arXiv:2304.08746v2 [cs.DM] 6 Jan 2025

标签覆盖的近似可重构性

Naoto Ohsaka*

2025年1月7日

摘要

给定一个双证明者博弈 G 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，标签覆盖重配置问题询问：能否通过反复改变单个顶点的标签，同时确保每个中间标记都满足 G，将 ψ_{ini} 变换为 ψ_{tar}。我们通过放宽标记的可行性来研究其优化版本，称为最大最小标签覆盖重配置：我们允许经过任何不满足条件的标记，但要求最大化“可靠性误差”，该误差定义为从 ψ_{ini} 变换到 ψ_{tar}的过程中满足的边所占的最小比例。Raz 的平行重复定理（SIAM计算杂志，1998年） [Raz98], 意味着，在任意常数因子内近似标签覆盖是 NP 困难的；由于该定理为许多 NP 困难问题给出了强不可近似性结果，人们可能会考虑利用最大最小标签覆盖重配置来推导重构问题的不可近似性结果。我们证明了关于最大最小标签覆盖重配置的以下结果，它们展现出与标签覆盖和平行重复定理不同的趋势：

- 对于某些受限图类，最大最小标签覆盖重配置可以在因子为 $\frac{1}{4} - o(1)$ 的范围内近似, –这些图类包括双正则图、没有孤立顶点的平衡二分图，以及平均度为超常数的图。
- 对最大最小标签覆盖重配置进行“朴素”的平行重复，并不会降低每一种双证明者博弈的可靠性误差。
- 投影博弈上的标签覆盖重配置可以在多项式时间内判定。我们的结果表明，平行重复定理的重配置类比不太可能成立。

1 引言

1.1 背景

在重配置问题 [IDHPSUU11], 给定某个组合问题的一对可行解，我们要寻找从一个解到另一个解的逐步变换，同时确保每个中间解都可行。在 Ito、Demaine、Harvey、Papadimitriou、Sideri、Uehara 和 Uno 提出的重配置框架下 [IDHPSUU11]，人们从经典组合问题中衍生出了许多重配置问题；相关综述可参见 Nishimura [Nis18]和 van den Heuvel [van13]。

本文研究标签覆盖 [ABSS97]的可重构性及其近似。给定一个双证明者博弈 G 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，标签覆盖重配置问题要求判断 ψ_{ini} 能否通过反复更改单个顶点的标签，同时确保中间的每个标记都满足 G。进一步考虑以下优化版本——称为最大最小标签覆盖重配置——放宽标记的可行性要求：我们允许经过任意不满足的标记，但要求最大化“可靠性误差”，

*CyberAgent株式会社，东京，日本。 ohsaka_naoto@cyberagent.co.jp； naoto.ohsaka@gmail.com

其定义为从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar}的变换过程中满足的边所占比例的最小值。通过近似求解该问题，我们可以为标签覆盖重配置找到由近乎满足的标记组成的近似重配置。

作者最近的工作 [Ohs23]提出了重配置不可近似性假设[1]，以证明一系列重配置问题（例如最大最小标签覆盖重配置）在某个因子（例如 $1-\varepsilon$，对于某个 $\varepsilon \in (0,1)$）以内进行近似是 PSPACE 困难的。这种方法的一个局限在于，此类 ε 的值可能太小，无法否定一个 $0.999\cdots9$-近似算法。在 NP 范畴中，我们可以使用 Raz [Raz98]提出的平行重复定理，高效地降低双证明者博弈的可靠性误差，并为许多 NP 困难问题[BGS98, DS05, Fei98, Hås01, Hås99, KLS00]给出强不可近似性结果。该定理的关键在于，它与 PCP 定理 [ALMSS98, AS98] 一起意味着：对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一个有限字母表 Σ，使得在Σ 上的标签覆盖问题，在因子 ε以内进行近似是 NP 困难的。[2] 对于量子博弈 [Yue16], 3人博弈 [GMRZ22], 以及概率可检验证明 [CGY24]，人们也已知其他平行重复定理。因此，人们可能会设想针对最大最小标签覆盖重配置的平行重复定理的重配置类比，这将有助于提升重配置问题近似的 PSPACE 困难性。我们的贡献在于给出证据表明，这种希望很可能已经破灭。

1.2 我们的结果

我们给出以下关于最大最小标签覆盖重配置的结果；这些结果呈现出与标签覆盖及平行重复定理不同的趋势。

- 在第 2 节中，我们证明，对于某些受限图类，包括双正则图、不含孤立顶点的平衡二分图以及平均度为超常数的图，最大最小标签覆盖重配置可以在因子 $\frac{1}{4}-o(1)$ 内近似，且该近似因子与字母表大小 $|\Sigma|$ 无关。这里，若二分图 $G=(X,Y,E)$ 的同一侧上所有顶点的度都相同，则称其为双正则图；若 X 和 Y 的大小相同，则称其为平衡图。值得强调的是，通过将概率可检验证明标准归约为双证明者博弈（即标签覆盖实例），自然会得到双正则图；参见 Fortnow、Rompel 和 Sipser [FRS94]，以及 Radhakrishnan 和 Sudan [RS07，命题 6.2]；此外，平行重复会保留双正则性。后续工作 [KM23], 发现，1 4 因子并非最优；尽管如此，本研究仍是首个表明：对于每个字母表 Σ，最大最小标签覆盖重配置都可以在一个通用常数因子内近似的研究，这一点不同于标签覆盖。

- 在第3节中，我们进一步证明，对最大最小标签覆盖重配置进行“朴素”的平行重复，并不会降低所有双证明者博弈的可靠性误差。特别是，对（间隙版本的）最大最小标签覆盖重配置应用平行重复，无法扩大完备性与可靠性之间的间隙。

- 在第4节中，我们提出了一种多项式时间算法，用于判定标签覆盖重配置在投影博弈上的情形。证明基于对一对满足标记之间可重构性的一种简单刻画。注意，如果一个标签覆盖实例是投影博弈，那么它的平行重复仍然是投影博弈；这一性质在近似难度研究中一直很有用 [Hås01，LY94]。我们的多项式时间可解性意味着，在重配置情形下，依赖投影性质的现有归约可能无法复用或改造。

