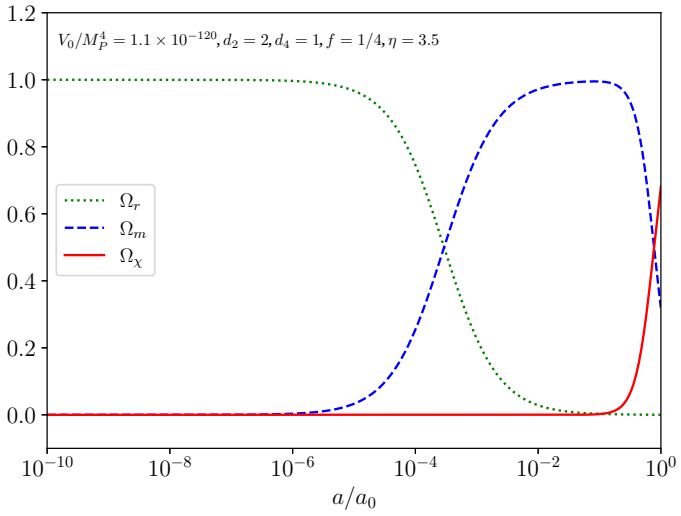

图2：辐射、物质和 eJBD场能量密度的时间演化 χ ， 对应时期为 z =10^{10} $\sim$ 0。假设的模型参数为 $V_0/M_{\rm P}^4 = 1.1 \times 10^{-120}$ （对应于 V_0 = (2.5meV)^4） ， $d_2 = 2, d_4 = 1, f = 1/4, \eta = 3.5 (\delta = 1.5)$。

其中，p_g 是电弱规范扇区中共形因子的幂次，电磁耦合由eF^{p_g}给出。质子与W玻色子质量比对应的幂次则更为复杂，如下文所述。

（A）奥克洛界限

作者[29] 改进了早期关于 α 时间变化的宇宙学界限的研究结果，并得出了一个界限：$|\frac{\delta\alpha}{\alpha}| < O(10^{-7})$。这一约束的论据基于天然奥克洛反应堆；该反应堆发生于 ~ 1.8 十亿年前，据称其对钐$^{149}(n,\ \gamma)\mathrm{Sm}^{150}$ 通过共振形成发生的中子俘获截面十分敏感。

事实上，[29] 中给出的界限所依据的论证相当复杂。约为 100 meV 的微小共振能量，源于钐原子核内质子的库仑相互作用与强相互作用几乎完全抵消。为使界限的推导有意义，作者假设质量参数（如质子质量）保持不变。他们还假设强耦合常数不随时间变化，尽管另一些研究者 [30] 预期它会发生变化。尽管如此，我们仍将其视为对静电相互作用强度随时间变化的合理界限。

根据奥克洛观测，使用$\delta t/t_0 = 1.8/13.7$估算的时间变化理论界限为 $|p_g/\delta| < O(10^{-7})$。

（B）来自类星体吸收线的界限

参考文献 [31] 搜寻了 α 随时间的变化，该变化体现在类碱金属原子的精细结构分裂中，并与参数组合（$Z\alpha$）成正比$^4 m_e$ [32]。作者使用的观测数据来自类星体吸收光谱。他们针对 $z > 1$得出的结果 $\delta\alpha/\alpha = (-1.9\pm0.5)\times10^{-5}$，可与时间变化的静电相互作用预测值进行比较。所考虑的红移因子范围 $\delta z/z \sim 0.6$ 对应于 $\delta t/t \sim 0.5$。这给出了A方案界限 $|p_g/\delta| < 2.5\times10^{-6}$。这一约束颇具说服力，因为理论预测仅基于量子电动力学效应，不涉及量子色动力学效应（可能只有较小的有效质量因子（$1+m_e/m_A$）$^{-1}$ 与 m_A 原子核质量有关这一情况例外）。

(C) m_p/m_W的大爆炸核合成界限

$G_F m_p$（$\propto (m_p/m_W)^2$）的当前界限来自大爆炸核合成，[33, 34]。我们首先需要说明质子质量的来源。

为了估算质子质量m_p的时间变化，必须将其分为两部分：量子色动力学胶子 + 夸克动能和夸克质量变化。我们取 $m_p - 2m_u - m_d$作为质子质量的第一部分，其余的 $2m_u + m_d \sim 9.4$ MeV作为第二部分。在附录A给出的正则场表述中，胶子贡献不含共形因子，而夸克质量部分则依赖于幂次 F^{p_Y}。当前时代，第二部分与第一部分的质量比 r 为 ~ 0.01。规范玻色子质量由另一个幂次 F^{p_g}控制。回溯到更早的时代，我们将质量比建模为，

$$\frac{m_p}{m_W}(t) = \frac{m_p}{m_W}(t_0)F(t)\,, \qquad F(t) = (1-r)\frac{F^{-p_g}(t)}{F^{-p_g}(t_0)} + r\frac{F^{p_Y-p_g}(t)}{F^{p_Y-p_g}(t_0)}\,. \tag{37}$$

质量比的预测时间变化为

$$\frac{\delta F}{F} = \left(-\frac{4p_g}{\delta}(1-r) + \frac{4(p_Y-p_g)}{\delta}\,r\right)\frac{\delta t}{t}\,. \tag{38}$$

观测 BBN 界限 [33, 34]

$$|\frac{d}{dt}G_F m_p^2| < O(5\times10^{-12})\,\mathrm{yr}^{-1}\,, \tag{39}$$

被译为参数界限，

$$|-\frac{4p_g}{\delta}(1-r) + \frac{4(p_Y-p_g)}{\delta}\,r| < 0.7\times10^{-3}\,. \tag{40}$$

如果将上述由精细结构常数变化得出的、对 p_g/δ 更严格的界限结合起来，便可得到一个有效界限， $|p_Y/\delta| < O(10^{-2})$。

4.2 标量交换势与等效原理

弱等效原理（WEP）指出惯性质量和引力质量等效，这一原理已得到极为精确的检验。例如，E¨otv¨os 参数 η 由 MICROSCOPE任务测得[35, 34]其限制为

$$|\eta(\mathrm{Ti},\mathrm{Pt})| < O(10^{-15}) \tag{41}$$

E¨otv¨os 参数是两种同位素的惯性质量与引力质量之比的差异。我们可以将空间非均匀的暴胀子模量场 $\delta\chi$ 交换所导致的吸引力归因于惯性质量的增加：这是一种第五种力。

让我们讨论局域洛伦兹系中的引力定律；也就是说，我们假设当前时代的闵可夫斯基度规是平直的。围绕平直的 $\eta_{\mu\nu}=(1,-1,-1,-1)$ 闵可夫斯基度规以及 $\chi=\chi_0, F_{\mathrm{g}}=F_0=F_{\mathrm{g}}$ 的背景标量场构型 $\chi_0(t)$，将度规展开为由 $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ 定义的二阶张量场 $h_{\mu\nu}$ 和标量场 $\delta\chi=\chi-\chi_0$。由此得到的爱因斯坦方程是无质量引力子场 $h_{\mu\nu}$ 的方程，其中源项同时包含通常的物质-辐射和暗能量 $\delta\chi$。

