arXiv:2304.08702v1 [math.AT] 18 Apr 2023

关于$SO(n)$-规范群在 S^2上的分类空间的上同调

YUKI MINOWA

Abstract. 设 $\mathcal{G}_\alpha(X,G)$为与映射 $\alpha\colon X\to BG$对应的空间 X 上的 G-规范群。对于 $n=3,4$，我们计算 $B\mathcal{G}_1(S^2,SO(n))$的整系数上同调。我们还证明， $B\mathcal{G}_1(S^2,SO(n))$的同调无挠，当且仅当 $n\leq 4$。作为应用，对于 $n\leq 4$，我们对黎曼曲面上的$SO(n)$-规范群的同伦型进行分类。

1. Introduction

设 G 是一个拓扑群，且 P 是底空间 X上的主 G-丛。按照定义， P 的自同构是覆盖 X上恒等映射的 G-等变自映射。 P 的规范群定义为 P的自同构所构成的拓扑群。令 $\mathcal{G}_\alpha(X,G)$表示与映射 $\alpha\colon X\to BG$对应的空间 X 上的主 G-丛的规范群。

规范群在几何、拓扑学和物理学的多个领域中都有研究。这里，我们简要回顾规范群的同伦论。给定 G和 X，我们有一族主 G-丛，其底空间为 X，因此得到相应的一族规范群。此前已有许多研究探讨这一族规范群的同伦型分类。正如 Gottlieb [6], 所证明的，存在一个自然的同伦等价

$$B\mathcal{G}_\alpha(X,G)\simeq \mathrm{Map}(X,BG;\alpha) \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{Map}(X,Y;f)$ 表示从 X到 Y的映射空间中包含映射 $f\colon X\to Y$ 的路径连通分支（另见[1]）。因此，规范群的同伦型分类与代数拓扑中的经典问题——映射空间 [20] 的连通分支分类——密切相关。关于规范群同伦型分类，已有一些一般性结果 [10, 12, 14, 22,25]。值得注意的是，Crabb 和 Sutherland [4] 证明，当 G 是紧连通李群且 X 是连通有限复形时，随着 α 遍历所有映射 $X\to BG$， $\mathcal{G}_\alpha(X,G)$ 只有有限多个同伦型；然而，底空间为 X的主 G-丛却可能有无穷多个。

规范群的同伦型分类被推广为 A_n-型的分类：Tsutaya[27] 证明，对于 $n<\infty$，只要 G 是紧连通李群且 X 是有限复形，A_n-型就只有有限多个。另一方面，Kishimoto 和 Tsutaya [17] 证明，只要 G 是紧致连通单李群且 $X=S^d$满足 $\pi_{d-1}(G)\otimes\mathbb{Q}\neq 0$，就有无穷多个 A_∞-型，即规范群的分类空间的同伦型。此外，关于特定 G 和 X [5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23, 24]的分类也有许多结果。

尽管关于规范群同伦型分类的结果很多，但人们对其（上）同调知之甚少。特别是，关于规范群的分类空间的（上）同调，现有的研究结果寥寥无几。Takeda [21] 计算了 $B\mathcal{G}_k(S^2,U(n))$ 的整系数上同调环。Kishimoto 和 Theriault [15] 证明，对于一个紧致连通单李群

G型为（n_1，...，n_l）且素数 p大于 n_l+1时，存在一个同构

$$H_*(B\mathcal{G}_k(S^4,G);\mathbb{Z}/p)\cong H_*(BG;\mathbb{Z}/p)\otimes H_*(\Omega^3G\langle 3\rangle;\mathbb{Z}/p)$$

作为 $\mathbb{Z}/p$-向量空间，因此， $B\mathcal{G}_k(S^4,G)$ 的模 p 同调不依赖于分类映射 $k\in\mathbb{Z}\cong\pi_3(G)$。Choi [3], 、Masbaum [19] 和 Tsukuda[26]针对特定的 G 和 X，给出了关于$B\mathcal{G}_\alpha X(G)$ 模 p （上）同调的部分结果。截至目前，Tsukuda 的结果 [26] 是关于李群 G 的 $B\mathcal{G}_\alpha(S^d,G)$ 整系数或模 p （上）同调的唯一非平凡结果；该李群的同调中含有 p-挠元。

本文研究 $n\geq 3$ 时 $B\mathcal{G}_k(S^2,SO(n))$ 的上同调，其中$k=0,1\in\mathbb{Z}/2\cong\pi_1(SO(n))$。只要考虑$SO(n)$，我们就始终假设 $n\geq 3$ 。首先，我们将应用 Takeda [21] 关于 $B\mathcal{G}_k(S^2,U(n))$ 整系数上同调的结果，以确定$n\leq 4$时 $B\mathcal{G}_1(S^2,SO(n))$ 的整系数上同调。Takeda 的结果中有一处小错误，我们将予以更正。为陈述该结果，我们先引入一些记号。设 A 是一个有限型分次阿贝尔群。定义 A 的子群 B 的有理闭包如下：

$$B_{\mathcal{R}}=\{a\in A\mid na\in B \text{ for some } 0\neq n\in\mathbb{Z}\}.$$

我们还通过递归定义多项式 $s_n\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$

$$s_0=1,\quad s_1=x_1\quad\text{and}\quad s_n=(-1)nx_n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n+i+1}x_{n-i}s_i. \tag{1.2}$$

因此，若 x_i是 $t_1,\dots,t_n$中的第 i个初等对称函数，则对于 $k\leq n$，有

$$s_k=t_1^k+\cdots+t_n^k.$$

现在我们可以陈述第一个结果了。

定理1.1。（1）存在一个同构

$$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2,SO(3));\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,c_2,x_1,x_2,\dots]/((h_2,h_3,\dots)_{\mathcal{R}}+(x_1))$$

