星形环面域在$\mathbb{C}^2$中的正向 S^1-等变辛同调的猜想性链模型

KEI IRIE

arXiv:2304.08720v1 [math.SG] 18 Apr 2023

Abstract. 对于 $\mathbb{C}^2$中的任意星形环面域，我们定义一个滤过链复形，并猜想它可以计算该域的正向 S^1-等变辛同调。假设这一猜想成立，我们证明，对于任意星形环面域 $X \subset \mathbb{C}^2$，极限 $\lim_{k\to\infty} c_k^{\mathrm{GH}}(X)/k$ 存在，其中 c_k^{GH}表示第 k个 Gutt-Hutchings 容量。

1. Introduction

$_n$设 n 为正整数，并考虑带有辛形式 $\sum dx_j dy_j$的 $\mathbb{C}^n$。 $\mathbb{C}^n$ 中的一个$_{j=1}$星形域是一个紧子集 $X \subset \mathbb{C}^n$，其边界 C^∞满足：（0, . . ., 0）位于 X的内部，并且对于任意 $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，半直线 $\{tz \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$与 ∂X 横截相交于唯一一点。

对于任意这样的 X 和 $-\infty < a < b \leq \infty$，都可以定义一个向量空间 $\mathrm{SH}^{S^1,\ [a,b)*}(X)$，称为$S^1$等变辛同调。众所周知，当 $\delta > 0$ 充分接近 0 时，$\mathrm{SH}^{S^1,\ [\delta,\infty)*}(X) \cong H_{*-}^{S^1}{}^{(n+1)}$ (pt)。另一方面，这族向量空间（及其之间的映射）包含关于 X的丰富定量信息。特别地，可以从 S^1等变辛同调的“正部分”定义 Gutt-Hutchings 容量（c_k^{GH}）$_{k\geq 1}$。
Gutt-Hutchings 容量在 [4] 中针对 Liouville 域进行了定义。人们猜想（[4] 猜想 1.9），对于 $\mathbb{C}^n$中的紧星形域，Gutt-Hutchings 容量与S^1等变 Ekeland-Hofer 容量 [2] 相一致。

若星形域 $X \subset \mathbb{C}^n$ 在标准的 T^n-作用下对 $\mathbb{C}^n$保持不变，则称其为（星形）环面域。对于所谓的“凸”或“凹”环面域 X，Gutt-Hutchings [4] 证明了计算所有 $k \geq 1$ 对应的容量 $c_k^{\mathrm{GH}}(X)$ 的显式公式。这些公式的一个显著推论是，当 X 为凸或凹环面域时，极限 $\lim_{k\to\infty} {}^{c_k^{\mathrm{GH}}}(X)\, k$ 存在。事实上，在弱得多的假设下，~~这个极~~限也存在；参见 [4]的注 1.22。 [4] 中的公式证明是“初等的”，也就是说，证明只用到了容量的基本性质，并以非常巧妙的方式将它们结合起来。另一方面，对于既非凸也非凹的环面域，如何推广这些公式尚不明确。即使对于凸域或凹域，如何获得容量以外的信息也尚不清楚，例如，如何获得由 S^1-等变辛同调定义的持久模所对应的条形码。

本文旨在为任意星形环面域 $X \subset \mathbb{C}^2$定义一个滤过链复形；据猜想，该复形可以计算任意 $0 < a < b \leq \infty$ 的 $\mathrm{SH}^{S^1,\,[a,b)*}(X)$。假设这一猜想成立，我们证明对于任意星形环面域 $X \subset \mathbb{C}^2$，极限 $\lim_{k\to\infty} \frac{c_k^{\mathrm{GH}}(X)}{k}$ 存在。

下面介绍本文的结构。在第 2 节中，我们为任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 定义一个 $\mathbb{R}$-滤过链复形 C_*^Ω（见下文定义 2.1）。对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，我们定义一个星形域 $X_\Omega \subset \mathbb{C}^2$，提出一个猜想：$C_*^\Omega$ 计算 $\mathrm{SH}^{S^1,\,[a,b)*}(X_\Omega)$，其中任意 $0 < a < b \leq \infty$均成立，并通过一些计算支持这一猜想。在第 3 节中，我们为任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$定义一列容量 $(c_k(\Omega))_{k\geq 1}$。假设上述猜想成立，则对于任意 $k \geq 1$ 和 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，有 $c_k(\Omega) = c_k^{\mathrm{GH}}(X_\Omega)$。当 Ω 为凹域或（弱）凸域时，我们计算容量 $c_k(\Omega)$，并检验结果与 [4]中的公式一致。此外，我们证明对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k(\Omega)}{k}$ 存在。

致谢。作者感谢 Jean Gutt 和 Michael Hutchings 对本文早期版本提出的宝贵意见。作者获得了 JSPS KAKENHI 项目编号 18K13407 和 19H00636 的资助。

约定。除非另有说明，本文均考虑 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间。向量空间 V 上的 $\mathbb{R}$-滤过是由子空间 $(V^a)_{a\in\mathbb{R}}$ 构成的族，满足 $a \leq b \implies V^a \subset V^b$。我们令 $V^\infty := V$，并令 $V^{-\infty} := 0$。对于任意 $a < b$，记作 $V^{[a,b)} := V^b/V^a$。

2. A chain model

2.1. 链模型的定义。我们先给出以下定义。

定义 2.1。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，令 $\Sigma^n := \{v \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \mid |v| = 1\}$。令 $\mathscr{S}^n$ 表示由满足以下条件的 $\Omega \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ 构成的集合：存在 $r_\Omega \in C^\infty(\Sigma^n, \mathbb{R}_{>0})$，使得 $\Omega = \{tz \mid 0 \leq t \leq r_\Omega(z)\ z \in \Sigma^n\}$。对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^n$，令 $U_\Omega := (\mathbb{R}_{>0})^n \setminus \Omega$，并令 $U_\Omega \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ 表示 U_Ω 在 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ 中的闭包。

本文主要考虑 $n = 2$ 的情形。对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，我们定义一个 $\mathbb{Z}$-分次$\mathbb{Q}$-向量空间C_*^Ω：

$$C_*^\Omega := \bigoplus_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\leq 0})^2} C^{\mathrm{sing}}_{*+1-2(m_1+m_2)}(U_\Omega) \otimes H_*(S^1),$$

