arXiv:2304.08918v1 [math.QA] 18 Apr 2023

对称（σ,τ）-代数与（σ,τ）-霍赫希尔德上同调

KWALOMBOTA ILWALE

Abstract. 在结合代数上，我们引入对称（σ,τ）-导子的概念，并提出一个正则性条件，证明强正则的对称（σ,τ）-导子是内导子。对称（σ,τ）-导子是（σ,τ）-导子，同时也是（σ,τ）-导子和（τ,σ）-导子，从而推广了交换代数的一种性质。受这一概念启发，我们探究对称（σ,τ）-代数的几何，并证明存在唯一的强正则对称（σ,τ）-联络。此外，我们引入（σ,τ）-霍赫希尔德上同调，并说明其在第一次数时描述了结合代数上的外（σ,τ）-导子。文中还提供了一些例子，以阐释这些新概念。

1. Introduction

在非交换几何的基于导子的研究方法中，导子发挥着重要作用，尤其是在描述联络、曲率和联络的挠率时。设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的含幺结合代数。对于导子 X，即满足莱布尼茨法则 $X(fg) = fX(g) + X(f)g$ 的 $\mathbb{C}$-线性映射 $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，左 $\mathcal{A}$-模 M 上的联络 $\nabla_X\colon M \to M$ 满足莱布尼茨法则

$$\nabla_X(fm) = f\nabla_X(m) + X(f)m$$

（例如参见 [DV88], [DVM96]）。另一方面，还有一些称为 (σ,τ)-导子的扭曲导子，它们通常不纳入基于导子的研究方法，但在某些李代数变形以及量子群中发挥着重要作用。例如，在 [HLS06] 和 [LS07], 中，分别通过使用 (σ,τ)-导子实现了一个 q-变形的 Witt 代数，并利用 σ-导子构造了 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ 的一族 q-变形李代数。

(σ,τ)-导子是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，满足扭曲莱布尼茨法则

$$X(fg) = \sigma(f)X(g) + X(f)\tau(g),$$

对于代数自同态 $\sigma,\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$。在 [AI22], 框架下，通过在基于$(\sigma,\tau)$-导子的某些模上构造联络、曲率和挠率，研究非交换黎曼几何。在这一框架中，给定一个左$\mathcal{A}$-模 M，(σ,τ)-联络 $\nabla_X\colon M \to M$满足扭曲莱布尼茨法则

$$\nabla_X(fm) = \sigma(f)\nabla_X(m) + X(f)\hat{\tau}(m) \tag{1.1}$$

对于一个（σ,τ）-导子 $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$以及一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\hat{}\tau\colon M \to M$（满足 $\hat{}\tau(fm) = \tau(f)\hat{}\tau(m)$）。例如，在探索量子三维球面上的联络时，[AIL20] 和 [AIL22] 构造了满足条件 (1.1) 的联络，其所依据的是一组

（σ,τ）-导子 X_1, X_2, X_3 自然地作为三维球面上向量场李代数的变形而出现。这些结果促成了一个关于扭曲导子的非交换几何通用框架的构建，该框架由 [AI22],提出，并引入了（σ,τ）-代数的概念以及相应的Σ-模概念。

在本研究中，我们引入对称 (σ,τ)-导子的概念。对称 (σ,τ)-导子是同时也是 (τ,σ)-导子的 (σ,τ)-导子。例如，交换代数上的所有 (σ,τ)-导子都是对称 (σ,τ)-导子。基于这类 (σ,τ)-导子，我们引入对称 (σ,τ)-代数以及在其上构造对称 (σ,τ)-联络的 Σ-模。为了更好地理解内外 (σ,τ)-导子，我们引入端同态的正则对与强正则对的概念。这引出了霍赫希尔德上同调相关的有趣问题。一阶霍赫希尔德上同调群衡量结合代数在多大程度上存在外导子。例如，一维矩阵代数 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 的第一霍赫希尔德上同调群为零，这意味着矩阵代数上只有内导子。对于结合代数上的 (σ,τ)-导子，我们引入霍赫希尔德上同调的 (σ,τ)-版本，以描述结合代数上的内外 (σ,τ)-导子。