其中 $|c_i|=|x_i|=2i$ 和 $h_i=s_i-s_{i-1}c_1+s_{i-2}c_2$。

（2）存在一个同构

$$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2,SO(4));\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,c_2,x_1,x_2,\dots]\otimes\mathbb{Z}[c_1,c_2,x_1,x_2,\dots]/I$$

$$where\ |c_i|=|x_i|=2i,\ h_i=s_i-s_{i-1}c_1+s_{i-2}c_2\ and$$

$$I=(h_2\otimes 1,1\otimes h_2,h_3\otimes 1,1\otimes h_3,\dots)_{\mathcal{R}}+(c_1\otimes 1-1\otimes c_1,x_1\otimes 1).$$

接下来，作为定理1.1的一个应用，我们将推广 Tsukuda 的结果[26], ， 他证明了分类空间的同调 $B\mathcal{G}_1(S^2,\ SO(3))$ 无挠。

定理 1.2。 $B\mathcal{G}_1(S^2,SO(n))$ 的同调无挠，当且仅当$n\leq 4$。

最后，作为定理 1.1 的另一个应用，我们将计算 $\pi_1(\mathcal{G}_k(S^2,SO(n)))$，其中 $n\leq 4$。然后，结合 Theriault 关于黎曼曲面 [22], 上规范群的同伦分解，我们可以确定 $\pi_1(\mathcal{G}_k(\Sigma_g,SO(n)))$，其中 $n\leq 4$，如下所示；这里 Σ_g 表示亏格为 g 的黎曼曲面。注意，同伦集 $[\Sigma_g,BSO(n)]$ 同构于 $\mathbb{Z}/2$。

定理1.3。对于 $n\leq 4$，存在同构

$$\pi_1(\mathcal{G}_k(\Sigma_g,SO(n)))\cong\begin{cases}\mathbb{Z}^{n-2}\oplus\mathbb{Z}/2 & (k=0)\\ \mathbb{Z}^{n-2} & (k=1).\end{cases}$$

于是我们立即得到以下推论。

推论1.4. 对于 $n \leq 4$, $\mathcal{G}_k(\Sigma_g, SO(n)) \simeq \mathcal{G}_l(\Sigma_g, SO(n))$，当且仅当 $k = l$。

本文结构如下。第2节通过修正 Takeda [21] 关于 $B\mathcal{G}_k$（S^2, U（n））整系数上同调的结果，计算了 $B\mathcal{G}_k$（$S^2, Spin^c$（n））在 $n = 3$，4 情形下的整系数上同调。第3节计算了 $B\mathcal{G}_1$（S^2, SO（n））在 $n = 3$，4 情形下的整系数上同调环，并证明定理1.1。第4节计算了 $B\mathcal{G}_1$（S^2, SO（n））在 $n \geq 5$ 情形下的模 2 上同调，并给出定理 1.2 的证明。最后，第5节将定理1.1的证明作为应用，证明定理1.3。

2. Cohomology of $B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(n))$ for $n = 3, 4$

本节计算 $B\mathcal{G}_k$（S^2，$Spin^c$（n））在 $n = 3$，4 情形下的整系数上同调，方法是修正 Takeda [21] 关于 $B\mathcal{G}_k$（S^2，U（n））整系数上同调的结果。回顾一下，$Spin^c$（n）定义为 SO（n）由 S^1作非平凡扩张：

$$1 \to S^1 \xrightarrow{\alpha} Spin^c(n) \xrightarrow{\pi} SO(n) \to 1.$$

这个李群短正合列关于包含映射i'_n：$Spin^c(n) \to Spin^c(n+1)$ 和 i_n：$SO(n) \to SO(n+1)$ 是自然的。因此，特别地，有以下例外同构：

$$Spin^c(3) \cong U(2) \quad \text{and} \quad Spin^c(4) \cong \{(A, B) \in U(2) \times U(2) \mid \det A = \det B\}$$

其中 α：$S^1 \to Spin^c(3)$ 以及 i'_3：$Spin^c(3) \to Spin^c(4)$ 定义为

$$\alpha(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad i'_3(A) = (A, A).$$

因此，对于 $n = 3$，4，我们可以由 $B\mathcal{G}_k(S^2, U(2))$ 的上同调得到 $B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(n))$ 的上同调。

Takeda [21] 描述了 $B\mathcal{G}_k(S^2, U(n))$ 的整数上同调，但其中存在一个错误。下面我们予以纠正。Bott [2] 研究了李群的环空间的同调，特别地，我们有

命题 2.1。存在一个同构

$$H^*(\Omega_0 U(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]/(s_n, s_{n+1}, \ldots)_{\mathfrak{R}}, \quad |x_i| = 2i$$

其中 s_n 如(1.2)所示。

根据（1.1），我们有 $B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)) \simeq \mathrm{Map}(S^2, BU(n); k$。于是存在一个同伦纤维化

$$\Omega_0 U(n) \xrightarrow{\iota} B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)) \xrightarrow{e} BU(n) \tag{2.1}$$

它由在 S^2的基点处求值得到。回顾一下，$BU(n)$的上同调为

$$H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n], \quad |c_i| = 2i$$

其中 c_i 是普适的 i次陈类。于是

$$H^{\mathrm{odd}}(BU(n); \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{and} \quad H^{\mathrm{odd}}(\Omega_0 U(n); \mathbb{Z}) = 0$$

根据命题 2.1，上述同伦纤维化的整系数上同调Serre谱序列在 E_2项处退化，从而得到

引理 2.2. 的整系数上同调 $B\mathcal{G}_k(S^2, U(n))$ 是自由阿贝尔群，由以下元素生成：$c_i = e^*(c_i)$ 当 $i = 1$，……，n 以及 x_j 当 $j \geq 1$，作为一个代数，其中 $\iota^*(x_j) = x_j$ 见命题 2.1。

