arXiv:2304.08872v1 [cs.LO] 18 Apr 2023

线性时序逻辑规范化的一个简单重写系统*

Javier Esparza[1], Rubén Rubio[2], 和 Salomon Sickert[3]

[1] 德国慕尼黑工业大学[2] 西班牙马德里康普顿斯大学[3] 以色列耶路撒冷希伯来大学

摘要。 20世纪80年代中期，Lichtenstein、Pnueli 和 Zuck 证明，过去时线性时序逻辑（Past LTL，即扩展了过去时算子的线性时序逻辑）中的每个公式，都等价于若干形如 GF$\varphi \vee$FGψ 的公式的合取，其中 φ 和 ψ 仅包含过去时算子。几年后，Chang、Manna 和 Pnueli 为线性时序逻辑推导出了类似的范式。这两种规范化过程在最坏情况下都存在非初等级的膨胀，并沿着一条复杂的路径，将公式转换为无计数器自动机，再转换为无星正则表达式，最后转换回公式。2020年，Sickert 和 Esparza 提出了一种直接且纯句法的线性时序逻辑规范化过程，得到的范式与 Chang、Manna 和 Pnueli 提出的范式类似，且仅有一次指数级膨胀；他们还将该过程用于为给定公式构造简洁的确定性 ω自动机。然而，即使在最佳情况下，该过程的时间复杂度也达到了指数级。尤其是，对于几乎已经处于范式中的公式，它并不能更高效地处理。本文提出另一种规范化过程，其基础是一组简单的重写规则。

1 引言

20世纪70年代末，Amir Pnueli 将线性时序逻辑（LTL）引入计算机科学，用作描述和验证并发程序的框架[15,16], ，这一贡献为他赢得了1996年图灵奖。20世纪80年代至90年代初，Pnueli 与其他研究人员合作，继续研究 LTL 能够表达的性质。1985年，Lichtenstein、Pnueli 和 Zuck 对 LTL性质进行了分类 [7], ；Manna 和 Pnueli 后来对其作了详细描述，并将其称为安全性-进展层次结构，见 [11,12]。这些研究采用了包含过去时算子的 LTL 扩展版本，称为过去时线性时序逻辑。安全性-进展层次结构由一个安全性公式类和五个进展类组成。这些类别根据其模型从语义上定义，而其中最大的类别称为

* 本研究部分l̈ds̈u德国研究联合会（DFG）项目 183790222、317422601 和 436811179 的资助；欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划下的第 787367 号资助协议（PaVeS）提供资助；西班牙科学与创新部项目 ProCode（PID2019-108528RB-C22）提供资助；此外还获得西班牙大学部的 FPU17/02319 和 EST21/00536 号资助。

反应性类，见[11,12]，，包含 LTL 能表达的所有性质。Manna 和 Pnueli 给出了每个类别的句法刻画。特别是，他们证明了一个基本定理：每个反应性性质都可以表示为若干形如$\mathbf{GF}\varphi \vee \mathbf{FG}\psi$的公式的合取，其中$\mathbf{F}\chi$和$\mathbf{G}\chi$分别表示 χ 在未来某个时刻和每个时刻都成立，而 φ、ψ 只包含过去时算子。

1992年，Chang、Manna 和 Pnueli 提出了一种不同且十分优雅的刻画方法：用不含过去时算子的标准 LTL 来描述安全性-进展层次结构，其中只包含未来时算子 X（下一步）、U（直到）和 W（弱直到）[4]。他们证明，每个反应性公式都等价于一个处于否定范式的 LTL 公式，并且语法树中的每条路径至多包含一次 U 和 W 的交替。我们将这一基本结果称为规范化定理。按照 [3,13,18]，中的记法（该记法仿照算术层次结构和多项式层次结构中的 Σ_i、Π_i 和 Δ_i 类的定义），他们证明每个 LTL 公式都等价于一个 Δ_2-公式。

尽管这些范式对模型检测、自动综合和演绎验证产生了深远的概念影响（近期综述见 [14] ），规范化过程 却没有产生任何影响。尤其是，与命题逻辑或一阶逻辑的情况不同，这些过程尚未在工具中实现。原因在于它们并不直接、复杂度很高，而且正确性证明也十分繁琐。 [4] 中概述的规范化定理证明（据我们所知，完整证明从未发表）依赖于 Lichtenstein、Pnueli 和 Zuck 于 1985年提出的定理；其完整证明可见于 Zuck 的博士论文 [19]。Zuck 的证明先将初始的过去时线性时序逻辑公式转换为无计数器半自动机，再应用 Krohn-Rhodes 分解及其他结果，将该自动机转换为无星正则表达式，最后将此表达式转换为一个会导致非初等级膨胀的反应性公式。值得注意的是，尽管 Zuck 的规范化过程影响深远，改进这一非初等级过程的进展却寥寥无几，尽管当时尚无已知的下界。

一方面，Maler 和 Pneuli 提出了一种双指数级[4]构造，该构造基于 Krohn-Rhodes 分解，将确定性无计数自动机转换为过去时线性时序逻辑公式 [9,10,8]。另一方面，在此工作的基础上，Boker、Lehtinen 和 Sickert 发现了一种三指数级构造，可将其转换为不含过去时算子的标准线性时序逻辑公式 [2]。值得注意的是，这两种构造分别得到过去时线性时序逻辑（[11,12]）和标准线性时序逻辑（[4,3,13,18]）的范式公式。

2020年，我们中的两位提出了规范化定理的一种新证明，该证明见于[18]（基于 [17]）。我们证明了每个线性时序逻辑公式 φ 都等价于如下形式的公式

$$\bigvee_{M \subseteq \mu(\varphi), N \subseteq \nu(\varphi)} \varphi_{M,N}$$

其中，$\mu(\varphi)$ 和 $\nu(\varphi)$ 分别是 φ 中顶层算子属于{U、M} 和 {W、R}的子公式集合，而 $\varphi_{M,\ N}$ 是由 φ得到的一个 Δ_2-公式，

[4] 更多详情请参阅[2, 备注 1]。

M，并通过 N 若干句法重写规则得到。由此产生的规范化过程具有单指数复杂度，已在[18,17] 将 LTL 公式转换为确定性和极限确定性ω自动机的问题中得到应用。

尽管相较于先前间接且非初等的过程有了明显改进， [18] 的规范化算法仍然存在一个问题：由于必须考虑所有可能的 M 和 N集合，即使在最佳情况下，其时间复杂度也是指数级的。此外，该算法不是目标导向的，因为它并不只关注公式中不属于 Δ_2的那些部分。例如，考虑一族公式

$$\varphi_n = ((a\mathbf{U}b)\mathbf{W}c)\mathbf{U}\psi_n$$

其中， a、 b和 c是原子命题，而 ψ_n是某个非常大的公式，其中只包含 W 算子。直观地说， ψ_n 无需经过规范化过程处理，唯一的问题在于语法树最左分支上的 U-W-U 交替。然而，[18] 的过程对于 ψ_n的 W 子公式数量而言将是指数级的。

在本文中，我们给出了一种能够解决这些问题的规范化过程。该过程类似于将布尔公式转换为合取范式（CNF）的过程。回顾一下，如果一个布尔公式的语法树中没有任何合取位于析取之下，并且否定之下只有原子命题，那么该布尔公式就处于 CNF 中。重写规则可以消除违反这些条件之一的节点；例如，如果合取位于析取之下，我们就将合取分配到析取上。对于 LTL，我们需要处理的不是合取和析取，而是不同种类的时序算子；但我们仍然可以用如下形式的约束来刻画范式：“语法树中不存在位于 Y 节点之下的 X 节点”。我们的重写规则会消除违反这些约束之一的节点。

本文组织如下。第 2 节介绍线性时序逻辑的语法和语义。第 3 节定义安全性-进展层次结构，并回顾 Chang、Manna 和 Pnueli 的规范化定理。第 4 节介绍重写系统，并证明其正确性。第 5 节概述由重写系统导出的规范化算法；第 6 节介绍该算法的一些推论和扩展。最后，第 7 节报告实验评估结果。

2 预备知识

设 Σ 为一个有限字母表。 w 上的一个词 是由字母组成的无限序列$a_0a_1a_2\ldots$，其中对所有 $i \geq 0$均有 $a_i \in \Sigma$；语言是词的集合。有限词 是由字母组成的有限序列。所有词（有限词）的集合记为Σ^ω (Σ^*)。我们用 $w[i]$ （从 $i = 0$开始）表示词 w的第 i个字母。有限子串 $w[i]w[i+1]\ldots w[j-1]$简记为 w_{ij}，无限后缀 $w[i]w[i+1]\ldots$简记为 w_i。有限词的无限重复记为

$a_0 \dots a_n$，写作 $(a_0 \dots a_n)^\omega = a_0 \dots a_n a_0 \dots a_n a_0 \dots$。有限词或无限词的集合称为语言。

