arXiv:2304.08857v1 [math.ST] 18 Apr 2023

隐遍历 Ornstein–Uhlenbeck 过程与自适应滤波器

Yury A. Kutoyants

法国勒芒大学、俄罗斯莫斯科俄罗斯国立研究大学“莫斯科动力学院”、俄罗斯托木斯克国立大学

摘要

本文研究依赖若干未知参数的部分观测线性随机微分方程模型，并提出一种未观测分量的近似方法。该近似分三步实现。首先，构造未知参数的矩估计法估计量；随后，利用该估计量定义单步最大似然估计过程；最后，将所得估计量代入 Kalman-Bucy（卡尔曼-布西）滤波器方程。所得到的卡尔曼-布西方程的解给出了该近似（自适应卡尔曼–布西滤波器）。本文描述了上述所有估计量，以及未知参数的最大似然估计量和贝叶斯估计量的渐近性质，并证明了所提出的自适应滤波器具有渐近有效性。

MSC 2000 分类：62M02、62G10、62G20。

关键词：部分观测线性系统、隐马尔可夫过程、卡尔曼–布西滤波器、参数估计、矩估计量、最大似然估计量和贝叶斯估计量、单步最大似然估计量过程、在线近似、自适应滤波器。

1 引言

给定一个线性部分观测系统

$$\mathrm{d}X_t = f(\vartheta, t)\, Y_t\, \mathrm{d}t + \sigma(t)\, \mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Y_t = -a(\vartheta, t)\, Y_t\, \mathrm{d}t + b(\vartheta, t)\, \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

其中，维纳过程 W_t、$t \geq 0$ 和 V_t、$t \geq 0$ 相互独立。观测值为 $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$，Ornstein–Uhlenbeck 过程 $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$ 是隐的。初始值 $X_0 \sim \mathcal{N}(0, d_x^2)$ $Y_0 \sim \mathcal{N}\left(0, d_y^2\right)$ 不依赖于维纳过程。该

假设函数 $f(\vartheta,t)$ $\sigma(t)$ $a(\vartheta,t)$ $b(\vartheta,t)$ 已知，且关于未知参数 $\vartheta\in\Theta\subset\mathcal{R}^d, d\geq 1$ 光滑。

自 1961 [11] 以来已知，过程 $m(\vartheta,t)=\mathrm{E}_\vartheta(Y_t|X_s, 0\leq s\leq t)0\leq t\leq T$（ ϑ已知）满足卡尔曼-布西滤波方程（例如参见 [23]）

$$\mathrm{d}m(\vartheta,t)=-\left[a(\vartheta,t)+\frac{\gamma(\vartheta,t)f(\vartheta,t)^2}{\sigma(t)^2}\right]m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t+\frac{\gamma(\vartheta,t)f(\vartheta,t)}{\sigma(t)^2}\mathrm{d}X_t, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\gamma(\vartheta,t)}{\partial t}=-2a(\vartheta,t)\gamma(\vartheta,t)-\frac{\gamma(\vartheta,t)^2f(\vartheta,t)^2}{\sigma(t)^2}+b(\vartheta,t)^2, \tag{4}$$

其初始值为 $m_0=\mathrm{E}_\vartheta(Y_0|X_0)$ 和 $\gamma_0=\mathrm{E}_\vartheta(Y_0-m(\vartheta,0))^2$。

我们关注不同情形下对条件期望（随机函数） $m(\vartheta,t)$ $0<t\leq T$的在线估计问题，其中 ϑ 未知。例如， $f(\vartheta,t)=\vartheta$ 以及 $a(\vartheta,t)=a$、 $b(\vartheta,t)=b$，其中 a 和 b 已知。在这类情形下，通常先估计未知参数，再将这些估计量代入方程（3）–（4）。鉴于此类模型在众多应用问题中的重要性，已有大量文献研究自适应滤波，但主要针对模型（1）–（2）的离散时间版本，例如参见 [3],[5], [8],[24],[25],[26] 及其中的参考文献。自适应滤波的模型（线性和非线性）与方法种类繁多。其中最值得关注的当然是在线自适应滤波器算法。所研究的算法主要借助数值模拟进行验证，模拟结果显示这些自适应滤波器表现合理。本文所述的连续时间部分观测系统，其观测也在连续时间内进行，研究相对较少。齐次模型下最大似然估计量的渐近性质（一致性、渐近正态性、矩收敛和渐近有效性）

$$\mathrm{d}X_t=f(\vartheta)\,Y_t\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W_t,\qquad X_0,\qquad 0\leq t\leq T, \tag{5}$$

$$\mathrm{d}Y_t=-a(\vartheta)\,Y_t\,\mathrm{d}t+b(\vartheta)\,\mathrm{d}V_t,\qquad Y_0,\qquad t\geq 0, \tag{6}$$

相关研究见 [14]（对 f（ϑ）$=f=\vartheta$ 的估计，即 a（ϑ）$=a$、b（ϑ）$=b$ 的估计，其中 a 和 b 已知， f 是未知参数）以及 [12]（对 $\vartheta=$（f， a）的估计）。另请参见 [2], ，该文证明了无限维线性系统情形下最大似然估计量的一致性。值得注意的是， [16] 也描述了模型 (5)-(6) 中所有一维参数（$\vartheta=f$、 $\vartheta=a$、 $\vartheta=b$）的最大似然估计量的性质。 [7] 提出了一种称为期望最大化（EM）的另一种方法。

还需注意，由于模型 (5)-(6) 取决于乘积 fb，因此无法相合地估计参数 $\vartheta=$（f， b）或 $\vartheta=$（f， a， b）。

本文考虑的模型是庞大一类隐马尔可夫过程中的一个特例。关于估计量渐近行为的一些一般结果可见于 [4]和 [6]。

我们的目标是在齐次部分观测系统（5）-（6）的情形下，获得过程 $m_t^\star$、$0 < t \leq T$的良好递归近似m（ϑ、t） $0 < t \leq T$，并讨论自适应滤波器渐近有效性的问题。

方程 (3)-(4) 变为

$$\mathrm{d}m\left(\vartheta,t\right)=-\left[a\left(\vartheta\right)+\frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)f\left(\vartheta\right)^2}{\sigma^2}\right]m\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)f\left(\vartheta\right)}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t,\qquad m\left(\vartheta,0\right)\tag{7}$$

$$\frac{\partial\gamma\left(\vartheta,t\right)}{\partial t}=-2a\left(\vartheta\right)\gamma\left(\vartheta,t\right)-\frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)^2f\left(\vartheta\right)^2}{\sigma^2}+b\left(\vartheta\right)^2,\qquad\gamma\left(\vartheta,0\right).\tag{8}$$

需要强调的是，该模型可以看作卡尔曼-布西滤波理论所研究模型中最简单的一个例子。过程 $X_t, t \geq 0$ 和 $Y_t, t \geq 0$ 通常是向量，而黎卡提方程 (4) 则是针对矩阵 [10], [23], [8],[26] 写出的。我们认为，本文提出的算法可以推广到更一般的模型，唯一的障碍可能是构造初步估计量。如果能找到初步相合估计量，那么单步最大似然估计过程以及自适应滤波器的方程就可以相对容易地写出。

我们需要一个关于 ϑ 的优良估计量，它可以针对每个 t 轻松计算，并可用于构造 $m_t^\star$, $0 < t \leq T$ ϑ_t $0 < t \leq T$。请注意，这不可能是由关系式 ϑ_t, $0 < t \leq T$ 定义的最大似然估计量或贝叶斯估计量（贝叶斯估计量），

$$L(\hat{\vartheta}_t,X^t)=\sup_{\vartheta\in\Theta}L\left(\vartheta,X^t\right),\qquad\tilde{\vartheta}_t=\frac{\int_\Theta\vartheta p\left(\vartheta\right)L\left(\vartheta,X^t\right)\mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p\left(\vartheta\right)L\left(\vartheta,X^t\right)\mathrm{d}\vartheta},\tag{9}$$

其中，似然比函数 $L(\vartheta, X^t)$ $\vartheta \in \Theta$ 为

$$L\left(\vartheta,X^t\right)=\exp\left\{\int_0^t\frac{f\left(\vartheta\right)m\left(\vartheta,s\right)}{\sigma^2}\mathrm{d}X_s-\int_0^t\frac{f\left(\vartheta\right)^2m\left(\vartheta,s\right)^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}s\right\}\tag{10}$$

因为对所有（或过多） ϑ 以及所有 $t \in (0, T]$ 求解方程 (3)-(4) 在数值上难以实现。这里，$p(\vartheta)$ $\vartheta \in \Theta$ 是随机变量 ϑ 的先验密度（采用二次损失函数的贝叶斯方法）。

Th本文中对 $m(\vartheta, t)$ $t \in (0, T]$ 的估计按照以下方案实现 :

¯*1.* 在相对较短的观测值时间区间 ϑ_τ 上计算初步估计量 $[0, \tau]$。¯*2.* 使用 ϑ_τ 构造单步最大似然估计过程 $\vartheta_t^\star$， $\tau < t \leq T$。*3.* 作为 $m(\vartheta,\ t)$ 的近似，我们提出 $m_t^\star$，它是借助卡尔曼-布西方程得到的，其中 ϑ 由 $\vartheta_t^\star$， $\tau < t \leq T$ 替代。*4.* 估计误差 $m_t^\star - m\left(\vartheta,\ t\right)$ $\tau < t \leq T$。

这意味着，我们在时间区间 $[0,\tau]$上没有在线近似，但$\tau/T \to 0$。请注意，此处使用的单步最大似然估计过程是众所周知的 Le Cam 单步最大似然估计量，其中我们将积分上限（时间 t）视为变量。

我们将这一构造（步骤1-2或步骤1-4）应用于6种不同的观测模型。对于离散时间的马尔可夫过程 [21] （步骤1-2），对于两个方程中均含小噪声的观测模型(1)-(2) [15], [22] （步骤1-4），对于仅方程(1)含小噪声的模型(1)-(2) [18], [19] （步骤1-4），对于隐马尔可夫电报过程模型 [13] （步骤1-2），对于离散时间的卡尔曼滤波模型 [20] （步骤1-4），以及对于一维情形下的这一观测模型[17] （步骤1-2）。本文研究二维情形(1-2)下的自适应滤波器，并考察误差(3-4)。

2 辅助结果

黎卡提方程的解

记

$$r(\vartheta)=\left(a(\vartheta)^2+\frac{f(\vartheta)^2 b(\vartheta)^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}, \qquad \gamma_*(\vartheta)=\frac{\sigma^2[r(\vartheta)-a(\vartheta)]}{f(\vartheta)^2}.$$

回顾一下，在参数为常数的情形(5)-(6)中，黎卡提方程(8)有一个显式解 [1]

$$\gamma(\vartheta,t)=e^{-2r(\vartheta)t}\left[\frac{1}{\gamma(\vartheta,0)-\gamma_*(\vartheta)}+\frac{f(\vartheta)^2}{2r(\vartheta)\sigma^2}\left(1-e^{-2r(\vartheta)t}\right)\right]^{-1}+\gamma_*(\vartheta), \qquad (11)$$

其中我们假设 $\gamma(\vartheta,0)\neq\gamma_*(\vartheta)$。根据 (11)，存在一个常数 $C>0$，使得

$$|\gamma(\vartheta,t)-\gamma_*(\vartheta)|\le C\,e^{-2r(\vartheta)t}\longrightarrow 0, \qquad \text{as} \quad t\longrightarrow\infty.$$

这种指数收敛使我们在某些问题中可以不失一般性地考虑平稳状态，并假设 $\gamma(\vartheta,0)=\gamma_*(\vartheta)$。这实质上简化了计算。

如果 $m_0\sim\mathcal{N}(0,\gamma_*(\vartheta))$，即初始值 $\gamma(\vartheta,0)=\gamma_*(\vartheta)$，那么我们有以下等式

$$\frac{\partial\gamma(\vartheta,t)}{\partial t}\equiv 0, \qquad \gamma(\vartheta,t)\equiv\gamma_*(\vartheta) \qquad \text{for} \quad \text{all} \quad t>0.$$

值 $\gamma_*(\theta)$ 是方程的一个正解 z

$$-2a(\vartheta)z-\frac{z^2 f(\vartheta)^2}{\sigma^2}+b(\vartheta)^2=0,$$

该方程由黎卡提方程 (8) 得到:

$$-2a\left(\vartheta\right)\gamma_{*}\left(\vartheta\right)-\frac{f\left(\vartheta\right)^{2}\gamma_{*}\left(\vartheta\right)^{2}}{\sigma^{2}}+b\left(\vartheta\right)^{2}=0.$$

再引入一个记号 $\Gamma(\vartheta) = \gamma_*(\vartheta)\ \sigma^{-2}f(\vartheta)^2 = r(\vartheta) - a(\vartheta)$。

在这种情况下，系统 (7)-(8) 可化简为一个方程

$$\mathrm{d}m\left(\vartheta,t\right)=-\left[a\left(\vartheta\right)+\gamma\left(\vartheta\right)\right]m\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\gamma\left(\vartheta\right)f\left(\vartheta\right)^{-1}\mathrm{d}X_{t},\quad m\left(\vartheta,0\right)=m_{0}.$$

平稳表示

为简化计算，我们将使用这些表示式（此处 ϑ_0 是实际值 e)

$$m\left(\vartheta_{0},t\right)=m_{0}e^{-a_{0}\left(\vartheta_{0}\right)t}+\frac{\gamma_{*}\left(\vartheta_{0}\right)f\left(\vartheta_{0}\right)}{\sigma}\int_{0}^{t}e^{-a_{0}\left(\vartheta_{0}\right)\left(t-s\right)}\mathrm{d}\bar{W}_{s},$$

$$m_{0}=\frac{\gamma_{*}\left(\vartheta_{0}\right)f\left(\vartheta_{0}\right)}{\sigma}\int_{-\infty}^{0}e^{a_{0}\left(\vartheta_{0}\right)s}\mathrm{d}\bar{W}_{s},$$

¯其中 $W_s, s \in \mathcal{R}$ 是双边维纳过程。这意味着我们加入了一个独立的˜ ¯ ˜
维纳过程 $W_s, s \geq 0$ 并令 $W_t = W_{-t}, t \leq 0$. 请回忆，创新随机过程 $\left\{\bar{W}_t,\ t \geq 0\right\}$ 由方程定义

$$\sigma\,\bar{W}_{t}=X_{t}-X_{0}-\int_{0}^{t}M\left(\vartheta_{0},s\right)\mathrm{d}s$$

是一个标准维纳过程 [23]。

若 $\vartheta \neq \vartheta_0$，则过程 $m(\vartheta,t)\ \ t \geq 0$ 具有如下随机微分

$$\mathrm{d}m\left(\vartheta,t\right)=-r\left(\vartheta\right)m\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\Gamma\left(\vartheta\right)f\left(\vartheta\right)^{-1}f\left(\vartheta_{0}\right)m\left(\vartheta_{0},t\right)\mathrm{d}t+\Gamma\left(\vartheta\right)f^{-1}\sigma\mathrm{d}\bar{W}_{t},\ m\left(\vartheta,0\right).$$

处理满足以下方程的平稳随机过程 $M(\vartheta,t) = f(\vartheta)m(\vartheta,t)$ 会更加方便

$$\mathrm{d}M\left(\vartheta,t\right)=-r\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\Gamma\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\Gamma\left(\vartheta\right)\sigma\mathrm{d}\bar{W}_{t},\quad M\left(\vartheta,0\right).$$

为将其表示写成积分形式，我们分别考虑两种情况。首先假设 $r(\vartheta) \neq a(\vartheta_0)$，则

$$\begin{aligned}M\left(\vartheta,t\right)&=\Gamma\left(\vartheta\right)\int_{-\infty}^{t}e^{-r\left(\vartheta\right)\left(t-s\right)}M\left(\vartheta_{0},s\right)\mathrm{d}s+\Gamma\left(\vartheta\right)\sigma\int_{-\infty}^{t}e^{-r\left(\vartheta\right)\left(t-s\right)}\mathrm{d}\bar{W}_{s}\\&=\Gamma\left(\vartheta\right)\Gamma\left(\vartheta_{0}\right)\sigma\int_{-\infty}^{t}e^{-r\left(\vartheta\right)\left(t-s\right)}\int_{-\infty}^{s}e^{-a\left(\vartheta_{0}\right)\left(s-q\right)}\mathrm{d}\bar{W}_{q}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \Gamma(\vartheta)\,\sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-r(\vartheta)(t-s)} \mathrm{d}\bar{W}_s \\
&= \frac{\Gamma(\vartheta)\,\Gamma(\vartheta_0)\,\sigma}{r(\vartheta) - a(\vartheta_0)} \int_{-\infty}^{t} e^{-a(\vartheta_0)(t-s)} \mathrm{d}\bar{W}_s \\
&\qquad + \frac{\Gamma(\vartheta)\,\sigma\,(r(\vartheta) - r(\vartheta_0))}{r(\vartheta) - a(\vartheta_0)} \int_{-\infty}^{t} e^{-r(\vartheta)(t-s)} \mathrm{d}\bar{W}_s. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

