arXiv:2304.08854v1 [math.GR] 18 Apr 2023

满足$\lambda \geq (r,\lambda)^2$ 的2-设计的旗传递自同构群不是乘积型

Huiling Li[1] , Zhilin Zhang[2] 和 Shenglin Zhou[3*]

1. 浙江大学数学科学学院，杭州，浙江 310027，中国 2. 华南师范大学数学科学学院，广州，广东 510631，中国 3. 华南理工大学数学学院，广州，广东 510640，中国

2023年4月19日

摘要

本文证明，非平凡2-(v,k,λ)设计的旗传递自同构群 G ，若满足 $\lambda \geq (r,\lambda)^2$ ，则不属于积作用型。综上， G 是仿射型或几乎单群型本原群。

2000年数学主题分类：05B05, 05C25, 20B25

关键词：2-设计；旗传递；乘积作用

1 引言

一个 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$ 是一个二元组 $(\Omega\ \mathcal{B})$，其中 Ω 是由 v 个点组成的集合， $\mathcal{B}$ 是区组的集合，并且每个区组都是 Ω 的一个 k-子集，任意两个不同的点恰好包含在 λ 个区组中。若 $2<k<v$，则称设计 $\mathcal{D}$ 为非平凡设计。令 b 表示区组数，则包含每个点的区组数 $\mathcal{D}$ 是一个常数，记为 r。正整数v、 b、 r、 k、 λ称为设计 $\mathcal{D}$的参数。设计 $\mathcal{D}=(\Omega\ \mathcal{B})$的一个自同构是 Ω 的一个置换 π ，满足：若 $B\in\mathcal{B}$ ，则 $B^{\pi}\in\mathcal{B}$。设计的所有自同构构成一个群，即（全）自同构群 $Aut(\mathcal{D})$。对于群 $G\leq Aut(\mathcal{D})$，若 G 在 Ω 上本原作用，则称 G 为点本原；否则称其为点非本原。设计 $\mathcal{D}$ 的一个旗是一个点-区组对 (α,B)，其中 α 是一个点， B 是一个与 α关联的区组。若子群 G 在 $Aut(\mathcal{D})$ 中传递作用于设计 $\mathcal{D}$的旗集，则称其为旗传递。

*本研究受国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11271123）。通讯作者：slzhou@scut.edu.cn

本文继续研究满足 $\lambda \geq (r,\lambda)^2$ 的 2-(v,k,λ) 设计。根据 Dembowski 的一个结果 [3, (2.3.7)]，在这种情况下，任何旗传递自同构群 G都必须在 $\mathcal{D}$ 上点本原。在 [8], 中，Zhou 和 Zhan 研究了允许旗传递自同构群 G作用的这类设计。他们证明了以下结果。

命题 1.1 [8, 定理 1.2] 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，满足 $\lambda \geq (r,\lambda)^2$。若 G 是 $\mathcal{D}$ 的旗传递自同构群，则 G 的类型为仿射型、几乎单群型或乘积型，且 Soc(G) $\cong T \times T$，其中 T 是非阿贝尔单群，且 G 的秩为 3。

本文聚焦于命题 1.1 的最后一种情形，即 G 具有乘积作用。主要结果如下：

定理 1.2 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，满足 $\lambda \geq (r,\lambda)^2$，且其自同构群 G 旗传递。则 G 不属于乘积型。

结合定理 1.2 与命题 1.1，可得到如下归约定理 m.

定理 1.3 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，满足 $\lambda \geq (r,\lambda)^2$，且其自同构群 G 旗传递。则 G 的类型为仿射型或几乎单群型。

我们首先给出一个关于 2-设计的众所周知的结果。

引理 1.4（[4, 注，6.10]）设 $\mathcal{D}$是一个参数为 v,b,r,k,λ 的 2-(v,k,λ) 设计，则有：

(i) $r(k-1) = \lambda($ $v-1)$。(ii) $vr = bk$。
(iii) $b \geq v$ 和 $k \leq r$。

我们用一个初等引理结束本节。证明留给读者。

引理 1.5 设 e 是一个正整数。

(i) 若 $e \geq 5$，则 $18e^2 < 2^{2e}$。
(ii) 若 $e \geq 2$，则 $18e^2 < 3^{2e}$。(iii) 对任意素数 $p \geq 5$, $18e^2 < p^{2e}$。(iv) 若 $e \geq 7$，则 $2e^2 < 2^e$。

2 定理 1.2 的证明

反设存在一个 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$，满足定理 1.2 的假设：$G \leq Aut(\mathcal{D})$ 在 $\Omega = \Delta \times \Delta$ 上具有乘积作用，其中 Ω 是 $\mathcal{D}$ 的点集。我们用小写拉丁字母表示 Ω 的点，用小写希腊字母表示Δ 的点。因此，Ω 的点具有 $p = (\alpha, \beta)$ 的形式。我们可将 Ω 写为 $= \Delta_1 \times \Delta_2$，其中 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$，并在下文中假设 $|\Delta| = \omega \geq 5$ 和 ω 为奇数（见 [8,第 3 节.3]）。

由命题 1.1，我们假设 $T^2 \trianglelefteq G \leq T_0 \wr \mathbb{Z}_2$，其中 T_0 在 Δ 上是 2-传递的，且 $T = Soc(T_0)$ 是非阿贝尔单群，并且 $v = \omega^2$。我们将在三个小节中证明定理 1.2。

2.1 一些算术结果

引理 2.1 (i) $r^* = 2(\omega - 1)$，其中 $r^* = {}^{r}{}_{(r,\ \lambda)}$。

(ii) $k = \frac{\lambda^*}{(\omega+1)_2} + 1$，其中 $\lambda^* = {}^{\lambda}{}_{(r,\ \lambda)}$。(iii) $b < 4v$。

证明。(i) 这已在 [8, 引理 3.5] 中得到证明。(ii) 由 $r^*(k-1) = \lambda^*(v-1)$ 和$r^* = 2(\omega - 1)$，可得 $k = {}^{\lambda^*}{}_{(\omega+1)_2} + 1$. (iii) 由于 $\lambda^* \geq (r, \lambda)$，于是