我们的结果表明，平行重复定理的重配置类比不太可能成立；因此，我们应采用不同的方法，为重构问题推导出更优的不可近似因子。

[1]这一猜想最近已得到解决 [HO24b，KM23]。另请参见第1.4节。[2]即使双证明者博弈的底层图是双正则的，同样的结果也成立。

1.3 相关工作

标签覆盖问题最初由 Arora、Babai、Stern 和 Sweedyk 提出 [ABSS97]。标签覆盖有最大化版本和最小化版本，两者在 NP $\not\subseteq$ DTIME($n^{\mathrm{polylog}(n)}$) 下都无法在因子 $2^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$ 以内得到近似，其中 $\varepsilon \in (0,1)$ 是任意小的常数，n 是顶点数。Dinur 和 Safra [DS04] 证明，标签覆盖的最小化版本是 NP 困难的，无法在因子 $2^{(\log n)^{1-o(1)}}$ 以内得到近似，这改进了 [ABSS97] 的结果。Kortsarz [Kor01]提出了略有不同的变体，称为 Max Rep 和 Min Rep，它们具有相似的困难性和可近似性结果。我们的最大最小标签覆盖重配置问题也可以看作 Max Rep 的重配置类比。已有多种标签覆盖近似算法 [CHK11, EP07, MM17, Pel07]。最大化版本目前已知的最佳近似因子是 $O(n^{0.233})$，这一结果由 Chlamtáč、Manurangsi、Moshkovitz 和 Vijayaraghavan 得出 [CMMV17] （据我们所知）。

1.4 后续工作

本文的早期草稿上传至 arXiv 后，取得了以下进展。作者在 [Ohs24] 中证明，最大最小标签覆盖重配置在因子为 $\frac{3}{4}+\varepsilon$ 的近似下是 NP 困难的；其一个略微推广的版本——最大最小 2-CSP 重配置——在因子为 0.9942 的近似下是 PSPACE 困难的。后者的证明改编自 Dinur 的间隙放大 [Din07]。随后，Karthik C. S. 和 Manurangsi [KM23] 证明了匹配的下界和上界，显著改进了本研究的结果；也就是说，证明了 $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-因子近似的 NP 困难性，并证明对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $(\frac{1}{2}-\varepsilon)$-因子近似算法。最近，Hirahara 和 Ohsaka[HO24b] 以及 Karthik C. S. 和 Manurangsi [KM23] 独立证明了重配置不可近似性假设 [Ohs23]（从而解决了 Ito、Demaine、Harvey、Papadimitriou、Sideri、Uehara 和 Uno 提出的开放问题 [IDHPSUU11]）；因此，最大最小标签覆盖重配置无条件地是 PSPACE 困难的。Hirahara 和 Ohsaka [HO24a] 采用了不同于平行重复的方法（例如，FGLSS 归约 [FGLSS96]），证明标签覆盖重配置的最小化版本和 Minmax 集合覆盖重配置在因子为 $2-o(1)$ 的近似下是 PSPACE 困难的，这与 [IDHPSUU11] 的上界相匹配。

1.5 预备知识

对于两个整数 $m, n \in \mathbb{N}$，满足 $m \leqslant n$，令 $[n] \coloneqq \{1,2,\ldots,n\}$ 和 $[m\,..\,n] \coloneqq \{m, m+1, \ldots, n-1, n\}$。对于命题 P，若 P 为真，则 $[\![P]\!]$ 为 1；否则为 0。我们正式定义标签覆盖重配置及其优化版本。约束图 定义为一个元组 $G = (V, E, \Sigma, \Pi)$，其中

- (V, E) 是一个无向图，称为底层图，
- Σ是一个有限的标签集合，称为字母表，并且
- $\Pi = (\pi_e)_{e\in E}$ 是一个二元约束 集合，每个边 $e \in E$ 对应的约束 $\pi_e \subseteq \Sigma^e$ 由端点可以取的可行标签对组成。

若 G 的底层图是二分图，则称 G 为双证明者博弈，或简称博弈。我们记作 $G = (X, Y, E, \Sigma, \Pi)$，以强调 G 的底层图是一个二分图，其二分划分为 (X, Y)。除非另有说明，我们用 G 表示一个博弈。此外，如果每个约束 $\pi_{(x,y)}$ 都具有投影博弈 的投影性质，则称 G 为投影博弈；也就是说，对于 y 的每个标签 $\beta \in \Sigma$，都存在唯一一个 x 的标签 $\alpha \in \Sigma$，使得 $(\alpha, \beta) \in \pi_{(x,y)}$。这样的 α 记作 $\pi_{(x,y)}(\beta)$。

约束图的一种标记 G 是一个映射 $\psi\colon V \to \Sigma$，它为V的每个顶点指定一个 Σ 标签。若 ψ满足边 $e = (v, w) \in E$（或约束 π_e），即$(\psi(v), \psi(w)) \in \pi_e$，则称 ψ满足 G，如果

它满足 G的所有边。对于 G的两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar} ，从ψ_{ini} 到 ψ_{tar} 的重构序列是指任意一个以 ψ_{ini} 开始、以 ψ_{tar} 结束的标记序列，并且其中每个标记都由前一个标记通过改变单个顶点的标签得到；也就是说，任意两个相邻标记恰好在一个顶点上不同。标签覆盖重配置问题定义如下：

标签覆盖重配置

输入： 一个可满足博弈 G 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}。**问题：** 是否存在一个由满足标记组成的重构序列，从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar}？

众所周知，标签覆盖重配置是 PSPACE 完全问题，例如参见 [GKMP09、IDHPSUU11]。接下来我们研究标签覆盖重配置的一个优化版本 [IDHPSUU11]，在该版本中允许访问不满足的标记。对于博弈 $G = (V, E, \Sigma, \Pi)$ 及其标记 $\psi: V \to \Sigma$，令 $\mathsf{val}_G(\psi)$ 表示被 ψ 满足的边所占的比例；即，

$$\mathsf{val}_G(\psi) := \frac{1}{|E|}\left|\left\{e \in E \;\middle|\; \psi \text{ satisfies } e\right\}\right|. \tag{1.1}$$

对于任意重构序列 $\Psi = \psi^{(0)}, \ldots\ldots, \psi^{(\mathsf{T})}$，令 $\mathsf{val}_G(\Psi)$ 表示 Ψ中所有 $\psi^{(\mathsf{t})}$ 的满足边比例的最小值；即，

$$\mathsf{val}_G(\Psi) := \min_{\psi^{(\mathsf{t})} \in \Psi} \mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t})}). \tag{1.2}$$

于是，最大最小标签覆盖重配置定义为以下优化问题：

最大最小标签覆盖重配置

输入： 一个可满足博弈 G 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}。**问题：** 在满足 Ψ 是从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar} 的重构序列的条件下，最大化 $\mathsf{val}_G(\Psi)$。

请注意，当前定义并不要求给出实际的重构序列，因为该序列的长度可能是指数级的。

2 近似于1 4倍

在本节中，我们将证明，对于某些图类，最大最小标签覆盖重配置可以在因子 $\frac{1}{4} - o(1)$ 内实现近似重配置。对于一个博弈 G 及其两个标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，令 $\mathsf{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}})$ 表示在所有可能的从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar} 的重构序列 Ψ中，$\mathsf{val}_G(\Psi)$ 的最大值；即，

$$\mathsf{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) := \max_{\Psi = \langle \psi_{\mathsf{ini}}, \ldots, \psi_{\mathsf{tar}} \rangle} \mathsf{val}_G(\Psi). \tag{2.1}$$

定理 2.1。 对于一个具有 m 条边的博弈 G 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，以下结论成立：

(1) 如果 G 是双正则的，且具有二分划分 (X, Y)（即同一部分中的每个顶点具有相同的度），那么值$_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{|X|}\text{最小值}(|Y|)\right)$.