令 $c_0 = 1$ 和 $c_i = 0$，其中 $i > n$。我们定义

$$h_i = kc_i + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j s_j c_{i-j} \quad \text{for} \quad i \geq 1.$$

Takeda[21] 证明了 $h_i = 0$ 在 $H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)); \mathbb{Z})$ 对于 $i \geq n$ 通过显式构造元素 $x_j \in H^{2j}(B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)); \mathbb{Z})$。因此，由引理2.2可知，存在一个满射

$$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots) \to H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)); \mathbb{Z}).$$

Takeda [21] 声称上面的满射是一个同构，这是错误的。为说明这一点，令 $n = 2$ 并令 $k = 1$。那么

$$h_4 - c_1 h_3 - (c_1 x_1 + x_1^2) h_2 = 2y$$

其中

$$y = c_1^2 x_2 + c_1 x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - c_2 x_2 + x_2^2 + 2x_1 x_3 - 2x_4.$$

然而，由于 x_4 在 $f \in (h_2, h_3, \ldots)$ 中的系数是 4 的倍数，因此$y \notin (h_2, h_3, \ldots)$。因此， y在 $\mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]/(h_2, h_3, \ldots)$ 中的像的阶为 2，而由引理2.2可知， $H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, U(2)); \mathbb{Z})$ 是一个自由阿贝尔群。

注意，对于自由阿贝尔群 A 及其子群 B， $B_{\mathcal{R}}$ 是 A中包含 B的最小直和项。于是 $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots)_{\mathcal{R}}$ 是 $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots)$的最大自由阿贝尔子群。因此，由引理2.2可知，存在一个满射

$$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots)_{\mathcal{R}} \to H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)); \mathbb{Z}). \tag{2.2}$$

定理 2.3. 存在一个同构

$$H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(n)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots)_{\mathcal{R}}.$$

证明。由于同伦纤维化（2.1）的有理上同调 Serre 谱序列如上所述在 E_2项处退化，由命题2.1可知， ′的有理上同调的 Poincar $B\mathcal{G}_k(S^2, U(n))$ 级数为

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{2i}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - t^{2i}}.$$

另一方面，容易看出 h_n， h_{n+1}， .....是$\mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]$ 中的正则序列，因此（$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots]/(h_n, h_{n+1}, \ldots)_{\mathcal{R}}) \otimes \mathbb{Q}$ 与 ′具有相同的 Poincar $B\mathcal{G}_k$ $(S^2, U(n))$ 级数。因此，映射（2.2）是单射，因而是同构。□

推论 2.4. 存在一个同构

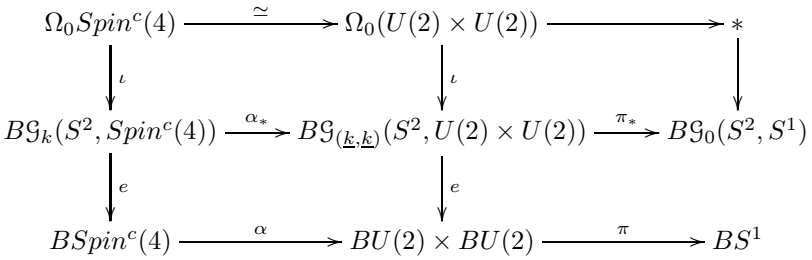
$$\begin{aligned} H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z}) &\cong H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(2)); \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]/(h_2, h_3, \ldots)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

接下来，我们计算 $B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(4))$ 的整系数上同调。回顾一下，存在一个李群短正合列

$$1 \to Spin^c(4) \xrightarrow{\alpha} U(2) \times U(2) \xrightarrow{\pi} S^1 \to 1$$

其中， α 是包含映射，且 $\pi(A, B) = \det(AB^{-1})$。我们将复合映射$S^2 \xrightarrow{k} BSpin^c$ $(4) \xrightarrow{\alpha} BU(2) \times BU(2) \xrightarrow{p} BU(2)$ 记为 $\underline{k}$，其中 p是第一投影。由于诱导映射 $\Omega\alpha\colon \Omega_0 Spin^c(4) \to \Omega_0(U(2) \times U(2))$ 是同伦等价，因此我们有

引理 2.5。存在一个同伦交换图



其中所有列和行都是同伦纤维化。

引理 2.6. $H^*(BSpin^c(4);\mathbb{Z})$是自由阿贝尔群，并且存在一个同构

$$H^*(BSpin^c(4);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,c_2]\otimes\mathbb{Z}[c_1,c_2]/(c_1\otimes 1-1\otimes c_1).$$

证明. 首先，我们考虑 $H^*(BSpin^c(4);\mathbb{Z})$。考虑李群的短正合列

$$1\to SU(2)\times SU(2)\hookrightarrow Spin^c(4)\to S^1\to 1.$$

于是存在一个同伦纤维化

$$BSU(2)\times BSU(2)\to BSpin^c(4)\to BS^1.$$

由于

$$H^{\mathrm{odd}}(BSU(2)\times BSU(2);\mathbb{Z})=0 \quad \text{and} \quad H^{\mathrm{odd}}(BS^1;\mathbb{Z})=0,$$

该同伦纤维化的整系数上同调Serre谱序列因维数原因在 E_2项处退化。因此我们得到 $H^{\mathrm{odd}}(BSpin^c(4);\mathbb{Z})=0$。由于 $H^*(BSU(2)\times BSU(2);\mathbb{Z})$ 和 $H^*(BS^1;\mathbb{Z})$ 都是自由阿贝尔群，$H^*(BSpin^c(4);\mathbb{Z})$ 也是自由阿贝尔群。接下来，我们考虑引理 2.5 中图表底行的同伦纤维化

$$BSpin^c(4)\xrightarrow{\alpha} BU(2)\times BU(2)\xrightarrow{\pi} BS^1.$$

回忆一下，$H^{\mathrm{odd}}(BSpin^c(4);\mathbb{Z})=0$。由于维数原因，该同伦纤维化的整系数上同调Serre谱序列在 E_2项处退化。由于$\pi^*(c_1)=c_1\otimes 1-1\otimes c_1$，我们得到陈述中的同构。□