其中 C_*^{sing} 表示奇异链复形，$S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

我们在 C_*^Ω 上定义一个边界算子。设 $e_0 := [\mathrm{pt}] \in H_0(S^1)$ 且 $e_1 := [\sigma] \in H_1(S^1)$，其中 $\sigma\colon [0,1] \to S^1$；$t \mapsto [t]$。对于任意齐次元素 $x \in C_*^\Omega$，令

$$x = \sum_{(m_1,m_2,i)\in(\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\leq 0})^2)\times\{0,1\}} x_{m_1,m_2,i} \otimes e_i,$$

并定义 ∂x 为

$$(\partial x)_{m_1,m_2,0} := \partial^{\text{sing}} x_{m_1,m_2,0},$$
$$(\partial x)_{m_1,m_2,1} := \partial^{\text{sing}} x_{m_1,m_2,1} + (-1)^{|x|}(m_2 \cdot x_{m_1+1,m_2,0} - m_1 \cdot x_{m_1,m_2+1,0}),$$

其中 ∂^{sing} 表示奇异链复形的边界算子。通过直接计算可验证$\partial^2 = 0$ 。

我们在 C_*^Ω上定义一个 $\mathbb{R}$-滤过。对于任意 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，定义 $A_{x_1,x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 如下

$$A_{x_1,x_2}(y_1, y_2) := x_1y_1 + x_2y_2.$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 和 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$，令

$$U_\Omega(a : m_1, m_2) := \{(x_1, x_2) \in U_\Omega \mid A_{m_1,m_2}(x_1, x_2) < a\}.$$

and

$$C_*^{\Omega,a} := \bigoplus_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\le 0})^2} C^{\text{sing}}_{*+1-2(m_1+m_2)}(U_\Omega(a : m_1, m_2)) \otimes H_*(S^1).$$

那么 $(C^{\Omega,a}_*)_{a\in\mathbb{R}}$ 是 C_*^Ω上的一个 $\mathbb{R}$-滤过。对于任意 $a < b$，记 $C^{\Omega,[a,b)}_* := C^{\Omega,b}_*/C^{\Omega,a}_*$。对于任意 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\le 0})^2$, , 有

$$U_\Omega(a : m_1 + 1, m_2), U_\Omega(a : m_1, m_2 + 1) \subset U_\Omega(a : m_1, m_2). \tag{1}$$

因此 $\partial(C^{\Omega,a}_*) \subset C^{\Omega,a}_{*-1}$。

如果 $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathscr{S}^2$ 满足 $\Omega_1 \subset \Omega_2$, , 那么 $U_{\Omega_2} \subset U_{\Omega_1}$。于是我们得到一个自然链映射$C_*^{\Omega_2} \to C_*^{\Omega_1}$，它保持 $\mathbb{R}$-滤过。

引理 2.2. 设 $-\infty < a < b \le \infty$。对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，令

$$F_mC_*^{\Omega,[a,b)} := \bigoplus_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\le 0})^2 \\ m_1+m_2\le m}} C^{\text{sing}}_{*+1-2(m_1+m_2)}(U_\Omega(b : m_1, m_2), U_\Omega(a : m_1, m_2)) \otimes H_*(S^1).$$

那么 $(F_mC^{\Omega,[a,b)}_*)_{m\in\mathbb{Z}}$ 是 $C^{\Omega,[a,b)}_*$ 上的一个滤过。令 $(E^r, \partial_{E^r})_{r\ge 1}$ 为与此滤过相关的谱序列。则有如下结论。

(i)：存在一个同构

$$E^1_{p,q} \cong \bigoplus_{\substack{m_1+m_2=p \\ i+j=q-p+1}} H_i(U_\Omega(b : m_1, m_2), U_\Omega(a : m_1, m_2)) \otimes H_j(S^1)$$

使得 $\partial_{E^1} : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$ 定义为

$$(\partial_{E^1}x)_{m_1,m_2,0} = 0,$$
$$(\partial_{E^1}x)_{m_1,m_2,1} = (-1)^{|x|}(m_2 \cdot x_{m_1+1,m_2,0} - m_1 \cdot x_{m_1,m_2+1,0}).$$

(ii)： $\partial_{E^r} = 0$ 若 $r \ge 2$。此外 $H_*(C^{\Omega,[a,b)}_*) \cong \bigoplus_{q} E^\infty_{p,q}$。 $p+q=*$

证明。(i) 显然。为证明 (ii)，对于每个 $l \in \mathbb{Z}$，令

$$C_*^l := \bigoplus_{m_1+m_2=l} C^{\mathrm{sing}}_{*+1-2l}(U_\Omega(b:m_1,m_2), U_\Omega(a:m_1,m_2)) \otimes \mathbb{R}e_1 \oplus \bigoplus_{m_1+m_2=l+1} C^{\mathrm{sing}}_{*-1-2l}(U_\Omega(b:m_1,m_2), U_\Omega(a:m_1,m_2)) \otimes \mathbb{R}e_0.$$

那么 C_*^l 是 $C_* := C^{\Omega,[a,b)}_*$ 的子复形，并且有 $C_* = \bigoplus C_*^l$，特别地$l\in\mathbb{Z}H_*(C) \cong \bigoplus H_*(C^l)$。每个 C^l 都赋有滤过 $F^mC^l := F^mC \cap C^l (m \in \mathbb{Z})$。$l\in\mathbb{Z}$令 $(E^r(C^l))_{r\geq 1}$ 为与该滤过相关联的谱序列。由于对每个 m都有 $F^mC \cong \bigoplus F^mC^l$，因此有 $E^r_{p,q}(C) \cong \bigoplus E^r_{p,q}(C^l)$，对任意 $r \geq 1$均成立。因此，只需证明对每个 $l \in \mathbb{Z}$，$\partial_{E^r}(C^l) = 0$($r \geq 2$) 且 $H_*(C^l) \cong \bigoplus E^\infty_{p,q}(C^l)$。$p+q=*$这由 $F^{l-1}C^l = 0$和 $F^{l+1}C^l = C^l$得出。

□

注 2.3. 假设 $H_i(U_\Omega(b: m_1, m_2)\ U_\Omega(a: m_1, m_2)) \neq 0$ 当且仅当 $i = 0$。那么$E^1_{p,q} \neq 0$ 当且仅当 $q = p$ 或 $q = p - 1$。此外，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$

$$E^1_{p,p-1+j} \cong \bigoplus_{m_1+m_2=p} H_0(U_\Omega(b:m_1,m_2), U_\Omega(a:m_1,m_2)) \otimes H_j(S^1).$$