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{2v(\omega-1)(r,\lambda)}{\frac{\lambda^*(\omega+1)+2}{2}} < 4v \cdot \frac{\omega-1}{\omega+1} \cdot \frac{(r,\lambda)}{\lambda^*} < 4v.$$

□

引理 2.2 $k = (c + \frac{d-2)(\omega+1)}{2} + 1$ 对于某些正整数 c 和 d。

证明。众所周知，G_p 在 Ω 上的次轨道对应于 G 在 $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$ 上的轨道。具体而言，这些轨道为 $\Omega_0^2 = \{(p,p) \mid p \in \Omega\}$、$\Omega_1^2 = \{(p,q) \mid p \in \Omega\ q \in \Omega_1(p)\}$、$\Omega_2^2 = \{(p,q) \mid p \in \Omega\ q \in \Omega_2(p)\}$，其中 $\Omega_1(p)$ 和 $\Omega_2(p)$ 是 G_p 的非平凡轨道。显然，若 $p = (\alpha, \beta)$ 且 $q = (\gamma, \delta)$，则 $(p,q) \in \Omega_1^2$ 当且仅当 $\alpha = \gamma, \beta \neq \delta$ 或 $\alpha \neq \gamma, \beta = \delta$；而 $(p,q) \in \Omega_2^2$ 当且仅当 $\alpha \neq \gamma$ 且 $\beta \neq \delta$。

统计 $\Omega_1^2 \times \mathcal{B}$ 中满足 $p, q \in B$ 的点对 $((p,q)\ B) \in$。由于 $|\Omega_1^2| = 2\omega^2(\omega-1)$，且每个这样的点对都关联 λ 个区组，我们得到 $2\omega^2(\omega-1)\lambda$ 个点对。若 B 包含来自 Ω_1^2 的 x 个点对，则可得方程 $2\omega^2(\omega-1)\lambda = bx$。类似地，以两种方式统计 $\Omega_2^2 \times \mathcal{B}$ 中满足$p, q \in B$的点对 $((p,q)\ B) \in$，可得方程 $\omega^2(\omega-1)^2\lambda = by$，其中 y 是 Ω_2^2 中包含于 B 的点对数。因此 $y = {}^{x}{}_{(\omega-1)\ 2}$。

设 B 是 $\mathcal{D}$ 的一个区块，且 $p = (\alpha, \beta) \in B$。假设 B 中有 c 个点，其第一分量为 α，即 $p = (\alpha, \beta)$、(α, β_1) ...、(α, β_{c-1})；并且 B 中有 d 个点，其

第二分量为 $\omega-1$，即 $p=(\alpha,\beta)$、(α_1,β) ...、(α_{d-1},β)。由于 G 是旗传递的，因此 c 和 d 不依赖于 p 的选择。容易看出，B 中存在 $c+d-2$ 个点 q，使得点对 (p,q) 包含于 Ω_1^2，中；并且 B 中存在 $y=x(\omega-1)2=(c+d-2)(\omega-1)2$ 个点 q，使得点对 (p,q) 包含于 Ω_2^2 中。由 $(c+d-2)+(c+d-2)(\omega-1)2=(c+d-2)(\omega+1)2$ 可知，这个和恰好等于 B 中除 p 以外的点数，即 $k-1$。引理得证。□

引理 2.3 $\lambda^*=c+d-2$。

证明。由引理 2.1 和引理 2.2 可得。□

引理 2.4 $d=c+1$。

证明。不失一般性，假设 $c\le d$。令

$$B^1=\{\alpha\in\Delta_1\,|\,(\alpha,\beta)\in B\},\quad B^2=\{\beta\in\Delta_2\,|\,(\alpha,\beta)\in B\}.$$

显然，$|B^1|=\frac{k}{c}$ 且 $|B^2|=\frac{k}{d}$。若 $c=d$，则 $\lambda^*=2(c-1)$为偶数，这与$(r^*,\lambda^*)=1$这一事实矛盾。若 $d\ge c+2$，则由引理 2.2，

$$\frac{k}{c}=\frac{(c+d-2)(\omega+1)}{2c}+\frac{1}{c}>\frac{2c}{2c}(\omega+1)=\omega+1>|\Delta_1|.$$

这与 $|B^1|\le|\Delta_1|$这一事实矛盾。□

注意到 c 和 $d=c+1$ 都是 k的因数，令 $k=c(c+1)m$，其中 m 为正整数。由引理 2.2

$$c(c+1)m-\frac{(2c-1)(\omega+1)}{2}=1. \tag{1}$$

下面，我们讨论方程（1）的一些性质。

引理 2.5 设 c 为正整数。当且仅当 $c\not\equiv 2\pmod 3$ 时，关于变量 m,ω 的方程（1）有正整数解。

证明. 若 $c\not\equiv 2\pmod 3$，则 $(c(c+1)\ 2c-1)=1$，并且存在整数 x 和y 使得 $c(c+1)x+(2c-1)y=1$。对于任意整数 u，令 $x'=x+u(2c-1)$ 和$y'=y-uc(c+1)$。显然，$c(c+1)x'+(2c-1)y'=1$。因此，我们可以选取 u，使得 x' 为正整数，并令 $x'=m$和 $y'=-\frac{\omega+1}{2}$，于是有 $c(c+1)m-(2c-1)(\omega+1)2=1$。反过来，假设方程（1）有一个正整数解 (m,ω)。那么$c(c+1)m+(2c-1)\frac{(-\omega-1)}{2}=1$，因此 $(c(c+1)\ 2c-1)=1$，这意味着 $c\equiv 0,1\pmod 3$。□

引理 2.6 设 $c\not\equiv 2$（mod 3），且（m_0，ω_0）是方程（1）的一个正解，其中 m_0 最小。则方程（1）的通解（m，ω）具有如下形式：

(i) 若 $c = 3t$, 则 $m = m_0 + s\Delta m$, $\omega = \omega_0 + s\Delta\omega$, 其中 $m_0 = 2t + 1$, $\Delta m = 6t - 1$, $\omega_0 = 6t^2 + 6t + 1$, $\Delta\omega = 18t^2 + 6t$;