命题 2.7. $H^*(B\mathcal{G}_k(S^2,Spin^c(4));\mathbb{Z})$ 是一个自由阿贝尔群，并且存在一个同构

$$H^*(B\mathcal{G}_k(S^2,Spin^c(4));\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,c_2,x_1,x_2,\ldots]\otimes\mathbb{Z}[c_1,c_2,x_1,x_2,\ldots]/I$$

其中

$$I=(h_2\otimes 1,1\otimes h_2,h_3\otimes 1,1\otimes h_3,\ldots)_{\mathcal{R}}+(c_1\otimes 1-1\otimes c_1).$$

证明。回顾一下，

$$H^{\mathrm{odd}}(\Omega_0 Spin^c(4);\mathbb{Z})\cong H^{\mathrm{odd}}(\Omega S^3\times\Omega S^3;\mathbb{Z})=0.$$

由引理 2.6，$H^{\mathrm{odd}}(BSpin^c(4);\mathbb{Z})=0$。于是得到

$$H^{\mathrm{odd}}(B\mathcal{G}_k(S^2,Spin^c(4));\mathbb{Z})=0,$$

因为引理 2.5 中图左列的同伦纤维化对应的整系数上同调Serre谱序列

$$\Omega_0 Spin^c(4)\xrightarrow{\iota} B\mathcal{G}_k(S^2,Spin^c(4))\xrightarrow{e} BSpin^c(4)$$

由于次数原因，在 E_2 项处退化。由于 $H^*(\Omega_0 Spin^c(4);\mathbb{Z})$ 和$H^*(BSpin^c(4);\mathbb{Z})$ 都是自由阿贝尔群，因此 $H^*(B\mathcal{G}_k(S^2,Spin^c(4));\mathbb{Z})$ 也是一个自由

阿贝尔群。接着，由于 $H^{\mathrm{odd}}(BS^1;\mathbb{Z}) = 0$，引理2.5 中图表中间一行的同伦纤维化所对应的整系数上同调 Serre 谱序列

$$B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(4)) \xrightarrow{\alpha_*} B\mathcal{G}_{(\underline{k},\underline{k})}(S^2, U(2)\times U(2)) \xrightarrow{\pi_*} BS^1$$

由次数原因，在 E_2 项处退化。此外，我们有

$$(\pi_*)^*(c_1) = (\pi\circ e)^*(c_1) = e^*\circ\pi^*(c_1) = e^*(c_1\otimes 1 - 1\otimes c_1) = c_1\otimes 1 - 1\otimes c_1.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(4));\mathbb{Z})\\
&\cong H^*(B\mathcal{G}_{(\underline{k},\underline{k})}(S^2, U(2)\times U(2));\mathbb{Z})/((\pi_*)^*(c_1))\\
&\cong H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(2));\mathbb{Z})\otimes H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, U(2));\mathbb{Z})/(c_1\otimes 1 - 1\otimes c_1)\\
&\cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]\otimes\mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]/I
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3. Cohomology of $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ for $n = 3, 4$

本节计算 $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ 的整系数上同调环，其中 n =3、4，并证明定理 1.1。回顾一下，存在李群的正合列

$$1 \to S^1 \xrightarrow{\alpha} Spin^c(n) \xrightarrow{\pi} SO(n) \to 1.$$

对于整数 k，令 $\overline{k}$ 为其模 2 约化。由于诱导映射 $\Omega\pi$: $\Omega_0 Spin^c(n) \to \Omega_0 SO(n)$ 是同伦等价，我们有

引理 3.1. 存在一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc}
* & \longrightarrow & \Omega_0 Spin^c(n) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega_0 SO(n)\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle \iota}\\
B\mathcal{G}_0(S^2, S^1) & \xrightarrow{\alpha_*} & B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(n)) & \xrightarrow{\pi_*} & B\mathcal{G}_{\overline{k}}(S^2, SO(n))\\
 & & \downarrow{\scriptstyle e} & & \downarrow{\scriptstyle e}\\
BS^1 & \xrightarrow{\alpha} & BSpin^c(n) & \xrightarrow{\pi} & BSO(n)
\end{array}$$

其中所有列和行都是同伦纤维化。

首先，我们计算 $n = 3$ 情形。根据引理3.1，存在一个同伦纤维化

$$BS^1 \xrightarrow{\alpha_*} B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(3)) \xrightarrow{\pi_*} B\mathcal{G}_{\overline{k}}(S^2, SO(3)).$$

令 c_i， $x_i \in H^{2i}(B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z})$ 为推论2.4 中的生成元，并且$c_1 \in H^2(BS^1; \mathbb{Z})$ 为第一个万有陈类。回忆一下，在李群的短正合列中

$$1 \to S^1 \xrightarrow{\alpha} Spin^c(3) \cong U(2) \xrightarrow{\pi} SO(3) \to 1,$$

$\alpha\colon S^1 \to U(2)$ 由 $\alpha(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$ 给出。于是我们可以选取生成元$c_i \in H^{2i}(BSpin^c(3);\mathbb{Z})$，使其满足 $\alpha^*(c_1) = 2c_1$ 以及 $\alpha^*(c_2) = c_1^2$。应用引理2.2，可得以下结论。

引理3.2. $(\alpha_*)^*(c_1) = 2c_1$ 和 $(\alpha_*)^*(c_2) = c_1^2$。

命题 3.3. $(\alpha_*)^*(x_1) = kc_1$.