这里我们使用了该关系（富比尼定理）

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} e^{-r(\vartheta)(t-s)} \int_{-\infty}^{s} e^{-a(\vartheta_0)(s-q)} \mathrm{d}\bar{W}_q \,\mathrm{d}s &= e^{-r(\vartheta)t} \int_{-\infty}^{t} e^{a(\vartheta_0)q} \int_{q}^{t} e^{(r(\vartheta)-a(\vartheta_0))s} \mathrm{d}s \,\mathrm{d}\bar{W}_q \\
&= \frac{1}{r(\vartheta) - a(\vartheta_0)} \int_{-\infty}^{t} \left[e^{-a(\vartheta_0)(t-q)} - e^{-r(\vartheta)(t-q)} \right] \mathrm{d}\bar{W}_q.
\end{aligned}
$$

该表示对应于初始值

$$
M(\vartheta, 0) = \frac{\Gamma(\vartheta)\,\Gamma(\vartheta_0)\,\sigma}{r(\vartheta) - a(\vartheta_0)} \int_{-\infty}^{0} e^{a(\vartheta_0)s} \mathrm{d}\bar{W}_s + \frac{\Gamma(\vartheta)\,\sigma\,(r(\vartheta) - r(\vartheta_0))}{r(\vartheta) - a(\vartheta_0)} \int_{-\infty}^{0} e^{r(\vartheta)s} \mathrm{d}\bar{W}_s.
$$

如果 $r(\vartheta) = a(\vartheta_0)$，那么

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} e^{-a(\vartheta_0)(t-s)} \int_{-\infty}^{s} e^{-a(\vartheta_0)(s-q)} \mathrm{d}\bar{W}_q \,\mathrm{d}s &= e^{-a(\vartheta_0)t} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} e^{a(\vartheta_0)q} \mathrm{d}\bar{W}_q \,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-a(\vartheta_0)(t-s)} (t-s) \,\mathrm{d}\bar{W}_s
\end{aligned}
$$

and

$$
M(\vartheta, t) = \Gamma(\vartheta)\,\sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-a(\vartheta_0)(t-s)} \left[\gamma(\vartheta_0)(t-s) + 1 \right] \mathrm{d}\bar{W}_s.
$$

这些表达式将帮助我们计算涉及 $M(\vartheta, t)$ 和 $M(\vartheta, t)$ 的一些矩。点表示对 ϑ 求导。

最大似然估计量和贝叶斯估计量

给定一个二维扩散过程 $\{X_t, Y_t,\ t \geq 0\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= -a(\vartheta)\,Y_t \,\mathrm{d}t + b(\vartheta)\ \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \\
\mathrm{d}X_t &= \ f(\vartheta)\,Y_t \,\mathrm{d}t + \ \sigma \,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0,
\end{aligned}
$$

其中，$\{V_t, W_t,\ t \geq 0\}$ 是两个相互独立的维纳过程，函数 $a(\cdot)$、$b(\cdot)$、$f(\cdot)$ 以及常数 $\sigma \neq 0$ 均为已知，ϑ 是一个有限维（未知）参数。随机变量 Y_0 是 $\mathfrak{F}_0$- 可测的高斯分布随机变量。

按通常的假设，我们只能观测到一个分量 $X^T=\{X_t,\ 0\le t\le T\}$，因此需要估计参数 ϑ。我们的目标是研究大样本 $T\to\infty$ 渐近情形下该参数的估计量。

该观测模型使我们能够研究以下五种不同情形中的估计量:

F. $f(\vartheta)=\vartheta,\quad a(\vartheta)=a,\quad b(\vartheta)=b,$

A. $f(\vartheta)=f,\quad a(\vartheta)=\vartheta,\quad b(\vartheta)=b,$

B. $f(\vartheta)=f,\quad a(\vartheta)=a,\quad b(\vartheta)=\vartheta,$

AB. $f(\vartheta)=f,\quad a(\vartheta)=\theta_1,\quad b(\vartheta)=\theta_2$,即, $\vartheta=(\theta_1,\theta_2)^\top$。

AF. $f(\vartheta)=\theta_2,\quad a(\vartheta)=\theta_1,\quad b(\vartheta)=b.$

ˆ˜最大似然估计量 ϑ_T 和贝叶斯估计量 ϑ_T 由以下关系定义

$$L(\hat{\vartheta}_T,X^T)=\sup_{\vartheta\in\Theta}L\left(\vartheta,X^T\right),\qquad\qquad \tilde{\vartheta}_T=\frac{\int_\Theta\vartheta p(\vartheta)L\left(\vartheta,X^T\right)\mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p(\vartheta)L\left(\vartheta,X^T\right)\mathrm{d}\vartheta}. \tag{13}$$

其中

$$L\left(\vartheta,X^T\right)=\exp\left\{\int_0^T\frac{M(\vartheta,s)}{\sigma^2}\mathrm{d}X_s-\int_0^t\frac{M(\vartheta,s)^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}s\right\}. \tag{14}$$

这里，$M(\vartheta,t)=f(\vartheta)\ m(\vartheta,t)$ 和 $p(\cdot)$ 是定义在 Θ 上的连续正密度函数。

为了构造参数 ϑ 的最大似然估计量，我们必须计算由方程定义的随机函数 $\{M(\vartheta,t)\ 0\le t\le T\}$，$\vartheta\in\Theta$。

$$\mathrm{d}M(\vartheta,t)=-r(\vartheta)M(\vartheta,t)\ \mathrm{d}t+\Gamma(\vartheta)\mathrm{d}X_t,\qquad\qquad M(\vartheta,0).$$

分别考虑 F、A、B 和 AB 这些情形会比较方便。因此，我们先研究一维参数的估计，然后考虑 AB、AF 这些情形（二维参数）。

假设参数 ϑ 是一维的，且 $\Theta=(\alpha,\beta)$。引入费 Fisher 信息

$$\mathrm{I}(\vartheta)=\frac{\dot{a}(\vartheta)^2}{2a(\vartheta)}-\frac{2\dot{a}(\vartheta)\ \dot{r}(\vartheta)}{r(\vartheta)+a(\vartheta)}+\frac{\dot{r}(\vartheta)^2}{2r(\vartheta)},\qquad r(\vartheta)=\left(a(\vartheta)^2+\sigma^{-2}f(\vartheta)^2b(\vartheta)^2\right)^{1/2}.$$

在下述定理给出的正则条件下，所有估计量的均方风险都有如下下界（海耶克-勒卡姆界）：[9]

$$\lim_{\nu\to0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu}T\mathbf{E}_\vartheta\left|\bar{\vartheta}_T-\vartheta\right|^2\ge\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

¯如果对所有 $\vartheta_0\in\Theta$，我们称估计量 ϑ_T 渐近有效

$$\lim_{\nu\to0}\lim_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu}T\mathbf{E}_\vartheta\left|\bar{\vartheta}_T-\vartheta\right|^2=\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

定理 1. 假设以下条件成立。

1. 函数 $a(\vartheta)$、$b(\vartheta)$、$f(\vartheta)$ 和 $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ 在 Θ 上二阶连续可微。

2. 这些函数满足以下条件：$b(\vartheta) \neq 0$、$f(\vartheta) \neq 0$ 以及 $a(\vartheta) > 0$ 对所有 $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ 均成立。

3. 对所有 $\nu > 0$，我们有

$$\inf_{\vartheta_0 \in \Theta} \inf_{|\vartheta - \vartheta_0| > \nu} \Big(|a(\vartheta) - a(\vartheta_0)| + |r(\vartheta) - r(\vartheta_0)| \Big) > 0.$$

4. 以下条件成立

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \Big(|\dot{a}(\vartheta)| + |\dot{r}(\vartheta)| \Big) > 0.$$

$\hat{}$ $\tilde{}$那么，最大似然估计量 ϑ_T 和贝叶斯估计量 ϑ_T 一致相合，并且在紧集上一致 $\mathbb{K} \subset \Theta$渐近正态

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \sqrt{T}\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta,$$

多项式矩收敛：对于任意 $p \geq 2$

$$\lim_{T\to\infty} T^{p/2} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p, \qquad \lim_{T\to\infty} T^{p/2} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\zeta|^p,$$

且这两个估计量都是渐近有效的。

证明见 [16] 中的定理 3.1。

情形 F $i.e.,\ \vartheta = f$。

考虑特殊情形 $\vartheta = f$。则 $r(\vartheta) = (a^2 + b^2\vartheta^2\sigma^{-2})^{1/2}$，费 Fisher 信息为

$$\mathrm{I}(\vartheta) = \frac{b^4\vartheta^2}{2\sigma^4 r(\vartheta)^3}.$$

因此，由定理 1 可知，最大似然估计量和贝叶斯估计量是相合的，且渐近正态 l

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{2\sigma^4 r(\vartheta_0)^3}{b^4\vartheta_0^2}\right), \qquad \sqrt{T}\left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{2\sigma^4 r(\vartheta_0)^3}{b^4\vartheta_0^2}\right)$$

且是渐近有效的。

情形 A $i.e.,\ \vartheta = a$。

我们有 $r(\vartheta) = (\vartheta^2 + b^2 f^2 \sigma^{-2})^{1/2}$，且费 Fisher 信息为

$$\mathrm{I}(\vartheta) = \frac{\left[r(\vartheta)^2 - \vartheta^2\right]^2 + r(\vartheta)\,\vartheta\left[r(\vartheta) - \vartheta\right]^2}{2\vartheta r(\vartheta)^3\left[r(\vartheta) + \vartheta\right]} = \frac{\Gamma(\vartheta)^2\left[(r(\vartheta) + \vartheta)^2 + r(\vartheta)\,\vartheta\right]}{2\vartheta r(\vartheta)^3\left[r(\vartheta) + \vartheta\right]}, \tag{15}$$

th这两个估计量渐近正态且渐近有效。Sa y,

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

情况 B $i.e.,\ \vartheta = b$。

费 Fisher 信息为

$$\mathrm{I}(\vartheta) = \frac{\vartheta^2 f^4}{2r(\vartheta)^3 \sigma^4}$$

最大似然估计量和贝叶斯估计量具有相应的渐近性质。

3 矩估计量。

考虑部分观测系统

$$\mathrm{d}X_t = f\,Y_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{16}$$

$$\mathrm{d}Y_t = -a\,Y_t\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \ge 0, \tag{17}$$

过程 $X_t, t \ge 0$ 并非遍历，因此构造矩估计量时，我们不使用如下积分

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(X_t)\,\mathrm{d}t.$$

首先，我们假设 $\vartheta = (f, a, b) \in \Theta$。集合 Θ 是 $\mathcal{R}^3$ 的有界凸闭子集，且 a 的取值均为正并与零保持距离。为便于说明，我们假设 T 为整数。估计量的构造遵循了文献 [13]中首次采用的类似算法。

引入记号

$$R_{1,T} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[X_k - X_{k-1}\right]^2, \qquad \Phi_1(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2,$$

$$R_{2,T} = \frac{1}{T}\sum_{k=2}^{T}\left[X_k - X_{k-1}\right]\left[X_{k-1} - X_{k-2}\right], \qquad \Phi_2(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{2a^3}\left[1 - e^{-a}\right]^2,$$

$$K_{1,1}(\vartheta)=\frac{2f^4b^4}{a^6}\left[e^{-a}-1+a\right]^2+\frac{f^4b^4e^{4a}\left[1-e^{-a}\right]^3}{a^6\left[1+e^{-a}\right]}$$
$$+\frac{4f^2\sigma^2b^2}{a^3}\left[e^{-a}-1+a\right]+2\sigma^4,$$
$$R_T=(R_{1,T},R_{2,T})^\top,\qquad \Phi(\vartheta)=(\Phi_1(\vartheta),\Phi_2(\vartheta))^\top,\qquad \xi_*=(\xi_1,\xi_2)^\top,$$
$$\mathbf{K}(\vartheta)=\begin{pmatrix}K_{1,1}(\vartheta) & K_{1,2}(\vartheta)\\ K_{2,1}(\vartheta) & K_{2,2}(\vartheta)\end{pmatrix},\quad R_T=(R_{1,T},R_{2,T})^\top,\ \Phi(\vartheta)=(\Phi_1(\vartheta),\Phi_2(\vartheta))^\top.$$

此处的 $\xi_*\sim\mathcal{N}(0,\mathbf{K}(\vartheta_0))$ 以及矩阵 $\mathbf{K}(\vartheta)$ 其他项的计算，我们将在后文讨论。

在文献 [17] 中，针对一维参数 $\vartheta=f$、 $\vartheta=a$ 和 $\vartheta=b$，分别提出并研究了矩估计量（MME） f_T^*、 a_T^*和 b_T^*。这些矩估计量为

$$f_T^*=\left(\frac{a^3}{b^2\left[e^{-a}-1+a\right]T}\sum_{k=1}^{T}\left(\left[X_k-X_{k-1}\right]^2-\sigma^2\right)\right)^{1/2},$$
$$b_T^*=\left(\frac{a^3}{f^2\left[e^{-a}-1+a\right]T}\sum_{k=1}^{T}\left(\left[X_k-X_{k-1}\right]^2-\sigma^2\right)\right)^{1/2},$$
$$a_T^*=H\left(\frac{1}{f^2b^2T}\sum_{k=1}^{T}\left(\left[X_k-X_{k-1}\right]^2-\sigma^2\right)\right),$$

其中， H （y）是 $y=h$（x） $=x^{-3}$（$x-1+e^{-x}$）的反函数。下面我们证明，h（x） $x>0$ 是严格递减函数。

文献 [17] 已证明这些估计量是相合的，并且对任意 $p\geq 1$

$$\sup_{f\in\mathbb{K}}T^{p/2}\mathbf{E}_f\left|f_T^*-f\right|^p\leq C,\ \sup_{b\in\mathbb{K}}T^{p/2}\mathbf{E}_b\left|b_T^*-b\right|^p\leq C,\ \sup_{a\in\mathbb{K}}T^{p/2}\mathbf{E}_a\left|a_T^*-a\right|^p\leq C,\qquad(18)$$

F构造单步最大似然估计过程只需要估计量（18）。 .

下面的命题使我们能够证明这些估计量的渐近正态性，并进一步考察二维情形。

命题1. 统计量 R_T 具有以下性质：

1. 在 Θ 上一致地收敛到 $\Phi(\vartheta)$，即对于任意 $\nu>0$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathbf{P}_\vartheta\left(\left\|R_T-\Phi(\vartheta)\right\|\geq\nu\right)=0.$$

2. 是否在紧集上一致地 $\mathbb{K}\subset\Theta$ 渐近正态

$$\sqrt{T}\left(R_T-\Phi(\vartheta)\right)\Longrightarrow\xi_*,\qquad(19)$$

3. 矩收敛：对于任意 $p>0$ ，在 $\mathbb{K}$上一致地

$$\lim_{T\to\infty} T^{p/2}\mathbf{E}_\vartheta \left\|R_T-\Phi\left(\vartheta\right)\right\|^p=\mathbf{E}_\vartheta\left|\xi_*\right|^p,$$

并且存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} T^{p/2}\mathbf{E}_\vartheta \left\|R_T-\Phi\left(\vartheta\right)\right\|^p\le C. \tag{20}$$

证明。 利用等式 (16)，我们写出

$$\begin{aligned}R_{1,T}&=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[X_k-X_{k-1}\right]^2=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[\int_{k-1}^{k}\mathrm{d}X_s\right]^2\\&=\frac{f^2}{T}\sum_{k=1}^{T}\eta_k^2+\frac{2f\sigma}{T}\sum_{k=1}^{T}\eta_k\left[W_k-W_{k-1}\right]+\frac{\sigma^2}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[W_k-W_{k-1}\right]^2,\end{aligned}$$

其中

$$\eta_k=\int_{k-1}^{k}Y_t\,\mathrm{d}t.$$

我们有

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}R_{1,T}=\frac{f^2}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2+\sigma^2$$

因为 Y^T和 W^T相互独立。

对于过程 Y^T，我们有等式

$$Y_t=Y_0e^{-at}+b\int_0^t e^{-a(t-s)}\mathrm{d}V_s.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\vartheta Y_tY_s&=\mathbf{E}_{\vartheta_0}Y_0^2e^{-a(t+s)}+b^2e^{-a(t+s)}\int_0^{t\wedge s}e^{2ar}\mathrm{d}r\\&=\left[d^2-\frac{b^2}{2a}\right]e^{-a(t+s)}+\frac{b^2}{2a}e^{-a|t-s|}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2&=\int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\mathbf{E}_\vartheta Y_tY_s\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\left[d^2-\frac{b^2}{2a}\right]\left(\int_{k-1}^{k}e^{-at}\mathrm{d}t\right)^2+\frac{b^2}{2a}\int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}e^{-a|t-s|}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{d^2}{a^2} - \frac{b^2}{2a^3}\right] \left[e^a - 1\right]^2 e^{-2ak} + \frac{b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right].$$

因此

$$\mathbf{E}_\vartheta R_{1,T} = \left[e^a - 1\right]^2 \frac{f^2\left[2ad^2 - b^2\right]}{2a^3 T} \sum_{k=1}^{T} e^{-2ak} + \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2$$
$$= \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2 + r_T, \qquad \left|r_T\right| \le \frac{C}{T}.$$

为简化计算，我们假设过程 $Y_t, t \ge 0$ 是平稳的。于是

$$\mathbf{E}_\vartheta R_{1,T} = \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2.$$

