arXiv:2304.08755v1 [math.CA] 18 Apr 2023

海森堡群上加权型空间中一类积分算子的尖锐界

Xiang Li、Zhanpeng Gu、Dunyan Yan 和 Zhongci Hang*

摘要： 本文将利用 [9] 中的结论和方法，获得海森堡群上加权型空间中一类具有非负核的积分算子的尖锐界。作为推广，我们还得到了 Hardy 算子、Hardy-Littlewood-P´olya 算子和希尔伯特算子的尖锐界。

1 引言

在 [10], 中，Stein 和 Weiss 给出了一类具有非负核的积分算子，这些核满足一定的齐次性和旋转不变性。Beckner [1] 将其表述为 Stein-Weiss 引理，并得到了以下定理。

定理 1. 设 K 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的非负核，满足：在除点 (0, 0) 外的任意区域上连续，齐次次数为 $-n, K(\delta u, \delta v) = \delta^{-n} K(u, v)$，且对任意 $R \in SO(n)$，有 $K(Ru, Rv) = K(u, v)$。则 T是一个由 $L^p(\mathbb{R}^n)$到$L^p(\mathbb{R}^n)$的有界积分算子，定义如下：

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

with

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

对于 $1 < p < \infty$ 成立，最优常数为

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} K\left(x, \hat{e}_1\right) |x|^{-n/p'} dx \tag{2}$$

且 $\hat{e}_1$ 是第一坐标方向上的单位向量。

不等式（1）由 Stein 和 Weiss 提出 [10]。在 [1] 和 [2], Beckner 证明了常数 A 在（2）中取到最佳值。受定理1启发，我们研究海森堡群上的一类积分算子，并在加权型空间中获得了尖锐界。

Key words and phrases：一类积分算子、Hardy 算子、Hardy Littlewood-P´olya 算子、希尔伯特算子、加权型空间、海森堡群。*2020 Mathematics Subject Classification*：主分类号 42B35；次分类号 26D15。

*通讯作者

首先回顾海森堡群的一些基本知识。海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 是一个非交换幂零李群，其底流形为 $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$，群运算为

$$x\circ y=\left(x_1+y_1,\ldots,x_{2n}+y_{2n},x_{2n+1}+y_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}\left(y_jx_{n+j}-x_jy_{n+j}\right)\right)$$

and

$$\delta_r\left(x_1,x_2,\ldots,x_{2n},x_{2n+1}\right)=\left(rx_1,rx_2,\ldots,rx_{2n},r^2x_{2n+1}\right),\quad r>0,$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_{2n},x_{2n+1})$ 且 $y=(y_1,\cdots,y_{2n},y_{2n+1})$。$\mathbb{H}^n$上的哈尔测度与 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的通常勒贝格测度重合。我们将任意可测集 $E\subset\mathbb{H}^n$ 的测度记为 $|E|$。于是

$$|\delta_r(E)|=r^Q|E|,d(\delta_rx)=r_Qdx,$$

其中 $Q=2n+2$ 称为 $\mathbb{H}^n$的齐次维数。

由范数导出的海森堡距离

$$|x|_h=\left[\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i^2\right)^2+x_{2n+1}^2\right]^{1/4},$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+1})$，定义为

$$d(p,q)=d(q^{-1}p,0)=|q^{-1}p|_h.$$

该距离 d 是左不变的，即当 p 和 q同时被 $\mathbb{H}^n$上的某个固定向量左平移时，$d(p,q)$ 保持不变。此外，d 满足三角不等式 [7]

$$d(p,q)\leq d(p,x)+d(x,q),\quad p,x,q\in\mathbb{H}^n.$$

对于 $r>0$ 和 $x\in\mathbb{H}^n$，以 x 为中心、r 为半径的球和球面在 $\mathbb{H}^n$ 上分别定义为 b y

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{H}^n:d(x,y)<r\},$$

and

$$S(x,r)=\{y\in\mathbb{H}^n:d(x,y)=r\},$$

分别。并且我们有

$$|B(x,r)|=|B(0,r)|=\Omega_Qr^Q,$$

其中

$$\Omega_Q=\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}$$

是 $\mathbb{H}^n$ 上单位球 $B(0,1)$ 的体积，$\omega_Q=Q\Omega_Q$（见 [8]）。关于海森堡群的更多详情，可参见 [4] 和 [11]。

欧几里得空间 $H_\alpha^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的加权型空间，在 $\alpha > 0$ 条件下，由所有满足以下条件的可测函数 f 组成

$$\|f\|_{H_\alpha^\infty(\mathbb{R}^n)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |f(x)| < \infty.$$

函数 $\|\cdot\|_{H_\alpha^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 是该空间上的范数，且几乎处处相等于 dx。本文将讨论海森堡群上的加权型空间。定义如下。

定义 1. 海森堡群上的加权型空间 $H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)$，其中 $\alpha > 0$，由所有满足以下条件的可测函数 f 组成

$$\|f\|_{H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)} := ess\ \sup_{x\in\mathbb{H}^n} |x|_h^\alpha |f(x)| < \infty,$$

其中 $\|\cdot\|_{H_\alpha^\infty}$是该空间上的范数，且几乎处处相等于 dx .