在第 2 节中，我们研究结合代数上的对称 (σ,τ)-导子，并证明，例如，对于强正则端同态对，每个对称 (σ,τ)-导子都是内导子。在第 3 节中，我们定义结合代数的 (σ,τ)-霍赫希尔德上同调群，以研究内导子和外导子。在第 4 节中，我们研究对称 (σ,τ)-联络，并证明对于强正则 (σ,τ)-代数，存在唯一的对称 (σ,τ)-联络。在第 5 节中，我们探讨对称 (σ,τ)-联络的曲率及其相应的线性性质。最后，在第 6 节中，我们通过交换代数上的示例来阐释这些新概念。

2. 对称 (σ,τ)-DERIVATIONS

本节中，我们引入结合代数上的对称 (σ,τ)-导子的概念。这类导子既是 (σ,τ)-导子，也是 (τ,σ)-导子。可以将对称 (σ,τ)-导子视为对交换代数上 (σ,τ)-导子的推广（在交换代数中，每个 (σ,τ)-导子都是对称的），推广到非交换代数上。下文中，我们考虑特征为零的域 $\mathbb{K}$ 上的含幺结合代数 $\mathcal{A}$。下面回顾一些定义。

定义 2.1. 设 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，且 M 是一个 $\mathcal{A}$-双模。称 $\mathbb{K}$-线性映射 $X\colon \mathcal{A}\to M$ 为取值于 M 的 (σ,τ)-导子，如果

$$X(fg)=\sigma(f)X(g)+X(f)\tau(g) \tag{2.1}$$

对所有 $f,g\in\mathcal{A}$.

用 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的 (σ,τ)-导子集合。一般而言，$\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 不是一个 $\mathcal{A}$-模，但事实证明它是 $\mathcal{A}$ 的中心 $Z(\mathcal{A})$ 上的模。

命题 2.2. $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 是一个 $Z(\mathcal{A})$-双模。

证明。设 X 是一个 (σ,τ)-导子，并令 $f \in Z(\mathcal{A})$。令

$$(f \cdot X)(a) = fX(a) \quad \text{and} \quad (X \cdot f)(a) = X(a)f$$

对于 $a \in \mathcal{A}$。显然，只要 $f \cdot X$和 $X \cdot f$是（σ,τ）-导子，上述作用就定义了 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 上的双模结构。对于 $a,b \in \mathcal{A}$，有

$$f \cdot X(ab) = fX(ab) = f\sigma(a)X(b) + fX(a)\tau(b) = \sigma(a)fX(b) + fX(a)\tau(b)$$
$$\sigma(a)f \cdot X(b) + f \cdot X(a)\tau(b)$$

这表明 $f \cdot X$是（σ,τ）-导子。类似地，可以证明 $X \cdot f$是（σ,τ）-导子。□

在（σ,τ）-导子的定义中，当 σ 和 τ 都是 $\mathcal{A}$上的恒等映射时，就得到一个取值于 M 的通常导子。若导子 X 可写成 $X(f) = [f, g_0] = m_0 f - f m_0$，其中 $m_0 \in M$为某个固定元素，则称其为内导子。这通常可以反映一个代数的非交换程度。对于（σ, τ）-导子，内导子的定义如下。

定义 2.3. 一个取值于 M 的（σ， τ）-导子 X 被称为内导子，若存在 s $m_0 \in M$ 使得

$$X(f) = m_0\tau(f) - \sigma(f)m_0$$

对所有 $f \in \mathcal{A}$.

注意，尽管交换代数上不存在内导子，但一般而言，当 $\sigma \neq \tau$ 时，交换代数上存在内的（非平凡）(σ,τ)-导子。

定义 2.4. 若一个取值于 M 的 (σ,τ)-导子同时也是一个取值于 M. 的 (τ,σ)-导子，则称其为对称的。

来看几个对称 (σ,τ)-导子的例子。对于任意的 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，由下式定义的线性映射 $X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$X(f) = \tau(f) - \sigma(f) \tag{2.2}$$