标量场方程为

$$\partial^2\delta\chi+(\frac{\partial^2 V_{\mathrm{eff}}}{\partial\chi^2})_0\delta\chi=\sum_{\psi}\left(\partial_\chi m_{\psi,\mathrm{eff}}\right)_{\chi=\chi_0}\langle\bar{\psi}\psi\rangle\,, \tag{42}$$

在最低普朗克阶。这应与广义相对论方程进行比较； $\partial^2 h_{\mu\nu}+\cdots=-T^{(m)}_{\mu\nu}/M_{\mathrm{P}}$。

在我们的 eJBD 模型的大场极限下，

$$(\partial^2_\chi V_{\mathrm{eff}})_{\chi_0}\sim 2\delta(2\delta+1)f^{-2-\delta}\frac{d_4V_0}{M_{\mathrm{P}}^2}(\frac{\chi_0}{M_{\mathrm{P}}})^{-2\delta-2}>0\,. \tag{43}$$

对于正的 δ ，且 $\sqrt{d_4V_0}/M_{\mathrm{P}}$ 的量级为当前哈勃率 $\sim 10^{-33}$eV， χ 量子质量极小，因此可视为无质量。

标量场与能量-动量张量迹耦合的源项为

$$\sum_{\psi}\left(\partial_\chi m_{\psi,\mathrm{eff}}\right)_{\chi=\chi_0}\langle\bar{\psi}\psi\rangle\approx f^{p_Y}(\frac{\chi_0}{M_{\mathrm{P}}})^{2p_Y-1}\frac{M_A}{M_{\mathrm{P}}}\,, \tag{44}$$

对于质量为 M_A 的宏观有质量物体（地球、天体物理恒星等）。如果共形函数 p_Y 的幂等于 $1/2$，静态标量交换势的耦合强度与引力强度处于同一量级。如果该幂小于 1/2，其强度可能远小于引力。

E¨otv¨os 参数的时间变化为

$$\frac{2(2p_Y-1)}{\delta}\frac{\delta t}{t_0}\,. \tag{45}$$

如果这一时间跨度为 1 年， $\frac{\delta t}{t_0}\approx 0.7\times 10^{-10}$，且该公式中的前因子被限制为小于 10^{-5} 量级。不过，只有当 p_Y 接近 1/2 时，这一界限才适用。如果 $|p_Y|<1/2$，则可以放心忽略对等效原理的实验检验。

4.3 由两台原子钟对比得出的实验室界限

超精细分裂（HFS）与 $^{199}\mathrm{Hg}^{+}$ 跃迁的精细结构（FS）分裂之比，与碱金属类 $^{27}\mathrm{Al}^{+}$ 跃迁的精细结构分裂之比，已在 ~ 1 年间得到测量，并据此导出了数倍于 10^{-17}年的$^{-1}$ 实验室界限[36]。FS 是静态库仑势的（狭义）相对论效应，而 HFS 则源于磁静力相互作用。由于我们的形式体系预测电子质量恒定，且有效 α 变化，因此该形式体系适用于这一跃迁比值。这一界限非常有用，因为其他界限（A）和（B）必然涉及关于宇宙学和地球物理学的假设，因而难以对这些界限进行定量评估。时间跨度 $\delta t/t_0 = 1/1.37 \times 10^{10}$ 给出的界限为 $|p_g/\delta| < 0.7 \times 10^{-7}$。

还有更少　　重要的观测界限，综述文献 [16] 中对此有所提及　　.

总结本节讨论的所有界限，要满足观测与实验室界限，最简单的方法是选择平凡的幂次 $p_g = 0$, $p_Y = 0$。即使在这种情况下，eJBD有效势中以 $V_{\mathrm{J}}/F^{2+\delta}$ 形式出现的 $\delta > 0$ 的非平凡选择，也会对宇宙学产生有趣的影响。我们将在接下来的两节中介绍两种可能性。

5 电弱对称性破缺

SU(2)×U(1)规范对称性的自发破缺是标准粒子物理学中最成功的部分之一。基本粒子、轻子和夸克、W和Z规范玻色子以及希格斯玻色子的所有质量，都是由这一机制产生的。人们可能会担心，eJBD引力会如何改变这一成功。

关于自发对称性破缺的讨论始于式 (10) 给出的正则形式。在 FLRW度规下，eJBD理论中的规范希格斯势为

$$V_{\mathrm{J}}(H) = F^{p_H} V(H) + \Delta V(H)\,, \quad \Delta V(H) = -\left(3(\partial_\chi \ln F^{p_{dH}})^2 \dot{\chi}^2 + (\partial_\chi \ln F^{p_{dH}})(\ddot{\chi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi})\right)|H|^2\,. \tag{46}$$

我们首先关注第二项贡献。我们将渐近场行为 $\chi \propto t^\beta, \beta > 0$ 外推回电弱能标；在渐近区域内 $\dot{\chi} = \beta\chi/t$ 成立，由此可推导出辐射主导（RD）时期第二项的贡献，

$$\Delta V(H) \approx -2\beta p_{dH}\,\frac{6\beta p_{dH} - \frac{\beta}{2} - 1}{t^2}|H|^2\,, \quad \beta = \frac{1}{\delta + 1}\,. \tag{47}$$

研究发现，对 $\Delta V(H)$ 作粗略而简单的估算，就足以确定其重要性。即使将 RD 外推至当前时刻，也可通过一个公式将电弱时间尺度与其红移因子及当前的哈勃值联系起来，

$$\frac{1}{t_{EW}^2} \approx H_0^2 z_{EW}^4 = O(\mathrm{meV})^2\,. \tag{48}$$

对希格斯势的 meV尺度阶修正完全可以忽略，以下我们将不再考虑这一贡献。

下一节将讨论另一个相关问题，在更系统地讨论电弱相变时必须考虑这一问题。

总结本节内容，似乎有必要降低希格斯势前面的幂次因子：采用一个常见的共形函数，

$$F(\chi) = 1 + f(\frac{\chi}{M_{\mathrm{P}}})^2\,, \tag{49}$$

希格斯势可以很好地近似为，

$$F^{p_H} V(H)\,, \tag{50}$$

其值较小，为 $p_H \ll 1$。这个共形函数的受约束的幂次 p_g、p_Y 以及未知幂次 $\eta = 2 + \delta$，出现在拉格朗日密度的规范不变部分之前。下一节将引入另一个幂次 p_f。

6 eJBD场演化的动力学温度效应 n

到目前为止，我们的讨论仅限于零温度下的标量场势。当我们关注晚期宇宙学时，这种近似是合理的。然而，当我们讨论更早的宇宙学时期，尤其是接近约 100 吉电子伏特的电弱尺度时，有限温度效应可能变得十分重要。这里我们将讨论微扰理论中的有限温度修正，主要聚焦于电弱相变之后。