(2) 如果 G 是平衡的（即它的两个部分大小相同），且没有孤立顶点，那么 $\mathsf{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$。

(3) 如果 G 的平均度至少为 $\frac{6}{\varepsilon}$ （对于 $\varepsilon \in (0, 1/4)$），那么 $\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geq \frac{1}{4} - \varepsilon$。此外，即使 G 的底层图是一般图（即非二分图），同样的结果也成立。

此外，前两种情形的显式重构序列可在多项式时间内找到。

定理2.1 的证明依赖于以下断言。

断言 2.2. 对于一个 约束图 $G = (V, E, \Sigma, \Pi)$ 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，有

$$\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geq \max_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq V} \min\left\{\frac{|E[S]|}{|E|}, \frac{|E[V \setminus S]|}{|E|}\right\}, \tag{2.2}$$

其中 $E[S]$ 是由顶点集 S在 G 中诱导出的子图的边集。

证明。对于顶点集 $S, \emptyset \subsetneq S \subsetneq V$，我们定义标记 $\check{\psi}\colon V \to \Sigma$ 如下：

$$\check{\psi}(v) := \begin{cases} \psi_{\mathsf{ini}}(v) & \text{if } v \in S, \\ \psi_{\mathsf{tar}}(v) & \text{if } v \notin S. \end{cases} \tag{2.3}$$

考虑通过逐个将顶点 $v \notin S$ 的标签从 $\psi_{\mathsf{ini}}(v)$ 改为 $\psi_{\mathsf{tar}}(v)$，将 ψ_{ini} 变换为 $\check{\psi}$。由于 S 中任意顶点的标签从未改变，因此在此变换过程中， $E[S]$ 的任意边始终满足条件；即 $\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \check{\psi}) \geq \frac{|E[S]|}{|E|}$。类似地，可得 $\mathrm{val}_G(\check{\psi} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geq \frac{|E[V \setminus S]|}{|E|}$。因此，我们推得

$$\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) \geq \min\left\{\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \check{\psi}), \mathrm{val}_G(\check{\psi} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}})\right\} \geq \min\left\{\frac{|E[S]|}{|E|}, \frac{|E[V \setminus S]|}{|E|}\right\}, \tag{2.4}$$

如所需。 □

根据断言 2.2，只需找到或证明存在一种顶点集划分，使得其中每一部分都包含 $\gtrsim \frac{|E|}{4}$ 条边（对每个图类而言）。—

备注 2.3。 断言 *2.2* 本质上无法推出优于 $\frac{1}{4}$ 的近似，因为对于一个 n顶点完全图$G = (V, E)$,

$$\max_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq V} \min\left\{\frac{|E[S]|}{|E|}, \frac{|E[V \setminus S]|}{|E|}\right\} \leqslant \frac{\binom{\frac{n}{2}}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{4} - o(1). \tag{2.5}$$

2.1 双正则图

在这里，我们根据以下引理对双正则图的顶点集进行划分，由此得到定理 2.1的第一条结论。

引理 2.4。 对于具有 m 条边的双正则图 $G = (X, Y, E)$，存在其划分$(S, \bar{S})$ $X \cup Y$，使得

$$\min\left\{|E[S]|, |E[\bar{S}]|\right\} \geq \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|, |Y|\}}\right). \tag{2.6}$$

此外，这样的划分可以在多项式时间内找到。

证明。令 $d_X := \frac{m}{|X|}$ 和 $d_Y := \frac{m}{|Y|}$ 分别表示 X 和 Y的顶点度。此后，对于任意一对子集 $S \subseteq X$ 和 $T \subseteq Y$ 我们将 $e(S, T)$ 定义为 G 中连接 S 与 T 的边数。

令 (S,S) 为 X 的任意一个划分，使得 $\min\{|S|,|S|\} \geqslant \left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor$，并令 (T,T) 为 Y 的任意一个划分，使得 $\min\{|T|,|T|\} \geqslant \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor$。定义

$$\theta := \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right). \tag{2.7}$$

通过分类讨论，我们证明 $(S \cup T, S \cup T)$ 和 $(S \cup T, S \cup T)$ 中至少有一个是目标划分。

（情形 1） $e(S,T) \leqslant \theta$：$\overline{e}(S,T)$ 和 $\overline{e}(S,T)$ 可按如下方式界定：

$$\begin{aligned} e(S,\overline{T}) &= e(S, T \cup \overline{T}) - e(S,T) \geqslant \left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor d_X - \theta \\ &\geqslant \left(\frac{|X|-1}{2}\right) d_X - \theta \geqslant \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{|X|}\right) - \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right) \\ &= \frac{m}{4} - m\left(\frac{1}{2|X|} - \frac{1}{4\min\{|X|,|Y|\}}\right) \geqslant \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} e(\overline{S},T) &= e(S \cup \overline{S}, T) - e(S,T) \geqslant \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor d_Y - \theta \\ &\geqslant \left(\frac{|Y|-1}{2}\right) d_Y - \theta \geqslant \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{|Y|}\right) - \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right) \\ &= \frac{m}{4} - m\left(\frac{1}{2|Y|} - \frac{1}{4\min\{|X|,|Y|\}}\right) \geqslant \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

（情形 2） $\overline{e}(\overline{S},T) \leqslant \theta$：与（情形 1）类似，我们得到

$$e(S,\overline{T}) \geqslant \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right) \text{ and } e(\overline{S},T) \geqslant \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1}{\min\{|X|,|Y|\}}\right). \tag{2.10}$$