对于 $f \in \mathcal{A}$是一个对称的（σ,τ）-导子。事实上，对于 $f,g \in \mathcal{A}$，有

$$X(fg) = \tau(f)\tau(g) - \sigma(f)\sigma(g) = \tau(f)\tau(g) - \sigma(f)\tau(g) + \sigma(f)\tau(g) - \sigma(f)\sigma(g)$$
$$= (\tau(f) - \sigma(f))\tau(g) + \sigma(f)(\tau(g) - \sigma(g)) = X(f)\tau(g) + \sigma(f)X(g)$$

这表明 X是一个（σ,τ）-导子。另一方面，对于 $f,g \in \mathcal{A}$有

$$X(fg) = \tau(f)\tau(g) - \sigma(f)\sigma(g) = \tau(f)\tau(g) - \tau(f)\sigma(g) + \tau(f)\sigma(g) - \sigma(f)\sigma(g)$$
$$= \tau(f)(\tau(g) - \sigma(g)) + (\tau(f) - \sigma(f))\sigma(g) = \tau(f)X(g) + X(f)\sigma(g)$$

这表明 X也是一个（τ,σ）-导子。因此， X是一个对称的（σ,τ）-导子。由（2.2）给出的导子是一个对称的内（σ,τ）-导子。另一个（σ,τ）-导子的例子是多项式代数 $\mathbb{C}[x]$. 上的 Jackson 导数 D_q。Jackson 导数定义为

$$D_q(f(x)) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{2.3}$$

对于 f（x） $\in \mathbb{C}[x]$以及 $q \in \mathbb{C}$，其中 $q \neq 1$.对于 f（x） g（x） $\in \mathbb{C}[x]$，有

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q(g(x)) + D_q(f(x))g(x) = D_q(f(x))g(qx) + f(x)D_q(g(x)).$$

取端同态 $\sigma(f)(x) = f(qx)$ 和 $\tau(f)(x) = f(x)$，Jackson 导数 D_q 是一个对称的 (σ,τ)-导子。这是多项式代数 $\mathbb{C}[x]$ 上一个非内的 (σ,τ)-导子例子（另见第 3.3 节）。

在结合代数 $\mathcal{A}$ 上，可以将 (2.2) 推广，以构造取值于双模中的对称内 (σ,τ)-导子。

命题 2.5. 设 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，且 M 是一个 $\mathcal{A}$-双模。若 $m_0 \in M$ 满足 $[m_0,\tau(f)] = [m_0,\sigma(f)] = 0$ 对所有 $f \in \mathcal{A}$ 均成立，则 $X\colon \mathcal{A} \to M$ 定义为

$$X(f) = m_0\tau(f) - \sigma(f)m_0$$

对 $f \in \mathcal{A}$，是取值于 M 的对称内 (σ,τ)-导子。

证明. 根据定义，X 是一个内 (σ,τ)-导子。我们要证明 X 也是一个 (τ,σ)-导子。由于对所有 $f \in \mathcal{A}$ 均有 $[m_0,f] = 0 = [m_0,\sigma(f)]$，因此

$$X(f) = m_0\tau(f) - \sigma(f)m_0 = \tau(f)m_0 - m_0\sigma(f).$$

对于 $f,g \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned} X(fg) &= \tau(f)\tau(g)m_0 - \tau(f)m_0\sigma(g) + \tau(f)m_0\sigma(g) - m_0\sigma(f)\sigma(g) \\ &= \tau(f)(\tau(g)m_0 - m_0\sigma(g)) + (\tau(f)m_0 - m_0\sigma(f))\sigma(g) \\ &= \tau(f)X(g) + X(f)\sigma(g), \end{aligned}$$

这表明 X 是一个 (τ,σ)-导子。由于我们已经证明 X 既是 (σ,τ)-导子，也是 (τ,σ)-导子，因此它是对称的。□

现在我们来引入代数自同态对的正则性概念。给定 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，记

$$\delta(f) = \tau(f) - \sigma(f) \tag{2.4}$$

对于 $f \in \mathcal{A}$。在下文中，δ 的性质将起重要作用，为此我们引入正则性的概念。

定义 2.6. 设 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$。若存在$f \in \mathcal{A}$使得 $\delta(f) = \tau(f) - \sigma(f)$ 不是零因子，则称对 (σ,τ) 为正则对。此外，若存在 $f \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta(f)$ 可逆，则称对 (σ,τ) 为强正则对。