6.1 场与费米子的耦合

eJBD χ 场以如下形式与标准模型费米子场 ψ 耦合，

$$\mathcal{L}_{\chi_0\psi} = \frac{ip_f}{2}\partial_\chi \ln F\, \partial_\mu\chi\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + (F^{p_Y}(\chi) - 1)\, m_\psi\bar{\psi}\psi\,, \qquad \sum_\psi \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 3j_B^\mu + j_L^\mu\,. \tag{51}$$

在此公式中减去了与场无关的费米子质量项。我们还省略了希格斯玻色子和规范玻色子的其他贡献。公式（51）具有正则 eJBD 形式中的一般形式。我们在微扰理论中处理此问题，并将 $F = 1 + f(\chi/M_{\rm P})^2$ 中的常数 f 视为小参数。取最低 f–阶，外部源 χ_0 以如下方式与费米子耦合

$$\mathcal{L}_{\chi_0\psi} \simeq if p_f \frac{\chi_0\partial_0\chi_0}{M_{\rm P}^2}\,\bar{\psi}\gamma^0\psi + f p_Y \frac{\chi_0^2}{M_{\rm P}^2}\, m_\psi\bar{\psi}\psi\,. \tag{52}$$

（52）中的第二项包含有质量费米子的能量-动量张量的迹。（51）中第一项给出的动能项修正具有有趣的结构：由于随时间变化的背景 $\chi_0(t)$，它违反了时间反演对称性。注意，场双线性形式 $\chi_0\partial_0\chi_0$和 χ_0^2 与费米子对耦合。这意味着在有限温度下，只有图（3）所示类型的图才会对有效作用量产生单圈阶贡献。不过，如果在 F中加入线性项 $\propto \chi/M_{\rm P}$，则会导出与 $ip_f(\partial_0\chi_0/M_{\rm P})\,\bar{\psi}\gamma^0\psi + p_Y(\chi_0/M_{\rm P})m_\psi\bar{\psi}\psi$ 成正比的三点顶角。但这会带来额外的真空极化型图贡献，类似于量子电动力学中的情况。

6.2 有限温度下的有效作用量

现在我们计算单圈蝌蚪图贡献。eJBD场 χ 不处于热平衡状态，但假设圈图中的费米子与其余环境粒子（包括同种费米子）处于热平衡状态。我们使用松原热格林函数 [37], ，它是从限定在有限欧几里得时间区间内的欧几里得场论推导出来的， $0 \sim \beta = 1/T$。热费米子的能量以能量单位 $\Delta\omega = 2\pi T$离散化，其与闵可夫斯基能量 k_0 的关系为

$$k_0 = i2\pi T(n + \frac{1}{2})\,, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\,. \tag{53}$$

因此，不变量的平方等于

$$k^2 = -(2\pi T)^2(n + 1/2)^2 - \vec{k}^2 \equiv -k_E^2\,. \tag{54}$$

零温极限 $\beta \to \infty$ 在形式上等价于欧几里得场论。这意味着有限温度下的微扰公式不过是经维克旋转的微扰论公式的离散求和（而非连续积分）

动能混合修正
的分子　　费米子传播子与图 3 中图的第一个顶点（52）结合，得到

$$\mathrm{tr}\gamma^0(k\cdot\gamma + m_\psi) = 4k^0 = 4i2\pi T(n + \frac{1}{2})\,, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\,, \tag{55}$$

对形式为 $\chi_0\partial_0\chi$ 的混合项作出贡献。该项在交换 $n \to -n-1$ 时是反对称的，而分母是对称的。因此，对 n 求和后贡献为零：在单圈阶没有动能修正。

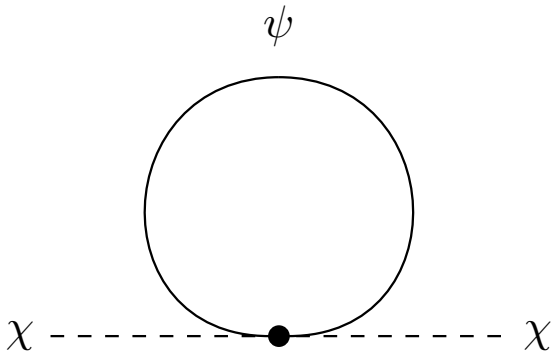

图 3：费米子圈的费曼图。

势修正

通过直接计算，利用图 3 中的第二个顶点（52），可得有限温度下图 3 的贡献：

$$-iV^{(T)} = (-i)i(-1)p_Y f m_\psi \frac{\chi_0^2}{M_{\rm P}^2} iT \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4m_\psi}{-(2\pi T)^2(n+\frac{1}{2})^2 - \vec{k}^2 - m_\psi^2}\,. \tag{56}$$

我们对离散的 n–能级求和；

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2+u^2} = \frac{\pi}{4u}\tanh\frac{\pi u}{2}\,, \qquad u^2 = \frac{\vec{k}^2+m^2}{(2\pi T)^2}\,. \tag{57}$$

于是，有限温度下的有效势为

$$V^{(T)} = -4p_Y f \frac{\chi_0^2}{M_{\rm P}^2}\frac{m_\psi^2 T}{(2\pi T)^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4u}\tanh\frac{\pi u}{2}\,. \tag{58}$$

这涉及一个二次发散的三动量积分，该积分依赖于温度，而有效拉格朗日量与 $T^2\chi_0^2$ 成正比。我们采用一条实用规则：即使温度相关的质量项也可以通过减法进行重整化。减去发散部分后的重整化贡献给出有限温度下的势修正：

$$V_R^{(T)} = \frac{1}{4}p_Y f \frac{\chi_0^2}{M_{\rm P}^2} m_\psi^2 T^2 \int_0^\infty dv \frac{v^2}{\sqrt{v^2+\mu_\psi^2}}\left(1-\tanh(\frac{\pi}{2}\sqrt{v^2+\mu_\psi^2})\right)\,, \quad \mu_\psi = \frac{m_\psi}{2\pi T}\,. \tag{59}$$

该积分为正，并且在无限温度极限下趋近于 0.167 t.