证明. 由于 c_1 生成 $H^2(BS^1;\mathbb{Z})$，存在一个整数 l，使得

$$(\alpha_*)^*(x_1) = (k-l)c_1.$$

根据推论2.4，我们有

$$\begin{aligned} kc_2 - s_1c_1 + s_2 &= 0 \\ s_{n-2}c_2 - s_{n-1}c_1 + s_n &= 0 \quad \text{for} \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

在 $H^{2i}(B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z})$。根据引理3.2，我们有

$$(\alpha_*)^*(c_1) = 2c_1 \quad \text{and} \quad (\alpha_*)^*(c_2) = c_1^2.$$

于是我们得到

$$(\alpha_*)^*(s_n) = (k-nl)c_1^n$$

由归纳法可得。回忆 Girard-Newton公式

$$s_n = (-1)^n n \sum_{\substack{r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n \\ r_1\geq 0,\ldots,r_n\geq 0}} \frac{(r_1+r_2+\cdots+r_n-1)!}{r_1!r_2!\ldots r_n!} \prod_{i=1}^{n}(-x_i)^{r_i}.$$

那么，对于素数 p，$s_p - x_1^p$ 可被 p 整除。另一方面，

$$(\alpha_*)^*(s_p - x_1^p) = ((k-pl) - (k-l)^p)c_1^p = (((k-l) - (k-l)^p) - (p-1)l)c_1^p$$

当且仅当 l 能被 p整除时，p 能被整除。于是 l 能被所有素数整除，因此得到 $l = 0$。从而

$$(\alpha_*)^*(x_1) = kc_1$$

证明完成。 □

根据命题 3.3，我们有 $(\alpha_*)^*(x_1) = c_1$ 对于 $x_1 \in H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z})$。现在我们考虑同伦纤维化

$$BS^1 \xrightarrow{\alpha_*} B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(3)) \xrightarrow{\pi_*} B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3))$$

并证明定理 1.1 的前半部分。

定理 *1.1* (1)的证明。根据 Leray-Hirsch定理，我们得到一个$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)); \mathbb{Z})$-模的同构

$$\Phi\colon H^*(BS^1;\mathbb{Z}) \otimes H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)); \mathbb{Z}) \to H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z})$$

定义为

$$\Phi(\sum c_1^m \otimes b) := \sum x_1^m (\pi_*)^*(b)$$

对于 $b \in H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)); \mathbb{Z})$。实际上，$\Phi$ 也是一个环同构，因为

$$\begin{aligned} \Phi(c_1^{m+m'} \otimes (bb')) &= x_1^{m+m'}(\pi_*)^*(bb') \\ &= (x_1^m(\pi_*)^*(b))(x_1^{m'}(\pi_*)^*(b')) \\ &= \Phi(c_1^m \otimes b)\Phi(c_1^{m'} \otimes b') \end{aligned}$$

对于 $m, m' \geq 0$ 和 $b, b' \in H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)); \mathbb{Z})$。由于 $\Phi(c_1 \otimes 1) = x_1$，我们有

$$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)); \mathbb{Z}) \cong \big(\mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]/(h_2, h_3, \ldots)_{\mathcal{R}}\big)/(x_1)$$

并且 $n = 3$ 的证明完成。 □

接下来，我们计算 $n=4$ 情形。由于引理 3.1 中的图关于包含映射 $i'_n\colon Spin^c(n) \to Spin^c(n+1)$ 和 $i_n\colon SO(n) \to SO(n+1)$ 自然，我们得到一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} BS^1 & \xrightarrow{\alpha_*} & B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(3)) & \xrightarrow{\pi_*} & B\mathcal{G}_1(S^2, SO(3)) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle (i'_3)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (i_3)_*} \\ BS^1 & \xrightarrow{\alpha_*} & B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(4)) & \xrightarrow{\pi_*} & B\mathcal{G}_1(S^2, SO(4)) \end{array}$$

其中所有行都是同伦纤维化。

定理的证明 *1.1 (2).* 由命题2.7，我们有一个同构

$$H^*(B\mathcal{G}_k(S^2, Spin^c(4)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots] \otimes \mathbb{Z}[c_1, c_2, x_1, x_2, \ldots]/I$$

其中

$$I = (h_2 \otimes 1, 1 \otimes h_2, h_3 \otimes 1, 1 \otimes h_3, \ldots)_{\mathcal{R}} + (c_1 \otimes 1 - 1 \otimes c_1).$$

由于复合映射 $Spin^c(3) \xrightarrow{i'_3} Spin^c(4) \hookrightarrow U(2) \times U(2)$ 是对角映射，因此我们有

$$((i'_3)_*)^*(c_i \otimes 1) = c_i \quad \text{and} \quad ((i'_3)_*)^*(x_i \otimes 1) = x_i.$$

因此由命题3.3，我们得到

$$(\alpha_*)^*(x_1 \otimes 1) = (\alpha_*)^* \circ ((i'_3)_*)^*(x_1 \otimes 1) = (\alpha_*)^*(x_1) = c_1.$$

然后，按照定理 1.1 (1) 的证明中的方法推理，可得

$$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(4)); \mathbb{Z}) \cong H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(4)); \mathbb{Z})/(x_1 \otimes 1),$$

至此，$n=4$ 的证明完成。 □

推论 3.4。对于 $n \leq 4$，$B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ 的同调是无挠的。

证明。对于 $n \leq 4$，存在一个模同构

$$\Phi\colon H^*(BS^1; \mathbb{Z}) \otimes H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \to H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(n)); \mathbb{Z})$$