在调和分析中，对多线性积分算子及其性质的研究往往更具价值且更有趣。在 [12], Wu 和 Yan 将定理1 推广到了多线性情形；现在我们采用他们的推广方法，给出 m-线性积分算子，其核在海森堡群上非负。

定义 2. 设 K 是定义在 $\mathbb{H}^{nm}$ 上的非负核，且具有齐次次数 $-mn$,

$$K(|t|_h x, |t|_h y_1, \ldots, |t|_h y_m) = |t|_h^{-mn} K(x, y_1, \ldots, y_m),$$

and

$$K(Rx, Ry_1, \ldots, Ry_m) = K(x, y_1, \ldots, y_m)$$

对于任意 $R \in SO(n)$，则 K 表示以下算子的核

$$T_m(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{H}^{nm}} K(x, y_1, \ldots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) dy_1 \cdots dy_m. \tag{3}$$

取 e_1 为 $\mathbb{H}^n$ 中第一坐标方向上的一个单位向量，则有

$$T_m(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{H}^{nm}} K(e_1, y_1, \ldots, y_m) f_1(\delta_{|x|_h} y_1) \cdots f_m(\delta_{|x|_h} y_m) dy_1 \cdots dy_m. \tag{4}$$

接下来，我们将给出海森堡群上加权型空间中核为 K 的多线性积分算子的主要结果。

2 多线性积分算子的尖锐界

定理 2. 设 $\alpha > 0$ 和 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ 满足 $\alpha_j > 0$，对于任意 $j = 1,\ldots,m$，若

$$H_m := \int_{\mathbb{H}^{nm}} K(e_1, y_1, \ldots, y_m) \prod_{i=1}^m |y_i|_h^{-\alpha_i} dy_1, \ldots dy_m < \infty, \tag{5}$$

则 $T(f_1,\dots f_m)(x)$ 是从 $H^\infty_{a_1}(\mathbb{H}^n)$ 到 $\times\cdots\times H^\infty_{\alpha_m}(\mathbb{H}^n)$ 的有界算子 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$.

此外，若条件（4）成立，则算子的范数满足以下公式

$$\|T_m\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)}=H_m. \tag{6}$$

定理 2 的证明。为方便起见，取

$$T_m(f_1,\dots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{i=1}^m f_i(\delta_{|x|_h}y_j)dy_1\cdots dy_m.$$

利用上述恒等式以及海森堡群$H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$上加权型空间的定义，我们可以推得

$$\begin{aligned}
&\|T_m\|_{H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)}\\
=&\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{H}^n}|x|_h^\alpha\left|\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{i=1}^m f_i(\delta_{|x|_h}y_i)dy_1\cdots dy_m\right|\\
\le&\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)}\sup_{x\in\mathbb{H}^n\setminus\{0\}}|x|_h^\alpha\left|\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{i=1}^m|\delta_{|x|_h}y_i|_h^{-\alpha_i}dy_1\cdots y_m\right|\\
=&\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)}\sup_{x\in\mathbb{H}^n\setminus\{0\}}|x|_h^\alpha\left|\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{i=1}^m|x|_h^{-\alpha_i}|y_i|_h^{-\alpha_i}dy_1\cdots y_m\right|\\
=&H_m\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)}
\end{aligned}$$

对每个 $(f_1,\dots,f_m)\in\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)$，由此对 $H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)$ 取上确界，可得

$$\|T_m\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)}\le H_m, \tag{7}$$

于是我们得到 T_m 在 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$上的有界性。

然后取

$$f_{\alpha_j}(x)=\begin{cases}1/|x|_h^{\alpha_j}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases} \tag{8}$$

显然，对于任意的 $j=1,\dots,y_m$，我们有

$$\|f_{\alpha_j}\|_{H^\infty_{\alpha_j}(\mathbb{H}^n)}=1. \tag{9}$$

将（8）代入恒等式（4），经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&|x|_h^\alpha\left|\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{j=1}^m f_{\alpha_j}(\delta_{|x|_h}y_j)dy_1\cdots dy_m\right|\\
=&|x|_h^\alpha\left|\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{j=1}^m|\delta_{|x|_h}y_j|_h^{-\alpha_j}dy_1\cdots dy_m\right|\\
=&\int_{\mathbb{H}^{nm}}K(e_1,y_1,\dots,y_m)\prod_{j=1}^m|y_j|_h^{-\alpha_j}dy_1\cdots y_m=H_m
\end{aligned} \tag{10}$$