重整化有效势有两个重要特征：(1) 二次 χ_0^2系数的修正量级为 $m_\psi^2 T^2/M_{\rm P}^2$，在大爆炸核合成时期，$\chi_0/M_{\rm P}$ 的量级为 5；(2) 其符号取决于 p_Y的符号，因此可能为正，也可能为负。在有限温度下修正后的 χ 质量，在温度范围 $T = O\ (m_\psi)$ 内可能与哈勃率相当。这将改变大爆炸核合成时期及更早时期的有效 χ 质量。不过，预计这一质量贡献不会改变关于大爆炸核合成时期观测界限的讨论。

在包括电弱时期在内的辐射主导时期的大部分时间里，平方质量 $q^2 = O(V_0/M_{\rm P}^2)(t_0/t)$ 都很小。因此，在本次计算中，我们取 q 为零。然而，它超过了电子-正电子质量阈值；随着时间推移至暴胀时期，质量阈值以上会出现重要的虚部。

7 总结与展望

我们表明，在基于扩展 Jordan-Brans-Dicke 引力的宇宙学中引入标准粒子物理并非易事。在 eJBD 理论的 Jordan 度规框架中直接引入标准粒子物理拉格朗日量，再进行 Weyl 缩放，会导致与标准模型参数时间变化的观测与实验室界限相矛盾。我们的新表述基于爱因斯坦度规框架中的宇宙学，在这一框架下，引力效应的解释更为直观。Weyl 缩放之前有必要扩展分析基础；为此，我们提出将标准粒子物理拉格朗日量分解为五个彼此独立的规范不变部分，并为每个部分指定不同的共形因子。通过这种方式，我们找到了一类能够避开所有严格观测界限的 eJBD 理论。

如此构建的扩展 Jordan-Brans-Dicke 理论分为两类，具体取决于 eJBD场的有效势是在有限场值处存在极小值，还是势缓慢下降至场无穷远。本文研究的第二类，即 II 型模型，因其与宇宙学常数问题存在自然联系而受到关注；它会导致近期宇宙时期的 eJBD场持续演化，进而使标准粒子物理参数随时间变化。II 型模型中的宇宙学界限对有效势的渐近行为敏感，但对较小场值处的势不敏感。第4节推导出的关于幂参数 p_i 的五项界限影响显著，但允许区域仍存在很大的参数空间。

我们找到了描述 eJBD标量场和宇宙尺度因子时间演化的有用解析解，并通过数值模拟加以验证。基于该解的分析和详细的数值模拟表明，在包括大爆炸核合成时期在内的辐射主导时期，标量场单调变化。三种能量密度在晚期的行为最终呈现于图 2 所示的示例性数值解中。

存在一种新的耦合形式：eJBD场的导数 $\partial\chi$ 乘以 $3j_B+j_L$ 流。这种导数耦合具有此前未被注意到的有趣有限温度效应。这是对eJBD场动能项的修正。若将标准粒子理论扩展为容纳类似大统一理论中的重马约拉纳粒子，则流形式 $3j_B + j_L$ 为轻子生成提供了一种新方案。研究发现，eJBD场与费米子的耦合会产生一种此前未被注意到的新有限温度修正，在高于核合成温度的条件下可能产生有趣的效应。

我们采取的是一种唯象的务实方法，并无深刻的基本原理作为依据，但遵循了量子场论的规范不变性和可重整化性。若一种更基础的方法，例如紧化超弦理论， [19, 17], 能够导出我们的方法所倡导的理论，那将十分有趣。作为更直接的应用，我们提及 eJBD 理论实现缓慢滚降暴胀并随后发生再加热的可能性。若能将同一个 eJBD 标量场用于解释暴胀和暗能量问题，那将再好不过。

A C扩展的乔丹–布兰斯–迪克理论的规范形式

本附录旨在给出 eJBD引力中经过正则归一化的场论拉格朗日量，该拉格朗日量纳入了粒子物理标准模型，从而能够直接运用量子场论的常规技术工具。

一般而言，如果某个标量场与里奇标量发生非最小耦合，那么即使它在 Jordan 框架中没有动能项，在爱因斯坦框架中也会出现一个动力学标量自由度。此类标量场可能与标准模型的规范单态部分耦合，从而导致各种物理常数随时间变化。

A.1 一般框架

我们从 Jordan 框架中定义的作用量开始，其形式为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g_J}\left[-\frac{M_{\rm P}^2}{2}F_{\rm g}(\phi)R_J+\frac{1}{2}F_{{\rm d}\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-V_{\rm J}(\phi)\right.$$
$$\left.+F_{\rm dA}(\phi)\mathcal{L}_{\rm A,kin}+F_{\rm df}(\phi)\mathcal{L}_{\rm f,kin}+F_{\rm dH}(\phi)\mathcal{L}_{\rm H,kin}+F_{\rm Y}(\phi)\mathcal{L}_{\rm Y}-F_{\rm H}(\phi)V_{\rm J}(H)\right], \tag{60}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\rm A,kin}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{J\mu\nu}-\sum_{a=1}^{3}\frac{1}{4}W^{a\mu\nu}W^a_{\mu\nu}-\sum_{A=1}^{8}\frac{1}{4}G^{A\mu\nu}G^A_{\mu\nu},\quad \mathcal{L}_{\rm f,kin}=\sum_{\psi}\overline{\psi}i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi, \tag{61}$$

$$\mathcal{L}_{\rm H,kin}=(D^\mu H)^\dagger(D_\mu H),\quad V_{\rm J}(H)=\lambda(|H|^2-v^2),\quad \mathcal{L}_{\rm Y}=-y_u\overline{Q}H^cu-y_d\overline{Q}Hd-y_e\overline{L}He-y_\nu\overline{L}H^c\nu_R. \tag{62}$$

为强调度规、里奇标量和标量势首先是在 Jordan 框架中引入的，我们在这些公式中分别用 $g_{J\mu\nu}$、R_J 和 $V_{\rm J}$ 表示它们。请注意，在 Jordan 框架中，宇宙学常数可以包含在精质场 ϕ 的势能 $V_{\rm J}(\phi)$ 中。精质场或暗能量场可以由多个分量构成。

A.2 引力扇区

在韦尔引起的共形变换下，

$$g_{J\mu\nu}=F_{\rm g}^{-1}g_{\mu\nu}, \tag{63}$$

里奇标量项变换为

$$F_{\rm g}^{-1}R_J=R+3g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\ln F_{\rm g}-\frac{3}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\ln F_{\rm g}\partial_\nu\ln F_{\rm g}. \tag{64}$$

因此，我们得到作用量的相关部分：

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{M_{\rm P}^2}{2}R-\frac{3}{2}M_{\rm P}^2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\ln F_{\rm g}+\frac{3}{4}M_{\rm P}^2g^{\mu\nu}\partial_\mu\ln F_{\rm g}\partial_\nu\ln F_{\rm g}+\frac{1}{2}\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{V_{\rm J}(\phi)}{F_{\rm g}^2}\right]. \tag{65}$$

当拉格朗日密度的引力部分如该公式中的 $\sqrt{-g}R/16\pi G_N$ 所示时，我们称之为爱因斯坦框架拉格朗日量。

与正文中一样，我们引入多分量标量场的模量场 χ。(65) 的第二项是全导数，因此可以忽略。(65) 的第三项和第四项可以改写为 χ 动能项 $\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi$ 的形式：

$$\frac{3}{2}M_{\rm P}^2g^{\mu\nu}\partial_\mu\ln F_{\rm g}\partial_\nu\ln F_{\rm g}+\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi=\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi\,. \tag{66}$$