协方差为 $(j < k)$

$$\mathbf{E}_\vartheta \eta_k \eta_j = b^2 \int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j} \mathbf{E}_\vartheta Y_t Y_s \mathrm{d}s\mathrm{d}t = b^2 \int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j} e^{-a(t+s)} \int_{-\infty}^{t\wedge s} e^{2au}\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$= \frac{b^2}{2a}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j} e^{-a|t-s|}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{b^2 e^a}{a^3}\left(1 - e^{-a}\right)^2 e^{-a|k-j|}.$$

因此

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \mathbf{E}_\vartheta \eta_k \eta_j \le C\, e^{-a|k-j|} \tag{21}$$

这个高斯序列 $\eta_1, \eta_2, \ldots$ 是指数混合的。根据大数定律

$$R_{1,T} \longrightarrow \Phi_1(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2,$$

当 $T \to \infty$ 时。

于是我们可以写成

$$\mathbf{E}_\vartheta \left(R_{1,T} - \mathbf{E}_\vartheta R_{1,T}\right)^2$$
$$= \mathbf{E}_\vartheta \left(\frac{f^2}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[\eta_k^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_k^2\right] + \frac{2f\sigma}{T}\sum_{k=1}^{T}\eta_k\zeta_k + \frac{\sigma^2}{T}\sum_{k=1}^{T}\left(\zeta_k^2 - 1\right)\right)^2$$
$$= \frac{f^4}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\left[\eta_k^2 - \mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2\right]\left[\eta_j^2 - \mathbf{E}_\vartheta\eta_j^2\right]\right) + \frac{4f^2\sigma^2}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\eta_k\eta_j\zeta_k\zeta_j\right)$$
$$+ \frac{\sigma^4}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\zeta_k^2 - 1\right)\left(\zeta_j^2 - 1\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f^4}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\left[\eta_k^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2\right]\left[\eta_j^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_j^2\right]\right)+\frac{4f^2\sigma^2}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2\\
&\quad+\frac{\sigma^4}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\zeta_k^2-1\right)^2\\
&\le \frac{f^4}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left(\left[\eta_k^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2\right]\left[\eta_j^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_j^2\right]\right)+\frac{4f^2\sigma^2b^2}{a^3T}\left[a-1+e^{-a}\right]+\frac{2\sigma^4}{T}.
\end{aligned}
$$

对于最后一个求和，再次利用表示式（17），我们可得到如下类似于（21）的指数界。注意,

$$
\mathbf{E}_\vartheta\left(\left[\eta_k^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2\right]\left[\eta_j^2-\mathbf{E}_\vartheta\eta_j^2\right]\right)=\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k^2\eta_j^2\right]-\left(\mathbf{E}_\vartheta\left(\eta_1^2\right)\right)^2,
$$

其中 $\mathbf{E}_\vartheta\eta_1^2=b^2a^{-3}\left[e^{-a}-1+a\right]$。

我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k^2\eta_j^2\right]&=\int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j}\int_{j-1}^{j}\mathbf{E}_\vartheta Y_tY_sY_rY_q\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r\mathrm{d}q\\
&=b^4\int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j}\int_{j-1}^{j}e^{-a(t+s+r+q)}\mathbf{E}_\vartheta I\left(t\right)I\left(s\right)I\left(r\right)I\left(q\right)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r\mathrm{d}q.
\end{aligned}
$$

假设 $j\le k-1$。那么利用随机积分的基本性质，我们可以写出

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta I\left(t\right)I\left(s\right)I\left(r\right)I\left(q\right)&=\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\right)I\left(q\right)\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(t\right)I\left(s\right)|\mathscr{F}_{r\vee q}^{Y}\Big)\Big)\\
&=\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\right)I\left(q\right)\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(s\wedge t\right)^2|\mathscr{F}_{r\vee q}^{Y}\Big)\Big)\\
&=\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\right)I\left(q\right)\mathbf{E}_\vartheta\Big(\left[I\left(s\wedge t\right)-I\left(r\vee q\right)+I\left(r\vee q\right)\right]^2|\mathscr{F}_{r\vee q}^{Y}\Big)\Big)\\
&=\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\right)I\left(q\right)\Big(\int_{r\vee q}^{s\wedge t}e^{2au}\mathrm{d}u+I\left(r\vee q\right)^2\Big)\Big)\\
&=\frac{1}{4a^2}\left[e^{2a(s\wedge t)}-e^{2a(r\vee q)}\right]e^{2a(r\wedge q)}+\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\wedge q\right)I\left(r\vee q\right)^3\Big)\\
&=\frac{1}{4a^2}\left[e^{2a[(s\wedge t)+(r\wedge q)]}-e^{2a(r+q)}\right]+\frac{3}{4a^2}e^{2a(r+q)}\\
&=\frac{1}{4a^2}\left[e^{2a[(s\wedge t)+(r\wedge q)]}+2e^{2a(r+q)}\right].
\end{aligned}
$$

这里我们将 σ-代数记为 $\mathscr{F}_t^Y=\sigma\left(Y_s,s\le t\right)$，并使用等式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\wedge q\right)I\left(r\vee q\right)^3\Big)&=\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\wedge q\right)\left[I\left(r\vee q\right)-I\left(r\wedge q\right)+I\left(r\wedge q\right)\right]^3\Big)\\
&=3\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\wedge q\right)\Big)^2\mathbf{E}_\vartheta\Big(\left[I\left(r\vee q\right)-I\left(r\wedge q\right)\right]^2\Big)+\mathbf{E}_\vartheta\Big(I\left(r\wedge q\right)\Big)^4
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3}{4a^2} e^{2a(r\wedge q)} \left[e^{2a(r\vee q)} - e^{2a(r\wedge q)} \right] + \frac{3}{4a^2} e^{4a(r\wedge q)} = \frac{3}{4a^2} e^{2a(r+q)}.$$

因此

$$e^{-a(t+s+r+q)} \mathbf{E}_\vartheta I(t) I(s) I(r) I(q) = \frac{1}{4a^2} e^{-a|t-s|-a|r-q|} + \frac{1}{2a^2} e^{-a(t+s)} e^{a(r+q)}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j}\int_{j-1}^{j} e^{-a(t+s+r+q)} \mathbf{E}_\vartheta I(t) I(s) I(r) I(q) \, \mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r\mathrm{d}q \\
&\quad = \frac{1}{4a^2} \int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j}\int_{j-1}^{j} e^{-a|t-s|-a|r-q|} \, \mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r\mathrm{d}q \\
&\qquad + \frac{1}{2a^2} \int_{k-1}^{k}\int_{k-1}^{k}\int_{j-1}^{j}\int_{j-1}^{j} e^{-a(t+s-r-q)} \, \mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}r\mathrm{d}q \\
&\quad = \frac{1}{a^6} \left[e^{-a} - 1 + a \right]^2 + \frac{e^{2a} \left[1 - e^{-a} \right]^4}{2a^6} \, e^{-2a|k-j|}.
\end{aligned}$$

因此，若 $j \le k-1$，则

$$\mathbf{E}_\vartheta \left(\left[\eta_k^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_k^2 \right] \left[\eta_j^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_j^2 \right] \right) = \frac{b^4 e^{2a} \left[1 - e^{-a} \right]^4}{2a^6} \, e^{-2a|k-j|} \le C \, e^{-2a|k-j|}.$$

若 $k = j$，则

$$\mathbf{E}_\vartheta \eta_k^4 = 3 \left(\mathbf{E}_\vartheta \eta_k^2 \right)^2 = \frac{3b^4}{a^6} \left[e^{-a} - 1 + a \right]^2$$

and

$$\mathbf{E}_\vartheta \left[\eta_k^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_k^2 \right]^2 = \frac{2b^4}{a^6} \left[e^{-a} - 1 + a \right]^2.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} \mathbf{E}_\vartheta \left(\left[\eta_k^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_k^2 \right] \left[\eta_j^2 - \mathbf{E}_\vartheta \eta_j^2 \right] \right) \\
&\quad = \frac{2b^4}{a^6} \left[e^{-a} - 1 + a \right]^2 + \frac{b^4 e^{2a} \left[1 - e^{-a} \right]^4}{2a^6 T} \sum_{k=1}^{T} \sum_{j \ne k}^{T} e^{-2a|k-j|} \\
&\quad \longrightarrow \frac{2b^4}{a^6} \left[e^{-a} - 1 + a \right]^2 + \frac{b^4 e^{4a} \left[1 - e^{-a} \right]^3}{a^6 \left[1 + e^{-a} \right]}.
\end{aligned}$$

这里我们使用了以下关系式

$$\sum_{j=1, j\ne k}^{T} e^{-2a|k-j|} = \frac{2e^{2a}}{1 - e^{-2a}} - \frac{e^{-2ak} + e^{-2a(T-k+1)}}{1 - e^{-2a}}$$

and

$$\frac{\left[1-e^{-a}\right]^4}{\left(1-e^{-a}\right)\left(1+e^{-a}\right)}=\frac{\left[1-e^{-a}\right]^3}{\left(1+e^{-a}\right)}.$$

因此我们得到了该估计

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_\vartheta\Big(R_{1,T}-\mathbf{E}_\vartheta R_{1,T}\Big)^2\leq\frac{C}{T}$$

以及收敛

$$\begin{aligned}T\mathbf{E}_\vartheta\Big(R_{1,T}-\mathbf{E}_\vartheta R_{1,T}\Big)^2\longrightarrow&\frac{2f^4b^4}{a^6}\left[e^{-a}-1+a\right]^2+\frac{f^4b^4e^{4a}\left[1-e^{-a}\right]^3}{a^6\left[1+e^{-a}\right]}\\&+\frac{4f^2\sigma^2b^2}{a^3}\left[e^{-a}-1+a\right]+2\sigma^4=K_{1,1}\left(\vartheta\right).\end{aligned}$$

估计（20）可直接由时间序列的Rosenthal不等式得到。由于随机变量 $\left|\sqrt{T}(R_{1,\ T}-\Phi_1(\vartheta))\right|^p$ 一致可积，因此多项式矩也收敛。

由指数混合时间序列的中心极限定理，我们得到收敛

$$\sqrt{T}\left(R_{1,T}-\Phi_1\left(\vartheta\right)\right)\Longrightarrow\xi_1\sim\mathcal{N}\left(0,K_{1,1}\left(\vartheta\right)\right).$$

现在考虑第二个分量

$$\begin{aligned}R_{2,T}&=\frac{1}{T}\sum_{k=2}^{T}\left[f\eta_k+\sigma\left(W_k-W_{k-1}\right)\right]\left[f\eta_{k-1}+\sigma\left(W_{k-1}-W_{k-2}\right)\right]\\&=\frac{f^2}{T}\sum_{k=2}^{T}\eta_k\eta_{k-1}+\frac{f\sigma}{T}\sum_{k=2}^{T}\left[\eta_k\zeta_{k-1}+\eta_{k-1}\zeta_k\right]+\frac{\sigma^2}{T}\sum_{k=2}^{T}\zeta_k\zeta_{k-1}.\end{aligned}$$

回顾

$$\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\zeta_{k-1}=0,\qquad\mathbf{E}_\vartheta\eta_{k-1}\zeta_k=0,\qquad\mathbf{E}_\vartheta\zeta_k\zeta_{k-1}=0$$

并且由大数定律，我们得到以下收敛

$$\frac{1}{T}\sum_{k=2}^{T}\eta_k\zeta_{k-1}\longrightarrow0,\qquad\frac{1}{T}\sum_{k=2}^{T}\eta_{k-1}\zeta_k\to0,\qquad\frac{1}{T}\sum_{k=2}^{T}\zeta_k\zeta_{k-1}\longrightarrow0.$$

此外,

$$\mathbf{E}_\vartheta R_{2,T}=\frac{f^2}{T}\sum_{k=2}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\eta_{k-1}=\frac{f^2b^2}{2aT}\sum_{k=2}^{T}\int_{k-1}^{k}\left(\int_{k-2}^{k-1}e^{-a|t-s|}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$\longrightarrow \frac{f^2 b^2}{2a^3}\left[1-e^{-a}\right]^2 \equiv \Phi_2(\vartheta).$$

R_{2}的方差，T 我们有以下表达式

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta\left(R_{2,T}-\mathbf{E}_\vartheta R_{2,T}\right)^2 &= \frac{f^4}{T^2}\sum_{k=2}^{T}\sum_{j=2}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k\eta_{k-1}-\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\eta_{k-1}\right]\left[\eta_j\eta_{j-1}-\mathbf{E}_\vartheta\eta_j\eta_{j-1}\right] \\
&\quad+\frac{f^2\sigma^2}{T^2}\sum_{k=2}^{T}\sum_{j=2}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k\zeta_{k-1}+\eta_{k-1}\zeta_k\right]\left[\eta_j\zeta_{j-1}+\eta_{j-1}\zeta_j\right] \\
&\quad+\frac{\sigma^4}{T^2}\sum_{k=2}^{T}\sum_{j=2}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\zeta_k\zeta_{k-1}\zeta_j\zeta_{j-1} \\
&= \frac{f^4}{T^2}\sum_{k=2}^{T}\sum_{j=2}^{T}\left(\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k\eta_{k-1}\eta_j\eta_{j-1}\right]-\left[\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\eta_{k-1}\right]^2\right)+\frac{\sigma^4(T-2)}{T^2} \\
&\quad+\frac{f^2\sigma^2}{T^2}\sum_{k=2}^{T}\mathbf{E}_\vartheta\left[\eta_k^2+2\eta_k\eta_{k-2}+\eta_{k-1}^2\right].
\end{aligned}$$

这些期望的值已在上文计算得出

$$f^2\mathbf{E}_\vartheta\eta_k^2=\Phi_1(\vartheta),\quad f^2\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\eta_{k-1}=\Phi_2(\vartheta),\quad f^2\mathbf{E}_\vartheta\eta_k\eta_{k-2}=e^{-a}\Phi_2(\vartheta).$$

期望 $\mathrm{E}_\vartheta\left[\eta_k\eta_{k-1}\eta_j\eta_{j-1}\right]$ 的计算可以按照上文相同的方法进行。因此，如上所述，我们可以得到估计

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_\vartheta\left(R_{2,T}-\mathbf{E}_\vartheta R_{2,T}\right)^2\le\frac{C}{T}.$$

根据大数定律

$$R_{2,T}\longrightarrow\Phi_2(\vartheta)$$

并根据中心极限定理

$$\sqrt{T}\left(R_{2,T}-\Phi_2(\vartheta)\right)\Longrightarrow\xi_2.$$

此外，通过直接计算可以验证，对于任意 λ、μ

$$\sqrt{T}\Big(\lambda\left(R_{1,T}-\Phi_1(\vartheta)\right)+\mu\left(R_{2,T}-\Phi_2(\vartheta)\right)\Big)\Longrightarrow\lambda\xi_1+\mu\xi_2.$$

由此可得渐近正态性（19）。这些计算是直接的，与上述 $K_{1,1}(\vartheta)$ 的计算相近，但较为繁琐，因此我们省略这些计算，也省略与矩阵 $\mathbf{K}(\vartheta)$ 中各项 $K_{1,2}(\vartheta)$、$=K_{2,1}(\vartheta)$ 和$K_{2,2}(\vartheta)$ 相关的相应计算。

注意，对于任意 $\nu > 0$

$$\sup_{\vartheta \in \mathbb{K}} \mathbf{P}_{\vartheta} \left(\| R_T - \Phi(\vartheta) \| \geq \nu \right) \leq \nu^{-2} \sup_{\vartheta \in \mathbb{K}} \mathbf{E}_{\vartheta} \| R_T - \Phi(\vartheta) \|^2 \leq \frac{C}{\nu^2 T}$$

□

参数 f, b 和 a 的估计。

估计量 f_T^*, b_T^*, a_T^*的渐近正态性由命题1得出，如下所示。对于估计量 f_T^*和 b_T^*，我们有

$$\sqrt{T}\left(f_T^* - f_0\right) \Rightarrow \xi_f \sim \mathcal{N}\left(0, D_f\left(f_0\right)^2\right), \quad D_f(f)^2 = \frac{a^3 \, K_{1,1}(f)}{4b^2\left(e^{-a} - 1 + a\right)\left(\Phi_1(f) - \sigma^2\right)},$$

$$\sqrt{T}\left(b_T^* - b_0\right) \Rightarrow \xi_b \sim \mathcal{N}\left(0, D_b\left(b_0\right)^2\right), \quad D_b(b)^2 = \frac{a^3 \, K_{1,1}(b)}{4f^2\left(e^{-a} - 1 + a\right)\left(\Phi_1(b) - \sigma^2\right)}.$$

a_T^* 的渐近正态性如下所示。假设 $\vartheta = a \in \Theta = (\alpha, \beta)$ $\alpha > 0$，且已知 $f \neq 0$和 $b \neq 0$的值。