(ii) 若 $c = 3t + 1$, 则 $m = m_0 + s\Delta m$, $\omega = \omega_0 + s\Delta\omega$, 其中 $m_0 = 4t + 2$, $\Delta m = 6t + 1$, $\omega_0 = 12t^2 + 16t + 5$, $\Delta\omega = 18t^2 + 18t + 4$, 其中 s 和 t 是非负整数。

证明。我们只证明（i）部分，因为（ii）部分的证明类似。设 $c = 3t$。容易验证，(m_0, ω_0) 是方程（1）的一个解，而 $(\Delta m, \Delta\omega)$ 是下列方程的一个解

$$2c(c+1)x - (2c-1)y = 0.$$

因此，对于任意整数 s，$(m_0 + s\Delta m, \omega_0 + s\Delta\omega)$ 都是（1）的一个解。反过来，若 (m, ω) 是（1）的一个解，则 $(m-m_0, \omega-\omega_0)$ 是方程 $2c(c+1)x-(2c-1)y = 0$ 的一个解。由于 $(2c(c+1), 2c-1) = 1$，$2c(c+1) \mid y$ 且 $(2c-1) \mid x$，由此可知，（1）的每个整数解都具有形式 $(m_0+s\Delta m, \omega_0+s\Delta\omega)$。由于 $6t-1 > 2t+1$，$m_0 = 2t+1$是最小的。□

引理 2.7 若 (m, ω) 是方程（1）的一个正解，则 $2m^2 > \omega$。

证明。若 $c = 3t$，则 $m = (2t + 1) + s(6t - 1)$，$\omega = (6t^2 + 6t + 1) + s(18t^2 + 6t)$。容易得知 $2m^2 > \omega$。$c = 3t + 1$ 的情形证明类似。□

引理 2.8 若 (m, ω) 是方程（1）的一个正解，其中 $c \geq 1$ 为某个整数，则 $(c + 1)m < \omega$。此外，

(i) 若 $c \neq 1$，则 $(c + 1)m < \omega < (c + 2)m$;
(ii) 若 $c = 1$，则 $\omega = 4m - 3$，其中 $m \geq 2$。

证明。由方程（1），我们有

$$(c+1)m = \frac{2c-1}{2c}(\omega+1) + \frac{1}{c} = (\omega+1) - \frac{\omega-1}{2c}.$$

于是，当且仅当 $\frac{\omega-1}{2c} = 0$ 或 1 时，$(c + 1)m \geq \omega$。显然，对于 $\omega \geq 5$，$\frac{\omega-1}{2c} \neq 0$。因此，$\frac{\omega-1}{2c} = 1$，这意味着 $\omega = 2c + 1$，从而 $c(c + 1)m = (2c - 1)(c + 1) + 1$。由此可得 $(c + 1) \mid 1$，这是不可能的。因此 $(c + 1)m < \omega$。

另一方面，由 $(c+1)m = \frac{2c-1}{2c}(\omega+1) + \frac{1}{c} > \frac{2c-1}{2c}\omega$ 可知 $\frac{2c}{2c-1}(c+1)m > \omega$。~~若 $c > 1$，由 $\frac{2c}{2c-1}(c+1) = \overline{c+1} + \frac{c+1}{2c-1} \leq c+2$）可得 $(c + 2)m \geq \frac{2c}{2c-1}(c+1)m > \omega$，从而 $(c + 1)m < \omega < (c + 2)m$。~~若 $c = 1$，由方程（1），我们有 $\omega = 4m - 3$。□

作为上述引理的应用，我们给出以下一般性结果。

命题 2.9 设记号 Ω Δ 和 ω 如上，并设 $G = (S_\Delta \times S_\Delta) \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中 S_Δ 表示 Δ上的对称群。若 (m, ω) 是方程（1）在某个正整数 c下的正整数解，则存在一个 2-(ω^2, k, λ) 设计 $\mathcal{D}$，且 G 在其上旗传递地作用。

证明。设 $G=(S_\Delta\times S_\Delta)\rtimes\mathbb{Z}_2$，则子群 $S_\Delta\times S_\Delta$ 中将Δ_i 映到 Δ_i的元素，以及不属于 $S_\Delta\times S_\Delta$ 的元素，会互换 Δ_1 和 Δ_2。我们使用相同的符号，如 α、β 等，表示 Δ_1 和 Δ_2的元素； $p=(\alpha,\beta)$ 表示 Ω 中的点，其中 α 是第一分量，意为它来自 Δ_1； β 是第二分量，意为它来自 Δ_2。于是， G 是作用于 Ω 上的一个秩 3 置换群，且 G 在 $\Omega^2=\Omega\times\Omega$ 上有三个轨道，如引理 2.2 中所示，分别记为 Ω_0^2,Ω_1^2 和 Ω_2^2。相应地，若给定 $p=(\alpha,\alpha)\in\Omega$，则 G_p（即 G 中 p 的稳定子）有 3 个轨道：$\Omega_0(p)=\{p\}$、$\Omega_1(p)=\{(\alpha,\beta)$、$(\beta,\alpha)\mid\beta\in\Delta,\alpha\neq\beta\}$，以及 $\Omega_2(p)=\{(\beta,\gamma)\mid\beta,\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}\}$；其长度分别为 1、$2(\omega-1)$ 和 $(\omega-1)^2$。

设 c、m、ω 满足方程（1），其中 $\omega=|\Delta|$。由引理 2.8，得到 $(c+1)m<\omega$，因此 Δ_1 中有 $(c+1)m$ 个元素：

$$\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},...,\alpha_{c+1}^{(1)},\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},...,\alpha_{c+1}^{(2)},\alpha_1^{(m)},\alpha_2^{(m)},...,\alpha_{c+1}^{(m)}.$$

类似地， $cm<(c+1)m<\omega$， Δ_2 中有 cm 个元素：

$$\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},...,\beta_c^{(1)},...,\beta_1^{(m)},\beta_2^{(m)},...,\beta_c^{(m)}.$$