当 $x \neq 0$ 时，其中我们使用了条件 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$。由（10）并根据海森堡群上的加权型空间 H_α^∞（$\mathbb{H}^n$）中范数的定义，可推得

$$\begin{aligned} &\|T_m\|_{H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)} \\ =&\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{H}^n} |x|_h^\alpha \left| \int_{\mathbb{H}^{nm}} K(e_1, y_1, \ldots, y_m) \prod_{j=1}^m f_{\alpha_j}(\delta_{\alpha_j} y_j) dy_1 \cdots dy_m \right| = H_m. \end{aligned} \tag{11}$$

结合（9）与（11）可得

$$\|T_m\|_{\prod_{j=1}^m H_{\alpha_j}^\infty(\mathbb{H}^n)\to H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)} \geq H_m. \tag{12}$$

由（7）和（12）可知（6）成立。定理2的证明到此完成。

□

3 Hardy 算子的尖锐界

本节将研究海森堡群上的 m-线性 n 维 Hardy 算子，并求得其在海森堡群上的加权型空间中的尖锐界。

海森堡群上的 n 维 Hardy 算子由 Wu 和 Fu [13] 定义

$$Hf(x) := \frac{1}{|B(0,|x|_h)|} \int_{B(0,|x|_h)} f(y)dy, x \in \mathbb{H}^n \backslash \{0\}, \tag{13}$$

其中，f 是 $\mathbb{H}^n$ 上的局部可积函数。他们证明了 H 从 L^p（$\mathbb{H}^n$）到 L^p（$\mathbb{H}^n$）有界，$1 < p \leq \infty$。此外，

$$\|H\|_{L^p(\mathbb{H}^n)\to L^p(\mathbb{H}^n)} = \frac{p}{p-1}, 1 < p \leq \infty.$$

在[5], 中，Fu 和 Wu 引入了 m线性 n维 Hardy 算子，其定义为

$$\mathfrak{H}_m(f_1, \ldots, f_m)(x) = \frac{1}{\Omega_n^m |x|^{mn}} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|<|x|} f_1(y_1) \cdots f_m(y_m),$$

其中，$x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 和 f_1,..., f_m 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的非负局部可积函数。受 [5], 启发，我们定义海森堡群上的 m 线性 n 维 Hardy 算子如下。

定义 3. 设 m 为正整数，且 $f_1, \ldots, f_m$ 是定义在 $\mathbb{H}^n$上的非负局部可积函数，则

$$\mathfrak{H}_m^h(f_1, \ldots, f_m)(x) = \frac{1}{\Omega_Q^m |x|_h^{mQ}} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<|x|_h} f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) dy_1 \cdots dy_m, \tag{14}$$

其中 $x \in \mathbb{H}^n \backslash \{0\}$。

现在，我们将主要结果表述如下。

定理 3. 设 $m \in \mathbb{N}$、 $f_i \in H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)$、 $\alpha > 0$ 和 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$，且对任意 $j = 1$，...，m. 均有 $\alpha_j > 0$。

$$\mathcal{A}^h_m = \frac{1}{\Omega^m_Q} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<1} \prod_{i=1}^m |y_i|_h^{-\alpha_i} dy_1 \cdots dy_m < \infty, \tag{15}$$

则 $\mathfrak{H}^h_m$ 是从 $H^\infty_{a_1}(\mathbb{H}^n) \times \cdots \times H^\infty_{\alpha_m}(\mathbb{H}^n)$ 到 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$ 的有界算子，并且该算子的范数满足以下公式

$$\|\mathfrak{H}^h_m\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)} = \mathcal{A}^h_m.$$

根据定理 3，可得以下结果。

推论 1。 设 $m \in \mathbb{N}$， $\alpha > 0$ 和 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ 满足 $\alpha_i > 0$ 对任意 i =1，.....， m。则算子 $\mathfrak{H}^h_m$ 是从 $H^\infty_{a_1}(\mathbb{H}^n) \times \cdots \times H^\infty_{\alpha_m}(\mathbb{H}^n)$ 到 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$ 的有界算子，当且仅当（3）成立。此外，若（15）成立，则有以下公式

$$\mathcal{A}^h_m = \frac{2Q^m}{2^m(mQ-\alpha)} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(\frac{Q}{2} - \frac{\alpha_i}{2})}{\Gamma(\frac{mQ}{2} - \frac{\alpha}{2})}.$$