现在来看一些正则对和强正则对的例子。以 $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]$ 为例，它是变量 x. 的多项式代数。由于 $\mathbb{C}[x]$ 中没有零因子，任何满足 $\sigma \neq \tau$ 的对 (σ,τ) 都是正则端同态对。现在，令 $\sigma(x) = qx$，且 $\tau(x) = x$，其中 $q \in \mathbb{C}, q \neq 1$。由于 $\sigma \neq \tau$，对 (σ,τ) 是正则对。此外，对于多项式 $p(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$,

$$\delta(p)(x) = \sum_{i\geq 1}(1-q^i)a_i x^i$$

在 $\mathbb{C}[x]$. 中不可逆。因此，满足 $\sigma(x) = qx$ 且 $\tau(x) = x$ 的对 (σ,τ) 不是 $\mathbb{C}[x]$. 的强正则端同态对。另一方面，给定 $\sigma(x) = x - h$ 和 $\tau(x) = x$，对于 $h \in \mathbb{C}$ $(h \neq 0)$，则

$$\delta(x) = h$$

在 $\mathbb{C}[x]$ 中可逆，这意味着满足 $\sigma(x) = x - h$和 $\tau(x) = x$ 的对 (σ,τ) 是 $\mathbb{C}[x]$. 上的强正则端同态对

在下面的引理中，我们给出对称 (σ,τ)-导子的一个性质，该性质揭示了端同态正则对与对称 (σ,τ)-导子之间的联系。

引理 2.7. 若 X 是一个取值于 $\mathcal{A}$-双模 M 的对称（σ,τ）-导子，则

$$X(f)\delta(g)=\delta(f)X(g) \tag{2.5}$$

对所有 $f,g\in\mathcal{A}$ 均成立，其中 $\delta=\tau-\sigma$。

证明. 设 X 是一个对称（σ,τ）-导子。对于 $f,g\in\mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}0&=X(fg)-\sigma(f)X(g)-X(f)\tau(g)\\&=\tau(f)X(g)+X(f)\sigma(g)-\sigma(f)X(g)-X(f)\tau(g)\\&=(\tau(f)-\sigma(f))X(g)+X(f)(\sigma(g)-\tau(g))\\&=\delta(f)X(g)-X(f)\delta(g),\end{aligned}$$

这意味着

$$X(f)\delta(g)=\delta(f)X(g).$$ □

命题 2.8. 设（σ,τ）是 $\mathcal{A}$ 的一对强正则端同态，并设 X 是一个取值于 $\mathcal{A}$-双模 M 的对称（σ,τ）-导子。那么存在唯一的 $m_0\in M$，使得

$$X(f)=m_0\tau(f)-\sigma(f)m_0$$

and

$$[m_0,\tau(f)]=[m_0,\sigma(f)]=0$$

对所有 $f\in\mathcal{A}$。

证明。由于 X 是对称的（σ,τ）-导子，由引理 2.7 可得

$$X(f)\delta(g)=\delta(f)X(g) \tag{2.6}$$

对所有 $f,g\in\mathcal{A}$。由于假设（σ,τ）是强正则端同态对，存在 $g_0\in\mathcal{A}$ 使得 $\delta(g_0)$ 可逆。由此根据（2.6）可得

$$X(f)=\delta(f)X(g_0)\delta(g_0)^{-1} \tag{2.7}$$

对所有 $f\in\mathcal{A}$。令 $m_0=X(g_0)\delta(g_0)^{-1}$，利用（2.7）计算

$$\begin{aligned}0&=X(fg)-\sigma(f)X(g)-X(f)\tau(g)=\delta(fg)m_0-\sigma(f)\delta(g)m_0-\delta(f)m_0\tau(g)\\&=\big(\tau(f)\tau(g)-\sigma(f)\sigma(g)\big)m_0-\sigma(f)\big(\tau(g)-\sigma(g)\big)m_0-\big(\tau(f)-\sigma(f)\big)m_0\tau(g)\\&=\tau(f)\tau(g)m_0-\sigma(f)\tau(g)m_0-\tau(f)m_0\tau(g)+\sigma(f)m_0\tau(g)\\&=\tau(f)[\tau(g),m_0]-\sigma(f)[\tau(g),m_0]=\delta(f)[\tau(g),m_0],\end{aligned}$$