利用这些互不相同的元素， $\alpha_i^{(s)}$ 和 $\beta_j^{(s)}$（其中 $1\le i\le c+1$、$1\le j\le c$ 和 $1\le s\le m$），我们构造 Ω 的点。令 $p_{ij}^{(s)}=(\alpha_i^{(s)},\beta_j^{(s)})$。于是得到 $c(c+1)m$ 个点。设 $k:=c(c+1)m$，并且

$$B=\{p_{ij}^{(s)}\mid 1\le i\le c+1,1\le j\le c,1\le s\le m\}.$$

显然， $|B|=k$。令 $\mathcal{B}=\{B^g\mid g\in G\}$。接着断言，关联结构$\mathcal{D}=(\Omega,\mathcal{B})$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计，其中 $v=\omega^2=|\Omega|$。

事实上，我们只需证明存在一个正整数 λ，使得 Ω 中的每一对点 p,q 恰好同时出现在 λ 个区组中。

假设 $p\neq q\in\Omega$，且 p,q 包含在 μ 个区组中，分别记为 $B_1,B_2,...,B_\mu$。若存在 $g\in G$使得 $p'=p^g,q'=q^g$，那么 p',q'也包含在 μ 个区组中，分别记为 $B_1^g,B_2^g,...,B_\mu^g$。因此，在这种情况下，包含 p 和 q 的区组数取决于 (p,q) 是否属于 Ω_1^2 或 Ω_2^2。

若 $(p,q)\in\Omega_{21}$, $p,q\in B$，其中 $p=p_{ij}^{(s)},q=p_{\ell m}^{(s)}$。根据 Ω_1^2, 的定义，我们有 $i=\ell$ 和 $j\neq m$，或者 $j=m$ 和 $i\neq\ell$。因此，当 p 固定时，对于 q，在 B 中有 $2c-1$ 种可能，使得 $(p,q)\in\Omega_1^2$,；所以，在满足 $p\neq q\in B$ 的有序对 (p,q) 中，有 $k(2c-1)$ 个有序对 (p,q) 属于 Ω_1^2。因此，其余点对的数量为$k(k-1)-k(2c-1)=k_{(\omega-1)(2c-1)\ 2}$。

假设 $(p,q)\in\Omega_1^2$,，且它恰好包含在 λ_1 个区组中。现在用两种方式计算满足 $\in\Omega_1^2\times\mathcal{B}$ 的点对 $((p,q)\ B)$，其中 $p,q\in B$，得到 $2v(\omega-1)\lambda_1=bk(2c-1)$，因此$\lambda_1=bk(2c-1)\ 2v(\omega-1)$。类似地，假设 $(p,q)\in\Omega_2^2$，且它恰好包含在 λ_2 个区组中。用两种方式计算满足 $\in\Omega_2^2\times\mathcal{B}$ 的点对 $((p,q)\ B)$，其中 $p,q\in B$，得到方程$v(\omega-1)^2\lambda_2=b\frac{k(\omega-1)(2c-1)}{2}$。因此，

$$\lambda_2=\frac{bk(2c-1)(\omega-1)}{2v(\omega-1)^2}=\frac{bk(2c-1)}{2v(\omega-1)}=\lambda_1.$$

代入 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$，因此任意两个不同的点 p 和 q 都恰好包含在 λ 个区组中，关联结构 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(ω^2, k, λ) 设计。

显然，根据 $\mathcal{D}$ 的结构， G 是区块传递的。令

$$\sigma = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, ..., \alpha_{c+1}^{(1)}),$$
$$\tau = (\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, ..., \beta_c^{(1)}),$$
$$\phi = (\alpha_1^{(1)}, ..., \alpha_1^{(m)})(\alpha_2^{(1)}, ..., \alpha_2^{(m)})...(\alpha_{c+1}^{(1)}, ..., \alpha_{c+1}^{(m)})(\beta_1^{(1)}, ..., \beta_1^{(m)})...(\beta_c^{(1)}, ..., \beta_c^{(m)}),$$

则 $\sigma \in S_{\Delta_1}$、 $\tau \in S_{\Delta_2}$ 和 $\phi \in S_{\Delta_1} \times S_{\Delta_2}$。容易得知， σ、 τ 和 ϕ 保持区块B 不变，因此 $\langle \sigma$、τ、 $\phi \rangle \leq G_B$。此外，我们有 $(\alpha_1^{(1)})^{\sigma^{i-1}} = \alpha_i^{(1)}$、$(\beta_1^{(1)})^{\tau^{j-1}} = \beta_j^{(1)}$，其中 $1 \leq i \leq c+1$ 和 $1 \leq j \leq c$；以及 $(p_{11}^{(1)})^{\sigma^{i-1}\tau^{j-1}} = p_{ij}^{(1)}$、$(p_{ij}^{(1)})^{\phi^{s-1}} = p_{ij}^{(s)}$，其中 $1 \leq s \leq m$，因此得出结论： $\langle \sigma$、τ、 $\phi \rangle$ 在 B 上是传递的。因此， G 在 $\mathcal{D}$ 上旗标传递地作用。□

注 2.10 在命题 2.9 中，令 $c = 1$，则由引理 2.8(ii) 得 $\omega = 4m - 3$。此外，由引理 2.2 可知， $k = 2m$。因此，我们得到一个 2-$((4m-3)^2, 2m, \lambda)$ 设计，它具有一个以乘积作用作用的旗传递自同构群；命题 2.9 中构造的设计是 Davies 的例子的推广（见 [2,第 53] 页）。

2.2 自同构群的结果

回顾一下，我们已经证明存在一个正整数 c，使得 $k = {}_{(2c-1)}{}^{(\omega+1)}{}_2 + 1$。对于固定点 $p = (\alpha, \beta) \in B$，其中 $(p, q) \in \Omega_1^2$，且 $q \in B$， c 是 B 中以 α 为第一分量的点数， d 是 B 中以 β 为第二分量的点数。注意此处 $d = c + 1$。由此可知， c 和 $c + 1$ 是 k 的因数，并且 $k = c(c+1)m$。因此， m、 ω 满足方程（1）。由命题 2.9 可知，满足方程（1）的正整数 m、 ω 和 c 确定了一个旗传递的 2-(v, k, λ) 设计。