首先，我们验证函数 $\Phi_1(a)$ $a \in \Theta$严格递减。引入函数 $h(x) = x^{-3}\left(x - 1 + e^{-x}\right)$ $x > 0$。那么，其导数的表达式为$h'(x) = x^{-4}\left[3 - 2x - (3 + x)\, e^{-x}\right]$。注意，函数 $g(x) = 3 - 2x - (3 + x)\, e^{-x}$在 $x = 0$处为 $g(0) = 0$，且其导数为 $g'(x) = -2 + (2 + x)\, e^{-x}$，其中 $g'(0) = 0$。最后，$g''(x) = -(1 + x)\, e^{-x} < 0$。因此，对于 $x > 0$，有 $g'(x) < 0$、$g(x) < 0$以及 $h'(x) < 0$。由于函数 $\Phi_1(a)$ $a \in \Theta$严格递减，方程

$$R_{1,T} = \Phi_1(a), \qquad a \in \Theta$$

对于取值 $\Phi_1(\beta) < R_{1,T} < \Phi_1(\alpha)$，存在唯一解 $a = a_T^*$。

$$\begin{aligned} a_T^* = H\left(\frac{R_{1,T} - \sigma^2}{f^2 b^2}\right) &= H\left(\frac{\Phi_1(a_0) - \sigma^2}{f^2 b^2}\right) + H'\left(\frac{\Phi_1(a_0) - \sigma^2}{f^2 b^2}\right) \frac{\left(R_{1,T} - \Phi_1(a_0)\right)}{f^2 b^2} \\ &= a_0 + \frac{R_{1,T} - \Phi_1(a_0)}{h'(a_0)\, f^2 b^2} + O\left(T^{-1}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{T}\left(a_T^* - a_0\right) \Longrightarrow \xi_a \sim \mathcal{N}\left(0, D_a\left(a_0\right)^2\right), \qquad D_a(a_0)^2 = \frac{K_{1,1}(a_0)}{h'(a_0)^2 \, f^4 b^4}.$$

由于导数 $h'(x)$ $x > \alpha$与零分离，我们得到如下估计：对于任意$p \geq 2$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\sup_{a_0 \in \mathbb{K}} T^{p/2} \mathbf{E}_{a_0} \left| a_T^* - a_0 \right|^p \leq C$$

以及矩收敛

$$\lim_{T\to\infty} T^{p/2}\mathbf{E}_{a_0}\left|a_T^* - a_0\right|^p = \mathbf{E}_{a_0}\left|\xi_a\right|^p.$$

成立。

更一般的模型

所有一维参数估计的情形都是一种稍微更一般的观测模型的特例

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f(\vartheta)\, Y_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \qquad & X_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -a(\vartheta)\, Y_t \mathrm{d}t + b(\vartheta)\, \mathrm{d}V_t, \qquad & Y_0, \quad t \ge 0 \end{aligned}$$

其中 $f(\vartheta)$ $a(\vartheta)$ $b(\vartheta)$ $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$ 是已知光滑函数。为了根据观测值 $X^T = (X_t, 0 \le t \le T)$ 估计参数 ϑ，我们可以使用矩估计量

$$\begin{aligned} R_{1,T} &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left[X_k - X_{k-1}\right]^2, \qquad \Psi(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)^2 b(\vartheta)^2}{a(\vartheta)^2}\left[e^{-a(\vartheta)} - 1 + a(\vartheta)\right], \\ \vartheta_T^* &= \arg\inf_{\vartheta\in\Theta}\left|R_{1,T} - \Psi(\vartheta)\right|, \end{aligned} \tag{22}$$

命题2。 设函数 $f(\vartheta)$ $a(\vartheta)$ $b(\vartheta)$ $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ 有两个连续导数，并且

$$\inf_{\vartheta\in\Theta}\left|\dot{\Psi}(\vartheta)\right| > 0.$$

那么矩估计量 ϑ_T 是一致相合的，并且对任意 $p \ge 2$

$$\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}} T^{p/2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\check{\vartheta}_T - \vartheta_0\right|^p \le C. \tag{23}$$

证明。 注意，对于任意 $\nu > 0$

$$\begin{aligned} g(\vartheta_0, \nu) &= \inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu}\left|\Psi(\vartheta) - \Psi(\vartheta_0)\right| \ge \inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu}\left|\vartheta - \vartheta_0\right|\left|\dot{\Psi}\left(\bar{\vartheta}\right)\right| \\ &\ge \nu \inf_{\vartheta\in\Theta}\left|\dot{\Psi}(\vartheta)\right| \ge \check{\kappa}\,\nu, \end{aligned}$$

其中 $\check{\kappa} > 0$。然后根据标准关系可得一致性

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\theta_0}\left(\left|\check{\vartheta}_T - \vartheta_0\right| \ge \nu\right) &= \mathbf{P}_{\theta_0}\left(\inf_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu}\left|R_{1,T} - \Psi(\vartheta)\right| \ge \inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu}\left|R_{1,T} - \Psi(\vartheta)\right|\right) \\ &\le \mathbf{P}_{\theta_0}\left(2\left|R_{1,T} - \Psi(\vartheta_0)\right| \ge \inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu}\left|\Psi(\vartheta) - \Psi(\vartheta_0)\right|\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{4}{g\left(\vartheta_0,\nu\right)^2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\check{\vartheta}_T-\vartheta_0\right|^2 \leq \frac{C}{Tg\left(\vartheta_0,\nu\right)^2}\to 0.$$

$\check{}$估计量 ϑ_T 以概率趋于1为该方程的解

$$0=R_{1,T}-\Psi\left(\check{\vartheta}_T\right)=R_{1,T}-\Psi\left(\vartheta_0\right)-\left(\check{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\dot{\Psi}\left(\bar{\vartheta}_T\right)$$

其中 $\left|\bar{\vartheta}_T-\vartheta_0\right|\leq\left|\check{\vartheta}_T-\vartheta_0\right|$，因此

$$\sqrt{T}\left(\check{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)=\frac{\sqrt{T}\left(R_{1,T}-\Psi\left(\vartheta_0\right)\right)}{\dot{\Psi}\left(\bar{\vartheta}_T\right)}.$$

因此（见（20））

$$T^{p/2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\check{\vartheta}_T-\vartheta_0\right|^p\leq\frac{T^{p/2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|R_{1,T}-\Psi\left(\vartheta_0\right)\right|^p}{\inf_{\vartheta\in\Theta}\left|\dot{\Psi}\left(\vartheta\right)\right|}\leq C.$$

□

二维参数 $\vartheta=(a,f)$

假设

$$\vartheta=\left(\theta_1,\theta_2\right)^\top=\left(a,f\right)^\top\in\Theta=\left(\alpha_a,\beta_a\right)\times\left(\alpha_f,\beta_f\right),\qquad \alpha_a>0\qquad \alpha_f>0.$$

矩估计量 $\vartheta_T^*=\left(\theta_{1,T}^*,\theta_{2,T}^*\right)^\top=\left(a_T^*,f_T^*\right)^\top$ 定义为方程组的解 $\vartheta=\vartheta_T^*$

$$\Phi_1\left(\vartheta\right)=R_{1,T},\qquad \Phi_2\left(\vartheta\right)=R_{2,T},\qquad \vartheta\in\Theta$$

在通常假设这些方程有解 $\vartheta_T^*\in\Theta$ 的情况下。

回忆一下，

$$\Phi_1\left(\vartheta\right)=\frac{f^2b^2}{a^3}\left[e^{-a}-1+a\right]+\sigma^2,\qquad \Phi_2\left(\vartheta\right)=\frac{f^2b^2}{2a^3}\left[1-e^{-a}\right]^2.$$

因此，该系统可以按以下两个步骤求解：方程

$$\frac{e^{-a_T^*}-1+a_T^*}{\left(1-e^{-a_T^*}\right)^2}=\frac{R_{1,T}-\sigma^2}{2R_{2,T}},\tag{24}$$

可以先求解第一个方程，然后得到该方程的解 a_T^*，据此定义第二个估计量

$$f_T^*=\frac{2(a_T^*)^{3/2}R_{2,T}^{1/2}}{b^2\left(1-e^{-a_T^*}\right)^2}.\tag{25}$$

下面证明该函数

$$h\left(x\right)=\frac{e^{-x}-1+x}{\left(1-e^{-x}\right)^{2}},\qquad x>0$$

严格递增。其导数为 $h'\left(x\right)=\left(1-e^{-x}\right)^{-3}g(x)$，其中函数 $g(x)=1-2xe^{-x}-e^{-2x}$ 的值为 $g\left(0\right)=0$，且 $g'(x)=2e^{-x}\left(x-1+e^{-x}\right)>0$，其中 $x>0$。因此，第一个方程有唯一解 a_{T}^{*}，第二个方程给出了估计 f_{T}^{*} 的显式表达式。

注意,

$$h\left(a_{0}\right)=\frac{\Phi_{1}\left(\vartheta_{0}\right)-\sigma^{2}}{2\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)},\qquad\frac{R_{1,T}-\sigma^{2}}{2R_{2,T}}\longrightarrow h\left(a_{0}\right),\qquad a_{T}^{*}\longrightarrow a_{0},$$

$$f_{0}=\frac{2a_{0}^{3/2}\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}}{b^{2}\left(1-e^{-a_{0}}\right)},\qquad\frac{2(a_{T}^{*})^{3/2}R_{2,T}^{1/2}}{b^{2}\left(1-e^{-a_{T}^{*}}\right)^{2}}\longrightarrow f_{0}.$$

因此,

$$h\left(a_{T}^{*}\right)=h\left(a_{0}\right)+h'\left(a_{0}\right)\left(a_{T}^{*}-a_{0}\right)+O\left(\left(a_{T}^{*}-a_{0}\right)^{2}\right)=\frac{R_{1,T}-\sigma^{2}}{2R_{2,T}}$$

并利用收敛性 (19)，我们得到

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\left(a_{T}^{*}-a_{0}\right)&=h'\left(a_{0}\right)^{-1}\sqrt{T}\left(\frac{R_{1,T}-\sigma^{2}}{2R_{2,T}}-\frac{\Phi_{1}\left(\vartheta_{0}\right)-\sigma^{2}}{2\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)}\right)+O\left(\sqrt{T}\left(a_{T}^{*}-a_{0}\right)^{2}\right)\\&=\frac{\sqrt{T}\left(R_{1,T}-\Phi_{1}\left(\vartheta_{0}\right)\right)}{2h'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)}-\frac{\left(\Phi_{1}\left(\vartheta_{0}\right)-\sigma^{2}\right)}{2h'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)}\sqrt{T}\left(R_{2,T}-\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)\right)+o\left(1\right)\\&\Longrightarrow\frac{\xi_{1}}{2h'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)}-\frac{\left(\Phi_{1}\left(\vartheta_{0}\right)-\sigma^{2}\right)\xi_{2}}{2h'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)}\equiv\xi_{3}.\end{aligned}$$

对于第二个估计量，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\left(f_{T}^{*}-f_{0}\right)&=\sqrt{T}\left(\frac{2\left(a_{T}^{*}\right)^{3/2}R_{2,T}^{1/2}}{b^{2}\left(1-e^{-a_{T}^{*}}\right)^{2}}-\frac{2a_{0}^{3/2}\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}}{b^{2}\left(1-e^{-a_{0}}\right)}\right)\\&=n'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}\sqrt{T}\left(a_{T}^{*}-a_{0}\right)+\frac{n\left(a_{0}\right)\sqrt{T}\left(R_{2,T}-\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)\right)}{2\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}}+o\left(1\right)\\&\Longrightarrow n'\left(a_{0}\right)\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}\xi_{3}+\frac{n\left(a_{0}\right)}{2\Phi_{2}\left(\vartheta_{0}\right)^{1/2}}\xi_{2}\equiv\xi_{4}.\end{aligned}$$

令 $\xi^{*}=\left(\xi_{3},\xi_{4}\right)^{\top}$ 表示具有相应协方差矩阵 $\mathsf{Q}\left(\vartheta_{0}\right)$ 的高斯向量。因此，我们证明了以下命题。

命题3. 矩估计量 ϑ_T^* 一致相合，并且在紧集 $\mathbb{K} \subset \Theta$ 上一致渐近正态

$$\sqrt{T}\left(\vartheta_T^* - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \xi^* \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{Q}\left(\vartheta_0\right)\right),$$

多项式矩收敛，并且估计

$$\sup_{\vartheta_0 \in \mathbb{K}} T^{p/2} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\|\vartheta_T^* - \vartheta_0\right\|^p \leq C \tag{26}$$

成立。

估计式（26）的证明可以用标准论证完成 .

二维参数 $\vartheta = (a, b)$

请注意，由于模型取决于乘积 fb，因此估计 f 与 b 之间并无实质区别。因此，关于估计量 a_T^* 的定义，请参见（24）；估计量 b_T^* 与（25）中的几乎相同，只需将 b 替换为 f

$$b_T^* = \frac{2(a_T^*)^{3/2} R_{2,T}^{1/2}}{f^2 \left(1 - e^{-a_T^*}\right)^2}.$$

4 单步最大似然估计过程。

再次考虑这个部分观测系统

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f\left(\vartheta\right) Y_t \, \mathrm{d}t + \sigma \, \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -a\left(\vartheta\right) Y_t \, \mathrm{d}t + b\left(\vartheta\right) \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0. \end{aligned}$$

未知参数是一维的，$\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$，我们需要根据观测值 $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ 对其进行估计。初始值 $Y_0 \sim \mathcal{N}\left(0, d_y^2\right)$ 不依赖于独立维纳过程 W^T和 V^T。定理 1 中描述的最大似然估计量和贝叶斯估计量具有良好的渐近性质，特别是渐近有效，但这些估计量的计算在计算上相当困难。例如，构造贝叶斯估计量 (13) 需要知道所有$\vartheta \in \Theta$对应的 $L\left(\vartheta, X^T\right)$（见 (14)）。即使假设系统处于平稳状态，且初始值为$m(\vartheta, 0) \sim \mathcal{N}(0, \gamma_*(\vartheta))$，我们也无需求解黎卡提方程，但仍始终需要求得轨迹 $m(\vartheta, t) \quad 0 \leq t \leq T, \vartheta \in \Theta$。

本节旨在提出并研究具有诸多良好性质的单步最大似然估计过程。不过，我们先稍微简化一下论述，假设系统已处于平稳状态，即黎卡提方程的初始值 $\gamma(\vartheta, 0)$ 为 $\gamma(\vartheta, 0) = \gamma_*(\vartheta)$，因此对于所有 $t \geq 0, \quad \gamma(\vartheta, t) \equiv \gamma_*(\vartheta)$。此外，我们令 $M(\vartheta, t) = f(\vartheta) m(\vartheta, t)$。回顾一下，$\Gamma(\vartheta) = \gamma_*(\vartheta) f(\vartheta)^2 \sigma^{-2} = r(\vartheta) - a(\vartheta), \quad r(\vartheta) =$

$\left(a(\vartheta)^2+b(\vartheta)^2f(\vartheta)^2\sigma^{-2}\right)^{-1/2}$。那么，$M(\vartheta,t)\ t\geq 0$ 和 $\dot{M}(\vartheta,t)\ t\geq 0$ 的方程为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M\left(\vartheta,t\right)&=-r\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\Gamma\left(\vartheta\right)\mathrm{d}X_t,\\ \mathrm{d}\dot{M}\left(\vartheta,t\right)&=-r\left(\vartheta\right)\dot{M}\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t-\dot{r}\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t+\dot{\Gamma}\left(\vartheta\right)\mathrm{d}X_t,\end{aligned}$$

初始值为 $M(\vartheta,0)$ 和 $M(\vartheta,0)$。$M(\vartheta,t)\ \ t\geq 0$ 的积分平稳表示见式（12）。通过对方程（12）直接微分，可得到导数 $M(\vartheta,t)\ t\geq 0$ 的积分表示式。这些表示式也可用于求得初始值 $M(\vartheta,0)$,$M(\vartheta,0)$。

单步最大似然估计过程分两步构造。首先，利用相对较短的学习区间$\left[0,\tau_T\right],\tau_T=\left[T^\delta\right]$，$\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上的观测值 X^{τ_T} 构造一个矩估计量$\vartheta^*_{\tau_T}$（见式（22）），然后将该估计量作为初步估计量，提出单步最大似然估计过程。这里，$[A]$ 表示 A 的整个部分。

提醒记号

$$R_{1,\tau_T}=\frac{1}{\tau_T}\sum_{k=1}^{\tau_T}\left[X_k-X_{k-1}\right]^2,\qquad \Psi\left(\vartheta\right)=\frac{f(\vartheta)^2b(\vartheta)^2}{a(\vartheta)^2}\Big(e^{a(\vartheta)}-1+a(\vartheta)\Big)+\sigma^2,$$

$$\vartheta^*_{\tau_T}=\arg\inf_{\vartheta\in\Theta}\left|R_{1,\tau_T}-\Psi\left(\vartheta\right)\right|,\qquad \mathrm{I}\left(\vartheta\right)=\frac{\dot{a}\left(\vartheta\right)^2}{2a\left(\vartheta\right)}-\frac{2\dot{a}\left(\vartheta\right)\dot{r}\left(\vartheta\right)}{a\left(\vartheta\right)+r\left(\vartheta\right)}+\frac{\dot{r}\left(\vartheta\right)^2}{2r\left(\vartheta\right)}$$

以及估计量过程

$$\vartheta^\star_{t,T}=\vartheta^*_{\tau_T}+\frac{1}{\mathrm{I}\big(\vartheta^*_{\tau_T}\big)\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\Big[\mathrm{d}X_s-M(\vartheta^*_{\tau_T},s)\mathrm{d}s\Big],\ \tau_T<t\leq T.\qquad(27)$$