定义 2.1. 在原子命题集合 Ap 上的 *LTL* 公式由以下语法构成：

$$\varphi ::= \mathbf{tt} \mid \mathbf{ff} \mid a \mid \neg a \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \\ \mid \mathbf{X}\varphi \mid \varphi \mathbf{U} \varphi \mid \varphi \mathbf{W} \varphi \mid \varphi \mathbf{R} \varphi \mid \varphi \mathbf{M} \varphi$$

其中 $a \in Ap$ 是一个原子命题，而 **X**、**U**、**W**、**R** 和 **M** 分别是下一步、（强）直到、弱直到、（弱）释放和强释放算子。

在我们的方法中，包含强、弱直到算子以及否定范式至关重要。不过，加入 R 和 M 算子只是为了确保：标准语法中长度为 n 、带有否定但仅含直到算子的每个公式，都等价于我们语法中长度为 $O(n)$ 的公式。将含有 R 和 M 的公式转换为不含这两种算子的公式时，会导致指数级膨胀，因此可以移除它们。语义定义如下：

定义 2.2. 设 w 是字母表 $\Sigma := 2^{Ap}$ 上的一个词， φ 是一个公式。满足关系 $w \models \varphi$ 归纳地定义为满足以下条件的最小关系：

$w \models tt$ 对每个 w $w \not\models ff$ 对每个 w $w \models a$ 当且仅当 $a \in w[0] w \models \neg a$ 当且仅当 $a \notin w[0] w \models \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $w \models \varphi$ 且 $w \models \psi$ $w \models \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $w \models \varphi$ 或 $w \models \psi w \models X\varphi$ 当且仅当 $w_1 \models \varphi w \models \varphi U \psi$ 当且仅当 $\exists k.\, w_k \models \psi$ 且 $\forall j < k.\, w_j \models \varphi w \models \varphi M \psi$ 当且仅当 $\exists k.\, w_k \models \varphi$ 且 $\forall j \leq k.\, w_j \models \psi w \models \varphi R \psi$ 当且仅当 $\forall k.\, w_k \models \psi$ 或 $w \models \varphi M \psi w \models \varphi$ $W\psi$ 当且仅当 $\forall k.\, w_k \models \varphi$ 或 $w \models \varphi U \psi$

我们令 $\mathcal{L}(\varphi) := \{w \in \Sigma^\omega : w \models \varphi\}$ 表示 φ 的语言。我们扩展 $\models$ 的定义，并将 $\varphi \models \psi$ 作为 $\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}(\psi)$ 的简写。若 $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\psi)$，则两个公式$\varphi$ 和 ψ 等价，记作 $\varphi \equiv \psi$。此外，我们使用缩写 $F\varphi := tt\, U\, \varphi$（最终）和 $G\varphi := ff\, R\, \varphi$（总是）。

3 安全性—进展层级

我们回顾 Manna 和 Pnueli 研究的时序性质层次 [11]，其表述遵循 Černá 和 Pelánek [3]。该定义形式化了这样一种直觉：例如，当且仅当某个执行的有限前缀之一是“坏的”时，安全性质才会被该执行违反；等价地，当且仅当该执行的所有有限前缀都属于良好前缀语言时，该执行才满足该性质。

定义 3.1（[11,3]）。设 $P \subseteq \Sigma^{\omega}$ 是关于 Σ的一个性质。

– P 是安全性质，当且仅当存在一个有限词语言 $L \subseteq \Sigma^{*}$，使得 $w \in P$ 当且仅当 w 的所有有限前缀都属于 L。– P 是保证性质，当且仅当存在一个有限词语言 $L \subseteq \Sigma^{*}$，使得 $w \in P$ 当且仅当 w 存在一个属于 L 的有限前缀。– P 是义务性质，当且仅当它可以表示为安全性质和保证性质的正布尔组合。– P 是重复性质，当且仅当存在一个有限词语言 $L \subseteq \Sigma^{*}$，使得 $w \in P$ 当且仅当 w 有无限多个前缀属于 L。– P 是持续性质，当且仅当存在一个有限词语言 $L \subseteq \Sigma^{*}$，使得 $w \in P$ 当且仅当 w 除有限多个前缀外，其余前缀都属于 L。– P 是反应性性质，当且仅当 P 可以表示为重复性质和持续性质的正布尔组合。

这些类别之间的包含关系如图所示1a。Chang、Manna 和 Pnueli 在 [4] 中根据以下 LTL 片段对这些类别作了句法刻画：

定义 3.2（改编自[3]）。我们定义以下几类 *LTL* 公式：

– 类 $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ 是包含所有原子命题及其否定，并且对合取和析取运算封闭的最小公式集。– 类 Σ_{i+1} 是包含 Π_i，并且对合取、析取以及**X**、**U** 和 **M** 运算符封闭的最小公式集。– 类 Π_{i+1} 是包含 Σ_i，并且对合取、析取以及**X**、**R** 和 **W** 运算符封闭的最小公式集。– 类 Δ_{i+1} 是包含 Σ_{i+1} 和 Π_{i+1}，并且对合取和析取运算封闭的最小公式集。

以下是 [4, 定理 8]证明的一个推论：

定理 3.1（改编自 [3]）。能够用 *LTL* 表示的性质，当且仅当能够用类 Σ_1 中的公式表示时，才分别是保证性（安全性、义务性、持续性、复现性、反应性）性质，（Π_1、Δ_1、Σ_2、Π_2、Δ_2，分别）。

结合 [7], 所述的每个 LTL 公式都等价于一个反应性公式这一结果，Chang、Manna 和 Pnueli 得出：

定理 3.2（规范化定理[7,11,4]）。每个 *LTL* 公式都等价于 Δ_2 中的一个公式。

在 [18], Sickert 和 Esparza 给出了规范化定理的新证明。他们证明，每个公式 φ 都等价于如下形式的公式

$$\bigvee_{M \subseteq \mu(\varphi), N \subseteq \nu(\varphi)} \varphi_{M,N}$$



(a) 安全性-进展层次结构 [11]　　(b) 句法未来层级

图 1：两个层次结构并列展示，标明定理 3.1

其中，$\mu(\varphi)$ 和 $\nu(\varphi)$ 分别是 φ 中顶层算子属于 {U,M} 和 {W,R} 的子公式集合，而 $\varphi_{M,\,N}$ 是一个 Δ_2-公式，由 φ、M 和 N 通过少量句法重写规则得到。此外，$\varphi_{M,\,N}$ 的长度至多是 φ 的指数倍。尽管这相较于以往的过程有了很大改进，但它仍要求遍历 $\mu(\varphi)$ 和 $\nu(\varphi)$ 的所有子集，因此，即使对于那些存在等价 Δ_2-公式且只需线性膨胀的简单公式族，该过程总是 需要指数时间。

例 *3.1*。考虑以下公式族

$$\varphi_n = (\cdots((((a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{W} a_2) \mathbf{U} a_3) \mathbf{U} a_4) \cdots \mathbf{U} a_n)$$

当 $n \geq 3$时。集合 $\mu(\varphi_n)$ 和 $\nu(\varphi_n)$ 的大小分别为 $n-1$ 和 1。过程产生一个由 个公式组成的析取，N，因此其耗时为指数时间，关于 n。然而，穷尽地应用几条化简规则后，可得到一个长度为 $\Theta(n)$ 的简短范式公式：

$$\begin{aligned}\varphi_n \equiv (\mathbf{GF} a_1 \wedge (\cdots((((a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{U} (a_2 \vee \mathbf{G}(a_0 \vee a_1))) \mathbf{U} a_3) \mathbf{U} a_4) \cdots \mathbf{U} a_n) \\ \vee (\cdots((((a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{U} a_2) \mathbf{U} a_3) \mathbf{U} a_4) \cdots \mathbf{U} a_n)\end{aligned}$$

直观地说，要规范化 φ_n，只需解决由 φ_n 中的子公式 $((a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{W} a_2) \mathbf{U} a_3$ 引起的“局部”问题，该子公式属于 Σ_3；然而，[18] 的过程对此一无所知，会生成 2^{n+1} 个公式，之后又将它们化简掉。

4 规范化重写系统

我们提出一种重写系统，可用于规范化每个 LTL 公式。作为推论，我们得到了规范化定理的另一种证明。

关键思路是将时序算子的 GF（无限多次）和 FG（几乎总是）组合视为原子算子 GF 和 FG（注意排版中两个字母彼此相连）。我们称它们为极限

算子；直观而言，一个词是否满足公式$\mathbf{GF}\varphi$或$\mathbf{FG}\varphi$仅取决于它“在极限处”的行为，也就是说，$w'w$满足$\mathbf{GF}\varphi$或$\mathbf{FG}\varphi$当且仅当w满足该条件。[5] 因此，我们将极限算子加入语法中。此外，为了简化表述，我们还暂时移除了算子$\mathbf{M}$和$\mathbf{R}$（我们将在第6节重新引入它们）。因此，我们定义：