设 $\mathcal{D}$ 为一个 2-(v, k, λ) 设计，满足 $\lambda \geq (r, \lambda)^2$。设 $G \leq Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递的，其在 $\Omega = \Delta_1 \times \Delta_2$ 上具有乘积作用，且 $Soc(G) = T^2$ 对于某个非阿贝尔单群T成立。因此，我们可以写作 $Soc(G) = T_1 \times T_2$，其中 $T_i \cong T$对 $i = 1$成立， 2。设 $A_i = N_{S_{\Delta_i}}(T_i)$。则 $A_i \leq Aut(T_i)$，且 $|A_i/T_i| \mid |Out(T_i)|$。由此可得 $G \leq (A_1 \times A_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$。设$G_1 = (A_1 \times A_2) \cap G$，则 $|G : G_1| = 2$，并且 G_1 作为 $A_1 \times A_2$ 的子群，是 A_1 和 A_2 中某些子群的次直积。设 $P_1 = A_1 \cap G$，$P_2 = A_2 \cap G$。则 $P_1 \times P_2 \trianglelefteq G_1$。设

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{x \mid x \in A_1, \text{there exists } y \in A_2 \text{ such that } (x, y) \in G_1\}, \\ Q_2 &= \{y \mid y \in A_2, \text{there exists } x \in A_1 \text{ such that } (x, y) \in G_1\}. \end{aligned}$$

于是 $Q_1/P_1 \cong Q_2/P_2 \cong G_1/P_1 \times P_2$。由于当 $i = 1$时， $T_i \leq P_i \lhd Q_i \leq A_i$、 2，因此 Q_i/P_i与群 A/T 的一个截面同构，其中 $A = N_{S_\Delta}(T) \cong A_i$，即存在两个子群 P、 Q，使得 $T \leq P \lhd Q \leq N_{S_\Delta}(T)$，且 $Q/P \cong Q_i/P_i$。接下来我们将讨论 G_B 的结构，目标是得出“$m \leq |A/T|$”这一结果。

1) $G_B \not\leq P_1 \times P_2$.

反设 $G_B \le P_1 \times P_2$ 不成立。对应于块稳定子 G_B，我们定义以下 4 个子群:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \mid x \in P_1, (x,1) \in G_B\}, \\ L_2 &= \{y \mid y \in P_2, (1,y) \in G_B\}, \\ M_1 &= \{x \mid x \in P_1, \text{there exists } y \in P_2 \text{ such that } (x,y) \in G_B\}, \\ M_2 &= \{y \mid y \in P_2, \text{there exists } x \in P_1 \text{ such that } (x,y) \in G_B\}. \end{aligned}$$

于是 $L_1 \times L_2 \le G_B \le M_1 \times M_2$，且 $G_B/L_1 \times L_2 \cong M_1/L_1 \cong M_2/L_2$。显然， $L_i = G_B \cap P_i$，而 M_i 是 G_B 在 P_i 上的投影，因此我们得到以下子群列:

$$G > G_1 \ge P_1 \times P_2 \ge M_1 \times M_2 \ge G_B \ge L_1 \times L_2,$$

其中 $|G : G_1| = 2$。现在我们证明 $|P_1 \times P_2 : M_1 \times M_2| \ge \omega^2 = v$。

事实上，由于 $|P_1 \times P_2 : M_1 \times M_2| = |P_1 : M_1||P_2 : M_2|$，我们只需证明 $|P_1 : M_1| \ge \omega$，另一种情形类似。回顾一下， B^1 在引理 2.4 中定义，它是 M_1 的轨道，长度为 $\frac{k}{c}$。若 $B^1 = \Delta_1$，则 $\omega = \frac{k}{c} = (2c-1)(\omega+1) + \frac{1}{c} = (\omega+1) - \frac{\omega-1}{2c}$，因此 $\omega = 2c+1$。由此可得 $d = (c+1) \nmid k$，这与假设矛盾。因此 $B^1 \subset \Delta_1$。现在假设 $|B^1| \le \omega - 1$。由 $(B^1)^{M_1} = B^1$，可得 $M_1 \le (P_1)_{B^1}$。令 $\mathcal{D}_1$ 为关联结构，其点集为 Δ_1，区组集为 $\{(B^1)^g \mid g \in P_1\}$。那么 $\mathcal{D}_1$ 是一个 2- 设计，且根据引理 1.4(iii)， $|P_1 : M_1| \ge |P_1 : (P_1)_{B^1}| = b_1 \ge \omega$，其中 b_1 是 $\mathcal{D}_1$ 的区组数。

若 $M_1 \times M_2 \ne G_B$，则由上述子群列可得 $b = |G : G_B| \ge 2 \cdot v \cdot 2 = 4v$。这与引理 2.1(iii) 矛盾。因此 $G_B = M_1 \times M_2$，进而对于 $i = 1$， $M_i = L_i$、2。

B^1 和 B^2 均可视为 Δ 的子集，且 $P_1 \cong P_2 : \equiv P$ 是 Δ 上的一个置换群。由此可知，关联结构 $\mathcal{D}_1$ 以 Δ 为点集、以 $\{(B^1)^g \mid g \in P\}$ 为区组集，是一个 2-$(\omega, \frac{k}{c}, \lambda_1)$ 设计；关联结构 $\mathcal{D}_2$ 以 Δ 为点集、以 $\{(B^2)^h \mid h \in P\}$ 为区组集，是一个 2-$(\omega, \frac{k}{c+1}, \lambda_2)$ 设计。令 b_i、 r_i 为 $\mathcal{D}_i$ 对于 $i = 1$ 的参数，2。

因此，区块 B 只是 Ω 的一个子集，其形式为 $\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in B^1, \beta \in B^2\}$。下文中，我们用 (B^1, B^2) 表示这个子集。