2.2. 与 S^1-等变辛同调的猜想关系。设 n 为正整数，且 $\lambda_0 := \frac{1}{2}\sum^n (x_j dy_j - y_j dx_j) \in \Omega^1(\mathbb{C}^n)$。对于任意星形域$j=1X \subset \mathbb{C}^n$，$(X, \lambda_0)$ 是一个 Liouville 域。

对于任意 $-\infty < a < b \leq \infty$，可以定义一个 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $\mathrm{SH}^{S^1,[a,b)*}(X, \lambda_0)$，简记为 $\mathrm{SH}^{S^1,[a,b)*}(X)$，称为 S^1-等变辛同调。向量空间族 $(\mathrm{SH}^{S^1,[a,b)*}(X))_{a,b,X}$ 配备有映射（传递态射）

$$\mathrm{SH}^{S^1,[a,b)}_*(X) \to \mathrm{SH}^{S^1,[a',b')}_*(X')$$

对于满足 $a \leq a'$、$b \leq b'$ 和 $X' \subset X$ 的任意 (a, b, X) 和 (a', b', X')。

注 2.4. S^1-等变辛同调由 Viterbo [7] 定义。Bourgeois-Oancea [1] 遵循 Seidel [6] 的方法，通过族 Floer 同调给出了另一种定义。Gutt-Hutchings [4] 采用族 Floer 同调的定义，沿用了 Gutt [3] 中的处理方式。

对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$,

$$X_\Omega := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (\pi|z_1|^2, \pi|z_2|^2) \in \Omega\}$$

是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个星形域。现在我们可以陈述以下猜想。

猜想 2.5. 对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 和 $0 < a < b \leq \infty$，都可以定义一个 $\mathbb{Z}$ 分次向量空间之间的同构。

$$F^{a,b}_\Omega : H_*(C^{\Omega,[a,b)}) \cong \mathrm{SH}^{S^1,[a,b)}_*(X_\Omega)$$

使得该图式

$$\begin{array}{ccc} H_*(C^{\Omega,[a,b)}) & \longrightarrow & H_*(C^{\Omega',[a',b')}) \\ {\scriptstyle F_\Omega^{a,b}}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle F_{\Omega'}^{a',b'}} \\ \mathrm{SH}_*^{S^1,[a,b)}(X_\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{SH}_*^{S^1,[a',b')}(X_{\Omega'}) \end{array}$$

对于任意 a、b、Ω 以及 a'、b'、Ω'，满足 $a \le a'$、$b \le b'$ 且 $\Omega' \subset \Omega$ 的情形下均可交换。

我们简要说明一种获得猜想同构 $F^{a,b}_{*}$ 的思路。给定 $0 < a < b < \infty$，使得 $a, b \notin$ 属于 Ω 的谱，并取一个正整数 N，选取一个定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的自治哈密顿量 H，使得 $\mathrm{SH}^{S^1,[a,b)}_{\le N}(X_\Omega) \cong \mathrm{HF}^{S^1,[a,b)}_{\le N}(H)$，并满足以下性质：每个满足 $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(\gamma) \le N$ 且 $\mathscr{A}_H(\gamma) > 0$ 的 X_H 的 1 周期轨道 γ 都包含在 $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ 中。这里，$\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}$ 表示康利-泽恩德指数，$\mathscr{A}_H$ 表示哈密顿作用泛函。

为计算 $\mathrm{HF}^{S^1,[a,b)}_{\le N}(H)$，我们取 $\varepsilon > 0$，并考虑定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的几乎复结构 J^ε，它满足

$$J^\varepsilon(\partial_{\theta_i}) = -\varepsilon r_i \partial_{r_i} \qquad (z_i = e^{r_i + \sqrt{-1}\theta_i},\ i = 1, 2)$$

在 $\mathbb{C} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}$ 的某个邻域的补集上。猜想上，当 ε 充分接近 0 时，可以通过计算 $(\mathbb{R}_{>0})^2$，上的某些莫尔斯轨线来求得 $\mathrm{HF}^{S^1,\ [a,b)}_{\le N}(H)$，并借助有限维莫尔斯理论得到同构 $\mathrm{HF}^{S^1,\ [a,b)}_{\le N}(H) \cong H_{\le N}(C^{\Omega,\ [a,b)})$；由此可得 $F^{a,\ b}_{*}$，直至次数 N。

2.3. 相对同调的计算。本小节中，我们针对一些特殊情形计算相对同调 $H_*(C^{\Omega,\ [a,b)})$，以验证猜想 2.5 与已知的 S^1-等变辛同调性质相符。

我们先对 $\mathbb{C}^2$ 中的环面星形区域做一些准备。对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，定义 $\rho_\Omega \in C^\infty([0, \pi/2], \mathbb{R}_{>0})$ 为 $\rho_\Omega(\theta) := r_\Omega(\cos\theta, \sin\theta)$。换言之，

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le \rho_\Omega(\theta)\}. \tag{2}$$

定义如下

$$\partial\Omega := \{(\rho_\Omega(\theta)\cos\theta, \rho_\Omega(\theta)\sin\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/2\},$$
$$\partial_+\Omega := \partial\Omega \cup \{(t, 0) \mid t \ge \rho_\Omega(0)\} \cup \{(0, t) \mid t \ge \rho_\Omega(\pi/2)\}.$$

对于任意 $c \in \mathbb{R}$ 以及 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\le 0})^2$，，令

$$\bar{U}_\Omega(c : m_1, m_2) := \{(x_1, x_2) \in \bar{U}_\Omega \mid A_{m_1,m_2}(x_1, x_2) < c\},$$
$$\partial_+\Omega(c : m_1, m_2) := \{(x_1, x_2) \in \partial_+\Omega \mid A_{m_1,m_2}(x_1, x_2) < c\}.$$

引理 2.6. 对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 以及 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\le 0})^2$,

$$H_*(\bar{U}_\Omega(c : m_1, m_2), U_\Omega(c : m_1, m_2)) = H_*(\bar{U}_\Omega(c : m_1, m_2), \partial_+\Omega(c : m_1, m_2)) = 0.$$

证明。定义

$$\mathscr{C} := \{\text{critical values of } A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}\ \} \cup \{m_1\rho(0), m_2\rho(\pi/2)\}.$$