随机过程 $M(\vartheta^*_{\tau_T},t)$ $\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},t)$ $\tau_T\leq t\leq T$满足方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M(\vartheta^*_{\tau_T},t)&=-r(\vartheta^*_{\tau_T})M(\vartheta^*_{\tau_T},t)\mathrm{d}t+\Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t,\\ \mathrm{d}\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},t)&=-r(\vartheta^*_{\tau_T})\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},t)\mathrm{d}t-\dot{r}(\vartheta^*_{\tau_T})M(\vartheta^*_{\tau_T},t)\mathrm{d}t+\dot{\Gamma}(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t.\end{aligned}$$

初始值 $M(\vartheta^*_{\tau_T},\tau_T)$ $\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},\tau_T)$ 定义如下。我们有

$$\begin{aligned}M(\vartheta,\tau_T)&=M\left(\vartheta,0\right)e^{-r(\vartheta)\tau_T}+\Gamma(\vartheta)e^{-r(\vartheta)\tau_T}\int_0^{\tau_T}e^{r(\vartheta)s}\mathrm{d}X_s\\&=M\left(\vartheta,0\right)e^{-r(\vartheta)\tau_T}+\Gamma(\vartheta)\left[X_{\tau_T}-r(\vartheta)\int_0^{\tau_T}e^{-r(\vartheta)\left(\tau_T-s\right)}X_s\mathrm{d}s\right],\end{aligned}$$

且初始值为

$$M(\vartheta^*_{\tau_T},\tau_T)=M(\vartheta^*_{\tau_T},0)e^{-r(\vartheta^*_{\tau_T})\tau_T}$$

$$+\Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\left[X_{\tau_T}-r(\vartheta^*_{\tau_T})\int_0^{\tau_T}e^{-r(\vartheta^*_{\tau_T})\left(\tau_T-s\right)}X_s\mathrm{d}s\right]. \tag{28}$$

对于 $M(\vartheta^*_{\tau_T},\tau_T)$，我们有类似的表示

$$\begin{aligned}\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},\tau_T)=&\left[\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},0)-M(\vartheta^*_{\tau_T},0)\dot{r}(\vartheta^*_{\tau_T})\tau_T\right]e^{-r(\vartheta^*_{\tau_T})\tau_T}+\dot{\Gamma}(\vartheta^*_{\tau_T})X_{\tau_T}\\&-\left[\dot{\Gamma}(\vartheta^*_{\tau_T})r(\vartheta^*_{\tau_T})+\Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\dot{r}(\vartheta^*_{\tau_T})\right]\int_0^{\tau_T}e^{-r(\vartheta^*_{\tau_T})\left(\tau_T-s\right))}X_s\mathrm{d}s\\&-\Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\dot{r}(\vartheta^*_{\tau_T})r(\vartheta^*_{\tau_T})\int_0^{\tau_T}e^{-r(\vartheta^*_{\tau_T})\left(\tau_T-s\right)}\left(\tau_T-s\right)X_s\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{29}$$

作变量变换：$t=vT, v\in\left[\varepsilon_T,1\right], \varepsilon_T=\tau_T T^{-1}=T^{-1+\delta}\to 0$并记$\vartheta^\star_T(v)=\vartheta^\star_{vT,T}, \varepsilon_T<v\leq 1$。

定理 2. 假设以下条件成立。

1. 函数 $f(\vartheta)$ $a(\vartheta)$ $b(\vartheta)$ $\vartheta\in[\alpha,\beta]$ 均为正且二阶连续可微。*2.* 下确界$_{\vartheta\in\Theta}|\Psi(\vartheta)|>0$*3.* 下确界$_{\vartheta\in\Theta}\left(|\dot{a}(\vartheta)|+|\dot{r}(\vartheta)|\right)>0$。

那么，单步最大似然估计过程 $\vartheta^\star_T(v)$ $\varepsilon_T<v\leq 1$ 在 $\delta\in(1/2,1)$ 下在紧集上一致$\mathbb{K}\subset\Theta$相合：对任意 $\nu>0$ 及任意 $\varepsilon_0\in(0,1]$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\sup_{\varepsilon_0\leq v\leq 1}\left|\vartheta^\star_T(v)-\vartheta_0\right|>\nu\right)=0,$$

渐近正态

$$\sqrt{T}\left(\vartheta^\star_T(v)-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\zeta_v\sim\mathcal{N}\left(0,v^{-1}\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

且矩收敛：对任意 $p\geq 1$

$$T^{p/2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\vartheta^\star_T(v)-\vartheta_0\right|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\zeta_v|^p.$$

随机过程 $\eta_T(v)=v\sqrt{T\mathrm{I}(\vartheta_0)}\left(\vartheta^\star_{T\underline{\quad}}(v)-\vartheta_0\right), \varepsilon_0\leq v\leq 1$ 在可测空间 $(\mathcal{C}[\varepsilon_0,1],\mathfrak{B})$ 中依分布收敛至维纳过程 $W(v)$ $\varepsilon_0\leq v\leq 1$。

证明。 记 $\mathrm{I}_m=\inf_{\vartheta\in\Theta}\mathrm{I}(\vartheta)>0$，假设 $\varepsilon_T<\varepsilon_0$，并考虑概率

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\sup_{\varepsilon_0\leq v\leq 1}\left|\vartheta^\star_T(v)-\vartheta_0\right|>\nu\right)\leq\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0|>\frac{\nu}{3}\right)$$

$$+\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{\mathrm{I}_m T\left(\varepsilon_0-\varepsilon_T\right)}\sup_{\varepsilon_0\le v\le 1}\left|\int_{\varepsilon_T}^{v}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_{uT}\right|\ge\frac{\nu}{3}\right)$$
$$+\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{\mathrm{I}_m\left(\varepsilon_0-\varepsilon_T\right)}\int_{\varepsilon_T}^{1}\frac{\left|\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\left[M(\vartheta_0,uT)-M(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\right]\right|}{\sigma^2}\mathrm{d}u\ge\frac{\nu}{3}\right).$$

对于第一个概率，根据式（23），我们有

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\left|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right|>\frac{\nu}{3}\right)\le\frac{9}{\nu^2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0|^2\le\frac{C}{\nu^2\tau_T}\to 0.$$

第二个概率估计如下

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\vartheta_0}&\left(\sup_{\varepsilon_0\le v\le 1}\left|\int_{\varepsilon_T}^{v}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_{uT}\right|\ge\frac{\nu\mathrm{I}_m T\left(\varepsilon_0-\varepsilon_T\right)}{3}\right)\\&\le\frac{C}{\nu^2\mathrm{I}_m^2 T\left(\varepsilon_0-\varepsilon_T\right)^2}\int_{\varepsilon_T}^{1}\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}u\\&\le\frac{C}{\nu^2\mathrm{I}_m^2 T\left(\varepsilon_0-\varepsilon_T\right)^2}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

进一步

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\left[M\left(\vartheta_0,uT\right)-M(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\right]\right|\\&\quad=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\dot{M}\left(\bar{\vartheta}_{\tau_T},uT\right)\left[\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right]\right|\\&\quad\le\left(\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},uT)\dot{M}\left(\bar{\vartheta}_{\tau_T},uT\right)\right|^2\mathbf{E}_{\vartheta_0}[\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0]^2\right)^{1/2}\\&\quad\le C\left(\mathbf{E}_{\vartheta_0}[\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0]^2\right)^{1/2}\le CT^{-\delta/2}\to 0.\end{aligned}$$

因此，最后一个概率也趋于零。所有估计在紧集上一致。

估计量 $\vartheta^\star_T(v)$ 可表示为

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\left(\vartheta^\star_T(v)-\vartheta_0\right)&=\sqrt{T}\left(\vartheta^\star_{\tau_T}(v)-\vartheta_0\right)+\frac{\sqrt{T}}{\mathrm{I}(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s\\&\quad+\frac{\sqrt{T}}{\mathrm{I}(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\left[M(\vartheta_0,s)-M(\vartheta^*_{\tau_T},s)\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\mathrm{I}(\vartheta^*_{\tau_T})\left(v-\varepsilon_T\right)}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s\end{aligned}$$

$$+\frac{\sqrt{T}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)}\left(\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)-\frac{1}{\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\dot{M}(\bar{\vartheta}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s\right).$$

该随机积分具有以下渐近行为

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s-\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta_0,s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s\right)^2\\&\quad=\frac{1}{T}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)-\dot{M}(\vartheta_0,s)\right]^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s\leq C\frac{t}{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right]^2\leq C\frac{t}{T}T^{-\delta}\to 0\end{aligned}$$

对于固定的 v

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\tau_T}^{vT}\frac{\dot{M}(\vartheta_0,s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,v\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)\right)$$

因为根据大数定律

$$\frac{1}{T}\int_{\tau_T}^{vT}\frac{\dot{M}(\vartheta_0,s)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s\longrightarrow v\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right).$$

因此

$$\frac{1}{\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)\left(v-\varepsilon_T\right)\sqrt{T}}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}_s\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,v^{-1}\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).\tag{30}$$

对于最后一项，我们写作

$$\begin{aligned}&\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\dot{M}(\bar{\vartheta}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s\\&\qquad=\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s+\left(\bar{\vartheta}_{\tau_T}-\vartheta^*_{\tau_T}\right)\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\ddot{M}(\bar{\bar{\vartheta}}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\left|\bar{\vartheta}_{\tau_T}-\vartheta^*_{\tau_T}\right|\leq|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0|$。因此

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{T}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)}\left(\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)-\frac{1}{\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\dot{M}(\bar{\vartheta}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s\right)\\&\qquad=\frac{\sqrt{T}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)}\left(\mathrm{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)-\frac{1}{\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{\sqrt{T}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\left(\bar{\vartheta}_{\tau_T}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\big(\vartheta^*_{\tau_T}\big)\left(t-\tau_T\right)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\ddot{M}(\bar{\bar{\vartheta}}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s.$$

注意到

$$\sqrt{T}\left|\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\left(\bar{\vartheta}_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\right|\leq\sqrt{T}\left|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right|^2=O\left(T^{1/2-\delta}\right)\longrightarrow 0.$$

类似的估计使我们可以写出

$$\mathrm{I}\big(\vartheta^*_{\tau_T}\big)-\frac{1}{\big(t-\tau_T\big)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s=\mathrm{I}\big(\vartheta_0\big)-\frac{1}{\big(t-\tau_T\big)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta_0,s)^2}{\sigma^2}\mathrm{d}s+O\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right).$$

进一步地

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\frac{1}{\big(t-\tau_T\big)}\int_{\tau_T}^{t}\left[\frac{\dot{M}(\vartheta_0,s)^2}{\sigma^2}-\mathrm{I}\big(\vartheta_0\big)\right]\mathrm{d}s\right)^2\leq\frac{C}{t}$$

并且我们得到

$$\frac{\sqrt{T}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}\big(\vartheta^*_{\tau_T}\big)}\left(\mathrm{I}\big(\vartheta^*_{\tau_T}\big)-\frac{1}{\big(t-\tau_T\big)}\int_{\tau_T}^{t}\frac{\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T},s)\dot{M}(\bar{\vartheta}_{\tau_T},s)}{\sigma^2}\mathrm{d}s\right)\longrightarrow 0.$$

该收敛性与（30）式推出渐近正态性。

矩收敛性可由（23）式以及 $M(\vartheta,s)$ 的各阶导数的矩均有界得出。

已证明过程 $\eta_T(v)$ $\varepsilon_0,\leq v\leq 1$ 可表示为

$$\eta_T(v)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{I}(\vartheta_0)\,T}}\int_0^{vT}\dot{M}(\vartheta_0,s)\,\mathrm{d}\bar{W}_s+h_T(v),\tag{31}$$

其中余项 $h_T(v)=h_T(v,\vartheta_0,\vartheta^*_{\tau_T})\to 0$ 在 $\vartheta_0\in\mathbb{K}$ 上一致地

$$\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}h_T(v,\vartheta_0,\vartheta^*_{\tau_T})^2\to 0$$

并且满足

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\eta_T(v_2)-\eta_T(v_1)\right|^4\leq C\left|v_2-v_1\right|^2+C\left|v_2-v_1\right|^4\leq C\left|v_2-v_1\right|^2.\tag{32}$$

为验证二维分布 $\eta_T(v_1)\,\eta_T(v_2)$ 的收敛性，我们引入$\langle\lambda,\eta_T\rangle=\lambda_1\eta_T(v_1)+\lambda_2\eta_T(v_2)$，并注意到

$$\langle\lambda,\eta_T\rangle=\frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{I}(\vartheta_0)\,T}}\int_0^T\left[\lambda_1\mathbb{1}_{\{s<v_1T\}}+\lambda_2\mathbb{1}_{\{s<v_2T\}}\right]\dot{M}(\vartheta_0,s)\,\mathrm{d}\bar{W}_s+\langle\lambda,h_T\rangle$$

其中 $\langle\lambda, h_T\rangle \to 0$ 和

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma^2 \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) T} \int_0^T \left[\lambda_1 \mathbb{I}_{\{s<v_1 T\}} + \lambda_2 \mathbb{I}_{\{s<v_2 T\}}\right]^2 \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right)^2 \mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{\lambda_1^2}{\sigma^2 \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) T} \int_0^{v_1 T} \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right)^2 \mathrm{d}s + \frac{\lambda_2^2}{\sigma^2 \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) T} \int_0^{v_2 T} \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right)^2 \mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\sigma^2 \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) T} \int_0^{(v_1 \wedge v_2) T} \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right)^2 \mathrm{d}s \\
&\quad \longrightarrow \lambda_1^2 v_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(v_1 \wedge v_2\right) + \lambda_2^2 v_2
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{v}{\sigma^2 \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right) T v} \int_0^{vT} \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right)^2 \mathrm{d}s \longrightarrow v.$$

因此，根据中心极限定理

$$\langle\lambda, \eta_T\rangle \Longrightarrow \langle\lambda, W\rangle = \lambda_1 W\left(v_1\right) + \lambda_2 W\left(v_2\right).$$

有限维分布的收敛

$$\left(\eta_T\left(v_1\right), \ldots, \eta_T\left(v_k\right)\right) \Longrightarrow \left(W\left(v_1\right), \ldots, W\left(v_k\right)\right)$$

可以用类似的方法验证。这一收敛性与（32）共同给出弱收敛$\eta_T(\cdot) \Longrightarrow W(\cdot)$。

□

注释1. 单步最大似然估计过程的表示式（27）可以写成如下递归形式。对于数值 $t \in (\tau_T, T]$，我们有等式

$$\left(t - \tau_T\right) \vartheta_{t,T}^{\star} = \left(t - \tau_T\right) \vartheta_{\tau_T}^{*} + \frac{1}{\mathrm{I}\left(\vartheta_{\tau_T}^{*}\right)} \int_{\tau_T}^{t} \frac{\dot{M}(\vartheta_{\tau_T}^{*}, s)}{\sigma^2} \left[\mathrm{d}X_s - M(\vartheta_{\tau_T}^{*}, s)\mathrm{d}s\right].$$

因此

$$\mathrm{d}\vartheta_{t,T}^{\star} = \frac{\vartheta_{\tau_T}^{*} - \vartheta_{t,T}^{\star}}{t - \tau_T}\mathrm{d}t + \frac{\dot{M}(\vartheta_{\tau_T}^{*}, t)}{\mathrm{I}\left(\vartheta_{\tau_T}^{*}\right)\sigma^2\left(t - \tau_T\right)} \left[\mathrm{d}X_t - M(\vartheta_{\tau_T}^{*}, t)\mathrm{d}t\right]. \tag{33}$$

为避免数值模拟开始时出现诸如 $0/0$ 这样的奇异点，公式中的 $t - \tau_T$ 可以替换为 $t - \tau_T + \varepsilon^*$，其中 $\varepsilon^* > 0$ 是一个较小的值。当然，这一修改不会改变 $\vartheta_{t,\,T}^{\star}$ 的渐近结果。

f**的估计**。

若 $f(\vartheta) = \vartheta \in \Theta = (\alpha_f, \beta_f)$ $\alpha_f > 0$, $a(\vartheta) = a > 0$ 且 $b(\vartheta) = b > 0$, 则初步估计量为

$$\vartheta^*_{\tau_T} = \left(\frac{a^3}{b^2 \left[e^{-a} - 1 + a \right] \tau_T} \sum_{k=1}^{\tau_T} \left(\left[X_k - X_{k-1} \right]^2 - \sigma^2 \right) \right)^{1/2}.$$

过程 $M(\vartheta, t)$ $M(\vartheta, t)$ $t \geq 0$ 是方程的解

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M(\vartheta, t) &= -r(\vartheta) M(\vartheta, t) \, \mathrm{d}t + \Gamma(\vartheta) \, \mathrm{d}X_t, \qquad t \geq 0, \\ \mathrm{d}\dot{M}(\vartheta, t) &= -r(\vartheta) \dot{M}(\vartheta, t) \, \mathrm{d}t + \frac{b^2 \vartheta}{r(\vartheta) \sigma^2} \, \mathrm{d}X_t, \end{aligned}$$

其中 $r(\vartheta) = (a^2 + b^2 \vartheta^2 \sigma^{-2})^{1/2}$ 以及 $\Gamma(\vartheta) = r(\vartheta) - a$。

单步最大似然估计过程为

$$\vartheta^\star_{t,T} = \vartheta^*_{\tau_T} + \frac{2\sigma^3 r(\vartheta^*_{\tau_T})^3}{b^4 \vartheta^{*2}_{\tau_T} \left(t - \tau_T \right)} \int_{\tau_T}^t \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, s) \left[\mathrm{d}X_s - M(\vartheta^*_{\tau_T}, s) \mathrm{d}s \right], \quad \tau_T < t \leq T.$$