令 $B = (B^1, B^2)$。由于 $P_1 \times P_2$ 是 $\mathcal{D}$的自同构群 G 的子群，因此对任意 $g \in P_1$ 和 $h \in P_2$， $((B^1)^g, (B^2)^h)$ 也是 $\mathcal{D}$的一个区块。另一方面， G 中存在一个元素，它交换 Ω 中点 (α, β) 的两个分量，因此子集 $((B^2)^h, (B^1)^g)$（其中 $g \in P_1$ 和 $h \in P_2$）也是 $\mathcal{D}$的区块。容易看出，上述两类区块构成了 $\mathcal{D}$的区组集。令 Δ中的 α、 β、 γ、 δ为四个元素，则 $p = (\alpha, \beta)$、 $q = (\alpha, \delta)$ 和 $s = (\gamma, \delta)$ 是 $\Omega = \Delta_1 \times \Delta_2$中的三个不同点。令 (X, Y) 为 $\mathcal{D}$的任意一个区块。因此， p和 $q \in (X, Y)$ 当且仅当 $\alpha \in X$和 $\beta, \delta \in Y$。 X有 r_1种可能， Y有 λ_2种可能，因此 p、 q包含在 $\mathcal{D}$的 $r_1\lambda_2 + r_2\lambda_1$个区块中，因为 p、 q包含在形如 $((B^1)^g, (B^2)^h)$ 的 $r_1\lambda_2$个区块中，并且包含在形如 $((B^2)^h, (B^1)^g)$ 的 $r_2\lambda_1$个区块中。另一方面， p和 $s \in (X, Y)$ 当且仅当 α、 $\gamma \in X$和 β、 $\delta \in Y$。因此， p、 s包含在 $\mathcal{D}$的 $2\lambda_1\lambda_2$个区块中。然而，对于 $r_i > \lambda_i (i = 1, 2)$， $r_1\lambda_2 + r_2\lambda_1 > 2\lambda_1\lambda_2$，因此 $\mathcal{D}$不是一个 2-设计。由此， $G_B \not\le P_1 \times P_2$，如所述。

2) G_B的结构。

考虑乘积 $G_B(P_1\times P_2)=\langle G_B,P_1\times P_2\rangle$。由于 $G_B\not\leq P_1\times P_2$，因此 $P_1\times P_2\leq G_B(P_1\times P_2)\leq G_1$，且 $G_B(P_1\times P_2)/P_1\times P_2\cong G_B/G_B\cap(P_1\times P_2)$。由此可得$|G_B(P_1\times P_2):G_B|=|P_1\times P_2:G_B\cap(P_1\times P_2)|$。类似地，我们构造出与 $G_B\cap(P_1\times P_2)$ 对应的 4 个子群，如下所示:

$$L_1'=\{x\mid x\in P_1,(x,1)\in G_B\cap(P_1\times P_2)\},L_2'=\{y\mid y\in P_2,(1,y)\in G_B\cap(P_1\times P_2)\},M_1'=\{x\mid x\in P_1,\text{存在 }y\in P_2,\text{使得 }(x,y)\in G_B\cap(P_1\times P_2)\},M_2'=\{y\mid y\in P_2,\text{存在 }x\in P_1,\text{使得 }(x,y)\in G_B\cap(P_1\times P_2)\}.$$

容易知道，对于 $i=1$，2，$L_i'=L_i$。我们已在 1) 中证明 $G_B\not\leq P_1\times P_2$，因此 $M_i\not\leq P_i$。但是，根据 M_i' 的定义，我们总有 $M_i'\leq P_i$。群 $G_B\cap(P_1\times P_2)$ 满足

$$L_1\times L_2\leq G_B\cap(P_1\times P_2)\leq M_1'\times M_2',$$

and

$$G_B\cap(P_1\times P_2)/L_1\times L_2\cong M_1'/L_1\cong M_2'/L_2.$$

考虑子群列

$$G>G_1\geq G_B(P_1\times P_2)\geq P_1\times P_2\geq M_1'\times M_2'\geq G_B\cap(P_1\times P_2).$$

若 $M_1'\times M_2'\neq G_B\cap(P_1\times P_2)$，同理可得 $|P_1\times P_2:M_1'\times M_2'|\geq\omega^2=v$。现在根据事实 $|G_B(P_1\times P_2):G_B|\geq 2v$ 以及 $|G:G_1|=2$，可得 $b=|G:G_B|\geq 4v$，矛盾。因此，$G_B\cap(P_1\times P_2)=M_1'\times M_2'=L_1\times L_2$。

3) 由于 $G_B\cap(P_1\times P_2)=L_1\times L_2$，我们有 $G_B/L_1\times L_2\cong G_B/G_B\cap(P_1\times P_2)\cong G_B(P_1\times P_2)/P_1\times P_2\leq G_1/P_1\times P_2$，它同构于 A/T 的一个截面，因此

$$|G_B:L_1\times L_2|\mid|A/T|.$$

4) B 的结构。

回顾一下，如果 $(\alpha,\beta)\in B$，那么 B^1 是包含 α 的 M_1 的轨道，B^2 是包含 β 的 M_2 的轨道。由于 $L_i\lhd M_i$，群 L_i 在 B^i 上传递作用，因此 B^1 是 L_1 的若干轨道的并，记为 φ_1，φ_2,..., φ_s，其长度相同，均为 c'；而 B^2 是若干轨道的并，记为 ψ_1,ψ_2, ..., ψ_t，它们属于 L_2，长度相同，均为 d'。设 $(\alpha,\beta)\in B$，且 $\alpha\in\varphi_i$, $\beta\in\psi_j$。那么对于任意 $\alpha'\in\varphi_i$, $\beta'\in\psi_j$，点 (α',β') 都在 B 中，我们称集合 $\varphi_i\times\psi_j$ 为包含 (α,β) 的 (φ,ψ)-集。根据上述假设，我们知道每个 (φ,ψ)-集包含 $c'd'$ 个点，而 B 由有限个 (φ,ψ)-集组成。因此，对于某个正整数 m'，有 $k=c'd'm'$。

我们还定义了两个整数 c 和 d，并在第 2.1 小节证明了 $d=c+1$：设 $p=(\alpha,\beta)\in B$，则在 B 中，以 α 为第一分量的点有 c 个，以 β 为第二分量的点有 d 个。由 G 的旗传递性可知，c 和 d 不依赖于 $p=(\alpha,\beta)$ 的选择。由于在 $\varphi_i\times\psi_j$ 中有 c' 个点具有相同的第二分量，且有 d' 个点具有相同的第一分量，因此 $c'\leq c$，$d'\leq d=c+1$，从而 $m\leq m'$。由于 G_B 在构成 B 的 (φ,ψ)-集合上传递，且核