并令 $f=g_0$，这意味着 $\delta(g_0)$ 可逆，从而得到 $[\tau(g)\ m_0]=0$ 对所有 $g\in\mathcal{A}$ 均成立。类似地，恒等式

$$0=X(fg)-\tau(f)X(g)-X(f)\sigma(g)$$

这意味着对所有 $g\in\mathcal{A}$，$[\sigma(g)\ m_0]=0$。由此可得

$$X(f)=\delta(f)m_0=m_0\delta(f)=m_0\tau(f)-\sigma(f)m_0.$$

最后，我们来证明 m_0 是唯一的。为此，假设

$$X(f) = \delta(f)m_0 = \delta(f)n_0$$

对所有 $f \in \mathcal{A}$ 均成立，这意味着 $\delta(f)(m_0 - n_0) = 0$ 对所有 $f \in \mathcal{A}$ 均成立。令 $f = g_0$，得到 $m_0 = n_0$，因为 $\delta(g_0)$ 可逆。□

推论 2.9. 若 (σ, τ) 是 $\mathcal{A}$ 的强正则端同态对，则每个取值于 $\mathcal{A}$-双模 M 中的对称 (σ, τ)-导子都是内导子。

3. (σ, τ)-Hochschild Cohomology 霍赫希尔德上同调

霍赫希尔德上同调这一概念最初由 [Hoc45] 引入。低维霍赫希尔德上同调理论关注结合代数的导子。例如，第一上同调群刻画了该代数的外导子。本节将介绍霍赫希尔德上同调的 (σ, τ) 版本，称为 (σ, τ)-霍赫希尔德上同调。(σ, τ)-霍赫希尔德上同调将定义为取值于某个特定扭曲双模中的霍赫希尔德上同调，我们将其记作 $M_{(\sigma,\tau)}$. 在这种霍赫希尔德上同调中，1-上循环是 (σ, τ)-导子，而 1-上边界是内 (σ, τ)-导子。因此，第一 (σ, τ)-霍赫希尔德上同调群，记作 $H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}, M)$，刻画了外 (σ, τ)-导子。首先来看预备知识，然后再讨论细节。

3.1. 霍赫希尔德上同调预备知识。设 $\mathcal{A}^{\otimes n} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ 是 n重张量积 $\mathcal{A}$，且 M 是一个 $\mathcal{A}$-双模。$\omega : \mathcal{A}^{\otimes n} \to M$称为代数 $\mathcal{A}$ 取值于 M 的 n上链，其中 $\mathbb{C}$是线性映射；所有 n上链构成的线性空间记为 $C^n(\mathcal{A}, M)$，其中 $n \geq 1.$。对于 $n = 0$，令 $C^0(\mathcal{A}, M) = M.$。代数 $\mathcal{A}$ 以 M为系数的霍赫希尔德上链复形，记为 $C^*(\mathcal{A}, M, \delta)$，是由上链的线性空间构成的序列

$$0 \to M \to C^1(\mathcal{A}, M) \to C^2(\mathcal{A}, M) \to \cdots \to C^n(\mathcal{A}, M) \to C^{n+1}(\mathcal{A}, M) \to \cdots$$

并配备微分 $\delta_n : C^n(\mathcal{A}, M) \to C^{n+1}(\mathcal{A}, M)$，其定义如下：

$$(\delta_0 m)(a) = ma - am$$

对于 $m \in M$ 和 $a \in A$，以及

$$(\delta_n\omega)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1\omega(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\omega(a_1, \ldots, a_ja_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\omega(a_1, \ldots, a_n)a_{n+1}$$

对于 $\omega \in C^n(\mathcal{A}, M)$和 $n \geq 1$。可以证明 $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$。