（情形 3） $e(S,T) > \theta$ 和 $\overline{e}(S,\overline{T}) > \theta$：我们已经完成证明。

因此，$\min\{e(S,T), e(S,T)\}$ 或 $\min\{\overline{e}(S,\overline{T}), e(S,T)\}$ 不小于 θ，这意味着

$$\max\left\{ \min\left\{|E[S \cup T]|, |E[\overline{S} \cup \overline{T}]|\right\}, \min\left\{|E[S \cup \overline{T}]|, |E[\overline{S} \cup T]|\right\} \right\} \geqslant \theta, \tag{2.11}$$

从而完成证明。 □

2.2 平衡二部图

随后，对于一个没有孤立顶点的平衡二部图 $G = (X, Y, E)$，我们按如下方式以一种特别均衡的方式划分每个 X 和 Y：

引理 2.5. 对于一个没有孤立顶点、具有 m 条边且满足 $|X| = |Y|$ 的平衡二部图 $G = (X, Y, E)$，存在一个对 $X \cup Y$ 的划分 (S, S)，使得

$$\min\left\{|E[S]|, |E[\overline{S}]|\right\} \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4}. \tag{2.12}$$

此外，这样的划分可以在多项式时间内找到。

引理 2.5 导出了定理 2.1的第二个结论。在证明引理 2.5之前，我们先给出以下辅助引理。

引理 2.6。 对于范围在 $[n]$ 内的任意 n 正整数 $x_1, \ldots, x_n$，存在 $[n]$ 的一个划分 (S, T)，使得

$$\min\left\{\sum_{i\in S} x_i, \sum_{i\in T} x_i\right\} \geqslant \frac{m-\sqrt{m}}{2}, \text{ where } m \coloneqq \sum_{i\in[n]} x_i. \tag{2.13}$$

此外，可以在多项式时间内找到这样的 S 和 T。

证明。 $n = 1$ 的情形显然，因为 $m = 1$，因此 $\frac{m-\sqrt{m}}{2} = 0$。下文中，我们假设 $n \geqslant 2$。对任意 $S \subseteq [n]$，记 $\mathbf{x}(S) \coloneqq \sum_{i\in S} x_i$。考虑以下用于装箱问题的朴素贪心算法：

贪心算法

```
sort x_i's in descending order.
define S^(0) := ∅ and T^(0) := ∅.
for i = 1 to n do
    if x(S^(i−1)) < x(T^(i−1)) then
        define S^(i) := S^(i−1) ∪ {i} and T^(i) := T^(i−1).
    else
        define S^(i) := S^(i−1) and T^(i) := T^(i−1) ∪ {i}.
return S^(n) and T^(n).
```

我们将证明 $\left|\mathbf{x}(S^{(n)}) - \mathbf{x}(T^{(n)})\right| \leqslant \sqrt{m}$。一定义

$$d \coloneqq \frac{m}{n} \text{ and } \varepsilon \coloneqq \sqrt{\frac{d}{n}} = \sqrt{\frac{m}{n^2}}. \tag{2.14}$$

假设 x_i 按降序排列。那么，对于每个 $k \in [n]$，$x_1, \ldots, x_k$，其值至少为 x_k，而 $x_{k+1}, \ldots, x_n$ 的值至少为 1。因此，我们有

$$\begin{aligned} &\underbrace{x_k \cdot k}_{\text{contribution of } x_1,\ldots,x_k} + \underbrace{1\cdot(n-k)}_{\text{contribution of } x_{k+1},\ldots,x_n} \leqslant m = nd \\ \Longrightarrow\ & k(x_k - 1) \leqslant (d-1)n \\ \Longrightarrow\ & x_k \leqslant \frac{d-1}{k}n + 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

显然，由于贪心算法的性质，$\left|\mathbf{x}(S^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)}) - \mathbf{x}(T^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)})\right| \leqslant n$，我们考虑以下两种情况：

（情况 1）如果$\mathbf{x}(S^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)})$与$\mathbf{x}(T^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)})$之间的绝对差大于$\mathbf{x}([\lceil \varepsilon n\rceil \,..\, n])$，那么我们就会将 $[\lceil \varepsilon n\rceil \,..\, n]$ 中的所有元素都加入 $S^{(n)}$ 或 $T^{(n)}$。因此，$\mathbf{x}(S^{(n)})$与$\mathbf{x}(T^{(n)})$之间的绝对差将恰好为

$$\left|\mathbf{x}(S^{(n)}) - \mathbf{x}(T^{(n)})\right| \leqslant \underbrace{\left|\mathbf{x}(S^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)}) - \mathbf{x}(T^{(\lceil \varepsilon n\rceil - 1)})\right|}_{\leqslant n} - \underbrace{\mathbf{x}([\lceil \varepsilon n\rceil \,..\, n])}_{\geqslant n - \lceil \varepsilon n\rceil + 1} \leqslant \lceil \varepsilon n\rceil - 1 \leqslant \varepsilon n. \tag{2.16}$$

（情况 2）否则（即，$|\mathbf{x}(S^{(\lceil \varepsilon n\rceil -1)}) - \mathbf{x}(T^{(\lceil \varepsilon n\rceil -1)})| \leqslant \mathbf{x}([\lceil \varepsilon n\rceil .. \ n])$，$\mathbf{x}(S^{(n)})$与$\mathbf{x}(T^{(n)})$ 之间的绝对差至多为 $x_{\lceil \varepsilon n\rceil}$。利用公式（2.15），我们可以推导出

$$\left|\mathbf{x}(S^{(n)}) - \mathbf{x}(T^{(n)})\right| \leqslant x_{\lceil \varepsilon n\rceil} \leqslant \frac{d-1}{\lceil \varepsilon n\rceil} n + 1 \leqslant \frac{d-1}{\varepsilon} + 1 \leqslant \frac{d}{\varepsilon}, \tag{2.17}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\varepsilon \in (0, 1]$。

在这两种情况下，我们都得到

$$\left|\mathbf{x}(S^{(n)}) - \mathbf{x}(T^{(n)})\right| \leqslant \max\left\{\varepsilon n, \frac{d}{\varepsilon}\right\} = \sqrt{dn} = \sqrt{m}. \tag{2.18}$$

因此，我们推出

$$\begin{aligned} &2\min\left\{\mathbf{x}(S^{(n)}), \mathbf{x}(T^{(n)})\right\} + \sqrt{m} \geqslant \min\left\{\mathbf{x}(S^{(n)}), \mathbf{x}(T^{(n)})\right\} + \max\left\{\mathbf{x}(S^{(n)}), \mathbf{x}(T^{(n)})\right\} = m \\ \Longrightarrow\ &\min\left\{\mathbf{x}(S^{(n)}), \mathbf{x}(T^{(n)})\right\} \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{2}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