注意，$\mathscr{C}$ 是一个零测集。我们可以假设 $c \notin \mathscr{C}$，因为情形 $c \in \mathscr{C}$ 可通过取极限从本情形推出。于是，$U_\Omega(c: m_1, m_2)$是一个带角流形，这意味着

$$H_*(U_\Omega(c: m_1, m_2), U_\Omega(c: m_1, m_2)) = 0.$$

接下来我们证明 $H_*(U_\Omega(c: m_1, m_2), \partial_+\Omega(c: m_1, m_2)) = 0$。令

$$\partial\Omega(c: m_1, m_2) := \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \mid A_{m_1,m_2}(x_1, x_2) < c\}.$$

那么，只需证明包含映射

$$i : \partial\Omega(c: m_1, m_2) \to \partial_+\Omega(c: m_1, m_2), \qquad j : \partial\Omega(c: m_1, m_2) \to \bar{U}_\Omega(c: m_1, m_2)$$

是同伦等价映射。对于任意 $x \in U_\Omega(c: m_1, m_2)$，令 $\rho(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ 为满足 $\rho(x)x \in \partial\Omega$ 的唯一正实数。那么

$$r : \bar{U}_\Omega(c: m_1, m_2) \to \partial\Omega(c: m_1, m_2);\ x \mapsto \rho(x) \cdot x$$

是 j 的同伦逆，而 $r|_{\partial_+\Omega(c: m_1, m_2)}$ 是 i 的逆。 □

对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$，定义

$$P(\Omega) := \{(\rho_\Omega(0), 0), (0, \rho_\Omega(\pi/2))\} \cup \bigcup_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\le 0})^2} \mathrm{Crit}_+(A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}),$$

其中

$$\mathrm{Crit}_+(A_{m_1,m_2}) := \{p \in \partial\Omega \mid dA_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}(p) = 0, \quad A_{m_1,m_2}(p) > 0\}.$$

对于任意 $p \in P(\Omega)$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，定义 $A(p, m) \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $i(p, m) \in \mathbb{Z}$ 如下：

- 若 $p = (\rho_\Omega(0), 0)$，其中 $t_1 \in \mathbb{R}$ 的定义使得 $T_p(\partial\Omega)$ 由 $(-t_1, 1)$ 生成。 $A(p, m) := m \cdot \rho_\Omega(0), \quad i(p, m) := 1 + 2(m + [mt_1]),$

- 如果 $p = (0, \rho_\Omega(\pi/2))$，

$$A(p, m) := m \cdot \rho_\Omega(\pi/2), \quad i(p, m) := 1 + 2(m + [mt_2]),$$

其中 $t_2 \in \mathbb{R}$ 的定义使得 $T_p(\partial\Omega)$ 由 $(1, -t_2)$ 生成。

- 若 $p \notin \{(\rho_\Omega(0), 0), (0, \rho_\Omega(\pi/2))\}$，则存在唯一的 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}\setminus(\mathbb{Z}_{\le 0})$，使得 $p \in \mathrm{Crit}_+(A^2_{m_1,m_2})$ 且 $m = \gcd(m_1, m_2)$。令 $\mu(p)$ 表示 p 作为 $A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}$ 的临界点时的莫尔斯指标。那么

$$A(p, m) := A_{m_1,m_2}(p), \quad i(p, m) := 2(m_1 + m_2) + \mu(p) - 1.$$

令 $\mathrm{Spec}(\Omega) := \{A(p, m) \mid (p, m) \in P(\Omega) \times \mathbb{Z}_{>0}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$。容易看出，$\mathrm{Spec}(\Omega)$ 是零测度集，且在 $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 中闭；特别地，$\min \mathrm{Spec}(\Omega)$ 存在且为正。

令 $\mathscr{S}^{2,\text{良好}}$表示由满足以下条件的 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 组成的集合：

- 对于任意 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\le 0})^2$，$(\rho_\Omega(0), 0)$ 和 $(0, \rho_\Omega(\pi/2))$ 都不是$A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}$的临界点。此外，$A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}$ 是一个 Morse函数，也就是说，$A_{m_1,m_2}|_{\partial\Omega}$ 的每个临界点都是非退化的。

- 如果 (p, m)、$(p', m') \in P(\Omega) \times \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $A(p, m) = A(p', m')$，那么 $(p, m) = (p', m')$。

很容易 看出， $\mathscr{S}^{2,\text{良好}}$在带有 C^∞-拓扑的 $\mathscr{S}^2$ 中是稠密剩余的；参见引理 6.1。

命题 2.7. 对任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 和 $0 < a < b \le \infty$，若 $a, b \notin$ 属于Ω 的谱，则下列结论成立。

(i)：若 $[a,b)$ ∩属于Ω 的谱 $=\emptyset$，则 $H_*(C^{\Omega,[a,b)}) = 0$。(ii)：若 Ω $\in \mathscr{S}^2$良好，且 $[a,b)$ Ω 的谱仅含一个元素 $A(p,m)$，满足 $p \in\{(\rho_\Omega(0), 0), (0, \rho_\Omega(\pi/2))\}$，则 $H_*(C^{\Omega,[a,b)}) \cong H_{*-i(p,m)}$(pt)。(iii)：若 Ω $\in \mathscr{S}^2$良好，且 $[a,b)$ Ω 的谱仅含一个元素 $A(p,m)$，满足 $p \notin\{(\rho_\Omega(0), 0), (0, \rho_\Omega(\pi/2))\}$，则 $H_*(C^{\Omega,[a,b)}) \cong H_{*-i(p,m)}(S^1)$。

证明。考虑 F_{m^m} 在 $C^{\Omega,}{}_*{}^{[a,b)}$ 上的滤过，以及如引理 2.2 中所述的相应谱序列。

(i)：由引理 2.6 及假设可得，

$$H_*(U_\Omega(b\colon m_1,m_2)\ U_\Omega(a\colon m_1,m_2)) \cong H_*(\partial_+\Omega(b\colon m_1,m_2)\ \partial_+\Omega(a\colon m_1,m_2)) = 0$$

对于任意 $(m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\le 0})^2$,，因此 $E^1_{p,\ q} = 0$ 对于任意 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$。

(ii)：考虑情形 $p = (\rho_\Omega(0), 0)$。由引理 2.6 及假设可得，

$$H_*(U_\Omega(b : m_1,m_2), U_\Omega(a : m_1,m_2)) \cong \begin{cases} H_*(\mathrm{pt}) & (m_1 = m,\ m_2 > mt_1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