为了以这种方式引入正则eJBD场 χ ，必须施加某些条件。我们将针对单分量场这一简单情形考察该条件。(66) 的左端可以写作

$$\left(\frac{3}{2}M_{\rm P}^2(\frac{\partial_\phi F_{\rm g}}{F_{\rm g}})^2+\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}\right)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\,. \tag{67}$$

假设该方程中括号内的部分（$\cdots$）是关于 ϕ的单调函数。于是可以将 χ定义为

$$\partial\chi=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}M_{\rm P}^2(\frac{\partial_\phi F_{\rm g}}{F_{\rm g}})^2+\frac{F_{{\rm d}\phi}}{F_{\rm g}}\right)^{3/2}\partial\phi\,. \tag{68}$$

如果括号内的函数不是单调函数，那么 ϕ 与 χ 之间的对应关系就不是唯一的，因此必须分段定义 χ。

χ 的有效标量势定义为

$$V_{\rm eff}(\chi)=\frac{V_{\rm J}(\phi)}{F_g^2}, \tag{69}$$

而在较晚时期， χ 起到暗能量的作用。无论 $V_{\rm J}(\chi)$的具体形式如何，[10], 有效引力理论和 χ因此可写为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{M_{\rm P}^2}{2}R+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi-V_{\rm eff}(\chi)\right]. \tag{70}$$

因此，Jordan框架中的引力部分和标量场部分等价于经过Weyl 缩放后，由爱因斯坦引力加上正则形式的标量场拉格朗日量。我们取 $V_{\rm eff}(\chi)$为 χ的四次函数，而 $F_{\rm g}$ 为二次函数。

A.3 规范场扇区

为简单起见，我们仅考虑规范场动能扇区中的量子电动力学部分。在爱因斯坦框架中，作用量变为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\frac{F_{\rm dA}}{F_{\rm g}^2}\mathcal{L}_{\rm A,kin}=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}F_{\rm dA}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right]. \tag{71}$$

请注意， $\partial_\mu(=\partial/\partial x^\mu)$ 在共形变换下不变，但 ∂^μ 会按 $\partial^\mu=g^{\mu\nu}\partial/\partial x^\nu$ 变化。规范场可以通过重标度 $A_\mu\to F^{-1/2}{}_{\rm dA}A_\mu$ 进行正则归一化，因此

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right]. \tag{72}$$

A.4 费米子扇区

费米子动 能项涉及自旋联络，其便于使用的表达式为

$$\omega_\mu{}^{ab}=-e^{\nu b}\nabla_\mu e^a_\nu=-e^{\nu b}(\partial_\mu e^a_\nu-\Gamma^\rho_{\mu\nu}e^a_\rho), \tag{73}$$

这里假设 e^a_μ 是协变矢量，协变导数作用于 e^a_μ ；而这确实如此，因为 e^a_μ 是一组协变矢量，即 e^0_μ、e^1_μ、.....事实证明，这等价于度规公设，即 $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}=0$。对于 FLRW度规，标架场分量为

$$e^a_\mu=\mathrm{diag}(1,a,a,a),\quad e^\mu_a=\mathrm{diag}(1,a^{-1},a^{-1},a^{-1}), \tag{74}$$

$$e_{\mu a}=\eta_{ab}e^b_\mu=\mathrm{diag}(1,-a,-a,-a),\quad e^{\mu a}=\eta^{ab}e^\mu_b=\mathrm{diag}(1,-a^{-1},-a^{-1},-a^{-1}). \tag{75}$$

[10]这意味着 $V_{\rm J}(\phi(\chi))$。

仿射联络 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ 为

$$\Gamma^0_{00}=\Gamma^0_{0i}=\Gamma^0_{i0}=\Gamma^i_{00}=\Gamma^i_{jk}=0,\quad \Gamma^0_{ij}=a^2H\delta_{ij},\quad \Gamma^i_{0j}=\Gamma^i_{j0}=H\delta^i_j, \tag{76}$$

其中 $H=\dot{a}/a_\circ$ 由这些结果，我们最终得到

$$\omega_0{}^{ab}=0,\quad \omega_i{}^{ab}=aH(\delta^a_i\delta^b_0-\delta^a_0\delta^b_i) \tag{77}$$

对于 $i=1$、2、3，可得

$$\gamma^\mu\nabla_\mu=\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^{ab}\right)=\gamma^\mu\partial_\mu+\frac{3}{2}H\gamma^0. \tag{78}$$

式（63）给出的共形变换可以用标架场改写为

$$e^a_{J\mu}=F_{\rm g}^{-1/2}e^a_\mu. \tag{79}$$

在共形变换下，自旋联络变为

$$\omega_\mu{}^{ab}(e_J)=\omega_\mu{}^{ab}(e)-\frac{1}{2}(e^a_\mu e^b_\nu-e^b_\mu e^a_\nu)\partial^\nu\ln F_{\rm g}. \tag{80}$$

注意到 $\gamma^\mu(e_J)=e^\mu_{Ja}\gamma^a=F^{1/2}{}_{\rm g}\gamma^\mu(e)$，我们得到作用量为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}F_{\rm g}^{-2}F_{\rm df}\mathcal{L}_{\rm F,kin}=\int d^4x\sqrt{-g}F_{\rm g}^{-3/2}F_{\rm df}\times\overline{\psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-ig_Aq_AA_\mu-\frac{3}{4}\partial_\mu\ln F_{\rm g}\right)\psi, \tag{81}$$

其中 $\gamma^\mu=\gamma^\mu(e)$，并且显式包含了规范场。对所有费米子种类求和时，默认假定 ψ 。我们可以将费米子重新缩放为 $\psi\to F_{\rm g}^{3/4}F^{1/2}{}_{\rm df}\ \psi$，以消除含有 $-(3/4)\partial_\mu\ln F_{\rm g}$ 部分的项。取而代之的是，会出现一个与 $\partial_\mu\ln F_{\rm df}$ 成正比的项。因此，费米子动能项的正则形式变为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\overline{\psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-ig_Aq_AF_{\rm dA}^{-1/2}A_\mu+\frac{1}{2}\partial_\mu\ln F_{\rm df}\right)\psi, \tag{82}$$

其中我们也按照上一节的做法，将规范场重新标度为 $A_\mu\to F^{-1/2}{}_{\rm dA}\,A_\mu$，使规范场动能项具有标准形式。结果表明，爱因斯坦框架中的有效规范耦合为

$$g_{A,\rm eff}=F_{\rm dA}^{-1/2}g_A. \tag{83}$$

我们还发现，费米子具有如下普适耦合：

$$\frac{i}{2}(\partial_\mu\ln F_{\rm df})\times\overline{\psi}\gamma^\mu\psi=\frac{i}{2}(\partial_\chi\ln F_{\rm df})\,\partial_\mu\chi\overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{84}$$