是 $L_1 \times L_2$，那么 $m' \mid |G_B/L_1 \times L_2|$。结合 $m \leq m'$ 和 $|G_B/L_1 \times L_2| \mid |A/T|$ 可得

$$m \leq |A/T|. \tag{2}$$

2.3 最后的矛盾

由于在我们的情形中，可作为度为 ω 的 2-传递群 T_0 的极小正规子群的非阿贝尔单群 T，除度为 28 的情形 $T = PSL(2, 8)$（一传递）([1, 注记 2]) 外，在所有情况下也都在 Δ 上 2-传递，因此我们在下文列出 T、ω 和 $|Out（T）|$（参见 [1, 5, 7]）。注意，在列表中，ω 为奇数，$q = p^e$，其中 p 为素数，且 $A/T = Out（T）$，但情形 (2) 除外。

(1) $T = A_\omega$、$\omega \geq 5$、$|Out（T）| = 2$；(2) $T = PSL（d、q）$，$d \geq 2$、q 为素数幂且 $\omega = \frac{q^d-1}{q-1}$，其中（$d$、$q$）$\neq$(2, 2)、(2, 3)

，

$|Out\, T| = 2(d, q-1)e$ 当 $d \geq 3$ 时，或当 $d = 2$ 时为 $(d, q-1)e$；(3) $T = PSU(3, q)$，$q \geq 3$ 是素数幂，且 $\omega = q^3 + 1$, $|Out\, T| = 2(3, q+1)e$；(4) $T = Sz(q)$，$\omega = q^2 + 1$, $|Out(T)| = e$；(5) $T = PSL(2, 11)$，$\omega = 11$, $|Out(T)| = 2$；(6) $T = A_7$, $\omega = 15$, $|Out(T)| = 2$；(7) $T = M_\omega$, $\omega = 11, 23$, $|Out(T)| = 1$。

下文将分别分析这些可能情形。

情形 (1)：此处 $A/T = Out(T)$。根据 $m \leq |A/T|$, $m = 1$ 或 2。于是，由引理 2.7,$2m^2 > \omega$ 和 $\omega \geq 5$，可得 $\omega = 5$ 或 7，且 $m = 2$。现在，引理 2.8, $2(c+1) < \omega \leq 2(c+2)$ 蕴含 $(\omega, c) = (5, 1)$ 或 $(7, 2)$。由引理 2.5, $c \neq 2$。若 $(\omega, c) = (5, 1)$，则 $d = 2$，而引理 2.3 蕴含 $\lambda^* = 2c - 1 = 1$。因此 $\lambda = (r, \lambda)$。但是，条件 $\lambda \geq (r, \lambda)^2$给出 $\lambda = (r, \lambda) = 1$。根据 [9, 定理]，这可以排除。

情形（2）：设 $T = PSL(d, q)$ 满足 $\omega = \frac{q^d-1}{q-1}$，其中 $(d, q) \neq (2, 2)、(2, 3)$，且 $|Out(T)| = 2(d, q-1)e$（若 $d \geq 3$），或 $(d, q-1)e$（若 $d = 2$）。

注意，在此情形下，T 在 Δ 上是 2-传递的，因此 T 是域 $\mathbb{F}_q$ 上 d 维向量空间 V 的射影特殊线性群 $PSL(d, q)$，而 Δ 是 V 的所有一维子空间组成的集合。设 $\sigma \in Aut(T)$，则当且仅当 σ将 V 的任意一维子空间变为一维子空间时，$\sigma \in N_{S_\Delta}(T)$。然而，由于 T 的图自同构 γ 将任意一维子空间的稳定子变为一个（$d-1$）维子空间的稳定子，因此若 $d \geq 3$，则 $\gamma \notin A = N_{S_\Delta}(T)$。因此在此情形下，$|A/T| = (d, q-1)e$。

我们首先证明 $d \leq 4$。反之，若 $d \geq 5$，则 $\omega = \frac{q^d-1}{q-1} > q^{d-1} \geq q^4$。此外，由于事实 $m \leq |A/T|$，我们有 $m \leq (d, q-1)e \leq (q-1)e < eq$。于是 $2m^2 < 2e^2q^2$。显然

由归纳法可知，对于任意正整数 e， $2e^2 < 2^{2e}$，因此 $2e^2 < 2^{2e} \le p^{2e} = q^2$。所以，$2m^2 < 2e^2q^2 < q^4 < \omega$，这与引理 2.7 矛盾。

子情形（2.1）： $d = 4$。

这里， $\omega = q^3+q^2+q+1$。由于 ω 是奇数，因此 $q = 2^e$，所以 $m \le |A/T| = (4, q-1)$ $e = e$。于是 $2m^2 \le 2e^2 < q^2 < \omega$，这与引理 2.7 矛盾。

子情形（2.2）： $d = 3$。

这里， $\omega = q^2+q+1 > q^2$，且 $|A/T| = (3, q-1)e \le 3e$。由不等式 (2) 和引理 2.7 可得 $p^{2e} < 2m^2 \le 18e^2$。

根据引理 1.5(i)-(iii)，除 $(p, e) \in \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ 这些情形外，我们有 $2m^2 \le 18e^2 < p^{2e} = q^2 < \omega$，这与引理 2.7 矛盾。

接下来，我们处理剩下的五对点对（p， e）。对于这些点对（p， e），我们在表 1 中列出 T、 $|A/T|$、 ω 和 m。请注意，第 5 列给出了 m 的取值，其依据是

表 1： $d = 3$

Line	T	$\lvert A/T\rvert$	ω	m
1	$PSL(3, 2)$	1	7	不存在
2	$PSL(3, 4)$	6	21	$4, 5, 6$
3	$PSL(3, 8)$	3	73	不存在
4	$PSL(3, 16)$	12	273	12
5	$PSL(3, 3)$	1	13	不存在

以下方法。由于 $2m^2 > \omega$，因此 $m > \sqrt{\frac{\omega}{2}}$。另一方面，我们有 $m \le |A/T|$，所以 $[\sqrt{\frac{\omega}{2}}]+1 \le m \le |A/T|$。然后利用第3列和第4列的信息，我们得到 m 的可能取值。注意，Lines 1、3 和 5 不可能出现，因为不存在满足上述不等式的正整数 ms.