于是，由引理 2.2 和注 2.3，可得

$$E^2_{k,l} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (k = m + [mt_1] + 1,\ l = m + [mt_1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

以及 $\partial_{E^2} = 0$，这意味着 $H_*(C) \cong H_{*-i(p,m)}$(pt)。 $p = (0, \rho_\Omega(\pi/2))$ 的情形类似，故省略。

(iii)：由引理 2.6 及假设，

$$H_*(U_\Omega(b : m_1,m_2), U_\Omega(a : m_1,m_2)) \cong \begin{cases} H_{*-\mu(p)}(\mathrm{pt}) & (p \in \mathrm{Crit}_+(A_{m_1,m_2}),\ m = \gcd(m_1,m_2)), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

由引理 2.2，我们得到

$$E^1_{k,l} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (k = m_1 + m_2,\ l - k - \mu(p) \in \{-1, 0\}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

以及 $\partial_{E^1} = 0$，这意味着 $H_*(C^{\Omega,\ [a,b)}) \cong H_{*-i(p,m)}(S^1)$。 □

对于任意 $0 < a \le \infty$，令 $H^{+,}{}_*{}^a(\Omega) := \varprojlim_{\delta} H_*(C^{\Omega,\ [\delta,a)})$。由命题 2.7 (i)，$^{\delta\to 0+}H^{+,}{}_*{}^a(\Omega) \to H_*(C^{\Omega,\ [\delta,a)})$ 是一个同构，当且仅当 $\delta \in (0, \Omega$ 的谱的最小值)。

命题 2.8. (i)：对于任意 Ω $\in \mathscr{S}^2$，有 $H^{+,}{}_*{}^\infty(\Omega) \cong H^{S^1}_{*-3}$(pt). (ii)：对于任意 Ω，若 Ω $' \in \mathscr{S}^2$ 满足 $\Omega' \subset \Omega$，则自然映射 $H^{+,}{}_*{}^\infty(\Omega) \to H^{+,}{}_*{}^\infty(\Omega')$ 是一个同构。

证明. (i)：取 $\delta \in (0, \min \Omega$ 的谱 $(\Omega))$. 则 $H^{+,\infty}_*(\Omega) \cong H_*(C^{\Omega,[\delta,\infty)}_*)$. 根据引理 2.6，很容易证明，对于任意 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\leq 0})^2$

$$H_*(U_\Omega, U_\Omega(\delta : m_1, m_2)) \cong \begin{cases} H_*(\mathrm{pt}) & ((m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

考虑之前的滤过 $(F_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on $C^{\Omega,[\delta,\infty)}_*$。于是，由引理 2.2 和注 2.3，$E^1_{p,q} \neq 0$ 当且仅当 $q - p \in \{0, -1\}$，并且存在一个同构

$$E^1_{p,p-1+j} \cong \bigoplus_{\substack{m_1+m_2=p \\ m_1,m_2>0}} H_0(\mathrm{pt}) \otimes H_j(S^1).$$

对于任意 $p \geq 2$，都有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{\star} E^1_{p,p-1} \xrightarrow{\partial_{E^1}} E^1_{p-1,p-1} \longrightarrow 0,$$

其中 $\star$ 将 1 映到 $\sum x_{j,p-j,0} \otimes e_0$ 使得 $x_{j,p-j,0} \neq 0$ 对任意 j 均成立。因此我们得到$_{j=1}^{p-1}$

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (p \geq 2,\, q = p - 1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

这意味着 $H_*(C^{\Omega,[\delta,\infty)}_*) \cong H^{S^1}_{*-3}$(点)。

(ii)：自然链映射 $C^{\Omega,[\delta,\infty)}_* \to C^{\Omega',[\delta,\infty)}_*$ 保持滤过 $(F_m)_{m\in\mathbb{Z}}$，并在 E^1-页上给出同构。
□

下一个推论由上述命题 2.8 (i) 的证明得出。

推论 2.9. 对任意 $\delta \in (0,$ Ω 的谱的最小值) 及 $k \geq 1$，$H_{2k+1}(C^{\Omega,[\delta,\infty)}_*) \cong \mathbb{Q}$ 中的任意元素都可表示为 $x = \sum_{(m_1,m_2,i)\in(\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}_{\leq 0})^2)\times\{0,1\}} x_{m_1,m_2,i} \otimes e_i \in C^{\Omega,[\delta,\infty)}_{2k+1}$，使得：

- $x_{m_1,m_2,i} = 0$，除非 m_1、$m_2 > 0$、$m_1 + m_2 = k + 1$ 和 $i = 0$。
- $x_{j,k+1-j,0} = a_j[p] \otimes e_0$，对任意 $1 \leq j \leq k$，其中 $p \in U_\Omega$ 且 $(a_1, \ldots, a_k)$ 满足 $(k - j)$，对任意 $1 \leq j \leq k - 1$。

3. 容量

3.1. 定义和基本性质。对于任意 Ω $\in \mathscr{S}^2$，我们定义如下序列 $(c_k(\Omega))_{k\geq 1}$。对于任意 $a \in \mathbb{R}_{>0}$，令

$$(i^a_\Omega)_* : H^{+,a}_*(\Omega) \to H^{+,\infty}_*(\Omega)$$

为自然映射。对于任意 $k \geq 1$，令

$$c_k(\Omega) := \inf\{a \mid (i^a_\Omega)_{2k+1} \neq 0\}.$$

命题 3.1. 对任意 Ω，$\in \mathscr{S}^2$ 和 $k \geq 1$均成立。

(i): *For any* $\Omega' \in \mathscr{S}^2$ *such that* $\Omega' \subset \Omega$, *there holds* $c_k(\Omega') \leq c_k(\Omega)$.