现在，我们开始证明我们的结果。

定理 3 的证明。本节中的证明过程与定理 2 的证明类似，因此我们仅给出简要证明，并重点计算最优常数。

结合式（14）与海森堡群上加权型空间的定义 H^∞_α（$\mathbb{H}^n$），可得

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{H}^h_m\|_{H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{H}^n} |x|_h^\alpha \left| \frac{1}{\Omega^m_Q |x|_h^{mQ}} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<|x|_h} f_1(y_1)\cdots f_m(y_m) dy_1\cdots dy_m \right| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{H}^n} |x|_h^\alpha \left| \frac{1}{\Omega^m_Q} \int_{|(z_1,\ldots,z_m)|_h<1} f_1(\delta_{|x|_h} z_1)\cdots f_m(\delta_{|x|_h} z_m) dz_1\cdots dz_m \right| \\
&\le \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)} \sup_{x\in\mathbb{H}^n\setminus\{0\}} |x|_h^\alpha \left| \frac{1}{\Omega^m_Q} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<1} \prod_{i=1}^m |x|_h^{-\alpha} |y_i|_h^{-\alpha_i} dy_1\cdots dy_m \right| \\
&= \mathcal{A}^h_m \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}$$

这表明，对于每个 $f_i \in \prod_{i=1}^m (H^\infty_{\alpha_i})$ $i = 1, \ldots, m$，在 $H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)$ 中取上确界可得

$$\|\mathfrak{H}^h_m\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)} \le \mathcal{A}^h_m. \tag{16}$$

接下来，我们取 $f_{\alpha_j}(x)$，其定义见（8），并满足（9）。利用（14），可得

$$|x|_h^\alpha \left| \frac{1}{\Omega^m_Q |x|_h^{mQ}} \int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<|x|_h} f_{\alpha_1}(y_1)\cdots f_{\alpha_m}(y_m) dy_1\cdots dy_m \right| = \mathcal{A}^h_m. \tag{17}$$

结合（9）和（17），可得

$$\|\mathfrak{H}_m^h\|_{\prod_{i=1}^m H_{\alpha_i}^\infty(\mathbb{H}^n)\to H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)} \geq \mathcal{A}_m^h.$$

至此，我们完成了定理3的证明。 □

为了求得最佳常数，我们借鉴了 [5] 中的方法。为方便起见，我们选取若干特殊情形分别计算，而一般情形则是对这些特殊情形的总结。

情形1：当 $m=1$ 时。

这种情形可回到方程（13），这里我们给出另一种定义形式，因此其尖锐界的范数为

$$\mathcal{A}_1^h = \frac{1}{\Omega_Q}\int_{|y|_h<1} |y|_h^{-\alpha} dy < \infty.$$

利用极坐标变换公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^h &= \frac{1}{\Omega_Q}\int_{|y|_h<1} |y|_h^{-\alpha} dy \\
&= \frac{1}{\Omega_Q}\int_0^1 \int_{S(0,1)} r^{-\alpha+Q-1} dr dy' \\
&= \frac{\omega_Q}{\Omega_Q}\int_0^1 r^{-\alpha+Q-1} dr \\
&= \frac{Q}{Q-\alpha}.
\end{aligned}$$

至此，我们得到了当 $m=1$ 时的最佳常数，即

$$\|\mathfrak{H}_1^h\|_{H_\alpha^\infty(\mathbb{H}^n)} = \frac{Q}{Q-\alpha}. \tag{18}$$

当 $m=2$ 时，情况 2。

Acco根据定理 3 和极坐标变换公式，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2^h &= \frac{1}{\Omega_Q^2}\int_{|(y_1,y_2)|_h<1} |y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{-\alpha_2} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{\Omega_Q^2}\int_0^1\int_0^1\int_{S(0,1)}\int_{S(0,1)} r_1^{-\alpha_1+Q-1} r_2^{-\alpha_2+Q-1} dr_1 dr_2 dy_1' dy_2' \\
&= \frac{\omega_Q^2}{\Omega_Q^2}\frac{1}{2Q-\alpha}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}(-\alpha_1+Q-1)} t^{-\alpha_2+Q-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{\omega_Q^2}{\Omega_Q^2}\frac{1}{4Q-2\alpha}\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}(-\alpha_1+Q)-1} x^{\frac{1}{2}(-\alpha_2+Q)-1} dx \\
&= \frac{Q^2}{2(2Q-\alpha)} B\left(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_1}{2}, \frac{Q}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\right) \\
&= \frac{Q^2}{2(2Q-\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_1}{2})\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_2}{2})}{\Gamma(Q-\frac{\alpha}{2})}.
\end{aligned}$$