根据定理 2，该估计量具有该定理中所述的性质，特别是具有渐近正态性

$$\sqrt{T} \left(\vartheta^\star_{\tau_T}(v) - \vartheta_0 \right) \Longrightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{2\sigma^4 r(\vartheta_0)^3}{v \, b^4 \vartheta_0^2} \right).$$

4.0.1 参数 b 的估计。

如果 $b(\vartheta) = \vartheta \in \Theta = (\alpha_b, \beta_b)$ $\alpha_b > 0$, $f(\vartheta) = f > 0$ 和 $a(\vartheta) = a > 0$, 那么初步估计量和单步最大似然估计过程为

$$\begin{aligned} \vartheta^*_{\tau_T} &= \left(\frac{a^3}{f^2 \left[e^{-a} - 1 + a \right] \tau_T} \sum_{k=1}^{\tau_T} \left(\left[X_k - X_{k-1} \right]^2 - \sigma^2 \right) \right)^{1/2}, \\ \vartheta^\star_{t,T} &= \vartheta^*_{\tau_T} + \frac{2\sigma^3 r(\vartheta^*_{\tau_T})^3}{f^4 \vartheta^{*2}_{\tau_T} \left(t - \tau_T \right)} \int_{\tau_T}^t \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, s) \left[\mathrm{d}X_s - M(\vartheta^*_{\tau_T}, s) \mathrm{d}s \right], \quad \tau_T < t \leq T \end{aligned}$$

相应的过程为 $M(\vartheta, t)$ $t \geq 0$ 和 $M(\vartheta, t)$ $t \geq 0$。

我们还有

$$\sqrt{T} \left(\vartheta^\star_T(v) - \vartheta_0 \right) \Longrightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{2\sigma^4 r(\vartheta_0)^3}{v \, f^4 \vartheta_0^2} \right).$$

4.0.2 参数 a 的估计。

如果 $a(\vartheta) = \vartheta \in \Theta = (\alpha_a, \beta_a) \quad \alpha_a > 0, f(\vartheta) = f > 0$ 且 $a(\vartheta) = a > 0$，那么初步估计量为

$$\vartheta^*_{\tau_T} = \arg\inf_{\vartheta\in\Theta} \left| \frac{1}{\tau_T} \sum_{k=1}^{\tau_T} [X_k - X_{k-1}]^2 - \Psi(\vartheta) \right|, \qquad \Psi(\vartheta) = \frac{f^2 b^2}{\vartheta^3} \left[e^{-\vartheta} - 1 + \vartheta \right] + \sigma^2.$$

费 Fisher 信息 $\mathrm{I}(\vartheta)$ 定义见 (15)

$$\mathrm{I}(\vartheta_0) = \frac{\Gamma(\vartheta_0)\left[r(\vartheta_0) + \vartheta_0 + r(\vartheta_0)\vartheta_0\Gamma(\vartheta_0)\right]}{2\vartheta_0 r(\vartheta_0)^3 \left[r(\vartheta_0) + \vartheta_0\right]},$$

单步最大似然估计过程由 (27) 给出。它是渐近正态的

$$\sqrt{T}\left(\vartheta^\star_T(v) - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, v^{-1}\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

4.0.3 二维参数 $(a, \ f)$ 的估计。

部分观测系统为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \theta_2 Y_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -\theta_1 Y_t \mathrm{d}t + b\mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \ge 0, \end{aligned}$$

其中 $b \neq 0$ 已知，我们需要估计 $\vartheta = (a, f) = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta = (\alpha_a, \beta_a) \times (\alpha_f, \beta_f)$，$\alpha_a > 0$，$\alpha_f > 0$。

回顾一下，初步矩估计 $\vartheta^*_{\tau_T} = (\theta^*_{1,\tau_T}, \theta^*_{2,\tau_T}) = (a^*_{\tau_T}, f^*_{\tau_T})$ 可按如下方式计算

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-a^*_{\tau_T}} - 1 + a^*_{\tau_T}}{(1 - e^{-a^*_{\tau_T}})^2} = \frac{R_{1,\tau_T} - \sigma^2}{2R_{2,\tau_T}}, \qquad R_{1,\tau_T} = \frac{1}{\tau_T}\sum_{k=1}^{\tau_T} [X_k - X_{k-1}]^2, \\ &f^*_{\tau_T} = \frac{2(a^*_{\tau_T})^{3/2} R^{1/2}_{2,\tau_T}}{b^2(1 - e^{-a^*_{\tau_T}})^2}, \qquad R_{2,\tau_T} = \frac{1}{\tau_T}\sum_{k=2}^{\tau_T} [X_k - X_{k-1}][X_{k-1} - X_{k-2}]. \end{aligned}$$

费 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I}(\vartheta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\vartheta_0)^2\left[r(\vartheta_0)\theta_{1,0} + (r(\vartheta_0) + \theta_{1,0})^2\right]}{2\theta_{1,0} r(\vartheta_0)^3 [r(\vartheta_0) + \theta_{1,0}]} & \frac{b^2\theta_{2,0}\left(\theta^2_{1,0} + r(\vartheta_0)\theta_{1,0} - 2r(\vartheta_0)\right)}{2r(\vartheta_0)^3(r(\vartheta_0) + \theta_{1,0})\sigma^2} \\ \frac{b^2\theta_{2,0}\left(\theta^2_{1,0} + r(\vartheta_0)\theta_{1,0} - 2r(\vartheta_0)\right)}{2r(\vartheta_0)^3(r(\vartheta_0) + \theta_{1,0})\sigma^2} & \frac{\theta^2_{2,0} b^4}{2r(\vartheta_0)^3\sigma^4} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

且它是非退化的。计算时，我们使用了 $\dot{}$ 导数 $M_f(\vartheta_0, t)$ 和 $M_a(\vartheta_0, t)$ 的平稳表示。单步最大似然估计过程是向量过程 $\vartheta^\star_{t,\ T}, \tau_T < t \le T$，由以下表达式定义

$$\vartheta^\star_{t,T} = \vartheta^*_{\tau_T} + \frac{\mathbf{I}(\vartheta^*_{\tau_T})^{-1}}{\sigma\left(t - \tau_T\right)} \int_{\tau_T}^t \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, s)\left[\mathrm{d}X_s - M(\vartheta^*_{\tau_T}, s)\mathrm{d}s\right].$$

这里，$M(\vartheta^*_{\tau_T}, s)$ $\tau_T \le t \le T$和向量 $\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, s) = (\dot{M}_a(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\ \dot{M}_f(\vartheta^*_{\tau_T}, t))^\top, \tau_T \le t \le T$是以下方程的解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M(\vartheta^*_{\tau_T}, t) &= -r(\vartheta^*_{\tau_T})M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t, \\
\mathrm{d}\dot{M}_a(\vartheta^*_{\tau_T}, t) &= -r(\vartheta^*_{\tau_T})\dot{M}_a(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t - \dot{r}_a(\vartheta^*_{\tau_T})M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \dot{\Gamma}_a(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t, \\
\mathrm{d}\dot{M}_f(\vartheta^*_{\tau_T}, t) &= -r(\vartheta^*_{\tau_T})\dot{M}_f(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t - \dot{r}_f(\vartheta^*_{\tau_T})M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \dot{\Gamma}_f(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t,
\end{aligned}$$

初始值 $M(\vartheta^*_{\tau_T}, \tau_T)$ $M_a(\vartheta^*_{\tau_T}, \tau_T)$ 和 $M_f(\vartheta^*_{\tau_T}, \tau_T)$ 是借助上述表示式 (28)、(29) 计算得到的。

当然，我们可以将单步最大似然估计过程的这一表达式替换为类似于 (33) 的递推形式。

$$\mathrm{d}\vartheta^\star_{t,T} = \frac{\vartheta^*_{\tau_T} - \vartheta^\star_{t,T}}{t - \tau_T}\mathrm{d}t + \frac{\mathbf{I}\left(\vartheta^*_{\tau_T}\right)^{-1}\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, t)}{\sigma^2\left(t - \tau_T\right)}\left[\mathrm{d}X_t - M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t\right]. \tag{35}$$

命题4. 单步最大似然估计过程 $\vartheta^\star_{t,T}, \tau_T < t \le T$一致相合，且渐近正态，

$$\sqrt{vT}\left(\vartheta^\star_{vT,T} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}\right)$$

并且多项式矩收敛。

证明与定理 2 的证明思路相同。

5 自适应滤波器

再次考虑同一个部分观测线性系统

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= f(\vartheta)\, Y_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \le t \le T, \\
\mathrm{d}Y_t &= -a(\vartheta)\, Y_t\mathrm{d}t + b(\vartheta)\,\mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \ge 0,
\end{aligned}$$

其中，W_t、$t \ge 0$和 V_t、$t \ge 0$是相互独立的维纳过程。这里，函数$f(\vartheta)$ $a(\vartheta)$ $b(\vartheta)$ $\vartheta \in \Theta$已知、为正且光滑。参数$\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$的值未知。

条件期望 $m(\vartheta, t) = \mathrm{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \le s \le t)$ 满足卡尔曼-布西方程

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}m(\vartheta, t) &= -\left[a(\vartheta) + \frac{\gamma(\vartheta, t)\, f(\vartheta)^2}{\sigma^2}\right] m(\vartheta, t)\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma(\vartheta, t)\, f(\vartheta)}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t, \quad m(\vartheta, 0), \\
\frac{\partial\gamma(\vartheta, t)}{\partial t} &= -2a(\vartheta)\,\gamma(\vartheta, t) - \frac{\gamma(\vartheta, t)^2 f(\vartheta)^2}{\sigma^2} + b(\vartheta)^2, \qquad \gamma(\vartheta, 0),
\end{aligned} \tag{36}$$

但由于参数 ϑ 未知，无法利用这些方程计算 $m(\vartheta,t)\ \ t\geq 0$。下面我们考虑根据观测值 $X^T=(X_t,0\leq t\leq T)$ 近似 $m(\vartheta,t)\ \ 0\leq t\leq T$ 的问题。主要思路是在时间区间 $t\in(\tau_T,T]$ 上使用单步最大似然估计过程

$$\mathrm{d}\vartheta^{\star}_{t,T}=\frac{\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta^{\star}_{t,T}}{t-\tau_T}\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{I}\left(\vartheta^{*}_{\tau_T}\right)^{-1}\dot{M}(\vartheta^{*}_{\tau_T},t)}{\sigma^2\left(t-\tau_T\right)}\left[\mathrm{d}X_t-M(\vartheta^{*}_{\tau_T},t)\mathrm{d}t\right].$$

其中 $\vartheta^{*}_{\tau_T}$ 是由观测值 $X^{\tau_T}=\left(X_s,0\leq s\leq\tau_T\right)$, $\tau_T=T^{\delta},\delta\in(1/2,1)$、$M(\vartheta,s)=f(\vartheta)\ m(\vartheta,s)$ 构造的矩估计量，并将滤过方程中的 ϑ 替换为 $\vartheta^{\star}_{t,\ T}$。

这种对随机过程$m(\vartheta,t)\ \ 0\leq t\leq T$的近似至少有三种可能方式。

考虑由方程的解得到的随机过程 $\hat{}m_{t,\ T},\tau_T<t\leq T$

$$\mathrm{d}\hat{m}_{t,T}=-a\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\hat{m}_{t,T}\mathrm{d}t+\frac{\hat{\gamma}_{t,T}f\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)}{\sigma^2}\left[\mathrm{d}X_t-f\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\hat{m}_{t,T}\mathrm{d}t\right],\quad \hat{m}_{\tau_T,T},$$

其中

$$\frac{\partial\hat{\gamma}_{t,T}}{\partial t}=-2a\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\hat{\gamma}_{t,T}-\frac{\hat{\gamma}^2_{t,T}f\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)^2}{\sigma^2}+b\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)^2,\qquad \hat{\gamma}_{\tau_T,T}=\gamma\left(\vartheta^{*}_{\tau_T},\tau_T\right).$$

当然，需要特别关注初始值 $\hat{}m_{\tau_T,\ T}$ （见（28））。

另一种 一种可能的方法是使用方程 (36) 的解的显式表达式

$$\gamma(\vartheta,t)=e^{-2r(\vartheta)t}\left[\frac{1}{\gamma(\vartheta,0)-\gamma_*(\vartheta)}+\frac{f(\vartheta)^2}{2r(\vartheta)\sigma^2}\left(1-e^{-2r(\vartheta)t}\right)\right]^{-1}+\gamma_*(\vartheta),$$

其中

$$r(\vartheta)=\left(a(\vartheta)^2+\frac{f(\vartheta)^2b(\vartheta)^2}{\sigma^2}\right)^{1/2},\qquad \gamma_*(\vartheta)=\frac{\sigma^2\left[r(\vartheta)-a(\vartheta)\right]}{f(\vartheta)^2}.$$

$m(\vartheta,t)$ 的近似可通过随机过程 $\hat{}m_T(t)\ \ \tau_T<t\leq T$ 实现

$$\mathrm{d}\hat{m}_T(t)=-a\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\hat{m}_T(t)\,\mathrm{d}t+\frac{\gamma\left(\vartheta^{\star}_{t,T},t\right)f\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)}{\sigma^2}\left[\mathrm{d}X_t-f\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\hat{m}_T(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

其初始值为 $m_T\left(\tau_T\right)$。

第三种方法是利用黎卡提方程的解 $\gamma(\vartheta,t)$ 指数收敛至稳态值 $\gamma_*(\vartheta)$，并借助方程的解 $m^{\star}_{t,\ T},\tau_T<t\leq T$ 来近似 $m(\vartheta,t)$

$$\mathrm{d}m^{\star}_{t,T}=-r\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)m^{\star}_{t,T}\mathrm{d}t+B\left(\vartheta^{\star}_{t,T}\right)\,\mathrm{d}X_t,\qquad m^{\star}_{\tau_T,T}\tag{37}$$

其中，我们将 $B(\vartheta) = [r(\vartheta) - a(\vartheta)] f(\vartheta)^{-1}$ 记为。要定义 $m^{\star}_{\tau_T,\ T}$，我们可以使用类似式（27）的等式，即令

$$m^{\star}_{\tau_T,T} = m(\vartheta^{*}_{\tau_T}, 0)e^{-r(\vartheta^{*}_{\tau_T})\tau_T} + B(\vartheta^{*}_{\tau_T}) \left[X_{\tau_T} - r(\vartheta^{*}_{\tau_T}) \int_0^{\tau_T} e^{-r(\vartheta^{*}_{\tau_T})(\tau_T - s)} X_s \, \mathrm{d}s \right].$$

引入常数

$$K_1(\vartheta_0) = -\frac{\left[\dot{a}(\vartheta_0) + \dot{f}(\vartheta_0) B(\vartheta_0)\right] \sigma}{f(\vartheta_0) \sqrt{2a(\vartheta_0) \mathrm{I}(\vartheta_0)}},$$

$$K_2(\vartheta_0) = \frac{\dot{r}(\vartheta_0) \sigma}{f(\vartheta_0) \sqrt{2r(\vartheta_0) \mathrm{I}(\vartheta_0)}}, \qquad R_{1,2}(\vartheta_0) = \frac{2K_1(\vartheta_0) K_2(\vartheta_0) \sqrt{a(\vartheta_0) r(\vartheta_0)}}{a(\vartheta_0) + r(\vartheta_0)},$$

和随机过程

$$\xi^{(1)}_T(v) = \sqrt{2a(\vartheta_0) T} \int_{v-\nu_T}^{v} e^{-a(\vartheta_0)(v-u)T} \mathrm{d}W_T(u) \Longrightarrow \xi^{(1)}(v) \sim \mathcal{N}(0,1), \quad v \in [\varepsilon_0, 1],$$

$$\xi^{(2)}_T(v) = \sqrt{2r(\vartheta_0) T} \int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T} \mathrm{d}W_T(u) \Longrightarrow \xi^{(2)}(v) \sim \mathcal{N}(0,1), \quad v \in [\varepsilon_0, 1].$$

这里 $\varepsilon_0 \in (0,1)$、$\nu_T = T^{-\kappa}$、$\kappa \in (0,1)$，并注意

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(1)}(v) \xi^{(2)}(v) = \frac{2\sqrt{a(\vartheta_0) r(\vartheta_0)}}{a(\vartheta_0) + r(\vartheta_0)}, \qquad \mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(1)}(v_1) \xi^{(2)}(v_2) = 0$$

如果 $v_1 \neq v_2$，因为

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(1)}_T(v_1) \xi^{(2)}_T(v_2) = \sqrt{r(\vartheta_0) a(\vartheta_0)} T \int_{(v_1-\nu_T)\vee(v_2-\nu_T)}^{v_1 \wedge v_2} e^{-[r(\vartheta_0)+a(\vartheta_0)](v-u)T} \mathbb{I}_{\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2} \mathrm{d}u = 0$$

对于 $|v_2 - v_1| > \nu_T \to 0$，以及集合 $\mathbb{A}_i = \{u:\ v_i - \nu_T \leq u \leq v_i\}$。

将分量为 $\rho_{i,j}(\vartheta_0) = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(j)}(v)\ \xi^{(j)}(v)$ 的 2×2 矩阵 $\rho(\vartheta_0)$ 记作。高斯向量 $\xi(v) = \left(\xi^{(1)}(v)\ \xi^{(2)}(v)\right) \sim \mathcal{N}(0, \rho(\vartheta_0))$。