如定理1.1的证明所示。于是，对于 $n \leq 4$，$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z})$ 是 $H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, Spin^c(n)); \mathbb{Z})$ 的一个直和项，而后者是一个自由阿贝尔群。因此，$H^*(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z})$ 也是一个自由阿贝尔群，证明完毕。□

4. Torsion in the cohomology of $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$

本节给出定理 1.2 的证明。我们考察 $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ 的模 2 上同调。令 $i_n\colon SO(n) \to SO(n+1)$ 为包含映射。

引理 4.1. 存在同构

$$H^2(\Omega_0 SO(n); \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \langle y_1 \rangle & (n=3) \\ \langle z_1, y_1 \rangle & (n=4) \\ \langle z_1 \rangle & (n \geq 5) \end{cases}$$

使得 $(\Omega i_3)^*(y_1) = y_1$、$(\Omega i_3)^*(z_1) = 0$ 以及 $(\Omega i_n)^*(z_1) = z_1$，其中 $n \geq 4$。

证明。由于存在自然的同伦等价 $\Omega_0 SO(n) \simeq \Omega Spin(n)$，我们对 $\Omega Spin(n)$ 证明该结论。令 $j_n\colon Spin(n) \to Spin(n+1)$ 为包含映射。存在如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} Spin(3) & \xrightarrow{j_3} & Spin(4) & \xrightarrow{j_4} & Spin(5) \\ \| & & \| & & \| \\ Sp(1) & \xrightarrow{\Delta} & Sp(1) \times Sp(1) & \xrightarrow{\rho} & Sp(2) \end{array}$$

其中， Δ 是对角映射， ρ 是对角嵌入。于是，相应的分类空间之间存在一个诱导的同伦交换图。令 $q \in H^4(BSp(n);\mathbb{Z}/2)$ 表示第一辛庞特里亚金类模 2 的约化。那么

$$\rho^*(q) = q \times 1 + 1 \times q \quad \text{and} \quad \Delta^*(q \times 1) = q = \Delta^*(1 \times q).$$

我们定义 $y_1, z_1 \in H^2(\Omega Spin(n);\ \mathbb{Z}/2)$ 如下：

$$\begin{aligned} & y_1 := \sigma^2(q) && (n=3) \\ & z_1 := \sigma^2(q \times 1 + 1 \times q), \quad y_1 := \sigma^2(q \times 1) && (n=4) \\ & z_1 := \sigma^2(q) && (n \geq 5), \end{aligned}$$

其中， σ^2: $H^4(BSpin(n);\ \mathbb{Z}/2) \to H^2(\Omega Spin(n);\ \mathbb{Z}/2)$ 表示上同调双重悬挂。由于 $BSpin(n)$ 是 3-连通的， σ^2 是同构。此外，我们有 $(\Omega j_n) \circ \sigma^2 = \sigma^2 \circ j_n$。因此，我们得到 $(\Omega j_3)^*(y_1) = y_1$ 和 $(\Omega j_3)^*(z_1) = 0$。由于 Ωj_n 是一个 $(n-2)$-等价，对于 $n \geq 4$，我们还得到 $(\Omega i_n)^*(z_1) = z_1$ ，从而完成证明。□

令 $\{E_r(n)\ d_r\}$ 表示同伦纤维化的模2上同调塞尔谱序列

$$\Omega_0 SO(n) \xrightarrow{\iota} B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)) \xrightarrow{e} BSO(n).$$

由于 $BSO(n)$ 是单连通的，因此存在一个同构

$$E_2(n) \cong H^*(BSO(n);\mathbb{Z}/2) \otimes H^*(\Omega_0 SO(n);\mathbb{Z}/2).$$

回忆一下， $BSO(n)$ 的模 2 上同调由下式给出

$$H^*(BSO(n);\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[w_2, w_3, \ldots w_n]$$

其中 $w_i \in H^i(BSO(n);\mathbb{Z}/2)$ 是普适的第 i 阶斯蒂费尔-惠特尼类。我们还回顾 Bott 的经典结果 [2]。

引理 4.2. 设 G 是一个连通紧李群。那么 $\Omega_0 G$ 的整系数同调是自由阿贝尔群，且 $H_{\text{odd}}(\Omega_0 G;\mathbb{Z}) = 0$。

特别地，我们有

$$H^{\text{odd}}(\Omega_0 SO(n);\mathbb{Z}/2) = 0.$$

因此，由于次数的原因， $E_2(n) = E_3(n)$。

引理 4.3. 对于 $n \geq 5$，存在一个同构

$$H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n));\mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^2.$$

证明。我们有

$$E_3^{0,2}(n) = E_2^{0,2}(n) = \langle 1 \otimes z_1 \rangle, \quad E_3^{3,0}(n) = E_2^{3,0}(n) = \langle w_3 \otimes 1 \rangle.$$

令 i_n^*: $E_3(n+1) \to E_3(n)$ 为诱导同态。则我们有

$$i_n^*(d_3(1 \otimes z_1)) = d_3(1 \otimes (\Omega i_n)^*(z_1)) \quad \text{in} \quad E_3^{3,0}(n)$$

对于 $n \geq 3$。由于 i_3^*: $E^{3,\ 0\ 3}(n+1) \to E^{3,\ 0\ 3}(n)$ 是一个同构，对于 $n \geq 3$ 且

$$d_3(1 \otimes (\Omega i_3)^*(z_1)) = d_3(1 \otimes 0) = 0 \quad \text{in} \quad E_3^{3,0}(3)$$