A.5 希格斯扇区

经过共形变换后，希格斯动能项变为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\frac{F_{\rm dH}}{F_{\rm g}^2}F_{\rm g}g^{\mu\nu}(D_\mu H)^\dagger(D_\nu H). \tag{85}$$

写出 $f^2_{\rm dH}\equiv F_{\rm dH}/F_{\rm g}$ 并对 $H\to f^{-1}{}_{\rm dH}H$ 进行重标度后，作用量可改写为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}(D_\mu H)^\dagger(D_\nu H)+g^{\mu\nu}\left\{(\partial_\mu\ln f_{\rm dH})(\partial_\nu\ln f_{\rm dH})+2\nabla_\mu\nabla_\nu\ln f_{\rm dH}\right\}|H|^2\right], \tag{86}$$

其中，我们在可能的情况下将 D_μ 与 ∇_μ 互换，并对 $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}=0$ 进行分部积分，从而得到最后一项。注意，式 (86) 中的最后一项是希格斯玻色子的有效质量项。因此，爱因斯坦框架中的有效希格斯势 $V_{\rm eff}(H)$ 可写为

$$V_{\rm eff}(H)=F_{\rm H}F_{\rm g}^{-2}V_{\rm J}(H)-g^{\mu\nu}\left\{(\partial_\mu\ln f_{\rm dH})(\partial_\nu\ln f_{\rm dH})+2\nabla_\mu\nabla_\nu\ln f_{\rm dH}\right\}|H|^2. \tag{87}$$

该公式第二项中出现的动能混合 $\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi|H|^2$ 乘以 χ 场的函数，是我们所进行的正则变换不可避免的结果。此项还可进一步改写为如下形式，

$$-\left((\partial_\chi\ln f_{\rm dH})^2+2\partial_\chi^2\ln f_{\rm dH}\right)\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi+2\partial_\chi\ln f_{\rm dH}\,\partial^\mu\partial_\mu\chi\,. \tag{88}$$

这一贡献与新的费米子耦合（84）一起，可能会显著改变有效 χ 势的有限温度修正，与不包含这些项的情况相比。

A.6 汤川耦合部分

注意到，正则归一化的希格斯（H）和费米子（ψ）是通过对原场进行如下重标度来定义的：

$$H\to(F_{\rm g}/F_{\rm dH})^{1/2}H,\quad \psi\to F_{\rm g}^{3/4}F_{\rm df}^{1/2}\psi, \tag{89}$$

由此得到爱因斯坦框架下的汤川耦合：

$$\begin{aligned}S&=\int d^4x\sqrt{-g}F_{\rm g}^{-2}F_{\rm Y}\mathcal{L}_{\rm Y}\\&=\int d^4x\sqrt{-g}(F_{\rm g}^{-2}F_{\rm Y})(F_{\rm g}^{3/4}F_{\rm df}^{1/2})^2(F_{\rm g}/F_{\rm dH})^{1/2}\left(-y_u\overline{Q}H^cu-y_d\overline{Q}Hd-y_e\overline{L}He-y_\nu\overline{L}H^c\nu_R\right).\end{aligned} \tag{90}$$

我们写出了第一代夸克和轻子的汤川耦合，另外两代的贡献也应以类似方式加入。已知中微子具有质量；为解释中微子质量为何如此之小，人们通常假设右手重马约拉纳轻子 ν_R（为便于区分 ν_L 与质量差异巨大的两种马约拉纳粒子，或许可记作 N_R）和普通左手中微子之间存在跷跷板机制。我们不讨论仅有马约拉纳中微子 ν_L 的有趣情形，而将另一种可能性——狄拉克中微子质量——留待讨论。两种情形下，有效汤川耦合均为

$$y_{f,\rm eff}=F_{\rm Y}F_{\rm df}F_{\rm dH}^{-1/2}y_f\,. \tag{91}$$

B 数值计算技巧

eJBD场 χ 的运动方程无法通过解析方法求解，因此我们需要对时间演化动力学进行数值分析。这里我们介绍一些数值分析的实用技巧，并展示大爆炸核合成之后的时间演化，包括 eJBD场、辐射和物质能量密度的演化。为简化符号，在本附录中，我们将 V 势写作 χ，以替代 $V_{\rm eff}$。

在许多情况下，使用重标度时间变量求解运动方程会更容易。在本例中，我们可以使用 e折叠数 N，其定义为 $N=\ln(a/a_0)$；其中 a_0 是当前宇宙的尺度因子，以下取值为 $a_0=1$。相应地，对 t 求导可写为 $\frac{d}{dt}=H\frac{d}{dN}$，$\frac{d^2}{dt^2}=\dot{H}\frac{d}{dN}+H^2\frac{d^2}{dN^2}$，其中 $H=H(t)$ 表示哈勃率。

哈勃率为

$$3M_{\rm P}^2H^2=\rho_r+\rho_m+\rho_\chi=\rho_{r,0}a^{-4}+\rho_{m,0}a^{-3}+\frac{1}{2}\dot{\chi}^2+V(\chi), \tag{92}$$

其中，根据普朗克观测 [38], 在 $a = a_0$测得的辐射和物质的能量密度为

$$\rho_{r,0} = 3.366 \times 10^{-51}\ \mathrm{GeV}^4, \quad \rho_{m,0} = 1.147 \times 10^{-47}\ \mathrm{GeV}^4. \tag{93}$$

写作 $d\chi/dN \equiv v$ ，因此 $\dot{\chi} = Hv$，我们可以将 H 改写为

$$3M_{\mathrm{P}}^2 H^2 = \frac{\rho_{r,0}e^{-4N} + \rho_{m,0}e^{-3N} + V}{1 - v^2/6M_{\mathrm{P}}^2}. \tag{94}$$

由式 (94) 可得

$$\rho_\chi = \frac{1}{1 - v^2/6M_{\mathrm{P}}^2}\left(\frac{\rho_r + \rho_m}{6M_{\mathrm{P}}^2}v^2 + V\right). \tag{95}$$

在求解运动方程时，我们还需要 H，其表达式为

$$6M_{\mathrm{P}}^2 \dot{H}H = \dot{\rho}_r + \dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\chi = -H(4\rho_r + 3\rho_m) - 3H^3v^2, \tag{96}$$

其中我们用到了

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r, \quad \dot{\rho}_m = -3H\rho_m. \tag{97}$$

此外，注意到 $\ddot{\chi} + \partial_\chi V = -3H\dot{\chi}$，可得

$$\dot{\rho}_\chi = \dot{\chi}(\ddot{\chi} + \partial_\chi V) = -3H^3v^2. \tag{98}$$

因此，我们要求解的常微分方程为

$$\frac{d\chi}{dN} = v, \quad \frac{dv}{dN} = -\frac{\dot{H} + 3H^2}{H^2}v - \frac{\partial_\chi V}{H^2} \tag{99}$$