这表明，当 $m=2$ 时，最佳常数为

$$\mathcal{A}_2^h=\frac{Q^2}{2(2Q-\alpha)}\frac{\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_1}{2})\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_2}{2})}{\Gamma(Q-\frac{\alpha}{2})} \tag{19}$$

当 $m\geq 3$ 时的情形 3。

当 $m\geq 3$ 时的证明与情况 2 的证明类似，我们可以继续使用相同的方法。

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m^h=&\frac{1}{\Omega_Q^m}\int_{|(y_1,\ldots,y_m)|_h<1}\prod_{i=1}^m|y_i|_h^{-\alpha_i}dy_1\cdots dy_m\\=&\frac{1}{\Omega_Q^m}\int_0^1\cdots\int_0^1\int_{(S(0,1))^m}\prod_{i=1}^m r_i^{-\alpha_i+Q-1}dr_1\cdots dr_m dy_1^{'}\cdots dy_m^{'}\\=&\frac{\omega_Q^m}{\Omega_Q^m}\frac{2}{2^m(mQ-\alpha)}\int_0^1\cdots\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}(-\alpha_1+Q)-1}x^{\frac{1}{2}(-\alpha_2+Q)-1}\\&\times\cdots\times(1-x)^{\frac{1}{2}(-\alpha_{m-1}+Q)-1}x^{\frac{1}{2}(-\alpha_m+Q)-1}dx\\=&\frac{2Q^m}{2^m(mQ-\alpha)}\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_i}{2})}{\Gamma(\frac{mQ}{2}-\frac{\alpha}{2})}.\end{aligned} \tag{20}$$

当我们取 $m=1$ 和 $m=2$ 在（20）中时，所得结果与（18）和（19）相同。因此，我们得到了 $\mathcal{A}_m^h$ 的最佳常数，即

$$\mathcal{A}_m^h=\frac{2Q^m}{2^m(mQ-\alpha)}\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(\frac{Q}{2}-\frac{\alpha_i}{2})}{\Gamma(\frac{mQ}{2}-\frac{\alpha}{2})}.$$

4 Hardy-Littlewood-P´olya 和希尔伯特算子的尖锐界

在本节中，我们研究海森堡群上加权型空间中的 m-线性 n-维 Hardy-Littlewood-P´olya 算子和希尔伯特算子。首先，让我们回顾它们的定义和性质。

m-线性 n-维 Hardy-Littlewood-P´olya 算子定义为

$$P_m(f_1,\ldots,f_m)(x):=\int_{\mathbb{R}^{nm}}\frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{[\max(|x|^n,|y_1|^n,\ldots,|y_m|^n)]^m}dy_1\cdots dy_m, x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

当 $n=m=1$时，考虑线性 Hardy-Littlewood-P´olya 算子 P_1 。在 [6],中，Hardy 得出了 Hardy-Littlewood-P´olya 算子在 $L^p(\mathbb{R}^+)(1<q<\infty)$上的范数，即

$$\|P_1\|_{L^p(\mathbb{R}^+\to L^p(\mathbb{R}^+))}=\frac{p^2}{p-1}.$$

希尔伯特算子是经典希尔伯特不等式的本质扩展，m-线性 n维希尔伯特算子定义为

$$P_m^*(f_1,\dots,y_m)(x) := \int_{\mathbb{R}^{nm}} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{(|x|^n+|y_1|^n+\cdots+|y_m|^n)^m} dy_1\cdots dy_m, x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

对于 $n=1$，以下是一个已知的锐估计

$$\int_0^\infty T_1^* f(x)g(x)dx \le \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f\|_{L^p(0,\infty)}\|g\|_{L^{p'}(0,\infty)}.$$

现在，我们给出海森堡群上 m 线性 n 维 Hardy-Littlewood-P´olya 算子和希尔伯特算子的定义。

定义 4. 设 $f_1,\dots,f_m$ 是 $\mathbb{H}^n$ 上的非负局部可积函数。 m 线性 n 维 Hardy-Littlewood-P´olya 算子定义为

$$P_m^h(f_1,\dots,f_m)(x) = \int_{\mathbb{H}^{nm}} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{[max(|x|_h^Q,|y_1|_h^Q,\dots,|y_m|_h^Q)]^m} dy_1\cdots dy_m, x\in\mathbb{H}^n\backslash\{0\}. \quad (21)$$