定义 4.1。集合Ap上的扩展线性时序逻辑公式由以下语法生成：

$$\begin{aligned}\varphi ::= \mathbf{tt} \mid \mathbf{ff} \mid a \mid \neg a \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \\ \mid \mathbf{X}\varphi \mid \varphi\mathbf{U}\varphi \mid \varphi\mathbf{W}\varphi \mid \mathbf{GF}\varphi \mid \mathbf{FG}\varphi\end{aligned}$$

确定公式在句法未来层次中的类别时，GF 和 FG 会被隐式替换为 GF 和 FG。例如，FGFa被重写为 FGFa，因此它是Σ_3的一个公式。在本节余下部分，我们只考虑按构造处于否定范式的扩展公式，并将它们简称为公式。

现在我们来定义范式的精确形式，它比Δ_2稍严格一些。形式为φUψ、φWψ、Xφ、GFφ和 FGφ的公式分别称为 U 公式、W 公式、X 公式、GF 公式和 FG 公式。我们将这些公式称为时序公式。公式φ的语法树T_φ按通常方式定义，而$|\varphi|$表示T_φ中节点的数量。如果T_φ某节点所根植的子公式是 U 公式，则该节点称为 U节点。W、GF、FG 和时序节点的定义类似。

定义 4.2。令φ为一个 *LTL* 公式。T_φ的节点若为极限节点，则它要么是$\mathbf{GF}$节点，要么是$\mathbf{FG}$节点。公式φ处于范式，当且仅当T_φ满足以下性质：

1. U节点不位于W节点之下。*2.* 极限节点不位于其他时序节点之下。*3.* W节点不位于GF节点之下，且U节点不位于FG节点之下。

注 *4.1*。注意，范式公式属于Δ_2。一个稍强的结论也成立：范式公式是Σ_2中的公式与形如 GFψ且满足$\psi \in \Sigma_1$（因而 GF$\psi \in \Pi_2$）的公式的正布尔组合。

存在一种对偶范式，其中性质 1. 被替换为“没有 **W**-节点位于 **U**-节点之下”，而另外两项性质保持不变。对偶范式中的公式是由Π_2的公式以及形如$\mathbf{FG}\psi$的公式构成的正布尔组合，其中$\psi \in \Pi_1$。一旦证明了原始范式的规范化定理，相应的对偶范式定理便可作为一个简单的推论得出（见第 6 节）。

[5] 极限算子称为可暂停的，如果[1]。

在接下来的三个小节中，我们将逐步规范化公式，依次处理范式的三项要求。各阶段之间会得到中间范式，我们使用以下两个度量对其进行形式化定义：

– $n_u(\varphi)$ 是 T_φ 中位于某个 W 节点之下、但不位于 T_φ 的任何极限节点之下的 U 节点数量。例如，若 $\varphi = (a\mathrm{U}b)\mathrm{W}(\mathrm{FG}(c\mathrm{U}d))$，则 $n_u(\varphi) = 1$。– $n_{\lim}(\varphi)$ 是位于某个时序算子之下的不同极限子公式的数量。形式上，$n_{\lim}(\varphi)$ 是满足以下条件的极限公式 ψ' 的数量：ψ' 是 φ 的某个时序子公式（无论该子公式是否为真子公式）的真子公式。例如，若 $\varphi = (\mathrm{FG}a\,\mathrm{U}\,\mathrm{GF}b) \vee (\mathrm{GF}b\,\mathrm{W}\,\mathrm{FG}a)$，则 $n_{\lim}(\varphi) = 2$。

定义 4.3. 若 *LTL* 公式 φ 满足 $n_u(\varphi) = 0$，则称其为 1-形式；若满足 $n_u(\varphi) = 0$ 且 $n_{lim}(\varphi) = 0$，则称其为 1-2- 形式。

我们分三个阶段进行：

1. 删除所有位于某个 W-节点之下、但不位于任何极限节点之下的 U-节点。所得公式属于 1-形式。2. 删除位于其他时间节点之下的所有极限节点。所得公式属于 1-2-形式。3. 删除位于某个 GF-节点之下的所有 W-节点，以及位于某个 FG-节点之下的所有U-节点。所得公式为范式（定义 4.2）。

阶段 1：删除位于 W-节点之下的U-节点。

我们考虑带有占位符的公式 φ，即可以填入公式的“空位”。形式化地，令 $[\ ]$ 表示一个特殊原子命题的符号。带占位符的公式是指包含一个或多个 $[\ ]$，（它们全都为正，即该公式中不存在 $\neg[\ ]$）的公式。我们将 $\varphi[\psi]$ 的每个占位符都填入一个 ψ 后得到的结果记为 φ；形式上，$\varphi[\psi]$ 是将 ψ 代入 φ中的 $[\ ]$ 后所得的结果。例如，如果 $\varphi[\ ] = ([\ ]\mathrm{W}(a\mathrm{U}[\ ]))$，那么 $\varphi[\mathrm{X}b] = (\mathrm{X}b)\mathrm{W}(a\,\mathrm{U}\mathrm{X}b)$。我们假设 $[\ ]$ 的优先级高于任何算子，例如 $\varphi_1\mathrm{W}\varphi_2[\psi] = \varphi_1\mathrm{W}(\varphi_2[\psi])$。

这个引理在附录中得到了证明，使我们能够将 U 子公式从 W 公式中提取出来：

引理 4.1。

$$(1) \qquad \varphi_1\mathbf{W}\varphi_2[\psi_1\mathbf{U}\psi_2] \equiv (\varphi_1\mathbf{U}\varphi_2[\psi_1\mathbf{U}\psi_2]) \vee \mathbf{G}\varphi_1$$

$$(2) \qquad \varphi_1[\psi_1\mathbf{U}\psi_2]\mathbf{W}\varphi_2 \equiv (\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \varphi_1[\psi_1\mathbf{W}\psi_2]\mathbf{W}\varphi_2) \vee\ \varphi_1[\psi_1\mathbf{U}\psi_2]\mathbf{U}(\varphi_2 \vee (\mathbf{G}\varphi_1[\mathbf{ff}]))$$

命题 4.1. 对于每个 *LTL* 公式 φ，都存在一个与之等价的 *1*-形式公式φ'，使得 $|\varphi'| \leq 4^{2|\varphi|} \cdot |\varphi|$。此外，对于公式 ψ 的每个子公式 $\mathbf{GF}\psi\,\varphi'$，$\psi$ 都是 φ的子公式；而 φ' 的每个 $\mathbf{FG}$-子公式也都是 φ 的子公式。

证明. 我们为每个公式定义一个秩：rank $(\varphi) = |\varphi| + n_u(\varphi)$。注意，当且仅当公式 φ 满足 rank $(\varphi) = |\varphi|$ 时，它是 1-形式。在整个证明中，若公式 φ' 满足极限性质，则表示对于其每个 FGψ 子公式 φ'，ψ 都是 φ 的子公式；并且 φ' 的每个 FG-子公式也都是 φ 的子公式（注意其中的不对称性）。此外，若公式 φ'满足大小性质，则 $|\varphi'| \leq 4^{rank(\varphi)} \cdot |\varphi|$，由此可立即得到所声称的大小界。

我们对 rank(φ) 进行归纳，证明 φ 等价于一个满足极限性质和大小性质的 1-形式公式 φ'。在归纳步骤中，我们对 φ 进行分类讨论：

如果 $\varphi =$ 为 tt、ff、GFψ 或 FGψ，那么 φ 已经是 1-形式，并且满足极限性质和大小性质。

如果 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$、$\varphi_1 \vee \varphi_2$ 和 $\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2$，那么根据归纳假设，$\varphi_1$ 和 φ_2 可以分别规范化为公式 φ_1' 和 φ_2'，并满足极限性质和大小性质。于是，公式 $\varphi_1' \wedge \varphi_2'$、$\varphi_1' \vee \varphi_2'$ 和 $\varphi_1' \mathbf{U} \varphi_2'$ 都是 1-形式（后者是因为新增的 U 节点位于任何 W 节点之上），并且满足极限性质。大小性质成立，因为：

$$\begin{aligned} |\varphi_1'| + |\varphi_2'| + 1 &\leq 4^{rank(\varphi_1)} \cdot |\varphi_1| + 4^{rank(\varphi_2)} \cdot |\varphi_2| + 1 \\ &\leq 4^{rank(\varphi_1)+rank(\varphi_2)} \cdot (|\varphi_1| + |\varphi_2| + 1) \\ &\leq 4^{rank(\varphi)} \cdot |\varphi| \end{aligned}$$