Line 2: 此处 $\omega = 21$, $m = 4$ 为 5 或 6。若 $m = 4$ 为 5，则方程（1）变为 $2c^2 - 9c + 5 = 0$ 或 $5c^2 - 17c + 10 = 0$。但这两个方程都没有正整数解，矛盾。若 $m = 6$，则方程（1）变为 $3c^2 - 8c + 5 = 0$，因此 $c = 1$。现在，引理2.3和2.4推出 $\lambda^* = 2c - 1 = 1$。所以 $\lambda = (r, \lambda)$。条件 $\lambda \ge (r, \lambda)^2$ 意味着 $(r, \lambda) = \lambda = 1$。因此，根据 [9, 定理], ，这种情况不可能发生。（事实上，利用引理2.6(ii)也可以排除 $(c, m) = (1, 6)$ 这种情况。）

Line 4: 这里有 $\omega = 273$。由方程（1），可得 $12c(c+1) = 137(2c-1) + 1$，即 $6c^2 - 131c + 68 = 0$。该方程没有正整数解，矛盾。因此，$d \ne 3$。

子情形（2.3）： $d = 2$。

这里有 $\omega = q+1 > q$，且由于 ω 是奇数， $q = 2^e$。于是可得 $m \le |A/T| = e$ 和 $2m^2 < 2e^2$。根据引理1.5（iv），若 $e \ge 7$，则 $2e^2 < 2^e$；结合 $2m^2 < 2e^2$，可得 $2m^2 < q < \omega$，矛盾。因此， $e = 2$、3、4、5 或 6。

同样，我们有表2。

现在，对于表2中的每一行，我们求解关于变量 c 的方程（1），并得到

表2： $d = 2$

LINE	T	$\lvert A/T\rvert$	ω	m
1	$PSL(2, 4)$	2	5	2
2	$PSL(2, 8)$	3	9	3
3	$PSL(2, 16)$	4	17	3, 4
4	$PSL(2, 32)$	5	33	5
5	$PSL(2, 64)$	6	65	6

所需的矛盾。

LINE 1: 这里 $2c(c + 1) = 3(2c - 1) + 1$，因此 $c^2 - 2c + 1 = 0$。于是 $c = 1$，并且 $\lambda^* = 2c - 1 = 1$。由此 $\lambda = (r, \lambda)$。条件 $\lambda \geq (r, \lambda)^2$ 意味着 $(r, \lambda) = \lambda = 1$。根据 [9, 定理]，可排除这种情况。

LINE 2: 这里 $3c(c + 1) = 5(2c - 1) + 1$，因此 $3c^2 - 7c + 4 = 0$。于是 $c = 1$。如上所述，我们有 $(r, \lambda) = \lambda = 1$。根据 [9, 定理]，可排除这种情况。

LINES 3-5: 这里，对 m 的每个取值，我们都会得到一个二次方程。但容易看出，每个方程都没有正整数解，这就产生了矛盾。因此， $d \neq 2$。

情形（3）：这里 $A/T = Out\, T$，因此 $|A/T| = |Out\, T| = 2(3, q + 1)e \leq 6e$。由 $m \leq |A/T|$ 可得 $m \leq 6e$，且 $2m^2 < 72e^2$。另一方面，由不等式 $2m^2 > \omega$可得 $2(6e)^2 > \omega > q^3$。由于 ω 是奇数，令 $q = 2^e \geq 3$。于是 $9e^2 > 2^{3(e-1)}$，从而得到$e = 2$ 或 3。

若 $e = 2$，则 $\omega = 65$。由引理 2.7，可得 $2m^2 > 65$。因此 $m \geq 6$，这与事实 $m \leq 2(3, q + 1)e = 4$矛盾。

若 $e = 3$，则 $\omega = 513$，并且由 $m \leq |A/T|$ 可得 $m \leq 2(3, q+1)e = 18$。另一方面，由引理 2.7，可得 $2m^2 > 513$，因此 $m \geq 17$。于是 $m = 17$ 或 18。然而，方程（1）相应地变为 $17c^2 - 497c + 256 = 0$或 $9c^2 - 248c + 128 = 0$，它没有正整数解，这就产生了矛盾。

情形 (4)：此处 $A/T = Out\, T$，因此由 $m \leq |A/T|$，可得 $m \leq e$。由$2m^2 > \omega$ 可知 $2e^2 > 2^{2e}$，而此不等式对任何 $e \geq 1$ 均不成立，矛盾。

情形 (5)-(6)：此处 $\omega = 11$ 或 15，且 $|A/T| = 2$。由 $m \leq |A/T|$，可得 $m = 1$ 或 2，这与引理 2.7 矛盾。

情形 (7)： 此处 $\omega = 11$ 或 23，且 $|A/T| = 1$。于是 $m = 1$，这与引理 2.7 矛盾 .

定理 1.2 的证明至此完成。 □

参考文献

[1] P. J. Cameron, 《有限置换群与有限单群》, 《伦敦数学会会报》13（1981）, 1-22。

[2] D. H. Davies, 《设计的自同构》, 博士论文, 东英吉利大学, 1987。[3] P. Dembowski, 《有限几何》, 施普林格出版社, 纽约, 1968。[4] Y. J. Ionin, T. van Trung, 《对称设计》, 载于《组合设计手册》, C. J. Colbourn、J. H. Dinitz（编）, Chapman Hall/CRC, 博卡拉顿, 2007, 第110-124页。[5] W. M. Kantor, 《齐次设计与几何格》, 《组合理论杂志 A 辑》38（1985）, 66-74。[6] H. X. Liang, S. L. Zhou, 《非对称 2-($v, k,$ 2) 设计的旗传递点本原自同构群》, 《组合设计杂志》24(8)（2016）, 421-435。[7] M. Liebeck、C. Praeger 和 J. Saxl, 《有限单群及其自同构群的极大分解》, 《美国数学会回忆录》86(432)（1990）, 1-151。[8] S. L. Zhou, X. Q. Zhan, 《具有 $\lambda \geq (r, \lambda)^2$ 的 2-设计的旗传递自同构群及其在对称设计中的应用》, 《当代数学艺术》14(1)（2018）, 187-195。[9] P.-H. Zieschang, 《具有 $(r, \lambda)=1$ 的 2-设计的旗传递自同构群》, 《代数学杂志》118（1988）, 369-375。