定义 5. 设 $f_1,\dots,f_m$ 是 $\mathbb{H}^n$ 上的非负局部可积函数。 m 线性 n 维希尔伯特算子定义为

$$P_m^{h*}(f_1,\dots,f_m)(x) = \int_{\mathbb{H}^{nm}} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)}{(|x|_h^Q+|y_1|_h^Q+\cdots+|y_m|_h^Q)^m} dy_1\cdots dy_m, x\in\mathbb{H}^n\backslash\{0\}. \quad (22)$$

现在，我们将主要结果表述如下。

定理 4. 设 $m\in\mathbb{N}, f_i\in H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)$ $\alpha>0$ 和 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$，其中 $\alpha_i>0$ 对任意 $i=1,\dots,m$ 均成立。若

$$\mathcal{B}_m^h = \int_{\mathbb{H}^{nm}} \frac{\prod_{i=1}^m |y_i|_h^{-\alpha_i}}{[\max(1,|y_1|_h^Q,\dots,|y_m|_h^Q)]^m} dy_1\cdots dy_m < \infty, \quad (23)$$

那么，当且仅当算子范数满足以下公式时，P_m^h是从 $H^\infty_{a_1}(\mathbb{H}^n)\times\cdots\times H^\infty_{\alpha_m}(\mathbb{H}^n)$ 到 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$ 的有界算子

$$\|P_m^h\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)} = \frac{mQ\omega_Q^m}{\alpha\prod_{j=1}^m(Q-\alpha_j)}.$$

定理 5. 设 $m\in\mathbb{N}, f_i\in H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n), \alpha>0$ 和 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$ 满足：对于任意 $i=1,\dots,m$，有 $\alpha_i>0$

$$\mathcal{B}_m^{h*} = \int_{\mathbb{H}^{nm}} \frac{\prod_{i=1}^m |y_i|_h^{-\alpha_i}}{[\max(1+|y_1|_h^Q+\cdots+|y_m|_h^Q)]^m} dy_1\cdots dy_m < \infty, \quad (24)$$

那么，当且仅当算子的范数满足以下公式时， P_m^h是从 $H^\infty_{a_1}(\mathbb{H}^n)\times\cdots\times H^\infty_{\alpha_m}(\mathbb{H}^n)$到 $H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)$的有界算子

$$\|P_m^{h*}\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_\alpha(\mathbb{H}^n)} = \left(\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}\right)^m \frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(1-\frac{\alpha_i}{Q})\Gamma(\frac{\alpha}{Q})}{\Gamma(m)}.$$

在上述证明中，我们已得到 $\mathcal{B}_m^h$ 和 $\mathcal{B}_m^{h*}$ 显然成立，因此省略其证明，重点证明它们的最佳常数。

定理 4和 5的证明。 为了求得 m线性 n维 Hardy-Littlewood-P´olya 算子的最佳常数，我们将考虑以下两种情形，并结合它们得出结果。

情形1，当 $m = 2$。
在这种情形下，我们有

$$\mathcal{B}_m^h = \int_{\mathbb{H}^n}\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{\alpha_2}}{[\max(1, |y_1|_h^Q, |y_2|_h^Q)]^2} dy_1 dy_2.$$

经计算，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{\alpha_2}}{[\max(1, |y_1|_h^Q, |y_2|_h^Q)]^2} dy_1 dy_2 =& \int_{|y_1|_h<1}\int_{|y_2|_h<1} |y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{-\alpha_2} dy_1 dy_2 \\ &+ \int_{|y_1|_h>1}\int_{|y_2|_h\le|y_1|_h} |y_1|_h^{-\alpha_1-2Q}|y_2|_h^{-\alpha_2} dy_1 dy_2 \\ &+ \int_{|y_2|_h>1}\int_{|y_1|_h<|y_2|_h} |y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{-\alpha_2-2Q} dy_1 dy_2 \\ :=& I_0 + I_1 + I_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_0 =& \int_{|y_1|_h<1}\int_{|y_2|_h<1} |y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{-\alpha_2} dy_1 dy_2 \\ =& \frac{\omega_Q^2}{(Q-\alpha_1)(Q-\alpha_2)}, \\ I_1 =& \int_{|y_1|_h>1}\int_{|y_2|_h\le|y_1|_h} |y_1|_h^{-\alpha_1-2Q}|y_2|_h^{-\alpha_2} dy_1 dy_2 \\ =& \frac{\omega_Q}{Q-\alpha_2}\int_{|y_1|_h>1} |y_1|_h^{-\alpha-Q} dy_1 \\ =& \frac{\omega_Q^2}{\alpha(Q-\alpha_2)}.\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}I_2 =& \int_{|y_2|_h>1}\int_{|y_1|_h<|y_2|_h} |y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{-\alpha_2-2Q} dy_1 dy_2 \\ =& \frac{\omega_Q}{Q-\alpha_1}\int_{|y_2|_h>1} |y_2|_h^{-\alpha-Q} dy_2 \\ =& \frac{\omega_Q^2}{\alpha(Q-\alpha_1)}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{H}^n}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|y_1|_h^{-\alpha_1}|y_2|_h^{\alpha_2}}{[\max(1,|y_1|_h^Q,|y_2|_h^Q)]^2}dy_1dy_2\\=&I_0+I_1+I_2\\=&\frac{2Q\omega_Q^2}{\alpha(Q-\alpha_1)(q-\alpha_2)}.\end{aligned}$$