如果 $\varphi =$ 为 Xφ_1，那么根据归纳假设，存在一个公式 φ_1'，它与 1-形式的 φ_1 等价，因此 φ 等价于 Xφ_1'，后者是 1-形式，并且满足极限性质和大小性质。

如果 $\varphi = \varphi_1 \mathbf{W} \varphi_2$ 和 $n_u(\varphi) = 0$，那么 $\varphi_1 \mathbf{W} \varphi_2$ 已经是 1-形式，并满足极限和大小性质。

如果 $\varphi = \varphi_1 \mathbf{W} \varphi_2$ 和 $n_u(\varphi) > 0$，那么我们按如下方式分类讨论：

– φ_2 至少包含一个U-节点，且该节点不位于极限节点之下。令 $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ 为这样一个 U-节点。通过将每个标记为 U-node labelledby $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ 的节点替换为特殊原子命题 [ ]，我们从 φ_2 推导出 $\varphi_2[\ ]$，根据引理 4.1(1)，可得：

$$\varphi_1 \mathbf{W} \varphi_2[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2] \equiv \varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2] \vee \varphi_1 \mathbf{W} \mathbf{ff}$$

由于 rank (φ_1) <rank (φ)、rank(φ_2) <rank (φ)，且 rank(φ_1Wff) <rank (φ)（后者是因为 φ_2 至少包含一个 U 节点），根据归纳假设，φ_1、φ_2 和 φ_1 Wff 可以规范化为满足极限性质和大小性质的公式 φ_1'、φ_2' 和 φ_3'。因此，φ 可以规范化为 $\varphi' = \varphi_1' \mathbf{U} \varphi_2' \vee \varphi_3'$。此外，$\varphi'$ 满足极限性质，因为 φ' 的所有 GF-和 FG-子公式都是 φ_1'、φ_2' 或 φ_3' 的子公式。对于大小性质，我们计算：

$$\begin{aligned}|\varphi'| &= |\varphi'_1| + |\varphi'_2| + |\varphi'_3| + 2\\ &\leq 4^{rank(\varphi_1)} \cdot |\varphi_1| + 4^{rank(\varphi_2)} \cdot |\varphi_2| + 4^{rank(\varphi_1 \mathbf{W} \mathbf{ff})} \cdot |\varphi_1 \mathbf{W} \mathbf{ff}| + 2\\ &\leq 4^{rank(\varphi)-1} \cdot (|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_1 \mathbf{W} \mathbf{ff}| + 2)\\ &\leq 4^{rank(\varphi)-1} \cdot 4 \cdot |\varphi| = 4^{rank(\varphi)} \cdot |\varphi|\end{aligned}$$

– 的每个 U 节点都位于极限节点之下，而 φ_1 至少包含一个U 节点，该节点不在任何极限节点之下。那么 φ_1 包含一个不在极限节点之下的极大子公式 $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ （关于子公式序）。我们通过将 φ_1 中每个标记为 U 的节点替换为特殊原子命题 [ ]，从 $\varphi_1[\ ]$ 中替换每个标记为 U 的节点：将标记为 $\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ 且不在极限节点之下的节点替换为特殊原子命题 [ ]。根据引理 4.1(2)，我们有

$$\varphi_1[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2] \mathbf{W} \varphi_2 \equiv \big(\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \underbrace{\varphi_1[\psi_1 \mathbf{W} \psi_2] \mathbf{W} \varphi_2}_{\rho_1}\big) \vee \big(\underbrace{\varphi_1[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2]}_{\rho_2} \mathbf{U} (\varphi_2 \vee \underbrace{(\varphi_1[\mathbf{ff}] \mathbf{W} \mathbf{ff}}_{\rho_3})\big)$$

为应用归纳假设，我们说明 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3的秩小于 φ，因此可将它们规范化为满足极限性质和大小性质的 ρ'_1、ρ'_2 和 ρ'_3。公式 ρ_1 的节点数与 φ相同，但其位于 W 节点下方的 U 节点较少；因此 $n_u(\rho_1) < n_u(\varphi)$，进而 rank (ρ_1) < rank(φ)。同样的论证也适用于 ρ_3。最后，由于 ρ_2的节点数少于 φ，可得 rank (ρ_2) <rank (φ)。因此，可将 φ 规范化为 $\varphi' = (\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \rho'_1) \vee (\rho'_2 \mathbf{U} \rho'_3)$。

我们证明 φ' 满足极限性质。设 GFψ 是φ'的一个子公式。若 GFψ = GFψ_2，则结论成立，因为 ψ_2 是 φ的一个子公式。否则，GFψ 是 ρ'_1、ρ'_2或 ρ'_3 的一个子公式。由于它们都满足极限性质，ψ 是 φ的一个子公式，因此结论成立。此外，φ' 的每个 FG-子公式都属于 ρ'_1、ρ'_2或 ρ'_3，所以它也是φ的子公式。对于大小性质，我们计算：

$$\begin{aligned}|\varphi'| &= |\rho'_1| + |\rho'_2| + |\rho'_3| + |\psi_2| + 4\\ &\leq 4^{rank(\rho_1)} \cdot |\rho_1| + 4^{rank(\rho_2)} \cdot |\rho_2| + 4^{rank(\rho_3)} \cdot |\rho_3| + |\varphi_1| + 4\\ &\leq 4^{rank(\varphi)-1} \cdot (|\varphi| + |\varphi| + |\varphi|) + |\varphi| + 4\\ &\leq 4^{rank(\varphi)-1} \cdot 4 \cdot |\varphi| = 4^{rank(\varphi)} \cdot |\varphi|\end{aligned}$$

阶段 2：将GF和FG-子公式上移。

在本节中，我们讨论范式的第二个性质。以下引理允许我们从任意时序公式中提取极限子公式。（请注意，只有当第 1 阶段之前的公式包含 FG-子公式时，才需要第二条规则，因为第 1 阶段只会产生新的 GF 公式。）

引理 4.2。

$$\varphi[\mathbf{GF}\psi] \equiv (\mathbf{GF}\psi \wedge \varphi[\mathbf{tt}]) \vee \varphi[\mathbf{ff}] \tag{3}$$

$$\varphi[\mathbf{FG}\psi] \equiv (\mathbf{FG}\psi \wedge \varphi[\mathbf{tt}]) \vee \varphi[\mathbf{ff}] \tag{4}$$

我们利用（3）和（4）证明，1-形式中的每个公式都可以转换为与之等价的 1-2-形式公式。

命题 4.2. 每个 *1*-形式的 *LTL* 公式 φ 都等价于一个 *1-2*-形式的公式φ'，使得 $|\varphi'| \leq 3^{n_{lim}(\varphi)} \cdot |\varphi|$。此外，极限子公式的大小不会增加：对于每个 $b > 0$，如果 $|\psi| \leq b$ 对 φ的每个极限子公式都成立，那么 $|\psi'| \leq b$ 对 φ'的每个极限子公式也成立。

证明。 我们对φ的真极限子公式数量进行归纳。如果 φ 不包含任何真极限子公式，那么它已经是 1-2-形式。假设存在一个这样的真极限子公式 ψ，根据子公式序，它小于（或与之不可比较） φ 的所有其他极限子公式。我们通过将每个标记为 ψ 的极限节点替换为特殊原子命题[ ]，从φ 得到 $\varphi[\ ]$。然后应用引理 4.2 得到：

$$\varphi[\psi] \equiv (\psi \wedge \varphi[\mathbf{tt}]) \vee \varphi[\mathbf{ff}] \qquad \text{where } \psi = \mathbf{GF}\psi', \mathbf{FG}\psi' \ .$$

注意， ψ 不恰当地包含任何极限子公式，因此它属于 1-2-形式。 $\varphi[\mathrm{tt}]$ 和 $\varphi[\mathbf{ff}]$ 仍属于 1-形式，并且它们比 φ少一个极限算子。因此，根据归纳假设，它们可以被规范化为 1-2-形式的 φ'_1和 φ'_2。最后， $\varphi' = (\psi \wedge \varphi'_1) \vee \varphi'_2$ 是若干 1-2-形式公式的布尔组合，因此它属于 1-2-形式。 $T_{\varphi'}$ 的节点数可以粗略地界定如下：

$$\begin{aligned}
|\varphi'| &\leq |\varphi'_1| + |\varphi'_2| + |\psi| + 2 \\
&\leq 2 \cdot 3^{n_{\lim}(\varphi[\mathbf{tt}])} \cdot |\varphi[\mathbf{tt}]| + |\psi| + 2 \\
&\leq 3^{n_{\lim}(\varphi[\mathbf{tt}])} \cdot \big(2 \cdot (|\varphi| - |\psi| + 1) + |\psi| + 2\big) \\
&\leq 3^{n_{\lim}(\varphi)-1} \cdot (2|\varphi| - |\psi| + 4) \\
&\leq 3^{n_{\lim}(\varphi)-1} \cdot (3|\varphi|) = 3^{n_{\lim}(\varphi)} \cdot |\varphi|
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式用到了归纳假设，最后一个不等式用到了 $|\psi| \geq 2$ 和$|\varphi| \geq 2$。