(ii)：对于任意 $c \in \mathbb{R}_{>0}$，c_k（$c\Omega$）$= c \cdot c_k$（Ω）。(iii)：c_k（Ω）$\in \Omega$ 的谱。(iv)：c_k（Ω）$\leq c_{k+1}$（Ω）。

证明。(i)：对于任意 $0 < a \leq \infty$，令 $j^a : H^{+,\ *\ a}(\Omega) \to H^{+,\ *\ a}(\Omega')$ 为自然映射。则 $c_k(\Omega') \leq c_k(\Omega)$，因为 $i^a_{\Omega'} \circ j^a = j^\infty \circ i^a_\Omega$，且根据命题 2.8 (ii)，$j^\infty$ 是同构。

(ii) 由同构 $H^{+,\ *\ a}(\Omega) \cong H^{+,\ *\ ca}(c\Omega)$ 得出，该同构对任意 $0 < a \leq \infty$ 和 $c > 0$ 定义，并由缩放微分同胚 $U_\Omega \to U_{c\Omega}$ 定义；$(x_1, x_2) \mapsto (cx_1, cx_2)$。

(iii) 由命题 2.7 (i) 以及 Ω 的谱是闭集得出。

(iv)：定义一个线性映射 $u : C^\Omega_* \to C^\Omega_{*-2}$，如下：

$$(ux)_{m_1,m_2,i} := x_{m_1+1,m_2,i} + x_{m_1,m_2+1,i} \qquad (i = 0, 1).$$

通过直接计算可以验证，u 与C^Ω上的边界映射可交换。由 (1)，u 保持 C^Ω 上的 $\mathbb{R}$-滤过。此外，推论 2.9 表明，对任意 $k \geq 1$，$H_*(u) : H_{2k+3}(C^{\Omega,[\delta,\infty)}) \to H_{2k+1}(C^{\Omega,[\delta,\infty)})$ 是一个同构，这意味着$c_k(\Omega) \leq c_{k+1}(\Omega)$。□

注 3.2。作者不清楚 $H_*(u)$ 是否对应于 [4]中定义的 U-映射。

3.2. 与 Gutt-Hutchings 容量的猜想关系。对于任意 Liouville 域 (X, λ)，Gutt-Hutchings [4] 定义了一列 $(c^{\mathrm{GH}}_k(X, \lambda))_{k\geq 1}$，称为 Gutt-Hutchings 容量。一般 Liouville 域的容量定义见 [4] 定义 4.1 和 4.4。

设 n 为正整数，X 为 $\mathbb{C}^n$中的星形域。我们将 $c^{\mathrm{GH}}_k(X, \lambda_0)$ 简记为 $c^{\mathrm{GH}}_k(X)$。对于任意 $0 < a \leq \infty$，令 $\mathrm{SH}^{S^1,\ [\delta,a)*}_*(X) := \varinjlim_{\delta\to 0+} \mathrm{SH}^{S^1,\ [\delta,a)*}_*(X)$。其中存在一个自然映射 $\delta : \mathrm{CH}^\infty_{*-n+1}(X) \to H_*(X, \partial X) \otimes H^{S^1}_*(\mathrm{pt})$；见 [4] 第 3 节。

对于任意 $a \in \mathbb{R}_{>0}$，令 $i^a : \mathrm{CH}^a_*(X) \to \mathrm{CH}^\infty_*(X)$ 为自然映射。则

$$c^{\mathrm{GH}}_k(X) = \inf\{a \mid (i^a)_{2k+1} \neq 0\}$$

对于任意 $k \geq 1$。这可由以下事实得出：

- $\delta : \mathrm{CH}^\infty_{n+1}(X) \to H_{2n}(X, \partial X) \otimes H^{S^1}_0(\mathrm{pt})$ 是一个同构。
- U：对于任意 $k \geq 1$，$\mathrm{CH}^\infty_{n+2k+1}(X) \to \mathrm{CH}^\infty_{n+2k-1}(X)$ 是一个同构；关于 U-映射的定义，参见 [4]第 6.3 节。

现在很清楚，猜想 2.5 蕴含以下猜想。

猜想 3.3。对于任意 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 和 $k \geq 1$，有 $c_k(\Omega) = c^{\mathrm{GH}}_k(X_\Omega)$。

3.3. 凹域与（弱）凸域的计算。本小节计算 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 为凹域或弱凸域时的容量 c_k。

我们称 Ω 为弱凸的，如果它是 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集；若 $U_\Omega = (\mathbb{R}_{>0})^2 \setminus \Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集，则称 Ω 为凹的。通过将我们的计算与公式

与 Gutt-Hutchings（ [4] 中的定理 1.6 和 1.14）进行比较，我们可以验证当 Ω 为凹或强凸时，猜想 3.3 成立。这里，若 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x_1|,|x_2|) \in \Omega\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集，则称 Ω 为强凸的。

¯回顾一下， U_Ω 表示 U_Ω的闭包。

命题 3.4。如果 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 是凹的，那么对于任意 $k \geq 1$

$$c_k(\Omega) = \max_{1\leq j\leq k}(\min_{p\in\bar{U}_\Omega} A_{j,k+1-j}(p)).$$

证明。我们不妨假设 $\Omega \in \mathscr{S}^2_{\text{nice}}$。这是因为对于任意凹的 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Omega' \in \mathscr{S}^2_{\text{nice}}$，它是凹的，并且满足 $\Omega \subset \Omega' \subset (1+\varepsilon)\Omega$。

令 $a := \max_{1\leq j\leq k}(\min_{p\in\bar{U}_\Omega} A_{j,k+1-j}(p))$。为了证明 $c_k(\Omega) = a$，只需证明对于任意 $\varepsilon > 0$，$a - \varepsilon \leq c_k(\Omega) \leq a + \varepsilon$。

我们来证明 $c_k(\Omega) \leq a + \varepsilon$。考虑 $C^{\Omega}_{*,*}{}^{[a+\varepsilon,\infty)}$上的滤过，如引理 2.2 所示。由于 U_Ω 和 $U_\Omega(a+\varepsilon: m_1, m_2)$ 都是凸的，我们得到

$$H_*(U_\Omega, U_\Omega(a+\varepsilon: m_1,m_2)) \cong \begin{cases} H_*(\text{pt}) & (U_\Omega(a+\varepsilon: m_1,m_2) = \emptyset), \\ 0 & (U_\Omega(a+\varepsilon: m_1,m_2) \neq \emptyset). \end{cases}$$

此外，若 $m_1 + m_2 \leq k+1$则 $\min_{p\in\bar{U}_\Omega} A_{m_1,\,m_2}(p) \leq a$，因此 $U_\Omega(a+\varepsilon: m_1, m_2) \neq \emptyset$。根据注 2.3，若 $E^1_{p,\,q} \neq 0$ 则 $q \in \{p-1, p\}$ 且 $p \geq k+2$，因此 $q + p \geq 2k+3$。于是 $H_{\leq 2k+2}(C^{\Omega,\,[a+\varepsilon,\infty)}) = 0$。这意味着，对于任意 $\delta \in (0, a+\varepsilon)$，$H_{2k+1}(C^{\Omega,\,[\delta,a+\varepsilon)}) \to H_{2k+1}(C^{\Omega,\,[\delta,\infty)})$ 同构，因此 $c_k(\Omega) \leq a + \varepsilon$。