连同

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\mathrm{P}}^2}\frac{\rho_{r,0}e^{-4N} + \rho_{m,0}e^{-3N} + V}{1 - v^2/6M_{\mathrm{P}}^2}, \quad \dot{H} = -\frac{2}{3}\frac{\rho_{r,0}}{M_{\mathrm{P}}^2}e^{-4N} - \frac{1}{2}\frac{\rho_{m,0}}{M_{\mathrm{P}}^2}e^{-3N} - \frac{1}{2}\frac{H^2v^2}{M_{\mathrm{P}}^2}. \tag{100}$$

求解方程（99）和（100），我们分别在图（2）和图（4）中计算了 χ 的能量分数、状态方程参数和场偏移，其中初始条件设为$\chi/M_{\mathrm{P}} = 5, v = 0$ ，对应于大爆炸核合成（BBN）开始前后。标量势取为

$$V(\chi) = \frac{V_{\mathrm{J}}(\chi)}{F_{\mathrm{g}}^2(\chi)} = \frac{V_0(d_4(\chi/M_{\mathrm{P}})^4 + d_2(\chi/M_{\mathrm{P}})^2 + 1)}{(1 + f(\chi/M_{\mathrm{P}})^2)^\eta}. \tag{101}$$

在图（2）中，我们将 $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_{\mathrm{cr}}$定义为 $i = r, m, \chi$，其中 $\rho_{\mathrm{cr}} \equiv 3M_{\mathrm{P}}^2H^2$表示给定时刻的值。在 $a = a_0$处，我们得到

$$\Omega_{\chi,0} = 0.681, \tag{102}$$

这与普朗克数据 [38]一致。在大爆炸核合成时期， χ 的能量占比为

$$\Omega_{\chi,\mathrm{BBN}} = 7.57 \times 10^{-37}, \tag{103}$$

这一数值足够小。能量密度中的此类额外成分可通过以下参数加以约束： $\Delta N_{\rm eff}$，即有效中微子自由度数量的偏差 $N_{\rm eff} = 3.046$，在 68% 置信水平下，我们有$N_{\rm eff} = 3.27 \pm 0.15$ [38]。$\Omega_{\chi,\ \rm BBN}$ 的允许值范围估算为 [39]

$$\Omega_{\chi,\rm BBN} \lesssim \frac{3}{4}\frac{7\Delta N_{\rm eff}/4}{10.75 + \Delta N_{\rm eff}/4} \sim 0.043, \tag{104}$$

其中我们使用了 $\Delta N_{\rm eff} = 0.374$ [38]。

对于由 $w_\chi \equiv P_\chi/\rho_\chi$ 定义的状态方程参数，其中压强 P_χ 由 $P_\chi \equiv \dot{\chi}^2/2 - V$ 给出，我们得到

$$w_\chi = -0.972 \tag{105}$$

在 $a = a_0$ 处，这满足参考文献 [38] 的式（51）中给出的普朗克数据 $w_\chi < -0.95$ 。

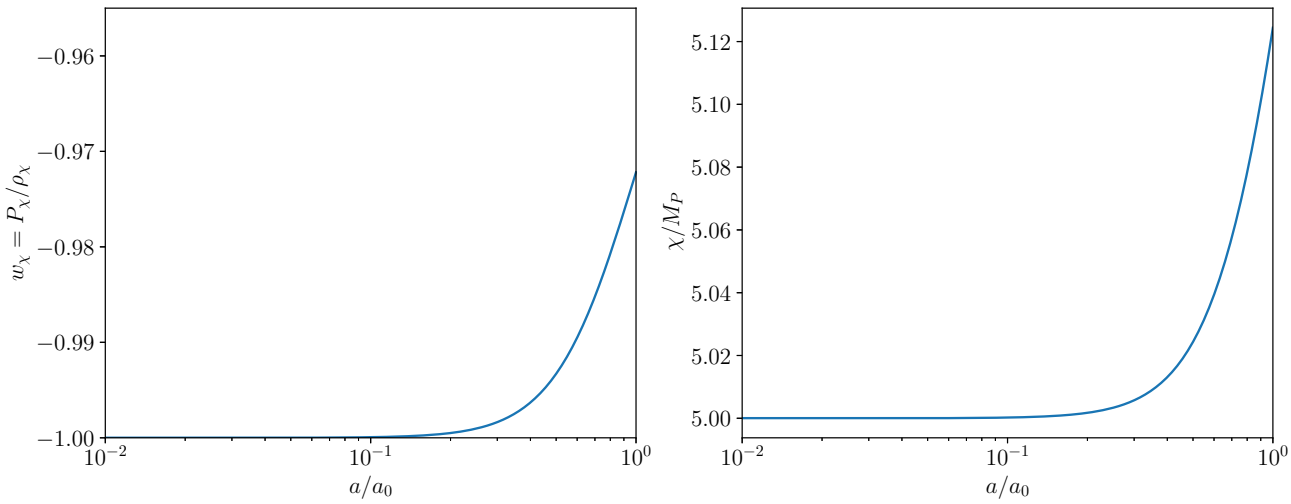

图 4：近期$z = 10^2 \sim 0$时期状态方程参数 $w = p/\rho$ 和 eJBD场 χ的时间演化。假设参数与图（2）中相同。

致谢

我们感谢 P. Fayet 指出本工作的初版中存在一处错误。本研究部分获得 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 19H01899（KK 和 KO）、21H01107（KO）和 21K03575（MY）。