为证明极限子公式的大小没有增加，设 b 是 φ的 GF 子公式大小的一个上界。我们声称， φ' 的每个 GF 子公式的大小也不超过 b （FGψ 的情形类似）。事实上， φ' 的 GF 子公式包括 ψ （它已经属于 φ），以及φ'_1 和 φ'_2的 GF 子公式。由于 $\varphi[\mathrm{tt}]$ 和 $\varphi[\mathbf{ff}]$ 的 GF 子公式大小只会减小，根据归纳假设，φ'_1 和 φ'_2 的任意 GF 子公式的节点数均不超过 b，证毕。

阶段 3：移除W节点（U节点）下方的GF节点（FG节点）

本节通过解决极限子公式中的问题，完成对 LTL公式的规范化。为此，我们引入两条新的重写规则，使我们能够将 W 子公式从 GF 公式中提取出来，并将 U 子公式从 FG 公式中提取出来。

引理 4.3.

$$\mathbf{GF}\varphi[\psi_1\mathbf{W}\psi_2] \equiv \mathbf{GF}\varphi[\psi_1\mathbf{U}\psi_2] \vee (\mathbf{FG}\psi_1 \wedge \mathbf{GF}\varphi[\mathbf{tt}]) \tag{5}$$

$$\mathbf{FG}\varphi[\psi_1\mathbf{U}\psi_2] \equiv (\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \mathbf{FG}\varphi[\psi_1\mathbf{W}\psi_2]) \vee \mathbf{FG}\varphi[\mathbf{ff}] \tag{6}$$

下面的命题反复应用这些规则，证明极限公式可以在发生指数级膨胀的情况下完成规范化。

命题 4.3. 对于每个不含极限算子的 *LTL* 公式 φ，$\mathbf{GF}\varphi$ 和$\mathbf{FG}\varphi$ 都可以规范化为至多含有 $|\varphi'| \leq 3^{|\varphi|} \cdot |\varphi|$ 个节点的公式。

证明。 公式的 **GF**-障碍是指位于 **W**-节点或 **U**-节点下方的 **W**-节点，且该节点位于一个 **GF**-节点之内。类似地，**FG**-障碍是指位于 **U**-节点或 **W**-节点下方的**U**-节点，且该节点位于一个 **FG**-节点之内。最后，障碍要么是 **GF**-障碍，要么是 **FG**-障碍。我们对 $\mathbf{GF}\varphi$ 或 $\mathbf{FG}\varphi$ 的障碍数进行归纳证明。如果它们没有障碍，那么它们已经是范式（定义 4.2）。

假设 $\mathbf{GF}\varphi$ 至少有一个障碍。那么 φ 至少包含一个极大的 **W**-节点 $\psi_1\mathbf{W}\psi_2$。我们通过将每个标记为 $\mathbf{GF}\varphi[\ ]$ 中的 $\mathbf{GF}\varphi$ 标记为**W**- 节点的节点替换为特殊原子命题 $\psi_1\mathbf{W}\psi_2$，从 $[\ ]$得到 引理 4.3给出$\mathbf{GF}\varphi[\psi_1\mathbf{W}\psi_2]$ 与其等价

$$\mathbf{GF}\varphi[\psi_1\mathbf{U}\psi_2] \vee (\mathbf{FG}\psi_1 \wedge \mathbf{GF}\varphi[\mathbf{tt}])$$

我们断言，$\mathrm{GF}\varphi[\psi_1\mathrm{U}\psi_2]$、$\mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}]$, 和 $\mathrm{FG}\psi_1$ 的障碍数都少于 $\mathrm{GF}\varphi[\psi_1\mathrm{W}\psi_2]$，因此可以根据归纳假设进行归一化。事实上，$\mathrm{GF}\varphi[\psi_1\mathrm{U}\psi_2]$和 $\mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}]$ 中的 W 节点都比 φ 少，而且由于 $\psi_1\mathrm{W}\psi_2$具有极大性，W 节点下方的 U 节点数没有增加，因此 GF 障碍也随之减少（且根据定义，不存在 FG 障碍）。对于 $\mathrm{FG}\psi_1$，首先注意到，$\mathrm{FG}\psi_1$ 的每个 FG 障碍都是 $\mathrm{GF}\varphi[\psi_1\mathrm{W}\psi_2]$的 GF 障碍。事实上，$\mathrm{FG}\psi_1$ 的障碍是 U 节点以及 U 节点下方的 W 节点；前者位于 φ中的 W 节点下方，后者则是 φ中的 W 节点，因此二者都是 $\mathrm{GF}\varphi$的 GF 障碍。此外，$\psi_1\mathrm{W}\psi_2$是 φ 的 GF 障碍，但不是 $\mathrm{FG}\psi_1$的 FG 障碍。因此，障碍数减少了。

现在假设 $\mathbf{FG}\varphi$ 至少有一个障碍。那么 φ 至少包含一个极大 **U**-节点 $\psi_1\mathbf{U}\psi_2$。我们通过将每个标记为 $\mathbf{FG}\varphi[\ ]$ 的 $\mathbf{FG}\varphi$ 中的 **U**- 节点替换为特殊原子命题 $\psi_1\mathbf{U}\psi_2$，得到 $[\ ]$。根据引理 4.3，$\mathbf{FG}\varphi[\psi_1\mathbf{U}\psi_2]$ 等价于

$$(\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \mathbf{FG}\varphi[\psi_1\mathbf{W}\psi_2]) \vee \mathbf{FG}\varphi[\mathbf{ff}]$$

$\mathrm{GF}\psi_2$、$\mathrm{FG}\varphi[\psi_1\mathrm{W}\psi_2]$ 和 $\mathrm{FG}\varphi[\mathrm{ff}]$ 的障碍都少于 $\mathrm{FG}\varphi[\psi_1\mathrm{U}\psi_2]$，因此可根据归纳假设进行规范化。证明如上。

公式的大小每一步至多增加到原来的 3 倍，而步骤数不超过 φ 中 W 节点和 U 节点的总数；该总数又不超过 φ 中节点的总数。因此，公式最多有 $3^{|\varphi|}|\varphi|$ 个节点。

规范化定理

主要结果可直接由前述命题得出。

定理 4.1. 每个 *LTL* 公式 φ 都可以规范化为一个至多含有 $4^{7|\varphi|}$ 个节点的公式。

证明。 任意 LTL 公式 φ 都可以转换为与其等价的 φ' 1-形式，大小为 $|\varphi'| \leq 4^{2|\varphi|} \cdot |\varphi|$，根据命题 4.1。此外， $n_{\lim}(\varphi') \leq 2 \cdot |\varphi|$，因为 **FG**-子公式 ψ' 以及 ψ 中 **GF**-子公式的每个论元 φ' 都是 φ的子公式。此外， $|\psi| \leq |\varphi|$ 对于 **GF**ψ 的每个子公式 φ。

根据命题 4.2，对于每个 φ' 1-形式中的公式，都存在一个与之等价的 φ'' 1-2-形式，其中

$$(\star) \qquad |\varphi''| \leq 3^{n_{\lim}(\varphi')} \cdot |\varphi'| \leq 3^{2|\varphi|} \cdot (4^{2|\varphi|} \cdot |\varphi|) \leq 3^{2|\varphi|} \cdot 4^{3|\varphi|}$$

该公式是由极限公式构成的布尔组合，至多含有 $|\varphi|$ 个节点，不包含任何真极限节点；此外还包含其他时序公式，这些公式既不含极限节点，也不含 **U**-节点之下的 **W**-节点。后者属于 Σ_2，命题 4.3 讨论前者。注意，每个 **GF**ψ 和 **FG**ψ 子公式至多含有 $|\varphi|$ 个节点，因此可以规范化为至多含有 $3^{|\varphi|}|\varphi|$ 个节点的公式。将这些极限子公式替换为其在 φ'' 中的范式后，所得结果是由范式构成的布尔组合，因此证明完毕。所得公式 φ''' 中的节点数至多为：

$$\begin{aligned} |\varphi'''| &\leq |\varphi''| + n_{\lim}(\varphi'') \cdot 3^{|\varphi|} \cdot |\varphi| && n_{\lim}(\varphi'') \leq |\varphi''| \\ &\leq |\varphi''| \cdot 3^{2|\varphi|} \cdot (|\varphi| + 1) && (\star) \\ &\leq 4^{3|\varphi|} \cdot 3^{4|\varphi|} \cdot (|\varphi| + 1) && |\varphi| + 1 \leq 4^{|\varphi|/2} \\ &\leq 4^{3|\varphi|} \cdot 4^{(4\log_4 3 + \frac{1}{2})|\varphi|} \leq 4^{7|\varphi|} \end{aligned}$$