我们来证明 $c_k(\Omega) \geq a - \varepsilon$。取充分接近 0 的 $\delta > 0$，并考虑引理 2.2 中的 $C^{\Omega,}{}_{*}{}^{[\delta,a-\varepsilon)}$ 上的滤过。于是

$$E^1_{p,p-1+j} \cong \bigoplus_{\substack{m_1+m_2=p \\ m_1,m_2>0}} H_0(U_\Omega(a-\varepsilon: m_1,m_2), U_\Omega(\delta: m_1,m_2)) \otimes H_j(S^1).$$

这是因为 $H_0(U_\Omega(a-\varepsilon: m_1,m_2)\ U_\Omega(\delta: m_1,m_2)) = 0$ 除非 $m_1, m_2 > 0$。此外$\partial_{E^1} : E^1_{p,\,p-1} \to E^1_{p-1,p-1}$ 由下式给出

$$(\partial_{E_1} x)_{m_1,m_2,1} = m_1 \cdot x_{m_1,m_2+1,0} - m_2 \cdot x_{m_1+1,m_2,0}.$$

存在 $1 \leq j \leq k$使得 $a - \varepsilon < \min_{p\in\bar{U}_\Omega} A_{j,k+1-j}(p)$，则 $U_\Omega(a-\varepsilon: j, k+1-j) = \emptyset$。这意味着

$$\text{Ker}(\partial_{E^1} : E^1_{k+1,k} \to E^1_{k,k}) = 0,$$

于是 $H_{2k+1}(C^{\Omega,[\delta,a-\varepsilon)}) = 0$。这意味着 $c_k(\Omega) \geq a - \varepsilon$。 □

命题 3.5. 若 $\Omega \in \mathscr{S}^2$ 是弱凸的，则对于任意 $k \geq 1$

$$c_k(\Omega) = \min_{0\leq j\leq k}(\max_{p\in\Omega} A_{j,k-j}(p)).$$

证明。我们可以假设 $\Omega \in \mathscr{S}^2_{\text{nice}}$。这是因为，对于任意弱凸的 $\Omega \in \mathscr{S}^2$和任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个弱凸的 $\Omega' \in \mathscr{S}^2_{\text{nice}}$，满足 $\Omega \subset \Omega' \subset (1+\varepsilon)\Omega$。

令 $a := \min_{0\le j\le k}(\max_{p\in\Omega} A_{j,k-j}(p))$。只需证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $a-\varepsilon \le c_k(\Omega) \le a+\varepsilon$。

我们来证明 $c_k(\Omega) \le a+\varepsilon$。取 $j \in \{0,\dots,k\}$ 使得 $\max_{p\in\Omega} A_{j,\ k-j}(p) = a$。在下面的论证中，我们固定这样的$j$。

存在一个 $\Omega' \in \mathscr{S}^2$，它是凹的，并且

$$\Omega \subset \Omega' \subset \{p \in (\mathbb{R}_{\ge 0})^2 \mid A_{j,k-j}(p) \le a+\varepsilon\}.$$

Then

$$c_k(\Omega) \le c_k(\Omega') \le \max_{1\le i\le k} \big(\min_{A_{j,k-j}(p)\ge a+\varepsilon} A_{i,k+1-i}(p)\big),$$

其中　第二个不等式由命题 3.4 得出。因此，只需证明

$$\min_{A_{j,k-j}(p)\ge a+\varepsilon} A_{i,k+1-i}(p) \le a+\varepsilon \tag{3}$$

对任意 $i \in \{1,\dots,k\}$。当 $j=0$ 时，左边等于 $(k+1-i)(a+\varepsilon)\ k$。当 $j=k$ 时，左边等于 $i(a+\varepsilon)\ k$。因此，当 $j=0$ 或 $j=k$ 时，(3) 成立。

我们来考虑 $0<j<k$ 的情况。由 $(i-j) + (k+1-i) - (k-j) = 1$，可得

$$\min\{i-j,(k+1-i) - (k-j)\} \le 0 \iff \min\{i/j,(k+1-i)/(k-j)\} \le 1.$$

Then

$$\min_{A_{j,k-j}(p)\ge a+\varepsilon} A_{i,k+1-i}(p) = \min\{i/j,(k+1-i)/(k-j)\}\cdot(a+\varepsilon) \le a+\varepsilon.$$

这就完成了 $c_k(\Omega) \le a+\varepsilon$ 的证明。

我们来证明 $c_k(\Omega) \ge a-\varepsilon$。只需证明其像

$$H_{2k+1}(C^{\Omega,[\delta,a-\varepsilon)}) \to H_{2k+1}(C^{\Omega,[\delta,\infty)}) \tag{4}$$

对于任意充分接近 0 的 $\delta > 0$，均为零。

首先注意，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$

$$H_*(\bar U_\Omega(a-\varepsilon : j,k+1-j), \bar U_\Omega(\delta : j,k+1-j)) \cong H_*(\partial_+\Omega(a-\varepsilon : j,k+1-j), \partial_+\Omega(\delta : j,k+1-j))$$

根据引理 2.6。于是我们有以下观察:

(a): $H_*(\bar U_\Omega(a-\varepsilon : j,k+1-j), \bar U_\Omega(\delta : j,k+1-j)) = 0$ unless $* = 0$.
(b): Any element of $H_0(\bar U_\Omega(a-\varepsilon : j,k+1-j), \bar U_\Omega(\delta : j,k+1-j))$ can be written as $[a^1 p_1 + a^2 p_2]$ with $a^1, a^2 \in \mathbb{Q}$, where $p_1 := (\rho(0),0)$ and $p_2 := (0,\rho(\pi/2))$.

(a) 成立　因为 Ω 是凸的，且 $a-\varepsilon < a \le \max_{p\in\Omega} A_{j,\ k+1-j}(p)$。(b) 成立，因为 Ω 是凸的　x.