证明完毕。 □

引理 2.5 的证明。令 $d(v)$ 表示顶点 v 在 G中的度。下文中，对于任意一对子集 $S \subseteq X$和 $T \subseteq Y$，我们将 $e(S, T)$ 定义为 G 中连接 S 和 T的边数。由于对于每个顶点 v，都有$1 \leqslant d(v) \leqslant |X| = |Y|$成立，我们使用引理 2.6 构造 X 的一个划分对 $(S, \overline{S})$，以及 Y 的一个划分对 $(T, \overline{T})$，使得

$$\min\left\{\sum_{x\in S} d(x), \sum_{x\in \overline{S}} d(x)\right\} \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{2} \text{ and } \min\left\{\sum_{y\in T} d(x), \sum_{y\in \overline{T}} d(x)\right\} \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{2}. \tag{2.20}$$

定义 $\theta := \frac{m-\sqrt{m}}{4}$。通过分类讨论，我们证明 $(S\cup T, \overline{S\cup T})$ 或 $(S\cup T, \overline{S\cup T})$ 中至少有一个能给出一个目标划分。

（情形 1） $e(S, \overline{T}) \leqslant \theta$：$e(S, \overline{T})$和 $e(S, T)$ 的下界如下：

$$e(S, \overline{T}) = e(S, T\cup \overline{T}) - e(S, T) \geqslant \sum_{x\in S} d(x) - \theta \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4}. \tag{2.21}$$

$$e(\overline{S}, T) = e(S\cup \overline{S}, T) - e(S, T) \geqslant \sum_{y\in T} d(y) - \theta \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4}. \tag{2.22}$$

（情形 2） $e(\overline{S}, T) \leqslant \theta$：与（情形 1）类似，我们可以证明

$$e(S, \overline{T}) \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4} \text{ and } e(\overline{S}, T) \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4}. \tag{2.23}$$

（情形 3） $e(S, \overline{T}) > \theta$和 $e(\overline{S}, T) > \theta$：我们已经完成证明。

因此，$\min\{e(S, \overline{T}), e(S, T)\}$ 或 $\min\{e(S, \overline{T}), e(\overline{S}, T)\}$不小于 $\frac{m-\sqrt{m}}{4}$，这意味着

$$\max\left\{\min\left\{|E[S\cup T]|, |E[\overline{S}\cup \overline{T}]|\right\}, \min\left\{|E[S\cup \overline{T}]|, |E[\overline{S}\cup T]|\right\}\right\} \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{4}, \tag{2.24}$$

完成证明。 □

2.3 高平均度图

我们将 Kühn 和 Osthus 称为 [KO03], , 它与 断言 2.2 一起直接推出了 定理 2.1的第三个表述。

定理 2.7 (Kühn 和 Osthus [KO03, 推论 18])。 对于每个有 m 条边、平均度为 $\frac{6}{\varepsilon}$（其中 $\varepsilon \in (0, 14)$）的图 $G = (V, E)$，其顶点集 V 可以划分为 S 和 T，使得 $E[S]$ 和 $E[T]$ 都至少包含 $m(\frac{1}{4} - \varepsilon)$ 条边。

3 平行重复不会降低可靠性误差

我们证明，对最大最小标签覆盖重配置进行“朴素”的平行重复不会降低其最优值。两个博弈的乘积首先被引入。

定义 3.1. 设 $G_1 = (X_1, Y_1, E_1, \Sigma_1, \Pi_1 = (\pi_{1,e})_{e \in E_1})$ 和 $G_2 = (X_2, Y_2, E_2, \Sigma_2, \Pi_2 = (\pi_{2,e})_{e \in E_2})$ 是两个博弈。那么，G_1 和 G_2的乘积记作 $G_1 \otimes G_2$，定义为一个新的博弈 $(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, E, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Pi = (\pi_e)_{e \in E})$，其中

$$E := \left\{ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \;\middle|\; (x_1, y_1) \in E_1 \text{ and } (x_2, y_2) \in E_2 \right\}, \tag{3.1}$$

并且，对于每条边 $e = ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$，约束 $\pi_e \subseteq (\Sigma_1 \times \Sigma_2)^e$ 定义为 s

$$\pi_e := \left\{ ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) \;\middle|\; (\alpha_1, \beta_1) \in \pi_{1,(x_1,y_1)} \text{ and } (\alpha_2, \beta_2) \in \pi_{2,(x_2,y_2)} \right\}. \tag{3.2}$$

博弈 G 的 ρ重数平行重复，记作 $G^{\otimes \rho}$，对于任意正整数 $\rho \in \mathbb{N}$，定义为

$$G^{\otimes \rho} := \underbrace{G \otimes \cdots \otimes G}_{\rho \text{ times}}. \tag{3.3}$$

对于博弈 G，令 $\mathrm{val}(G)$ 表示在 G 的所有可能标记中满足边的最大比例。并行重复定理 [Raz98] 指出，对于任意满足 $\mathrm{val}(G) \leqslant 1 - \varepsilon$ 且存在某个 $\varepsilon \in (0,1)$ 的博弈 G，有 $\mathrm{val}(G^{\otimes \rho}) \leqslant (1 - \varepsilon)^{\rho \log^{|\Sigma|}}$，其中 $\varepsilon \in (0, 1)$ 仅取决于 ε。

我们可以考虑平行重复的重配置类比。对于两个标记 $\psi_1 \colon (X_1 \cup Y_1) \to \Sigma_1$，其中 $G_1 = (X_1, Y_1, E_1, \Sigma_1, \Pi_1)$，以及 $\psi_2 \colon (X_2 \cup Y_2) \to \Sigma_2$，其中 $G_2 = (X_2, Y_2, E_2, \Sigma_2, \Pi_2)$，$\psi_1$ 和 ψ_2 的乘积标注 记作 $\psi_1 \otimes \psi_2$，定义为标记 $\psi \colon (X_1 \times X_2) \cup (Y_1 \times Y_2) \to \Sigma_1 \times \Sigma_2$，使得

$$\psi(v_1, v_2) := (\psi_1(v_1), \psi_2(v_2)) \text{ for all } (v_1, v_2) \in (X_1 \times X_2) \cup (Y_1 \times Y_2). \tag{3.4}$$

我们记 $\psi^{\otimes \rho}$ 为表示 $\underbrace{\psi \otimes \cdots \otimes \psi}_{\rho \text{ times}}$。容易看出，$\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) = 1$ 意味着 $\mathrm{val}_{G^{\otimes \rho}}(\psi^{\otimes \rho}_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi^{\otimes \rho}_{\mathsf{tar}}) = 1$。因此，已知 $\mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}) < 1$，当 ρ 增大时，博弈的 ρ 重平行重复的值会降低吗？遗憾的是，答案是否定的。