5 规范化算法总结

我们总结第 4 节中描述并证明的规范化算法的步骤。回顾一下，当且仅当公式满足以下性质时，它才是范式：

1. W 节点下方没有 U 节点。2. 其他时序节点下方没有极限节点。3. GF 节点下方没有 W 节点，且 FG 节点下方没有 U 节点。

规范化算法按如下方式应用表 1 中的规则，以修正任何违反这些性质的情况：

1. **U**-节点下且不在极限节点下的 **W**-节点会依据规则（1）和（2）删除。这可能会引入新的 **GF**-子公式。仅对最高层的 2）**U**节点应用规则（ φ_1 后，新 **GF**-子公式的数量相对于原公式的大小仅呈线性增长。

(1) $\varphi_1 \mathrm{W} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \equiv \varphi_1 \mathrm{U} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \vee \mathrm{G}\varphi_1$阶段 1: (2) $\varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2 \equiv (\mathrm{GF}\psi_2 \wedge \varphi_1[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2) \vee \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{U}(\varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_1[\mathrm{ff}])$

阶段 2:	(3)	$\varphi[\mathrm{GF}\psi] \equiv (\mathrm{GF}\psi \wedge \varphi[\text{真}]) \vee \varphi[\text{假}]$
	(4)	$\varphi[\mathrm{FG}\psi] \equiv (\mathrm{FG}\psi \wedge \varphi[\mathrm{tt}]) \vee \varphi[\text{假}]$
阶段 3:	(5)	$\mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \equiv \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \vee (\mathrm{FG}\psi_1 \wedge \mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}])$
	(6)	$\mathrm{FG}\varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \equiv (\mathrm{GF}\psi_2 \wedge \mathrm{FG}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]) \vee \mathrm{FG}\varphi[\mathrm{ff}]$

表 1：规范化规则。

2. 极限节点若位于其他时序节点下方，则依据规则（3）和（4）将其提取出来。仅对最低层的极限节点应用这些规则，因此每个极限子公式只需应用一次。

3. **W**-节点中位于 **GF**-节点下方的节点将使用规则 (5) 移除；而位于 **U**-节点下方的 **FG**-节点将使用规则 (6) 移除。这可能会产生规模更小的新极限节点，并通过递归处理。选择最高层的 **W**-节点和 **U**-节点，可确保该过程相对于公式的初始规模只产生单指数级膨胀。

经过这三个步骤，可得到一个范式公式，其节点数量仅发生单指数级膨胀。

此外，注意到 ψ_1 本身在规则 (2) 和 (6) 中不起作用，而 ψ_2 在规则 (5) 中也不起作用。因此，可以通过以下替换使规则 (1) 的应用更加高效：不仅将极限子公式之外的每个 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2$ 替换为$\psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ 和 ff，而且将任意公式 ψ 的每个 $\psi \mathrm{U} \psi_2$ 也替换为 $\psi \mathrm{W} \psi_2$和 ff。规则 (5) 和 (6) 也同样如此。

例 5.1. 让我们将该过程应用于例 3.1 中的公式 φ_n 。在阶段 1，规则 (2) 匹配子公式 $(a_0 \mathrm{U} a_1) \mathrm{W} a_2$ ，并将其重写为 $\mathrm{GF}a_1 \wedge (a_0 \mathrm{W} a_1) \mathrm{W} a_2 \vee (a_0 \mathrm{U} a_1) \mathrm{U}(a_2 \vee \mathrm{ff}$ Wff)，其中 ff Wff 可简化为 ff 并删除。重写后的公式属于 1-形式，因为 W 节点下方没有 U 节点，因此我们可以继续阶段 2。现在，我们必须使用规则 (3) 将 GF 节点 $\mathrm{GF}a_1$ 从 U 节点的级联结构中移出。这将得到

$$\varphi_n \equiv (\mathbf{GF}a_1 \wedge (\cdots((((a_0 \mathbf{W} a_1) \mathbf{W} a_2 \vee (a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{U} a_2) \mathbf{U} a_3) \mathbf{U} a_4) \cdots \mathbf{U} a_n) \\ \vee ((\cdots((((a_0 \mathbf{U} a_1) \mathbf{U} a_2) \mathbf{U} a_3) \mathbf{U} a_4) \cdots \mathbf{U} a_n)$$

由于唯一剩下的极限节点不在任何时序公式内，我们得到了一个 1-2-形式公式，过程进入阶段 3。再次，唯一的极限子公式是 $\mathrm{GF}a_1$，而 a_1 不包含任何 W 节点，因此该公式已完全规范化，我们也就完成了。注意， φ_n 有

$\varphi_1[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2 \equiv (\mathrm{GF}\psi_1 \wedge \varphi_1[\psi_1 \mathrm{R} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2) \vee \varphi_1[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \mathrm{U} (\varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_1[\mathrm{ff}]) \varphi_1 \mathrm{W} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \equiv \varphi_1 \mathrm{U} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \vee \mathrm{G}\varphi_1 \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{R} \varphi_2 \equiv \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{M} \varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_2 \varphi_1[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \mathrm{R} \varphi_2 \equiv \varphi_1[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \mathrm{M} \varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_2 \varphi_1 \mathrm{R} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \equiv (\mathrm{GF}\psi_2 \wedge \varphi_1 \mathrm{R} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]) \vee (\varphi_1 \vee \mathrm{G}\varphi_2[\mathrm{ff}]) \mathrm{M} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \varphi_1 \mathrm{R} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \equiv (\mathrm{GF}\psi_1 \wedge \varphi_1 \mathrm{R} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{R} \psi_2]) \vee (\varphi_1 \vee \mathrm{G}\varphi_2[\mathrm{ff}]) \mathrm{M} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{R} \psi_2] \equiv \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \vee (\mathrm{FG}\psi_2 \wedge \mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}]) \mathrm{FG}\varphi[\psi_1 \mathrm{M} \psi_2] \equiv (\mathrm{GF}\psi_1 \wedge \mathrm{FG}\varphi[\psi_1 \mathrm{R} \psi_2]) \vee \mathrm{FG}\varphi[\mathrm{ff}]$

表 2：R 和 M 的规范化规则。

对于所有 $n \geq 3$，仅需应用两次规则即可完成规范化，因此对于这一类公式，算法可在线性时间内运行。结果并不完全相同，但与示例 3.1中的结果非常相似。

6 扩展

算子 R 和 M。 我们在证明和规范化过程中省略了这些算子，因为它们可以用我们所考虑的算子子集来表示。然而，这种转换会使公式的节点数呈指数级增长，因此直接处理这些算子更有效率。它们在过程每一步中的作用都类似于**U** 和 **W** 算子；也就是说，我们以处理 W 的方式处理 **W** ，并以处理 U 的方式处理 **U**。相应规则见表 2。

对偶范式。 回顾一下，如果公式满足定义 4.2 中的条件 2 和 3，且没有 **W**-节点位于 **U**-节点之下，则该公式处于对偶范式。给定公式 φ，设 $\overline{\varphi}$ 是一个与 $\neg\varphi$等价的否定范式公式，并设 ψ 是一个与 $\overline{\varphi}$等价的原始范式公式。由于 $\varphi \equiv \neg\overline{\varphi} \equiv \neg\psi$，将否定推入 ψ 后，可得到一个与 φ 等价的对偶范式公式。

过去时线性时序逻辑。 过去时线性时序逻辑是在 LTL 中加入过去时算子（如昨天算子（**Y**）、自从算子（**S**）等）后得到的扩展。在 [5], Gabbay 的一篇附录中提出了八条重写规则，用于将未来时算子从过去时算子中提取出来。将这些规则与我们的规则结合起来，可以得到一个过程，将过去时线性时序逻辑公式转换为规范化线性时序逻辑公式，其中过去时算子被归集到仅含过去时算子的子公式中，因此可以将其视为原子命题。

7 实验评估

我们已将第 5 节概述的规范化过程实现为一个 C++ 程序，[6] 并将其性能及生成公式的大小与 [18] Owl 工具 [6]中所实现的该过程[7] 进行了比较。为了尽可能公平地进行比较，我们实现了相同的基本化简规则；这些规则会在规范化过程中被及时应用。

我们考虑以下测试套件：TLSF(a-b) 是 2021年反应式综合竞赛中规模介于 a 和 b之间的公式集；随机公式是由 1000 个随机生成的公式组成的集合，$\mathbf{WU}^*$ 是示例 3.1 中 $2 \leq n \leq 200$的公式族；最后，$(\mathbf{WU})^*$ 是由 $\varphi_0 = a_0$ 和 $\varphi_{n+1} = (\varphi_n \mathbf{U} a_{2n-1})\mathbf{W} a_{2n}$ 为 $1 \leq n \leq 5$所定义的公式族。注意，最后一个公式族仅限于 $n = 5$，因为 Owl 无法处理 φ_6，这是由于涉及的幂集规模过大，而这对新的过程而言并非限制。