情况 2，当 $m\geq 3$。

Let

$E_0=\{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{H}^n\times\cdots\times\mathbb{H}^n\colon |y_k|_h\leq 1,1\leq k\leq m\}$;$E_1=\{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{H}^n\times\cdots\times\mathbb{H}^n\colon |y_1|_h>1,|y_k|_h\leq|y_1|_h,2\leq k\leq m\}$;$E_i=\{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{H}^n\times\cdots\times\mathbb{H}^n\colon |y_i|_h>1,|y_j|_h<|y_k|_h,|y_k|_h\leq|y_i|_h,1\leq j<i<k\leq m\}$;$E_m=\{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{H}^n\times\cdots\times\mathbb{H}^n\colon |y_m|_h>1,|y_j|_h<|y_m|_h,1<j<m\}$.

显然，我们有

$$\bigcup_{j=0}^{m}E_j=\mathbb{H}^n\times\cdots\times\mathbb{H}^n,E_i\cap E_j=\emptyset.$$

取

$$K_j=\int_{\mathbb{H}^{nm}}\frac{\prod_{i=1}^m|y_i|_h^{-\alpha_i}}{[\max(1,|y_1|_h^Q,\ldots,|y_m|_h^Q)]^m}dy_1\cdots dy_m,$$

于是我们开始计算 K_j 与 $j=0,1,\ldots,m$。

$$K_0=\prod_{j=1}^m\int_{|y_j|\leq 1}|y_j|_h^{-\alpha_j}dy_j=\frac{\omega_Q^m}{\prod_{j=1}^m(Q-\alpha_j)},$$

$$\begin{aligned}K_1=&\int_{|y_1|>1}|y_1|_h^{-\alpha_1-Qm}dy_1\prod_{j=2}^m\int_{|y_j|_h\leq|y_1|_h}|y_j|_h^{-\alpha_j}dy_j\\=&\frac{\omega_Q^{m-1}}{\prod_{j=2}^m(Q-\alpha_j)}\int_{|y_1|_h>1}|y_1|_h^{-\alpha-Q}dy_1\\=&\frac{\omega_Q^m}{\alpha\prod_{j=2}^m(Q-\alpha_j)}.\end{aligned}$$

因此我们可以推得

$$K_j=\frac{\omega_Q^m}{\alpha\prod_{1\leq i\leq m,i\neq j}(Q-\alpha_j)}.$$

于是我们可以得到

$$K_m=\frac{mQ\omega_Q^m}{\alpha\prod_{j=1}^m(Q-\alpha_j)}.$$

结合以上两种情形，我们完成了定理 4。接下来，我们按照 B´enyi 和 Oh [3] 给出的方法，计算 m-线性 n-维希尔伯特算子的最佳常数。利用极坐标并进行变量替换，我们得到

$$\begin{aligned}
\|P_m^{h*}\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_{\alpha}(\mathbb{H}^n)} &= \int_{\mathbb{H}^{nm}} \frac{|y_1|_h^{-\alpha_1}\cdots|y_m|_h^{-\alpha_m}}{(1+|y_1|_h^Q+\cdots+|y_m|_h^Q)} dy_1\cdots dy_m \\
&= \omega_Q^m \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{r_1^{Q-\alpha_1-1}\cdots r_m^{Q-\alpha_m-1}}{(1+r_1^Q+\cdots+r_m^Q)^m} dr_1\cdots dr_m \\
&= \frac{\omega_Q^m}{Q^m} \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{\frac{1}{Q}(Q-\alpha_1)-1}\cdots t_m^{\frac{1}{Q}(Q-\alpha_m)-1}}{(1+t_1+\cdots+t_m)^m} dt_1\cdots dt_m \\
&= \frac{\omega_Q^m}{Q^m} \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{-\frac{\alpha_1}{Q}}\cdots t_m^{-\frac{\alpha_m}{Q}}}{(1+t_1+\cdots+t_m)^m} dt_1\cdots dt_m \\
&= \frac{\omega_Q^m}{Q^m} \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{-\beta_1}\cdots t_m^{-\beta_m}}{(1+t_1+\cdots+t_m)^\alpha} dt_1\cdots dt_m.
\end{aligned}$$