观察 3.2。 设 G 是一个可满足博弈，ψ_{ini} 和 ψ_{tar} 是其两个满足标记。则对于每个正整数 $\rho \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathrm{val}_{G^{\otimes \rho}}\left(\psi^{\otimes \rho}_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi^{\otimes \rho}_{\mathsf{tar}} \right) \geqslant \mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}). \tag{3.5}$$

证明。设 $G = (X, Y, E, \Sigma, \Pi)$ 是一个可满足博弈。给定一个从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar} 的重构序列 $\Psi = \psi^{(0)} \dots \dots, \psi^{(\mathsf{T})}$，使得 $\mathrm{val}_G(\Psi) = \mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}})$，我们将证明对于每个 $k \in [\rho]$,

$$\mathrm{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k+1}) \geqslant \mathrm{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}), \tag{3.6}$$

这意味着 式（3.5）。为此，我们将对每个 $\mathsf{t} \in [\mathsf{T}]$:

$$\mathrm{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi^{(\mathsf{t}-1)} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi^{(\mathsf{t})} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k}). \tag{3.7}$$

此后，固定 $k \in [\rho]$ 和 $\mathsf{t} \in [\mathsf{T}]$。假设 $\psi^{(\mathsf{t}-1)}$ 和 $\psi^{(\mathsf{t})}$ 在某个 $x^\star \in X$上不同。当 $\psi^{(\mathsf{t}-1)}$ 和 $\psi^{(\mathsf{t})}$ 在某个 $y^\star \in Y$ 上不同时，也可以类似地证明式（3.7）。通过依次更改 $G^{\otimes\rho}$ 中两个标记不同的每个顶点的标签，构造一个从 $\psi^{\otimes k-1}{}_{\text{初始}} \otimes \psi^{(\mathsf{t}-1)} \otimes \psi^{\otimes\rho-k}{}_{\text{目标}}$ 到 $\psi^{\otimes k-1}{}_{\text{初始}} \otimes \psi^{(\mathsf{t})} \otimes \psi^{\otimes\rho-k}{}_{\text{目标}}$ 的重构序列 $\Psi^{(k,\mathsf{t})}$。令 $\psi^\bullet\colon\ X^\rho \cup Y^\rho \to \Sigma^\rho$ 为 $\Psi^{(k,\mathsf{t})}$的任意标记，其值等于

$$\begin{aligned}\mathrm{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi^\bullet) &= \frac{1}{|E(G^{\otimes\rho})|} \sum_{\substack{x_1,\dots,x_\rho\in X,\\ y_1,\dots,y_\rho\in Y:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \left[\!\!\left[\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant\rho} \left(\psi^\bullet(x_1,\dots,x_\rho)_i, \psi^\bullet(y_1,\dots,y_\rho)_i\right) \in \pi_{(x_i,y_i)} \right]\!\!\right] \\ &= \frac{1}{|E(G^{\otimes\rho})|} \sum_{x_1,\dots,x_\rho\in X} \underbrace{\sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho\in Y:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \left[\!\!\left[\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant\rho} \left(\psi^\bullet(x_1,\dots,x_\rho)_i, \psi^\bullet(y_1,\dots,y_\rho)_i\right) \in \pi_{(x_i,y_i)} \right]\!\!\right]}_{\heartsuit:=}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

注意到，$\psi^{\otimes k-1}{}_{\text{初始}} \otimes \psi^{(\mathsf{t}-1)} \otimes \psi^{\otimes\rho-k}{}_{\text{指派}}$ 与 $\psi^{\otimes k-1}{}_{\text{初始}} \otimes \psi^{(\mathsf{t})} \otimes \psi^{\otimes\rho-k}{}_{\text{指派}}$ 在 X^ρ 的顶点 $(x_1, \dots, x_\rho)$ 上不同，当且仅当 $x_k = x^\star$；并且它们在 Y^ρ 的每个顶点 $(y_1, \dots, y_\rho)$ 上都相同；也就是说，

$$\psi(x_1,\dots,x_\rho) \text{ is } \begin{cases} \left(\psi_{\mathsf{ini}}(x_1),\dots,\psi_{\mathsf{ini}}(x_{k-1}), \psi^{(\mathsf{t}-1)}(x_k), \psi_{\mathsf{tar}}(x_{k+1}),\dots,\psi_{\mathsf{tar}}(x_\rho)\right) \\ \text{or} \\ \left(\psi_{\mathsf{ini}}(x_1),\dots,\psi_{\mathsf{ini}}(x_{k-1}), \psi^{(\mathsf{t})}(x_k), \psi_{\mathsf{tar}}(x_{k+1}),\dots,\psi_{\mathsf{tar}}(x_\rho)\right) \end{cases} \tag{3.9}$$

对所有 $(x_1, \dots, x_\rho) \in X^\rho$，并且

$$\psi(y_1,\dots,y_\rho) \text{ is } \left(\psi_{\mathsf{ini}}(y_1),\dots,\psi_{\mathsf{ini}}(y_{k-1}), \underbrace{\psi^{(\mathsf{t})}(y_k)}_{=\psi^{(\mathsf{t}-1)}(y_k)}, \psi_{\mathsf{tar}}(y_{k+1}),\dots,\psi_{\mathsf{tar}}(y_\rho)\right) \tag{3.10}$$

对所有 $(y_1, \dots\dots, y_\rho) \in Y^\rho$。根据假设，$\psi_{\mathsf{ini}}$ 和 ψ_{tar} 满足 G 的所有边，因此我们可以如下计算 ♥ 的值:

$$
\begin{aligned}
\heartsuit \geqslant \min\Bigg\{ & \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho\in Y:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Bigg[\!\!\Bigg[\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant k-1} \underbrace{\psi_{\mathsf{ini}} \text{ satisfies } (x_i,y_i)}_{\text{always true}} \Bigg]\!\!\Bigg] \cdot \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t}-1)} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big] \cdot \Bigg[\!\!\Bigg[\bigwedge_{k+1\leqslant i\leqslant \rho} \underbrace{\psi_{\mathsf{tar}} \text{ satisfies } (x_i,y_i)}_{\text{always true}} \Bigg]\!\!\Bigg], \\
& \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho\in Y:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Bigg[\!\!\Bigg[\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant k-1} \underbrace{\psi_{\mathsf{ini}} \text{ satisfies } (x_i,y_i)}_{\text{always true}} \Bigg]\!\!\Bigg] \cdot \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t})} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big] \cdot \Bigg[\!\!\Bigg[\bigwedge_{k+1\leqslant i\leqslant \rho} \underbrace{\psi_{\mathsf{tar}} \text{ satisfies } (x_i,y_i)}_{\text{always true}} \Bigg]\!\!\Bigg] \Bigg\} \\
= \min\Bigg\{ & \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t}-1)} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big], \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t})} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big] \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