测试用例	规模膨胀			Time	
	Mean (树)	最坏情况 (树)	最坏情况 (有向无环图)	(ms)	
随机公式	1.38	28.47	4.64	67	New
	1.06	10.69	3.90	589	Owl
$\mathbf{WU}^*$	2.12	3.57	2.20	90	New
	2.12	4.00	2.60	32343	Owl
$(\mathbf{WU})^*$	193.58	744.29	17.81	11	New
	27.86	73.33	10.05	54	Owl
TLSF(-100)	1.04	4.60	3.14	65	New
	1.17	8.02	2.48	867	Owl
TLSF(100-300)	2.14	369.66	15.10	230	New
	1.14	12.54	2.47	8636	Owl

表 3：我们的规范化过程与 [18]的规范化过程的实验比较。

表 3 展示了公式语法树的平均和最坏情况膨胀倍数（即规范化前后公式大小之比）、其有向无环图的最坏情况膨胀倍数，以及执行时间。总体而言，新过程速度更快，但生成的公式更大。不过，执行时间和公式大小可能会受到过程细微变化的显著影响。例如，在规则 ($\psi_1 \mathbf{U} \psi_2$ 匹配 $\varphi[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2]$ 时，选择最内层而非最外层的 1) 会产生大得多的公式。

[6] 实现可在以下地址获取：https://github.com/ningit/ltl2delta2rs。[7] 我们评估了基于提交 2fb342a09d3a9d7025b219404c764021d17b7ebd构建的工具，该提交来自 https://gitlab.lrz.de/i7/owl/。

在一些示例中，例如 TLSF(-100)，会产生更大的公式；而在另一些示例中，例如 (WU)*，效果则相反。通常，将阶段 2 分别应用于每个最顶层的时序公式，比应用于整个项更好，但有时效果会略差。如何刻画这些情况并设计能够适应它们的过程，是未来实验的研究课题。

8 结论

我们提出了一种简单的重写系统，可将任意 LTL 公式转换为一个等价公式，使其符合 Δ_2。我们认为，结合 [18], 这一结果消除了人们对 Chang、Manna 和 Pnueli 的规范化定理的神秘感。该定理严重依赖自动机理论结果，并涉及非初等级膨胀。事实上，我们的过程与将布尔公式转换为合取范式的重写系统之间，唯一概念上的区别就在于使用了带上下文的重写规则。

Sickert 和 Esparza 的规范化过程已应用于将 LTL公式转换为确定性或极限确定性ω-自动机 [18]。此前，由于规范化会导致非初等级膨胀，其幅度远高于现有构造的双指数级膨胀，因此人们一直未考虑规范化。采用新的过程后，先将公式规范化，再应用专为范式公式设计的高效公式到自动机的转换过程，这种转换方案已具备竞争力。我们这种完全基于重写规则的新算法更提升了这一方案的吸引力。更广泛地说，我们认为，未来几年应进一步研究针对范式公式的分析过程，以检查其可满足性、等价性或其他性质。

参考文献

1. Babiak, T., Badie, T., Duret-Lutz, A., Kretínský, M., Strejcek, J.：用于暂停的组合式方法及对线性时序逻辑转换的其他改进。载于：SPIN 2013。LNCS，第7976卷，第81–98页。Springer（2013年）。https://doi.org/10 1007 978 3 642 39176 7_6 ./----. Boker, U.,
2
Lehtinen, K., Sickert, S.：自动机到线性时序逻辑的转换。载于：FoSSaCS 2022。LNCS，第13242卷，第140–160页。Springer（2022年）。https://doi.org/
10 1007 978 3 030 99253 8_8 ./----. Cerná, I., Pelánek, R.：时序性质层次
3
与模型检测之间的关系。载于：MFCS 2003。LNCS，第2747卷，第318–327页。Springer（2003年）。https://doi.org/10 1007 978 3 540 45138 9_26 ./----. Chang, E.Y.,
4
Manna, Z., Pnueli, A.：时序性质类别的刻画。载于：ICALP 1992。LNCS，第623卷，第474–486页。Springer（1992年）。https://doi.org/10 1007 3 540 55719 9_97 ./---.
5
Gabbay, D.M.：声明式的过去与命令式的未来：面向交互式系统的可执行时序逻辑。载于：《规范中的时序逻辑》。LNCS，第398卷，第
409 448 1987 10 1007 3 540 51803 7_36 – 。Springer（ ）。
6
https://doi.org/./---. Kretínský, J., Meggendorfer, T., Sickert, S.：Owl：一个用于 -词、自动机和线性时序逻辑的库。载于：ATVA 2018。LNCS，第11138卷，第543–550页。Springer（2018年）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-01090-4_34

7. Lichtenstein, O., Pnueli, A., Zuck, L.D.：《过去的辉煌》。载于：程序逻辑。LNCS，第193卷，第196–218页。Springer（1985年）。https://doi.org/ 10 1007 3 540 15648 8_16 . / - - - . Maler, O.：论 Krohn-Rhodes 级
8
联分解定理。载于：《验证时刻：纪念 Amir Pnueli 的论文集》。LNCS，第6200卷，第260–278页。Springer（ 2010 10 1007 978 3 642 13754 9_12 ）。
9
https://doi.org/ . / - - - - . Maler, O., Pnueli, A.：自动机级联分解复杂度的紧确界。载于：FOCS论文集。第672–682页（1990年）。https://doi.org/10 89589 10 1109 1990 . /FSCS. . . Maler, O., Pnueli, A.：关于自动机的级联分解、其复杂度及其在逻辑中的应用。未发表（1994年），http://www-verimag.imag.fr/~maler/Papers/decomp.pdf 11. Manna, Z., Pnueli, A.：时序性质层次。载于：PODC。第377–410页。美国计算机协会（1990 93442 12 10 1145 93385）。https://doi.org/ . / . . Manna, Z., Pnueli, A.：完善时序图景。《理论计算机科学》83(1)，91–130（1991年）。https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90041-Y 13. Pelánek, R., Strejcek, J.：线性时序逻辑与交替自动机之间的深层联系。载于：CIAA 2005。LNCS，第3845卷，第238–249页。Springer（2005年）。https://doi.org/ 10 1007 11605157_20 . / . Piterman, N., Pnueli, A.：时序逻辑与公
14
平离散系统。载于：《模型检验手册》，第27–73页。Springer（2018年）。https://doi.org/https://doi.org/ 10 1007 978 3 319 10575 8_2 . / - - - - . Pnueli,
15
A.：程序时序逻辑。载于：FOCS。第–页。IEEE计算机学会（1977 32 16 10 1109 1977）。https://doi.org/ . /SFCS. . . Pnueli, A.：并发程序的时序语义。《理论计算机科学》13，45 9 17 60 1981 10 1016 0304 3975 81 90110 –（）。https://doi.org/ . / - ( ) - . Sickert, S.：线性时序逻辑到 ω-自动机的统一转换。博士论文，慕尼黑工业大学，德国（2019年），https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bvb:91 4 18 20190801 1484932 1 -diss- - - - . Sickert, S., Esparza, J.：线性时序逻辑与极弱交替自动机的高效规范化过程。载于：LICS。第831–844页。美国计算机协会（2020年）。https://doi.org/10 3394743 19 1145 3373718 . / . . Zuck, L.D.：过去时序逻辑。博士论文，魏茨曼科学研究所，以色列（ 1986 年 8 月）

A 附录

令 $\varphi \equiv^w \psi$ 表示 $w_k \models \varphi$，当且仅当对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $w_k \models \psi$。接下来的两个显然引理将在以下证明中被广泛使用。

引理 A.1。对于每个处于否定范式的公式 φ（因此也适用于本文中考虑的每个 *LTL* 公式），以及任意两个公式 ψ 和 ψ'，$\psi \models \psi'$ 蕴含 $\varphi[\psi] \models \varphi[\psi']$。

引理 A.2. 对于每个公式 φ 和词 w, $\psi \equiv^w \psi'$ 蕴含 $\varphi[\psi] \equiv^w \varphi[\psi']$。

引理 4.1. (1) $\varphi_1 \mathrm{W} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \equiv (\varphi_1 \mathrm{U} \varphi_2[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]) \vee \mathrm{G}\varphi_1$, (2) $\varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2 \equiv$(GF $\psi_2 \wedge \varphi_1[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2) \vee \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{U}(\varphi_2 \vee (\mathrm{G}\varphi_1[\mathrm{ff}]))$