由引理 4.1，我们得到

$$d_3(1 \otimes z_1) = 0 \quad \text{in} \quad E_3^{3,0}(n).$$

因此， d_3: $E^{0,\ 2\ 3}(n) \to E^{3,\ 0\ 3}(n)$ 是零映射，因此 $1 \otimes z_1$ 是一个永久循环。由于根据次数的理由， $w_2 \otimes 1 \in E^{2,\ 0\ 3}(n) \cong \mathbb{Z}/2$ 也是一个永久循环，我们得到

$$\begin{aligned} H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}/2) &\cong E_\infty^{2,0}(n) \oplus E_\infty^{0,2}(n) \\ &\cong E_3^{2,0}(n) \oplus E_3^{0,2}(n) = \langle w_2 \otimes 1, 1 \otimes z_1 \rangle \end{aligned}$$

并且证明至此完成。 □

引理 4.4。对于 $n \geq 5$，存在一个同构

$$H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

证明。考虑该同伦纤维化的整系数上同调Serre谱序列

$$\Omega_0 SO(n) \xrightarrow{\iota} B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)) \xrightarrow{e} BSO(n).$$

那么它的 E_2 项同构于 $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}) \otimes H^*(\Omega_0 SO(n); \mathbb{Z})$。由于

$$H^i(BSO(n); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2) \\ \mathbb{Z}/2 & (i = 3), \end{cases} \quad H^i(\Omega_0 SO(n); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, 2) \\ 0 & (i = 1) \end{cases}$$

对于 $n \geq 5$，我们有

$$H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \cong E_\infty^{0,2} \cong E_3^{0,2} \cong \mathbb{Z}$$

由次数原因可知。因此，我们得到陈述中的同构。 □

定理 *1.2* 的证明。 由引理 4.3 可知

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/2)^2 &\cong H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}/2) \\ &\cong \left(H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\right) \oplus \mathrm{Tor}(H^3(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \end{aligned}$$

对于 $n \geq 5$。由于 $H^2(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 由引理 4.4，我们得到

$$\mathrm{Tor}(H^3(B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2.$$

因此，根据泛系数定理， $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ 的整系数同调在 $n \geq 5$ 处有 2-挠。因此，根据推论 3.4，证明完成。 □

到目前为止，我们只考虑了 $B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n))$ 的同调中的 2-挠。现在我们考虑 p 奇素数对应的 p-挠。

命题 4.5. 对于 p 奇素数， $H^{\mathrm{odd}}(B\mathcal{G}_k(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}/p) = 0$。

证明。考虑同伦纤维化的模 p 上同调 Serre谱序列

$$\Omega_0 SO(n) \xrightarrow{\iota} B\mathcal{G}_1(S^2, SO(n)) \xrightarrow{e} BSO(n).$$

那么其 E_2 项同构于 $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}/p) \otimes H^*(\Omega_0 SO(n); \mathbb{Z}/p)$。由引理 4.2 可知 $H^{\mathrm{odd}}(\Omega_0 SO(n); \mathbb{Z}/p) = 0$。另一方面，众所周知 $H^{\mathrm{odd}}(BSO(n); \mathbb{Z}/p) = 0$。于是，由次数原因，该谱序列在 E_2 项处退化，证明完毕。□

因此，应用泛系数定理可得如下结论。

推论 4.6. 对于 p 奇素数， $B\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))$ 的同调没有 p-挠。

5. Homotopy types of $\mathcal{G}_k(\Sigma_g, SO(n))$

本节证明定理 1.3。我们回顾 Theriault 的结果 [22]。

命题 5.1. 存在一个同伦分解

$$\mathcal{G}_k(\Sigma_g, U(n)) \simeq (\Omega U(n))^{2g} \times \mathcal{G}_k(S^2, U(n)).$$

容易看出， [22] 中的证明也适用于 $\mathcal{G}_k(\Sigma_g, SO(n))$。因此我们得到一个同伦分解

$$\mathcal{G}_k(\Sigma_g, SO(n)) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{2g} \times (\Omega Spin(n))^{2g} \times \mathcal{G}_k(S^2, SO(n)). \tag{5.1}$$

定理 *1.3* 的证明。 回想一下， $\Omega Spin(n)$ 是单连通的。由 (5.1)， 我们有

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{G}_k(\Sigma_g, SO(n))) &\cong \pi_1((\mathbb{Z}/2)^{2g}) \times \pi_1((\Omega Spin(n))^{2g}) \times \pi_1(\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))) \\ &\cong \pi_1(\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))$是连通的，

$$\pi_1(\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))) \cong \pi_2(B\mathcal{G}_k(S^2, SO(n))) \cong H_2(B\mathcal{G}_k(S^2, SO(n)); \mathbb{Z})$$

根据 Hurewicz定理。因此， 只需证明

$$H_2(B\mathcal{G}_k(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{n-2} \oplus \mathbb{Z}/2 & (k=0) \\ \mathbb{Z}^{n-2} & (k=1). \end{cases}$$

该 $k=1$ 情形由定理 1.1 和泛系数定理得出。令 $\{E_r'(n)\ d_r'\}$ 表示引理 3.1中图表中间一行的同伦纤维化对应的整系数上同调Serre谱序列

$$BS^1 \xrightarrow{\alpha_*} B\mathcal{G}_0(S^2, Spin^c(n)) \xrightarrow{\pi_*} B\mathcal{G}_0(S^2, SO(n)).$$

由于 $BSO(n)$ 是单连通的，因此存在一个同构

$$E_2'(n) \cong H^*(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(n)); \mathbb{Z}) \otimes H^*(BS^1; \mathbb{Z})$$