因此， $\psi^\bullet$ 的值可以如下界定：

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi^\bullet) \\
\geqslant\ & \frac{1}{|E(G^{\otimes\rho})|} \sum_{x_1,\dots,x_\rho} \min\Bigg\{ \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t}-1)} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big], \sum_{\substack{y_1,\dots,y_\rho:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i}} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t})} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big] \Bigg\} \\
=\ & \frac{1}{|E|^\rho} \sum_{\substack{x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_\rho,\\ y_1,\dots,y_{k-1},y_{k+1},\dots,y_\rho:\\ (x_i,y_i)\in E\forall i\neq k}} \sum_{x_k} \min\Bigg\{ \sum_{y_k:(x_k,y_k)\in E} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t}-1)} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big], \sum_{y_k:(x_k,y_k)\in E} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t})} \text{ satisfies } (x_k,y_k) \Big]\!\!\Big] \Bigg\} \\
=\ & \min\Bigg\{ \frac{1}{|E|} \sum_{(x,y)\in E} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t}-1)} \text{ satisfies } (x,y) \Big]\!\!\Big], \frac{1}{|E|} \sum_{(x,y)\in E} \Big[\!\!\Big[\psi^{(\mathsf{t})} \text{ satisfies } (x,y) \Big]\!\!\Big] \Bigg\} \\
=\ & \min\Big\{ \mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t}-1)}), \mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t})}) \Big\},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

这意味着 $\mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\Psi^{(k,\mathsf{t})}) \geqslant \min\{\mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t}-1)}), \mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t})})\}$。将所有重构序列$\Psi^{(k,\mathsf{t})}$ for $\mathsf{t} \in [\mathsf{T}]$, 连接起来，我们得到一个从 $\psi^{\otimes k}{}_{\mathsf{ini}} \otimes \psi^{\otimes\rho-k}{}_{\mathsf{tar}}$ 到 $\psi^{\otimes k-1}{}_{\mathsf{ini}} \otimes \psi^{\otimes\rho-k+1}{}_{\mathsf{tar}}$ 的重构序列，从而推出

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k+1}) \\
\geqslant\ & \min_{1\leqslant \mathsf{t}\leqslant \mathsf{T}} \mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi^{(\mathsf{t}-1)} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi^{(\mathsf{t})} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k}) \\
\geqslant\ & \min_{1\leqslant \mathsf{t}\leqslant \mathsf{T}} \mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\Psi^{(k,\mathsf{t})}) \\
\geqslant\ & \min_{0\leqslant \mathsf{t}\leqslant \mathsf{T}} \mathsf{val}_G(\psi^{(\mathsf{t})}) \\
=\ & \mathsf{val}_G(\Psi) = \mathsf{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

因此，我们得到

$$
\mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes\rho} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho}) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant\rho} \mathsf{val}_{G^{\otimes\rho}}(\psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{ini}}^{\otimes k-1} \otimes \psi_{\mathsf{tar}}^{\otimes\rho-k+1}) \geqslant \mathsf{val}_G(\psi_{\mathsf{ini}} \leftrightsquigarrow \psi_{\mathsf{tar}}),
\tag{3.14}
$$

完成证明。 □

4 投影博弈的多项式时间可判定性

最后，我们提出了一种多项式时间算法，用于判定投影博弈中一对满足约束的标号之间是否可重构。

定理 4.1。 对于可满足的投影博弈 $G = (X, Y, E, \Sigma, \Pi)$ 及其两个满足标记 ψ_{ini} 和 ψ_{tar}，我们可以在多项式时间内判定是否存在一个从 ψ_{ini} 到 ψ_{tar} 的重构序列，其中的标记均满足 G。

证明。 由于可以独立处理 G 的每个连通分量，我们只需考虑 G 连通的情况。如果 G 只包含一个顶点（即 X 或 Y 至少有一个为空），答案总是“可重配置”，因为它没有边；因此我们可以安全地假设 $X \neq \emptyset$ 和 $Y \neq \emptyset$。我们证明，ψ_{ini} 和 ψ_{tar} 彼此可重配置，当且仅当 ψ_{ini} 和 ψ_{tar} 在 X上相同。

我们首先证明“仅当”方向。假设对于某个 $x \in X$，$\psi_{\mathsf{ini}}(x) \neq \psi_{\mathsf{tar}}(x)$。从 ψ_{ini}出发，将 x 的标签从 $\psi_{\mathsf{ini}}(x)$改为任何其他标签，都必定会违反与 x 相 incident 的边 $e = (x, y)$，因为 y 的标签应通过 π_e映射到 $\psi_{\mathsf{ini}}(x)$，如需证明。

接下来证明“若”方向。假设对于每个 $x \in X$，$\psi_{\mathsf{ini}}(x) = \psi_{\mathsf{tar}}(x)$。那么，对于每条边 $e = (x, y) \in E$，都有$\pi_e(\psi_{\mathsf{ini}}(y)) = \psi_{\mathsf{ini}}(x) = \psi_{\mathsf{tar}}(x) = \pi_e(\psi_{\mathsf{tar}}(y))$。因此，我们可以通过逐一将 Y 的每个顶点 y 的标签从 $\psi_{\mathsf{ini}}(y)$ 改为 $\psi_{\mathsf{tar}}(y)$，在不违反任何约束的情况下，从 ψ_{ini} 得到 ψ_{tar} 的重配置序列，如所需。□