Set

$$I_m(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m) := \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{-\beta_1}\cdots t_m^{-\beta_m}}{(1+t_1+\cdots+t_m)^\alpha} dt_1\cdots dt_m.$$

经过简单计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^\alpha t^\beta} dt &= \int_0^\infty (1-t)^{-\beta} t^{\alpha+\beta-2} dt \\
&= B(1-\beta,\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

通过变量代换 $t_m = (1+t_1+\cdots+t_m-1)q_m$，我们得到

$$\begin{aligned}
&I_m(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m) \\
=&\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{t_1^{-\beta_1}\cdots t_{m-1}^{-\beta_{m-1}}}{(1+t_1+\cdots+t_{m-1})^{\alpha-1+\beta_m}} dt_1\cdots dt_{m-1}\int_0^\infty \frac{1}{(1+q_m)^\alpha q_m^{\beta_m}} dq_m \\
=&B(1-\beta_m,\alpha+\beta_m-1) I_m(\alpha-1+\beta_m,\beta_1,\ldots,\beta_{m-1}).
\end{aligned}$$

结合伽马函数的性质，运用归纳法，我们得到

$$I_m(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_m) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(1-\beta_i)\Gamma(\alpha-k+\prod_{i=1}^m \beta_i)}{\Gamma(\alpha)}.$$

因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\|P_m^{h*}\|_{\prod_{i=1}^m H^\infty_{\alpha_i}(\mathbb{H}^n)\to H^\infty_{\alpha}(\mathbb{H}^n)} &= \frac{\omega_Q^m}{Q^m} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(1-\frac{\alpha_i}{Q})\Gamma(\frac{\alpha}{Q})}{\Gamma(m)} \\
&= \left(\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}\right)^m \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(1-\frac{\alpha_i}{Q})\Gamma(\frac{\alpha}{Q})}{\Gamma(m)}.
\end{aligned}$$

定理4 和5的证明到此结束。 □

致谢

本工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271232）和山东建筑大学基金（项目编号：X20075Z0101）的资助。

参考文献

[1] W. Beckner，带有锐卷积估计的 Pitt不等式。美国数学会会刊，2008，136：1871–1885。[2] W. Beckner，加权不等式与 Stein-Weiss势。数学论坛，2008，20：587–606。[3] ´A. B´enyi 和 T. Oh，某些多线性积分算子的最佳常数。不等式与应用杂志，2006，文章编号 28582，1–12。[4] G. B. Folland 和 E. M. Stein，齐次群上的 Hardy空间，普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1982。[5] Z. W. Fu、L. Grafakos、S. Z. Lu 和 F. Y. Zhao， m线性 Hardy算子与Hilbert算子的尖锐界，休斯敦数学杂志，2012，38(1)：225–244。[6] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. P´olya，不等式，第 2 版，英国剑桥：剑桥大学出版社，1952。[7] A. Kor¨aanyi 和 H. M. Reimann，海森堡群上的拟共形映射，《数学发明》，80，1985，309–338。[8] Coulhon T、Muller D、Zienkiewicz J. 关于海森堡群上的 Riesz变换。数学年刊，1996，305(2)：369–379。[9] S. Stevi’c，关于加权型空间之间的 m线性积分型算子范数的注记。微分方程进展，2021，187–198。[10] E. M. Stein 和 G. Weiss， n维欧几里得空间上的分数阶积分，《数学与力学杂志》7，1958，503–514。[11] S. Thangavelu，海森堡群上的调和分析，数学进展，第 159 卷，波士顿，马萨诸塞州：Birkh¨auser Boston，1998。[12] D. Wu 和 D. Y. Yan，一类多线性积分算子的最佳常数及其若干应用，《中国科学：数学》，59(5)，2016，907–920。[13]Q. Y. Wu 和 Z. W. Fu，海森堡群上 Hardy算子的锐估计，《中国数学前沿》，2016，11(1)：155–172。

Xiang LiSchool of Science
Shandong Jianzhu UniversityJinan,
250000P. R. China电子邮箱:
lixiang162@mails.ucas.ac.cn

Zhanpeng GuSchool of Science
Shandong Jianzhu UniversityJinan,
250000P. R. China电子邮箱:
guzhanpeng456@163.com

Dunyan Yan
School of Mathematical Sciences
University of Chinese Academy of Sciences
Beijing, 100049P. R. China电子邮箱:
ydunyan@ucas.ac.cn

Zhongci HangSchool of Science
Shandong Jianzhu UniversityJinan,
250000P. R. China电子邮箱:
babysbreath4fc4@163.com