参考文献

[1] P. Jordan, Z. Phys. 157, 112 (1959). C. Brans 和 R. Dicke, Phys. Rev. 124, 925(1961).[2] T. Futamase 和 K. i. Maeda, Phys. Rev. D 39, 399-404 (1989). C. Armendaritz-Picon、V. Mukhanov 和 P.J. Steinhardt, Phys.Rev.Lett.85, 4438 (2000). Phys.Rev.D63, 103510(2001); arXiv: astro-ph/0006373v1 (2000). F. L. Bezrukov 和 M. Shaposhnikov, Phys.Lett. B659, 703 (2008) 703. arXiv: 0710.3755. M. Galante, R. Kallosh, A. Linde 和 D. Roest, Phys. Rev. Lett. 114, 141302 (2015); arXiv:1412.3797[hep-th]。这些模型可视为对原始 Jordan-Brans-Dicke 理论的非平凡扩展，其中纳入了标量场的势项。文献中还有许多其他此类模型。[3] C. Wetterich, Astron. Astrophys. 301, 321-328 (1995). B. Ratra 和 P.J.E. Peebles, Rev.Mod.Phys. 75, 559-606 (2003); astro-ph/0207347 [astro-ph]. E. J. Copeland、A. R. Liddle 和 D. Wands, Phys. Rev. D 57, 4686-4690 (1998). arXiv:gr-qc/9711068[gr-qc]. N. Bartolo 和 M. Pietroni, Phys.Rev. D61, 023518 (1999). U. França 和 R. Rosenfeld, JHEP 10, 015 (2002). arXiv:astro-ph/0206194 [astro-ph].[4] Ph. Brax,1 C. van de Bruck, A-C. Davis, J. Khoury 和 A. Weltman, Phys.Rev. D70, 123518 (2004). 本文所依据的变色龙模型由 J. Khoury 和 A. Weltman 提出，见 Phys. Rev. Lett. 93, 171104 (2004): Phys. Rev. D 69, 044026 (2004). D.F. Mota 和 D.J. Shaw, Phys.Rev. D75, 063501 (2007). J. Wang、L. Hui 和 J. Khoury, Phys.Rev.Lett. 109, 241301 (2012).[5] K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Levy 和 A. Matas, Phys.Rev. D84, 103521 (2011).[6]G.W. Anderson 和 M. Carroll, “具有时间依赖质量的暗物质”，arXiv:astro- ph/9711288(1997). D.Comelli、M. Pietroni 和 A. Riotto, Phys.Lett. B571, 115 (2003); hep-ph/0302080 (2003). T. Faulkner、M. Tegmark、E.F. Bunn 和 Y. Mao, Phys.Rev.D76,063505 (2007). Ph. Brax、A-C. Davis、B. Li 和 H.A. Winther, Phys.Rev. D86, 044015 (2012).[7] P.G. Bergmann, International J. Theoret. Phys. 1, 25 (1968).[8] R.V. Wagoner, Phys.Rev. D1, (1970).[9] B. Ratra 和 P.J.E. Peebles, Phys. Rev. D 37, 3406 (1988). C. Wetterich, Nucl. Phys. B 302, 668 (1988).[10] M. Yoshimura, 宇宙学常数的动力学弛豫，arXiv:2204. 10809[hep-ph] (2022)。

[11] Y. Fujii, Phys.Rev. D26, 2580 (1982). Y. Fujii 和 T. Nishioka, Phys.Rev. D42 361 (1990).[12] S. Capozziello 等，Phys.Lett. B639, 135 (2006).[13] G. Domenech 和 M. Sasaki, JCAP 04, 022 (2015). arXiv: 1501.07699.[14] Y. Hamada、H. Kawai、Y. Nakanishi 和 K. Oda, Phys.Rev. D95, 103524 (2017); arXiv: 1610.05885[hep-th].[15] J.A. Casas、J. Garcia-Bellido 和 M. Quiros, Class. Quant. Grav. 9, (1992). A. Singh, Phys.Rev. D52, 6700 (1995); arXiv:hep-ph/9610317. P.Q. Hung, “惰性中微子与加速膨胀宇宙”，arXiv:hep-ph/0010126 (2000). R. Fardon、A.E. Nelson 和 N. Weiner, “质量变化中微子产生的暗能量”，JCAP10, 005 (2004). arXiv:astro-ph/0309800 (2003).[16] J-P. Uzan, Rev, Mod. Phys, 75, 403 (2003); arXiv: hep-ph/0205340 (2002).[17] T. Damour 和 A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B423 ,532 (1994). T. Damour 和 A.M. Polyakov,《弦理论与引力》，arXiv: gr-qc/9411069 (1994).[18] C. Burrage、E. J. Copeland、P. Millingtonz、M. Spannowsky, JCAP 11, 036 (2018): arXiv: hep-th/1804.07180.[19] 关于树级弦环展开下的有效作用量，E.S. Fradkin 和 A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B158, 316 (1985). C.G. Callan、D. Friedan、E.J. Martinec 和 M.J. Perry, Nucl. Phys. B262, 593 (1985). C.G. Callan、I.R. Klebanov 和 M.J. Perry, Nucl. Phys. B278, 78 (1986).[20] A.G. Cohen 和 D.B. Kaplan, Phys.Lett. B199, 251 (1987). Nucl.Phys. B308, 913 (1988).[21] M. Yoshimura, JCAP 08, 080 (2022). arXiv: 2205.04663v3，滑动暴胀子引发的 B-L 生成。[22] P. Fayet, Phys.Lett. B227, 127 (1989). Phys. Rev. D99, 055043 (2019).[23] 这一思想基于 M. Yoshimura，《早期宇宙中的更强引力》，arXiv: 2204.11384 [gr-qc](2022).[24] 现代宇宙学的标准教科书是 S. Weinberg 的《宇宙学》，Oxford (2008). [25] M. Yoshimura, Phys.Rev.D105, 083522 (2022). 标量-张量引力中的分岔对称性破缺，arXiv: 2112.02835v2 (2021). M. Yoshimura, Phys.Rev. D105, 103522 (2022). 非平凡南部-戈德斯通模存在时的轴子宇宙学。[26] T. Damour 和 K. Nordtvedt, Phys.Rev. D48, 3436 (1993).[27] E. J. Copeland、A. R. Liddle 和 D. Wands, Phys. Rev. D 57, 4686-4690 (1998). arXiv:gr-qc/9711068[gr-qc].[28] U. França 和 R. Rosenfeld, JHEP 10, 015 (2002). arXiv:astro-ph/0206194 [astro-ph].[29] T. Damour 和 F. Dyson, Nucl.Phys. B480, 37 (1996); arXiv: hep-ph/9606486 (1996).

[30] Y. Fujii、A. Iwamoto、T. Fukahori、T. Ohnuki、M. Nakagawa、H. Hidaka、Y. Oura 和 P. M¨ oller，《核物理B》573，377（2000）。[31] J.K. Webb、V.V. Flambaum、C.W. Churchill、M.J. Drinkwater 和 J.D. Barrow，《物理评论快报》82，884（1999）；arXiv： 9803165 [astro-ph]。C.L. Gardner，《物理评论D》68，043513（2003）。[32] B.H. Bransden 和 C.J. Joachain，《原子与分子物理学》第二版，培生教育有限公司（2003）。[33] R. A. Malaney 和 G. J. Mathews，《物理学报告》229，147（1993）。H. Reeves，《现代物理学评论》66，193（1994）。[34] C.M. Will，Pramana 63，731（2004）；arXiv：gr-qc/0103036v1（2002）。[35] P. Touboul 等，arXiv：2209.15487（2022）。J. Berge 等，《物理评论快报》120，141101（2018）。其他等效原理检验见[34]。[36] T. Rosenband 等，《科学》319，1808（2008），以及在线补充材料（http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/1154622/DC1）。[37] E.M. Lifshitz 和 L.P. Pitaevskii，《统计物理学第二部分》，J.B. Sykes 和 M.J. Kearsley 译，Pergamon（1980）。[38] 普朗克合作组，N. Aghanim 等，“普朗克2018年结果。VI. 宇宙学参数”，《天文学与天体物理学》641（2020）A6，arXiv：1807.06209 [astro-ph.CO]。 [勘误：《天文学与天体物理学》652，C4（2021）]。[39] P. G. Ferreira 和 M. Joyce，《物理评论快报》79（1997）4740–4743，arXiv：astro-ph/9707286。