致谢。 我谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵建议。

参考文献

[ABSS97] Sanjeev Arora、László Babai、Jacques Stern 和 Z. Sweedyk。《格、码和线性方程组中近似最优解的困难性》。载于：计算机与系统科学杂志 54.2（1997），第 317–331 页（↰ 第 1、3 页）。[ALMSS98] Sanjeev Arora、Carsten Lund、Rajeev Motwani、Madhu Sudan 和 Mario Szegedy。《证明验证与近似问题的困难性》。载于：《ACM 杂志》45.3（1998），第 501–555 页（↰ 第 2 页）。[AS98] Sanjeev Arora 和 Shmuel Safra。《证明的概率检验：NP 的一种新刻画》。载于：《ACM 杂志》45.1（1998），第 70–122 页（↰ 第 2 页）。[BGS98] Mihir Bellare、Oded Goldreich 和 Madhu Sudan。《自由比特、PCP 与不可近似性——迈向紧致结果》。载于：SIAM计算杂志 27.3（1998），第 804–915 页（↰ 第 2 页）。[CGY24] Alessandro Chiesa、Ziyi Guan 和 Burcu Yıldız。《PCP 的平行重复》。载于：ITCS。2024，34:1–34:14（↰ 第 2 页）。[CHK11] Moses Charikar、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 Howard Karloff。《标签覆盖问题的改进近似算法》。载于：《算法》61.1（2011），第 190–206 页（↰ 第 3 页）。[CMMV17] Eden Chlamtáč、Pasin Manurangsi、Dana Moshkovitz 和 Aravindan Vijayaraghavan。《标签覆盖的近似算法与对数密度阈值》。载于：SODA。2017，第 900–919 页（↰ 第 3 页）。[Din07] Irit Dinur。《通过间隙放大证明 PCP 定理》。载于：《ACM 杂志》54.3（2007），第 12 页（↰ 第 3 页）。[DS04] Irit Dinur 和 Shmuel Safra。《标签覆盖近似的困难性》。载于：《信息处理快报》89.5（2004），第 247–254 页（↰ 第 3 页）。

[DS05] Irit Dinur 和 Shmuel Safra。《顶点覆盖近似的困难性》。载于：《数学年刊》162.1（2005），第 439–485 页（↰ 第 2 页）。[EP07] Michael Elkin 和 David Peleg。《生成器问题近似的困难性》。载于：《理论计算机系统》41.4（2007），第 691–729 页（↰ 第 3 页）。[Fei98] Uriel Feige。《集合覆盖近似的 $\ln n$ 阈值》。载于：《ACM 杂志》45.4（1998），第 634–652 页（↰ 第 2 页）。[FGLSS96] Uriel Feige、Shafi Goldwasser、László Lovász、Shmuel Safra 和 Mario Szegedy。《交互式证明与团近似的困难性》。载于：《ACM 杂志》43.2（1996），第 268–292 页（↰ 第 3 页）。[FRS94] Lance Fortnow、John Rompel 和 Michael Sipser。《多证明者交互协议的能力》。载于：《理论计算机科学》134.2（1994），第 545–557 页（↰ 第 2 页）。[GKMP09] Parikshit Gopalan、Phokion G. Kolaitis、Elitza Maneva 和 Christos H. Papadimitriou。《布尔可满足性的连通性：计算与结构二分性》。载于：SIAM计算杂志 38.6（2009），第 2330–2355 页（↰ 第 4 页）。[GMRZ22] Uma Girish、Kunal Mittal、Ran Raz 和 Wei Zhan。《所有二进制输入三人博弈平行重复的多项式界》。载于：APPROX/RANDOM。2022，6:1–6:17（↰ 第 2 页）。[Hås01] Johan Håstad。《一些最优不可近似性结果》。载于：《ACM 杂志》48.4（2001），第 798–859 页（↰ 第 2 页）。[Hås99] Johan Håstad。《团在 $n^{1-\varepsilon}$范围内难以近似》。载于：《数学学报》182（1999），第 105–142 页（↰ 第 2 页）。[HO24a] Shuichi Hirahara 和 Naoto Ohsaka。《集合覆盖重配置近似的最优 PSPACE 困难性》。载于：ICALP。2024，85:1–85:18（↰ 第 3 页）。[HO24b] Shuichi Hirahara 和 Naoto Ohsaka。《概率可检验重配置证明与重配置问题的不可近似性》。载于：STOC。2024，第 1435–1445 页（↰ 第 2、3 页）。[IDHPSUU11] Takehiro Ito、Erik D. Demaine、Nicholas J. A. Harvey、Christos H. Papadimitriou、Martha Sideri、Ryuhei Uehara 和 Yushi Uno。《重配置问题的复杂性》。载于：《理论计算机科学》412.12-14（2011），第 1054–1065 页（↰ 第 1、3、4 页）。[KLS00] Sanjeev Khanna、Nathan Linial 和 Shmuel Safra。《色数近似的困难性》。载于：《组合数学》20.3（2000），第 393–415 页（↰ 第 2 页）。[KM23] Karthik C. S. 和 Pasin Manurangsi。《重配置问题的不可近似性：PSPACE 困难性与若干紧致的 NP 困难性结果》。载于：CoRR abs/2312.17140（2023）（↰ 第 2、3 页）。[KO03] Daniela Kühn 和 Deryk Osthus。《最小度或连通度较高的图的划分》。载于：《组合理论杂志 B 辑》88.1（2003），第 29–43 页（↰ 第 9 页）。[Kor01] Guy Kortsarz。《生成器近似的困难性》。载于：《算法》30（2001），第 432–450 页（↰ 第 3 页）。[LY94] Carsten Lund 和 Mihalis Yannakakis。《最小化问题近似的困难性》。载于：《ACM 杂志》41.5（1994），第 960–981 页（↰ 第 2 页）。[MM17] Pasin Manurangsi 和 Dana Moshkovitz。《投影博弈的改进近似算法》。载于：《算法》77（2017），第 555–594 页（↰ 第 3 页）。[Nis18] Naomi Nishimura。《重配置导论》。载于：《算法》11.4（2018），第 52 页（↰ 第 1 页）。[Ohs23] Naoto Ohsaka。《重配置问题之间的间隙保持归约》。载于：STACS。2023，49:1–49:18（↰ 第 2、3 页）。[Ohs24] Naoto Ohsaka。《重配置问题的间隙放大》。载于：SODA。2024，第 1345

–

1366年（↰第3页）。

[Pel07] David Peleg。《标签覆盖与红蓝集合覆盖问题的近似算法》。载于：离散算法杂志 5.1（2007年），第 55–64 页（↰ 第 3 页）。[Raz98] Ran Raz。《并行重复定理》。载于：SIAM计算杂志 27.3（1998年），第 763–803 页（↰ 第 1、2、9 页）。[RS07] JaikumarRadhakrishnan 和 Madhu Sudan。《关于Dinur 的PCP 定理证明》。载于：美国数学会通报 44.1（2007年），第 19–61 页（↰ 第 2 页）。[van13] Jan van den Heuvel。《变化的复杂性》。载于：2013年《组合学综述》。第 409 卷。剑桥大学出版社，2013年，第 127–160 页（↰ 第 1 页）。[Yue16] Henry Yuen。《所有纠缠游戏的并行重复定理》。载于：ICALP。2016年，77:1–77:13（↰ 第 2 页）。