证明。对于等式（1），根据 LTL 的语义定义可知，$\varphi_1 \mathbf{W} \varphi_2 \equiv \varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2 \vee \mathbf{G}\varphi_2$ 对任意公式 φ_1, φ_2均成立。对于等式（2），我们按如下方式推导。

(⊨): 假设 $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$。若 $w \models \mathrm{GF}\psi_2$，则对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都有 $w_k \models \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ 当且仅当$w_k \models \psi_1 \mathrm{U} \psi_2$；由引理 A.2 可得 $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$，证毕。若 $w \not\models \mathrm{GF}\psi_2$，则存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有$k \geq n$, $w_k \not\models \psi_2$ 均成立，因此 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \equiv^{w_n} \mathrm{ff}$。由于 w 满足左侧条件，故有两种可能情况

– 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $w_m \models \varphi_2$ 并且 $w_k \models \varphi_1[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2]$ 对于每个 $k < m$均成立。于是第二个析取项成立，证毕。– $w_k \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$ 对于每个 $k \in \mathbb{N}$均成立。于是 $w_k \models \varphi_1[\mathrm{ff}]$ 对所有 $k \geq n$ 均成立。根据引理 A.2，令 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \equiv^{w_n} \mathrm{ff}$。因此 $w_n \models \varphi_2 \vee \mathbf{G}\varphi_1[\mathrm{ff}]$,成立，证毕。

(⊭): 假设 w 满足右侧公式。我们考虑两种情况:

– $w \models \mathrm{GF}\psi_2 \wedge \varphi_1[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$。那么 $w \models \mathrm{GF}\psi_2$，并且如上所述，对于每个 $k \in \mathbb{N}$, $w_k \models \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ 当且仅当 $w_k \models \psi_1 \mathrm{U} \psi_2$。由于 $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$，我们得到 $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$。– $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{U}(\varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_1[\mathrm{ff}])$。那么存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $w_n \models \varphi_2 \vee \mathrm{G}\varphi_1[\mathrm{ff}]$，且对于每个 $k < n$, $w_k \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$。我们考虑两种情况: $w_n \models \varphi_2$，或者对所有 $k \geq n$, $w_k \models \varphi_1[\mathrm{ff}]$。在第一种情况下，根据 W 的定义，$w_n \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$。在第二种情况下，由于 $\mathrm{ff} \models \psi_1 \mathrm{U} \psi_2$，且根据引理 A.1, $w_k \models \varphi_1[\mathrm{ff}]$ 蕴含 $w_k \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$。因此，对于每个 $k < n$ 和每个 $k \geq n$，我们都有 $w_k \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$，所以 $w \models \varphi_1[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \mathrm{W} \varphi_2$。

引理 4.2. (3) $\varphi[\mathbf{GF}\psi] \equiv (\mathbf{GF}\psi \wedge \varphi[\mathbf{tt}]) \vee \varphi[\mathbf{ff}]$,(4) $\varphi[\mathbf{FG}\psi] \equiv (\mathbf{FG}\psi \wedge \varphi[\mathbf{tt}]) \vee \varphi[\mathbf{ff}]$

证明。我们证明，对于满足 $\mathrm{G}\psi \equiv \psi$ 的任意 ψ，$\varphi[\psi] \equiv (\psi \wedge \varphi[\mathrm{tt}]) \vee \varphi[\mathrm{ff}]$，也就是说，$w \models \psi$ 当且仅当对所有 $k \in \mathbb{N}$, $w_k \models \psi$。这是对 (3) 和 (4) 的推广，因为 $\mathrm{GF}\psi'$ 和 $\mathrm{FG}\psi'$ 都满足对任意 ψ' 关于 ψ 的要求。由于自从算子ψ 对词 w的所有后缀都成立，或对其任何后缀都不成立，因此对于任意词 w, $\psi \equiv^w \mathrm{tt}$ 或 $\psi \equiv^w \mathrm{ff}$。

(⊨): 如果 w 满足 ψ，根据引理 $w \models \varphi[\mathbf{tt}]$ ，我们也有A.2，因此第一个析取项成立。否则，同样根据引理A.2，我们有 $w \models \varphi[\mathbf{ff}],$ ，因此第二个析取项成立。

(⊨): 假设 w 满足第一个析取项，则 $w \models \psi$ 且 $\varphi[\psi] \equiv^{w} \varphi[\mathbf{tt}]$由引理 A.2得出。否则，第二个析取项成立，于是 $w \models \varphi[\psi]$ 由引理 A.1 得出，因为 $\mathbf{ff} \models \psi$。

引理 4.3。

$$\mathbf{GF}\varphi[\psi_1 \mathbf{W} \psi_2] \equiv \mathbf{GF}\varphi[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2] \vee (\mathbf{FG}\psi_1 \wedge \mathbf{GF}\varphi[\mathbf{tt}]) \tag{5}$$

$$\mathbf{FG}\varphi[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2] \equiv (\mathbf{GF}\psi_2 \wedge \mathbf{FG}\varphi[\psi_1 \mathbf{W} \psi_2]) \vee \mathbf{FG}\varphi[\mathbf{ff}] \tag{6}$$

证明。 方程（5）的证明。
(⊨): 我们证明以下论断，它们可直接推出结论：
– $\mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2] \models \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$。由 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \models \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ 和引理 A.1 得出。 – $\mathrm{FG}\psi_1 \wedge \mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}] \models \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$。假设 $w \models \mathrm{FG}\psi_1 \wedge \mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}]$。一方面，必定存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \geq n$， $w_k \models \mathrm{G}\psi_1$ 。由于 $\mathrm{G}\psi_1 \models \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$，对于所有$k \geq n$， $w_k \vDash \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ 。另一方面， $\varphi[\mathrm{tt}]$ 在 w 的无限多个后缀中成立。根据引理 A.2，且对于所有 $k \geq n$， $\psi_1 \mathrm{W} \psi_2 \equiv^{w_k} \mathrm{tt}$，因此 $\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$ 在 w 中无限多次成立，证毕。

(⊨): 假设 w 满足 $\mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$，并且 $w' \models \varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$ 对 w的无限多个后缀 w' 成立。我们证明以下三个断言，它们可立即推出该结果：

– 若 $w \models \mathrm{FG}\psi_1$ ，则 $w \models \mathrm{GF}\varphi[\mathrm{tt}]$。由于 $w \models \mathrm{FG}\psi_1 \wedge \mathrm{GF}\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$， w 有无限多个后缀满足 $\mathrm{G}\psi_1$和 $\varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$。由于 $\mathrm{G}\psi_1 \models \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$，这些后缀也满足 $\psi_1 \mathrm{W} \psi_2$，因此也满足 $\varphi[\mathrm{tt}]$。– 若 $w \not\models \mathrm{FG}\psi_1$，则 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \equiv^{w} \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ ，因为 $\mathrm{G}\psi_1$ 从不成立，且 $\psi_1 \mathrm{W} \psi_2 \equiv \psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \vee \mathrm{G}\psi_1$。因此，根据引理 A.2 和析取的第一项， $w \models \mathrm{GF}[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$ 。

方程（6）的证明。
(⊨): 如果右侧析取的第二个子句成立，$\mathbf{FG}\varphi[\psi_1 \mathbf{U} \psi_2]$成立，因为 φ 处于否定范式，且$\mathbf{ff} \models \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$。否则，第一个析取项必须为真，因此对于满足 w 的任意词 $\mathbf{GF}\psi_2$， $\psi_1 \mathbf{W} \psi_2 \equiv^{w} \psi_1 \mathbf{U} \psi_2$，因此可根据引理A.2 在上下文中将它们替换。

(⊨): 假设 w 满足 $\mathrm{FG}\varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$，即存在一个 $n \in \mathbb{N}$ ，使得对于所有 $k \geq n$， $w_k \models \varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$ 。我们分两种情况讨论 $w \models \mathrm{GF}\psi_2$ 是否成立。
– 若 $w \models \mathrm{GF}\psi_2$，则对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \equiv^{w} \psi_1 \mathrm{W} \psi_2$ ，因此根据引理 A.2，对于所有 $k \geq n$ ， $w_k \models \varphi[\psi_1 \mathrm{W} \psi_2]$ 。由此，第一个析取项成立。– 否则，存在一个 $m \geq n$ ，使得对于所有 $k \geq m$， $w_k \not\models \psi_2$ 。因此，对于所有 $k \geq m$， $w_k \not\models \psi_1 \mathrm{U} \psi_2$ ，且 $\psi_1 \mathrm{U} \psi_2 \equiv^{w_k} \mathrm{ff}$。利用 $w_k \models \varphi[\psi_1 \mathrm{U} \psi_2]$ 以及引理 A.2，可得对于所有 $k \geq m$， $w_k \models \varphi[\mathrm{ff}]$，所以 $\mathrm{FG}\varphi[\mathrm{ff}$]。