现在考虑引理 2.2 中的 $C^{\Omega}_{*}{}^{[\delta,a-\varepsilon)}$滤过。由 (a) 和注 2.3 可知，若$E^1_{p,q} \ne 0$ 且 $p+q = 2k+1$，则 $p = k+1$, $q = k$。此外，存在一个自然同构

$$E^1_{k+1,k} \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} H_0(\bar U_\Omega(a-\varepsilon : j,k+1-j), \bar U_\Omega(\delta : j,k+1-j)) \otimes H_0(S^1).$$

¯注意，由于引理 2.6，我们可以用 U_Ω 替换 U_Ω 。

我们将证明以下断言：

$$\text{If } x=\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j,k+1-j}\otimes e_0 \in E^1_{k+1,k} \text{ satisfies } \partial_{E^1}(x)=0, \text{ then } x_{j,k+1-j}=0 \text{ for any } 1\le j\le k.$$

根据 (b)，对于任意 $j\in\mathbb{Z}$，存在 a_j^1、$a_j^2\in\mathbb{Q}$ 使得

$$x_{j,k+1-j}=[a_j^1p_1+a_j^2p_2]\in H_0(\bar{U}_\Omega(a-\varepsilon:j,k+1-j),\bar{U}_\Omega(\delta:j,k+1-j)).$$

我们来证明对于 $0\le j\le k$，$[a_j^1p_1]=0$。由于 $[p_1]=0$ 属于 H_0（$\bar{U}_\Omega$（$a-\varepsilon$: 0, $k+1$） $\bar{U}_\Omega$（δ: 0, $k+1$））， 故 $[a_0^1p_1]=0$。因此，只需证明若 $0\le j\le k-1$ 且 $[a_j^1p_1]=0$，则 $[a_{j+1}^1p_1]=0$。这可由 $(\partial_{E^1}x)_{j,\ k-j}=0$、$k-j\neq 0$ 以及以下断言推出：¯ ¯ $[\alpha p_1+\beta p_2]=0 \implies [\alpha p_1]=[\beta p_2]=0$ 属于 H_0（U_Ω（$a-\varepsilon$: $j,k-j$） U_Ω（δ: $j,k-j$））。该断言成立，因为对于满足 $c(0)=p_1$ 且 $c(1)=p_2$ 的 $c\in C^0([0,1],\bar{U}_\Omega)$，有

$$\max_{t\in[0,1]} A_{j,k-j}(c(t))\ge \max_{p\in\Omega} A_{j,k-j}(p)\ge a>a-\varepsilon.$$

现在我们已经证明，对于任意 $0\le j\le k$，$[a_j^1p_1]=0$。通过类似的论证，可以证明对于任意 $1\le j\le k+1$，$[a_j^2p_2]=0$。于是，对于任意 $1\le j\le k$，我们得到$x_{j,\ k+1-j}=[a_j^1p_1+a_j^2p_2]=0$。这就完成了断言的证明。

最后，考虑 $C^{\Omega,\ *\ [\delta,\infty)}$ 上的滤过，如引理 2.2 所示。如命题 2.8 (i) 的证明中那样，存在自然同构

$$E^1_{k+1,k}\cong\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} H_0(\bar{U}_\Omega,\bar{U}_\Omega(\delta:j,k+1-j))\otimes H_0(S^1),$$

and

$$H_0(\bar{U}_\Omega,\bar{U}_\Omega(\delta:j,k+1-j))\cong\begin{cases}H_0(\mathrm{pt}) & (1\le j\le k),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

因此，上述断言意味着 (4) 的像为零。这就完成了$c_k(\Omega)\ge a-\varepsilon$ 的证明。□

推论 3.6. 对任意 $\Omega\in\mathscr{S}^2$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{c_k(\Omega)}{k}=\max_{(x_1,x_2)\in\Omega}\min\{x_1,x_2\}.$$

证明. 令 $a:=\max_{(x_1,\ x_2)\in\Omega}\min\{x_1,x_2\}$。只需证明，对于任意 $\varepsilon>0$，都有 $\limsup_{k\to\infty}\frac{c_k(\Omega)}{k}\le a+\varepsilon$ 且 $\liminf_{k\to\infty}\frac{c_k(\Omega)}{k}\ge a-\varepsilon$。

存在一个 $\Omega'\in\mathscr{S}^2$，它是凹的，并且

$$\Omega\subset\Omega'\subset\{(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_{\ge0})^2\mid\min\{x_1,x_2\}\le a+\varepsilon\}.$$

那么，对于任意 $k\ge1$

$$c_k(\Omega)\le c_k(\Omega')\le(k+1)(a+\varepsilon)$$

其中第二个不等式由命题 3.4 得出。因此 $\limsup_{k\to\infty} \frac{c_k(\Omega)}{k} \leq a+\varepsilon$。

存在 (x_1, x_2) 和 $\Omega' \in \mathscr{S}^2$，使得 $\min\{x_1, x_2\} \geq a-\varepsilon$, $(x_1, x_2) \in \Omega' \subset \Omega$，且 Ω' 是弱凸的。于是

$$c_k(\Omega) \geq c_k(\Omega') \geq k(a-\varepsilon),$$

其中第二个不等式由命题 3.5 得出。于是，对于任意 $k \geq 1$，我们得到 $c_k(\Omega) \geq k(a-\varepsilon)$，这意味着 $\liminf_{k\to\infty} \frac{c_k(\Omega)}{k} \geq a-\varepsilon$。□

References

[1] F. Bourgeois、A. Oancea，S^1-等变辛同调与线性化接触同调，《国际数学研究通知》2017 年，第 13 期，3849–3937 页。[2] I. Ekeland、H. Hofer，辛拓扑与哈密顿动力学，II，《数学杂志》203（1990），553–567 页。[3] J. Gutt，正等变辛同调作为某些接触流形的不变量，《辛几何杂志》15（2017），第 4 期，1019–1069 页。[4] J. Gutt、M. Hutchings，由正 S^1-等变辛同调构造的辛容量，《代数几何与拓扑》18（2018），第 6 期，3537–3600 页。[5] K. Irie，C^∞-一般三维 Reeb 流的均匀分布周期轨道，《辛几何杂志》19（2021），第 3 期，531–566 页。[6] P. Seidel，关于辛上同调的一种有偏见的观点，载于《数学最新进展，2006》，211–253 页，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔（2008）。[7] C. Viterbo，Floer 同调中的函子与计算及其应用，I，《几何与泛函分析》9（1999），第 5 期，985–1033 页。

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502,JAPAN

电子邮箱地址：iriek@kurims.kyoto-u.ac.jp