回顾一下，对于任意 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，随机过程 $\left(\eta_T(v)\ \ v \in [\varepsilon_0, 1]\right)$ 依分布收敛于维纳过程（$W(v)\ \ v \in [\varepsilon_0, 1]$）（定理 2）。直接计算可以验证

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(i)}_T(v) \eta_T(v) \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \xi^{(i)}(v) W(v) = 0.$$

因此，向量 $\xi(v)$ 和 $W(v)$ 相互独立，并且对于 $v_1 \neq v_2$，向量 $\xi^{(1)}(v_1)$ 和 $\xi^{(2)}(v_2)$ 也相互独立。

定理 3. 假设定理 *2* 的条件成立。那么，对于 $v \in [\varepsilon_0, 1]$，有依分布收敛

$$\sqrt{T}\left(m^{\star}_{vT,T} - m\left(\vartheta_0, vT\right)\right) \Longrightarrow \frac{W\left(v\right)}{v}\left[K_1\left(\vartheta_0\right)\xi^{(1)}\left(v\right) + K_2\left(\vartheta_0\right)\xi^{(2)}\left(v\right)\right] \tag{38}$$

以及矩收敛

$$T\,\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(m^{\star}_{vT,T} - m\left(\vartheta_0, vT\right)\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{v}\left[K_1\left(\vartheta_0\right)^2 + K_2\left(\vartheta_0\right)^2 + 2R_{1,2}\left(\vartheta_0\right)\right]. \tag{39}$$

证明。 记

$$r_m = \inf_{\vartheta\in\Theta} r\left(\vartheta\right), \qquad B_M = \sup_{\vartheta\in\Theta} B\left(\vartheta\right).$$

我们需要两个估计。为得到第一个估计，我们写出

$$\begin{aligned} m^{\star}_{t,T} = m^{\star}_{\tau_T,T} e^{-\int_{\tau_T}^{t} r(\vartheta^{\star}_{s,T})\mathrm{d}s} + f\left(\vartheta_0\right)\int_{\tau_T}^{t} e^{-\int_{\tau_T}^{t} r(\vartheta^{\star}_{s,T})\mathrm{d}s} B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right) m\left(\vartheta_0, s\right)\mathrm{d}s \\ + \sigma\int_{\tau_T}^{t} e^{-\int_{\tau_T}^{t} r(\vartheta^{\star}_{s,T})\mathrm{d}s} B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right)\mathrm{d}\bar{W}_s \end{aligned}$$

并且该估计为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|m^{\star}_{t,T}\right|^2 \le 3e^{-r_m t}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|m^{\star}_{\tau_T,T}\right|^2 + 3\sigma^2 B_M^2\int_{\tau_T}^{t} e^{-r_m(t-s)}\mathrm{d}s \\ + 3f\left(\vartheta_0\right)^2 B_M^2\int_{\tau_T}^{t} e^{-r_m(t-s)}\int_{\tau_T}^{t} e^{-r_m(t-q)}\mathbf{E}_{\vartheta_0} m\left(\vartheta_0, s\right) m\left(\vartheta_0, q\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}q \le C, \end{aligned}$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 t。

类似地，我们可以验证以下估计：对于任意 $p \ge 2$，存在一个常数 $C = C(p) > 0$，使得

$$\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\sup_{\tau_T\le t\le T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|m^{\star}_{t,T}\right|^p \le C.$$

为得到第二个估计，我们将差值 $\Delta_{t,\ T} = m^{\star}_{t,\ T} - m\left(\vartheta_0, t\right)$ 和 $\Delta_{vT,\ T}$写成如下表示式

$$\begin{aligned} \Delta_{t,T} = \int_{\tau_T}^{t} e^{-r(\vartheta_0)(t-s)}\left[r\left(\vartheta_0\right) - r\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right)\right] m^{\star}_{s,T}\mathrm{d}s \\ + \int_{\tau_T}^{t} e^{-r(\vartheta_0)(t-s)}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right) - B\left(\vartheta_0\right)\right] f\left(\vartheta_0\right) m\left(\vartheta_0, s\right)\mathrm{d}s \\ + \sigma\int_{\tau_T}^{t} e^{-r(\vartheta_0)(t-s)}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right) - B\left(\vartheta_0\right)\right]\mathrm{d}\bar{W}_s \end{aligned}$$

$$= T\int_{\varepsilon_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[r\left(\vartheta_0\right)-r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right]m^{\star}_{uT,T}\mathrm{d}u$$
$$+ T\int_{\varepsilon_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]f\left(\vartheta_0\right)m\left(\vartheta_0,uT\right)\mathrm{d}u$$
$$+ \sqrt{T}\sigma\int_{\varepsilon_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]\mathrm{d}W_T\left(u\right)\equiv\Delta_{vT,T},$$

其中 $\varepsilon_T = T^{\delta-1}$和 $W_T(u) = T^{-1/2}\bar{W}_{uT}$是维纳过程。

令 $\nu_T = T^{-\kappa}, \kappa \in (0,1)$。于是我们得到如下估计

$$T^{3/2}\int_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left|\left[r\left(\vartheta_0\right)-r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right]m^{\star}_{uT,T}\right|\mathrm{d}u$$
$$\leq CT^{3/2}e^{-r(\vartheta_0)T^{1-\kappa}}\int_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T}\left|m^{\star}_{uT,T}\right|\mathrm{d}u\to 0.$$

我们研究 $\Delta_{vT,T}$ 在 $v \in (\varepsilon_0,1)$ 取值时的情形，其中 $\varepsilon_0 \in (0,1)$。因此，只需研究以下积分

$$\sqrt{T}\Delta_{vT,T} = T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[r\left(\vartheta_0\right)-r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right]m^{\star}_{uT,T}\mathrm{d}u$$
$$+ T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]f\left(\vartheta_0\right)m\left(\vartheta_0,uT\right)\mathrm{d}u$$
$$+ \sigma T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right)+o\left(1\right).$$

我们有

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\Delta_{t,T}\right)^2 \leq 3\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\int_{\tau_T}^{t} e^{-r(\vartheta_0)(t-s)}\left[r\left(\vartheta_0\right)-r\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right)\right]m^{\star}_{s,T}\mathrm{d}s\right)^2$$
$$+ 3\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\int_{\tau_T}^{t} e^{-r(\vartheta_0)(t-s)}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]f\left(\vartheta_0\right)m\left(\vartheta_0,s\right)\mathrm{d}s\right)^2$$
$$+ 3\sigma^2\int_{\tau_T}^{t} e^{-2r(\vartheta_0)(t-s)}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{s,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right]^2\mathrm{d}s.$$

回顾一下，单步最大似然估计过程的矩以及导数 $\dot{r}(\vartheta)$ 和 $B(\vartheta)$ 都是有界的。因此

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|r\left(\vartheta_0\right)-r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right|^2 \leq C\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\vartheta_0-\vartheta^{\star}_{uT,T}\right|^2 \leq CT^{-1},$$
$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)-B\left(\vartheta_0\right)\right|^2 \leq C\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\vartheta^{\star}_{uT,T}-\vartheta_0\right|^2 \leq CT^{-1}$$

利用初等估计可得

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\Delta_{t,T}\right)^2 = o\left(1\right) \qquad \text{and} \qquad m^{\star}_{t,T} = m\left(\vartheta_0, t\right) + O\left(\delta_T\right),$$

其中我们将 $\delta_T = \vartheta^{\star}_{uT,T} - \vartheta_0$ 记为。

我们关注估计误差 $\Delta_{t,T}$ 和 $T\mathbf{E}^{\vartheta_0}\Delta^2_{t,T}$ 的渐近（$T \to \infty$）行为。因此，我们考虑重新参数化 $t = vT$，并研究 $\Delta_{vT,T}$。注意，

$$\begin{aligned} f\left(\vartheta_0\right)\left[B(\vartheta^{\star}_{uT,T}) - B\left(\vartheta_0\right)\right] &= \frac{f\left(\vartheta_0\right)\Gamma(\vartheta^{\star}_{uT,T})}{f(\vartheta^{\star}_{uT,T})} - \Gamma(\vartheta_0) \\ &= \Gamma(\vartheta^{\star}_{uT,T}) - \Gamma\left(\vartheta_0\right) + \frac{\left(f\left(\vartheta_0\right) - f(\vartheta^{\star}_{uT,T})\right)}{f(\vartheta^{\star}_{uT,T})}\Gamma(\vartheta^{\star}_{uT,T}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\left[r\left(\vartheta_0\right) - r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right] m^{\star}_{uT,T} + f\left(\vartheta_0\right)\left[B(\vartheta^{\star}_{uT,T}) - B\left(\vartheta_0\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right) \\ &\quad = \left[r\left(\vartheta_0\right) - r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right)\left(1 + O\left(\delta_T\right)\right) + \left[\Gamma(\vartheta^{\star}_{uT,T}) - \Gamma\left(\vartheta_0\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right) \\ &\qquad + \frac{\left(f\left(\vartheta_0\right) - f(\vartheta^{\star}_{uT,T})\right)}{f(\vartheta^{\star}_{uT,T})}\Gamma(\vartheta^{\star}_{uT,T}) m\left(\vartheta_0, uT\right) \\ &\quad = -\left[\dot{a}\left(\vartheta_0\right) + \frac{\dot{f}\left(\vartheta_0\right)}{f\left(\vartheta_0\right)}\Gamma\left(\vartheta_0\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right)\delta_T + O\left(\delta_T^2\right). \end{aligned}$$

由这些关系可得

$$\begin{aligned} \sqrt{T}\Delta_{vT,T} &= T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[r\left(\vartheta_0\right) - r\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right)\mathrm{d}u\left(1 + o\left(\delta_T\right)\right) \\ &\quad + T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[\frac{f\left(\vartheta_0\right)\Gamma\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right)}{f(\vartheta^{\star}_{uT,T})} - \Gamma\left(\vartheta_0\right)\right] m\left(\vartheta_0, uT\right)\mathrm{d}u\left(1 + o\left(\delta_T\right)\right) \\ &\quad + \sigma T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left[B\left(\vartheta^{\star}_{uT,T}\right) - B\left(\vartheta_0\right)\right]\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right) \\ &= -\left[\dot{a}\left(\vartheta_0\right) + \frac{\dot{f}\left(\vartheta_0\right)}{f\left(\vartheta_0\right)}\Gamma\left(\vartheta_0\right)\right] T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left(\vartheta^{\star}_{uT,T} - \vartheta_0\right) m\left(\vartheta_0, uT\right)\mathrm{d}u \\ &\quad + \dot{B}\left(\vartheta_0\right)\sigma T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left(\vartheta^{\star}_{uT,T} - \vartheta_0\right)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right) + o\left(1\right) \\ &= C\left(\vartheta_0\right) T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T} u^{-1}\eta_T\left(u\right) m\left(\vartheta_0, uT\right)\mathrm{d}u \\ &\quad + D\left(\vartheta_0\right)\sqrt{T}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T} u^{-1}\eta_T\left(u\right)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right) + o\left(1\right), \end{aligned}$$

其中

$$C\left(\vartheta_0\right)=-\left[\dot{a}\left(\vartheta_0\right)+\frac{\dot{f}\left(\vartheta_0\right)}{f\left(\vartheta_0\right)}\Gamma\left(\vartheta_0\right)\right]\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1/2},\qquad D\left(\vartheta_0\right)=\dot{B}\left(\vartheta_0\right)\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1/2}\sigma.$$

我们得到如下估计

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\vartheta_0}T\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left|u^{-1}\eta_T\left(u\right)-v^{-1}\eta_T\left(v\right)\right|\left|m\left(\vartheta_0,uT\right)\right|\mathrm{d}u\\&\quad\leq T\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left(\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|u^{-1}\eta_T\left(u\right)-v^{-1}\eta_T\left(v\right)\right|^2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|m\left(\vartheta_0,uT\right)\right|^2\right)^{1/2}\mathrm{d}u\\&\quad\leq CT\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\left|v-u\right|^{1/2}\mathrm{d}u\leq C\nu_T^{1/2}\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

其中我们使用了估计式 (32)。

因此

$$\begin{aligned}&T\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}u^{-1}\eta_T\left(u\right)m\left(\vartheta_0,uT\right)\mathrm{d}u\\&\qquad=v^{-1}\eta_T\left(v\right)T\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}m\left(\vartheta_0,uT\right)\mathrm{d}u+O(\nu_T^{1/2}).\end{aligned}$$

将.....代入

$$m\left(\vartheta_0,uT\right)=\frac{\Gamma\left(\vartheta_0\right)\sigma}{f\left(\vartheta_0\right)}\sqrt{T}\int_{-\infty}^{u}e^{-a(\vartheta_0)(u-z)T}\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)$$

最后一个积分后，我们得到以下表达式

$$\begin{aligned}&T\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}m\left(\vartheta_0,uT\right)\mathrm{d}u\\&\qquad=\frac{\Gamma\left(\vartheta_0\right)\sigma}{f\left(\vartheta_0\right)}T^{3/2}\int_{v-\nu_T}^{v}e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\int_{-\infty}^{u}e^{-a(\vartheta_0)(u-z)T}\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\,\mathrm{d}u\\&\qquad=\frac{\Gamma\left(\vartheta_0\right)\sigma}{f\left(\vartheta_0\right)}T^{3/2}e^{-r(\vartheta_0)vT}\int_{-\infty}^{v}e^{a(\vartheta_0)zT}\int_{\left(v-\nu_T\right)\vee z}^{v}e^{\Gamma(\vartheta_0)uT}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\\&\qquad=\frac{\sigma\sqrt{T}}{f\left(\vartheta_0\right)}e^{-r(\vartheta_0)vT}\int_{-\infty}^{v}e^{a(\vartheta_0)zT}\left[e^{\Gamma(\vartheta_0)vT}-e^{\Gamma(\vartheta_0)\left[\left(v-\nu_T\right)\vee z\right]T}\right]\,\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\\&\qquad=\frac{\sigma\sqrt{T}}{f\left(\vartheta_0\right)}\int_{v-\nu_T}^{v}\left[e^{-a(\vartheta_0)(v-z)T}-e^{-r(\vartheta_0)(v-z)T}\right]\,\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\left(1+o\left(1\right)\right).\end{aligned}$$

注意,

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\sqrt{T}\int_{-\infty}^{v-\nu_T}e^{-r(\vartheta_0)(v-z)T}\,\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\right)^2$$

$$= T\int_{-\infty}^{v-\nu_T} e^{-2r(\vartheta_0)(v-z)T}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2r\left(\vartheta_0\right)}e^{-2r(\vartheta_0)\nu_T T} \longrightarrow 0.$$

因此，我们得到了如下表示:

$$T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}m\left(\vartheta_0, uT\right)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\sigma\sqrt{T}}{f\left(\vartheta_0\right)}\int_{v-\nu_T}^{v}\left[e^{-a(\vartheta_0)(v-z)T} - e^{-r(\vartheta_0)(v-z)T}\right]\,\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\left(1+o\left(1\right)\right).$$

记

$$Q_T\left(v\right) = \sqrt{T}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}u^{-1}\eta_T\left(u\right)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right),$$
$$U_T\left(v\right) = \eta_T\left(v\right)\sqrt{T}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right),$$
$$g\left(\vartheta_0, zT\right) = \frac{\dot{M}\left(\vartheta_0, zT\right)}{\sigma\sqrt{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)}},$$

并计算 $\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[Q_T(v) - v^{-1}U_T(v)\right]^2$。回顾 $\mathbf{E}_{\vartheta_0}g\left(\vartheta_0, zT\right)^2 = 1$ 以及

$$\eta_T\left(v\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)}}\int_{\varepsilon_T}^{v}\dot{M}\left(\vartheta_0, zT\right)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right) = \int_{\varepsilon_T}^{v} g\left(\vartheta_0, zT\right)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right).$$

我们有

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}Q_T\left(v\right)^2 = T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-2r(\vartheta_0)(v-u)T}u^{-2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\eta_T\left(u\right)^2\mathrm{d}u$$
$$= T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-2r(\vartheta_0)(v-u)T}u^{-1}\mathrm{d}u\left(1+O\left(\varepsilon_T\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2r\left(\vartheta_0\right)v} + T\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-2r(\vartheta_0)(v-u)T}\frac{(v-u)}{vu}\mathrm{d}u + O\left(\varepsilon_T\right)$$
$$= \frac{1}{2r\left(\vartheta_0\right)v} + O\left(\nu_T\right) + O\left(\varepsilon_T\right).$$

注意到积分

$$I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} = \int_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} g(\vartheta_0, zT)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right) \quad \text{and} \quad J_{v-\nu_T}^{v} = \sqrt{T}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right)$$

是独立随机变量。因此我们可以写出

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}U_T\left(v\right)^2 = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\int_{\varepsilon_T}^{v} g(\vartheta_0, zT)\mathrm{d}\bar{W}_T\left(z\right)\right)^2\left(\sqrt{T}\int_{v-\nu_T}^{v} e^{-r(\vartheta_0)(v-u)T}\mathrm{d}\bar{W}_T\left(u\right)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} + I_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \\
&= \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T}\right)^2 \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 + 2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} I_{v-\nu_T}^{v}\right)\left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \\
&\qquad + \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