然后，由于 $H^{\text{odd}}(BS^1;\ \mathbb{Z}) = 0$， $E_2'(n) = E_3'(n)$，由次数关系可知。令 c_i， $x_i \in H^{2i}(B\mathcal{G}_0(S^2, Spin^c(3)); \mathbb{Z})$ 为推论 2.4 中的生成元，并令 $c_1 \in H^2(BS^1;\ \mathbb{Z})$ 为第一陈类。对于 $n=3$， 有

$$(\alpha_*)^*(x_1) = 0$$

根据命题3.3。由于 $(\alpha_*)^*(c_1) = 2c_1$ 由引理 3.2可知，因此存在一个元素$x \in H^2(B\mathcal{G}_0(S^2,\ SO(3)); \mathbb{Z})$，使得

$$(\pi_*)^*(x) = x_1$$

并且存在一个阶为 2 的元素 $w \in H^3(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(3)); \mathbb{Z})$，使得

$$d_3(1 \otimes c_1) = w \otimes 1.$$

根据次数关系，我们有

$$H^i(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(3)); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \langle x \rangle \cong \mathbb{Z} & (i=2) \\ \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}/2 & (i=3). \end{cases}$$

因此，根据泛系数定理，我们得到

$$H_2(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(3)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

对于 $n=4$ 情形，我们得到

$$H^i(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(4)); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (i=2) \\ \mathbb{Z}/2 & (i=3) \end{cases}$$

通过类似 $n = 3$ 情形的论证。因此

$$H_2(B\mathcal{G}_0(S^2, SO(4)); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

证明至此完成。 □

References

[1] M. F. Atiyah 和 R. Bott, 《黎曼曲面上的杨-米尔斯方程》, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **308** 1983 523 615 ( ), –。

[2] R. Bott, 《李群上的环路空间》, *Michigan Math. J.* **5** 1958 1, 35 61 3, 9 ( ), 第 - 期。Y. Choi, 《 ( ) 规范群分类空间的同调》, ( ), 167–177。2[4] M.C. Crabb 和 W.A. Sutherland, 《规范群同伦型的计数》, *Sp n Isr. J. Math.* **151** 2006 *Proc. London Math. Soc.* **81** 2000 3, 747 768 ( ), 第 - 期。

[5] T. Cutler, 《 ( ) 规范群在 $U\ n$ S^4 $\mathbb{C}P^2$ *Homol. Homotopy* 和 上的同伦型》, ( ), 第 期。–。*Appl.* **20** 2018 1 5 36 1

[6] D. H. Gottlieb, 《从映射理论的应用》, *Trans. Am. Math. Soc.* **171** (1972), 23-50。1[7] H. Hamanaka 和 A. Kono, 《不稳定 K^1-群与某些规范群的同伦型》, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* **136** 2006 1, 149 155 1 ( ), 第 - 期。H. Hamanaka 和 A. Kono, 《 上 ( ) 丛的规范群同伦型》, ( ), 第 – 期。[9] S. Hasui、D. Kishimoto、A. Kono、T. Sato, 《 $PU(3)$ 与 $PSp(2)$ 规范群的同伦型》, *Algebraic Geom. Topol.* **16** 2016 3, 1813 1825 1 ( ), 第 – 期。M. Kameko、D. Kishimoto、M. Takeda, 《黎曼曲面上规范群的同伦型》, 即将发表。[11] Y. Kamiyama、D. Kishimoto、A. Kono 和 S. Tsukuda, 《 $SO(3)$ 的 Samelson积及其应用》。 *Glasgow Math. J.* **49** 2007 2, 405 409 1 ( ), 第 - 期。D. Kishimoto 和 A. Kono, 《规范群的分解》, *Trans. Am. Math. Soc.* **362** (2010), 第 12 期, 6715–6731。1[13] D. Kishimoto 和 A. Kono, 《关于 *Sp n Algebraic Geom. Topol.* **19** 2019 1, 491 502 ( ) 规范群的同伦型》, ( ), 第 – 期。[14] D. Kishimoto、A. Kono 和 M. Tsutaya, 《关于规范群的 p - 局部同伦型》, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* **144** 2014 1, 149 160 ( ), 第 - 期。

[15] D. Kishimoto 和 S. Theriault, 《某些规范群分类空间的模 同调》, p *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* 2022 1 13 1 ( ), -。D. Kishimoto、S. Theriault 和 M. Tsutaya, 《

[16] G_2 *Topol.* -规范群的同伦型》, ( ), -。*Appl.* **228** 2017 92 107 1

[17] D. Kishimoto 和 M. Tsutaya, 《规范群的 A_∞-型的无穷性》, *J. Topol.* **9** (2016), 181-191。1

[18] A. Kono, 《关于某些规范群同伦型的一则注记》, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* **117** 1991 3 4, 295 297 ( ), 第 - - 期。

[19] G. Masbaum, 《某些 4 *Bull. Soc. Math. Fr.* **119** 1991 1, 1 31 2 - 复形上规范群分类空间的上同调》, ( ), 第 - 期。S. B. Smith, 《函数空间的同伦论：综述》, *Homotopy theory of function spaces and related topics* 2010 3 39 (美国数学会, 普罗维登斯 RI,), –。

[21] $U\ n$ 2 M. Takeda, 《 ( ) 规范群在 球面上的分类空间的上同调》, *Homol. Homotopy Appl.* **23** 2021 1, 17 24 1, 2, 3, 4 ( ), 第 - 期。S. Theriault, 《规范群的奇主同伦分解》, **10** 2010 535 564 *Algebraic Geom. Topol.* ( ), –。

[23] S. Theriault, 《 ( ) 规范群的同伦型》, ( ), 第 – 期。[24] S. Theriault, 《 ( ) 规范群的同伦型》, ( ), 第 – 期。[25] S. Theriault, 《有基点规范群分类空间的同伦分解》, *Pac. J. Math.* **300** 2019 1, 215 231 1 ( ), 第 - 期。S. Tsukuda, 《关于某个规范群分类空间上同调的研究》, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* **127** 1997 2, 407 409 ( ), 第 - 期。

[27] A_n M. Tsutaya, 《规范群 -等价型的有限性》, *J. London Math. Soc.* **85** (2012), 142-164。1

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan
Email address: minowa.yuki.48z@st.kyoto-u.ac.jp