第一项的表达式如下

$$
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T}\right)^2 \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 = \left(v - \nu_T - \varepsilon_T\right) \frac{1}{2r\left(\vartheta_0\right)} \left(1 + o\left(1\right)\right),
$$

对于第二项

$$
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T} I_{v-\nu_T}^{v}\right)\left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \leq \left[\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{\varepsilon_T}^{v-\nu_T}\right)^2 \left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^4\right]^{1/2} \leq C\nu_T^{1/2},
$$

对于第三项

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 \left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^2 &\leq \left[\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(I_{v-\nu_T}^{v}\right)^4 \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(J_{v-\nu_T}^{v}\right)^4\right]^{1/2} \\
&\leq C\left[\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\int_{v-\nu_T}^{v} g(\vartheta_0, zT)^2 \mathrm{d}z\right)^2\right]^{1/2} \leq C\nu_T.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[Q_T\left(v\right) - v^{-1}U_T\left(v\right)\right]^2 = O\left(\varepsilon_T\right) + O(\nu_T^{1/2}) \longrightarrow 0.
$$

因此，我们得到了导数的表达式

$$
\begin{aligned}
\dot{m}\left(\vartheta_0, vT\right) &= -\frac{\sigma\left[\dot{a}\left(\vartheta_0\right) + B\left(\vartheta_0\right)\dot{f}\left(\vartheta_0\right)\right]}{f\left(\vartheta_0\right)\sqrt{2a\left(\vartheta_0\right)\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)}}\,\xi_T^{(1)}\left(v\right) + \frac{\sigma\dot{r}\left(\vartheta_0\right)}{f\left(\vartheta_0\right)\sqrt{2r\left(\vartheta_0\right)\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)}}\,\xi_T^{(2)}\left(v\right) + o\left(1\right) \\
&= K_1\left(\vartheta_0\right)\,\xi_T^{(1)}\left(v\right) + K_2\left(\vartheta_0\right)\,\xi_T^{(2)}\left(v\right) + o\left(1\right). \qquad (40)
\end{aligned}
$$

现在，关系式（38）和（39）可由该表达式推出

$$
\sqrt{T}\left(m_{vT,T}^{\star} - m\left(\vartheta_0, t\right)\right) = \frac{\eta_T\left(v\right)}{v}\sum_{i=1}^{2} K_i\left(\vartheta_0\right)\xi_T^{(i)}\left(v\right) + o\left(1\right). \qquad (41)
$$

以及 $\eta_T(v)$ $\xi_T^{(i)}(v)$ $i=1$ 的性质，2

□

注 2。 假设未知参数为 $\vartheta = b$ ，并为该系统写出自适应滤波器

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f\, Y_t\, \mathrm{d}t + \sigma\, \mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -a\, Y_t\, \mathrm{d}t + \vartheta\, \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \ge 0, \end{aligned}$$

采用递归形式。

回顾一下， $\tau_T = T^\delta\, \delta \in$-(12， 1）、初步估计量和一步最大似然估计过程为

$$\vartheta^*_{\tau_T} = \left(\frac{a^3}{f^2 \left[e^{-a} - 1 + a \right] \tau_T} \sum_{k=1}^{\tau_T} \left(\left[X_k - X_{k-1} \right]^2 - \sigma^2 \right) \right)^{1/2},$$

$$\mathrm{d}\vartheta^\star_{t,T} = \frac{\vartheta^*_{\tau_T} - \vartheta^\star_{t,T}}{t - \tau_T}\, \mathrm{d}t + \frac{2\sigma^3\, r(\vartheta^*_{\tau_T})^3\, \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, t)}{f^4\, \vartheta^{*2}_{\tau_T}\, \left(t - \tau_T \right)} \left[\mathrm{d}X_t - M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t \right], \quad \tau_T < t \le T.$$

$\dot{M}$（$\vartheta^*_{\tau_T}$， t） $\tau_T < t \le T$和 M（$\vartheta^*_{\tau_T}$， t） $\tau_T < t \le T$的方程为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M(\vartheta^*_{\tau_T}, t) &= -r(\vartheta^*_{\tau_T}) M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \Gamma(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t, \qquad M(\vartheta^*_{\tau_T}, 0), \\ \mathrm{d}\dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, t) &= -r(\vartheta^*_{\tau_T}) \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \dot{r}(\vartheta^*_{\tau_T}) M(\vartheta^*_{\tau_T}, t)\mathrm{d}t + \dot{\Gamma}(\vartheta^*_{\tau_T})\mathrm{d}X_t, \qquad \dot{M}(\vartheta^*_{\tau_T}, 0), \end{aligned}$$

其中，初始值 $\dot{M}$（$\vartheta^*_{\tau_T}$， 0）和 M（$\vartheta^*_{\tau_T}$， 0）分别由公式（28）和（29）计算得到。

注 3。二维参数情形下 m（ϑ， t）的近似，例如在**AB**情形下： $\vartheta =$（a， b）$^\top =$（θ_1，θ_2），也可以用费 Fisher 信息矩阵表示，但表达式会更加繁杂，其证明与上文给出的单维情形证明相当接近。

6 渐近有效性

我们有同一个部分观测系统

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f\left(\vartheta\right) Y_t\, \mathrm{d}t + \sigma\, \mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \le t \le T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -a\left(\vartheta\right) Y_t\, \mathrm{d}t + b\left(\vartheta\right)\, \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \ge 0, \end{aligned}$$

其中，函数 $f(\cdot)$ $a(\cdot)$ $b(\cdot)$ 满足定理 1 的条件。自适应滤波器由 (37) 给出，我们想知道近似误差 $\mathrm{E}^\vartheta \left| m^\star_{t,\ T} - m(\vartheta, t) \right|^2$是否渐近最优? 与前面一样，我们提出所有估计量 $\bar{m}_t$ 的风险极小极大下界，假设其计算基于截至时间 t 的观测值，即这些估计量依赖于 $X^t = (X_s, 0 \le s \le t)$。

根据定理 1，最大似然估计量和贝叶斯估计量是相合的、渐近正态的，并且多项式矩在紧集 $\mathbb{K} \subset \Theta$ 上一致收敛。此外，由 [9] 中的定理 3.2.2 可知，贝叶斯估计量具有与 (31) 类似的表示形式

$$\sqrt{t}\left(\tilde{\vartheta}_t - \vartheta_0\right) = \frac{1}{\sigma \mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)\sqrt{t}} \int_0^t \dot{M}\left(\vartheta_0, s\right) \mathrm{d}\bar{W}_s + o\left(1\right). \tag{42}$$

记

$$S^\star\left(\vartheta_0\right)^2 = K_1\left(\vartheta_0\right)^2 + K_2\left(\vartheta_0\right)^2 + R_{1,2}\left(\vartheta_0\right).$$

定理4. 设定理 *1* 的条件成立。则有如下极小极大下界：对于任意估计量 $\bar{m}_{t,T}$ 关于 $m\left(\vartheta, t\right)$ 的（下文记为 $t = vT$）

$$\lim_{\nu \to 0} \varliminf_{T \to \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| \le \nu} t\, \mathbf{E}_\vartheta \left|\bar{m}_{t,T} - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 \ge S^\star\left(\vartheta_0\right)^2.$$

证明. 下面的证明基于 [9] 中定理1.9.1的证明。我们有如下基本估计

$$\sup_{|\vartheta - \vartheta_0| \le \nu} \mathbf{E}_\vartheta \left|\bar{m}_{t,T} - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 \ge \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta \left|\bar{m}_{t,T} - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta.$$

这里，函数 $p_\nu(\vartheta)$ $\vartheta_0 - \nu < \vartheta < \vartheta_0 + \nu$是一个正的连续密度。若记$\tilde{m}_t$与此密度 $p_\nu(\cdot)$ 对应的、关于 $m(\vartheta, t)$ 的贝叶斯估计量，则

$$\tilde{m}_t = \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} m\left(\theta, t\right) p_\nu\left(\theta | X^t\right) \mathrm{d}\theta, \qquad p_\nu\left(\theta | X^t\right) = \frac{p_\nu\left(\theta\right) L\left(\theta, X^t\right)}{\int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} p_\nu\left(\theta\right) L\left(\theta, X^t\right) \mathrm{d}\theta}$$

and

$$\int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta \left|\bar{m}_{t,T} - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \ge \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta \left|\tilde{m}_t - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta.$$

贝叶斯估计量 $\tilde{m}_t$ 的渐近行为可描述如下（其中 $\theta_u = \vartheta + \varphi_t u, \varphi_t = t^{-1/2}, \mathbb{U}_\nu = \left(\sqrt{t}(\vartheta_0 - \nu - \vartheta) \quad \sqrt{t}(\vartheta_0 + \nu - \vartheta)\right)$ ）

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_t &= \frac{\int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} m\left(\theta, t\right) p_\nu\left(\theta\right) L\left(\theta, X^t\right) \mathrm{d}\theta}{\int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} p_\nu\left(\theta\right) L\left(\theta, X^t\right) \mathrm{d}\theta} = \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} m\left(\theta_u, t\right) p_\nu\left(\theta_u\right) L\left(\theta_u, X^t\right) \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu\left(\theta_u\right) L\left(\theta_u, X^t\right) \mathrm{d}u} \\
&= m\left(\vartheta, t\right) + \varphi_t \dot{m}\left(\vartheta, t\right) \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u p_\nu\left(\theta_u\right) \frac{L\left(\theta_u, X^t\right)}{L\left(\vartheta, X^t\right)} \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu\left(\theta_u\right) \frac{L\left(\theta_u, X^t\right)}{L\left(\vartheta, X^t\right)} \mathrm{d}u} \left(1 + o\left(1\right)\right) \\
&= m\left(\vartheta, t\right) + \varphi_t \dot{m}\left(\vartheta, t\right) \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u p_\nu\left(\vartheta\right) Z_t\left(u\right) \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu\left(\vartheta\right) Z_t\left(u\right) \mathrm{d}u} \left(1 + o\left(1\right)\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{t}\left(\tilde{m}_t - m\left(\vartheta, t\right)\right) = \dot{m}\left(\vartheta, t\right) \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u Z_t\left(u\right) \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} Z_t\left(u\right) \mathrm{d}u} \left(1 + o\left(1\right)\right) \tag{43}$$

$$= \dot{m}\left(\vartheta, t\right) \frac{\Delta_t\left(\vartheta, X^t\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta\right)} \left(1 + o\left(1\right)\right). \tag{44}$$

Here

$$\Delta_t\left(\vartheta, X^t\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_0^t \dot{M}\left(\vartheta, s\right) \, \mathrm{d}\bar{W}_s \Longrightarrow \Delta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}\left(\vartheta\right)\right)$$

回顾一下,

$$Z_t\left(u\right) \Longrightarrow Z\left(u\right) = \exp\left(u\Delta\left(\vartheta\right) - \frac{u^2}{2}\mathrm{I}\left(\vartheta\right)\right), \qquad \frac{\int_{\mathcal{R}} u Z\left(u\right) \mathrm{d}u}{\int_{\mathcal{R}} Z\left(u\right) \mathrm{d}u} = \frac{\Delta\left(\vartheta\right)}{\mathrm{I}\left(\vartheta\right)}.$$

Moreover 紧集上一致 $\mathbb{K} \subset (\vartheta_0 - \nu, \vartheta_0 + \nu)$ 矩收敛

$$t\mathbf{E}_\vartheta \left(\tilde{m}_t - m\left(\vartheta, t\right)\right)^2 \to \lim_{t\to\infty} t\mathbf{E}_\vartheta \left[\dot{m}\left(\vartheta, t\right)^2 \left(\tilde{\vartheta}_t - \vartheta\right)^2\right] = S^\star\left(\vartheta\right)^2 \tag{45}$$

也成立。上述关系的详细证明可见 [9] 中定理 3.2.1 和 3.2.2 的证明

因此

$$t\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta \left|\tilde{m}_t - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \longrightarrow \int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} S^\star\left(\vartheta\right)^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta$$

并且当 $\nu \to 0$

$$\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} S^\star\left(\vartheta\right)^2 p_\nu\left(\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \longrightarrow S^\star\left(\vartheta_0\right)^2.$$

□

如果对所有 $\vartheta_0 \in \Theta$, $t = vT$ 以及任意 $v \in [\varepsilon_0, 1]$ 都有 $m^\circ_{t,\ T}$, $\tau_T < t \leq T$渐近有效，我们称估计量

$$\lim_{\nu\to 0} \lim_{T\to\infty} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\leq\nu} t\mathbf{E}_\vartheta \left|m^\circ_{t,T} - m\left(\vartheta, t\right)\right|^2 = S^\star\left(\vartheta_0\right)^2.$$

此处 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$。

定理 5. 设定理 *1* 的条件成立。则估计量 $m^\star_t$, $\tau_T < t \leq T$ 是渐近有效的。

证明。 提醒一下，在这个正则统计问题中，贝叶斯估计量和最大似然估计量具有相同的渐近性质（见定理 1），而且单步最大似然估计过程在此意义下也与贝叶斯估计量˜等价。因此，如果我们在 (45) 中用 $\vartheta_{t,\,T}^{\star}$ 替换 ϑ_t ，并比较表示式 (31) 和 (42)，便可得出结论：极限必然相同。我们有

$$m_t^{\star} - m\left(\vartheta, t\right) = \dot{m}\left(\vartheta, t\right)\,\left(\vartheta_{t,T}^{\star} - \vartheta\right)\left(1 + o\left(1\right)\right) = \dot{m}\left(\vartheta, t\right)\,\left(\tilde{\vartheta}_t - \vartheta\right)\left(1 + o\left(1\right)\right).$$

□

参考文献

[1] Arato, M. (1983)常系数线性随机系统：一种统计方法。控制与信息科学讲义，45，纽约：施普林格出版社。[2] Bagchi, A., Borkar,V. (1984) 无限维线性系统中的参数辨识。《随机过程》，12，201–213。[3] Bell, B.M. and Cathey, F. (1993) 作为高斯-牛顿方法的迭代卡尔曼滤波更新。*IEEE Trans. Autom. Control*，38，2，294-297。[4] Bickel, P.J., Ritov, Y. and Rydén, T. (1998) 一般隐马尔可夫模型的最大似然估计量的渐近正态性。《统计年刊》，26，4，1614-1635。[5] Brown, S.D. and Rutan, S.C. (1985) 自适应卡尔曼滤波。《美国国家标准局研究杂志》。90，6，403-407。[6] Cappé, O., Moulines, E. and Rydén, T. (2005)隐马尔可夫模型中的推断。Springer, 纽约。[7] Dembo, A, Zeitouni, O. (1984) 通过期望最大化算法估计部分观测连续时间随机过程的参数。《随机过程及其应用》，23，91-113。[8] Haykin, S. (2014) 自适应滤波理论。第五版，培生教育，波士顿。[9] Ibragimov, I.A. and Khasminskii R. Z. (1981)统计估计——渐近理论。Springer, 纽约。[10] Jazwinski, A.H. (1970)随机过程与滤波理论。学术出版社，纽约。[11] Kalman, R.E., and Bucy, R.S. (1961) 线性滤波与预测理论的新成果。*Trans. ASME*，83D，95-100。[12] Kallianpur, G., Selukar, R.S. (1991) 线性滤波中的参数估计。*J. Mul-tivar Anal.*，**39**，284–304。

[13] Khasminskii, R.Z. and Kutoyants, Yu.A. (2018) 关于隐马尔可夫电报过程的参数 **Z** 估计。*Bernoulli*，24，3，2064-2090。[14] Kutoyants, Yu.A. (1984)随机过程的参数估计。Heldermann，柏林。[15]Kutoyants, Yu.A. (1994) 小噪声下动力系统的辨识。Kluwer Academic Publisher，多德雷赫特。[16]Kutoyants, Yu.A. (2004) 遍历扩散过程的统计推断。Springer，伦敦。[17] Kutoyants, Yu.A. (2019) 关于隐遍历奥恩斯坦–乌伦贝克过程的参数估计。*Electronic Journal of Statistics*，13，4508-4526。[18] Kutoyants, Yu.A. (2019) 关于隐奥恩斯坦–乌伦贝克过程的参数估计。*J. Multivar. Analysis*，169，1，248-269。[19] Kutoyants, Yu. A. (2022) 隐马尔可夫过程的波动率估计与自适应滤过”，*arXiv:2010.07603*，已投稿[20] Kutoyants, Yu. A. (2023) 隐自回归过程与自适应卡尔曼滤波器。已投稿。[21] Kutoyants, Yu.A. and Motrunich, A. (2016) 马尔可夫序列的多步最大似然估计过程。*Metrika*，79，705-724。[22] Kutoyants, Yu.A. and Zhou, L. (2021) 受扰随机微分方程中隐高斯过程的参数估计，*Electr. J. of Stat.*，15，211-234。[23] Liptser, R.S. and Shiryayev, A.N. (2001)随机过程统计学，第一卷：一般理论。第二版，Springer，纽约。[24] Ljung, L. (1979) 扩展卡尔曼滤波器作为线性系统参数估计量的渐近行为。*IEEE Trans. Autom. Control* , 24(1)，36-50。[25] Mehra, R.K. (1970) 关于方差辨识与自适应卡尔曼滤波，*IEEE Trans. Autom. Control AC-IS,*175-184，[26] Sayed, A.H. (2008) 自适应滤波器。John Wiley & Sons，新泽西州。