若 n-上链 ω 满足 $\delta\omega = 0$，则称其为 n-余循环；若存在一个 $(n-1)$-上链 ρ 使得 $\omega = \delta\rho.$，则称其为 n-余边界。n-余循环构成 n-上链加法群的一个子群。$\mathcal{A}$ 的 n 维上同调群（系数取自 M），记为 $H^n(\mathcal{A}, M)$，是 n 维余循环模去 n 维余边界子群所得的群。也就是说，记 $Z^n(\mathcal{A}, M)$ 为 n-余循环的集合，即

$$Z^n(\mathcal{A}, M) = \{\omega \in C^n(\mathcal{A}, M) : \delta\omega = 0\}$$

并记 $B^n(\mathcal{A},M)$ 为 n-余边界的集合，即

$$B^n(\mathcal{A},M)=\{\omega\in C^n(\mathcal{A},M):\omega=\delta\rho,\ \text{ for }\rho\in C^{n-1}(\mathcal{A},M)\},$$

定义

$$H^n(\mathcal{A},M)=Z^n(\mathcal{A},M)/B^n(\mathcal{A},M).$$

现在，我们来考察 $n=0$,**1** 时的上同调群。对于 $n=0$，霍赫希尔德上同调群由下式给出

$$H^0(\mathcal{A},M)=\ker(\delta_0)=\{m\in M:ma=am,\ \text{for } a\in\mathcal{A}\},$$

这就是 $M.$ 的中心。对于 $n=1$，考虑

$$(\delta_1\omega)(a_1,a_2)=a_1\omega(a_2)-\omega(a_1a_2)+\omega(a_1)a_2$$

对于 $\omega\in C^1(\mathcal{A},M)$，边界映射为

$$(\delta_0 m)(a_1)=[m,a_1],$$

对于 $a_1,a_2\in\mathcal{A},m\in M.$，已知 $\omega\in\ker(\delta_1)$，则有

$$\omega(a_1a_2)=a_1\omega(a_2)+\omega(a_1)a_2$$

这意味着线性映射 $\omega:\mathcal{A}\to M$ 是一个取值于 $M.$ 的 $\mathcal{A}$ 导子。记作

$$Z^1(\mathcal{A},M)=\{\omega\in C^1(\mathcal{A},M):\omega(ab)=a\omega(b)+\omega(a)b\quad\forall\,a,b\in\mathcal{A}\}=\mathrm{Der}(\mathcal{A},M),$$

其中 $\mathrm{Der}(\mathcal{A},M)$ 表示取值于 $M.$ 的 $\mathcal{A}$ 所有导子构成的集合。对于 δ_0像中的 ω，有

$$B^1(\mathcal{A},M)=\{\omega\in C^1(A,M):\omega=(\delta_0 m)(a)=[m,a],\forall\,a\in\mathcal{A}\}=\mathrm{Inn}(\mathcal{A},M),$$

其中 $\mathrm{Inn}(\mathcal{A},M)$ 表示取值于 $M.$ 的 $\mathcal{A}$ 所有内导子构成的集合。因此可得

$$H^1(\mathcal{A},M)=Z^1(\mathcal{A},M)/B^1(\mathcal{A},M)=\mathrm{Der}(\mathcal{A},M)/\mathrm{Inn}(\mathcal{A},M),$$

表示取值于 $M.$的 $\mathcal{A}$ 所有外导子构成的集合

3.2. (σ,τ)-霍赫希尔德上同调。设 $\mathcal{A}$ 为一个结合代数，M 为一个$\mathcal{A}$-双模。给定 σ，$\tau\in\mathrm{End}(\mathcal{A})$，我们将通过端同态 σ 和 τ.扭转 M 上的作用，从而在M上构造一个新的 $\mathcal{A}$-双模结构，记作 $M_{(\sigma,\tau)}$。具体而言，令

$$f\cdot m=\sigma(f)m,\quad m\cdot f=m\tau(f)$$

对于 $f\in\mathcal{A}$ 和 $m\in M.$，容易证明 $M_{(\sigma,\tau)}$ 仍是一个 $\mathcal{A}$-双模。我们希望计算取值于 $M_{(\sigma,\tau)}.$ 的 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德上同调群。边界映射 $\delta_n:C^n(\mathcal{A},M_{(\sigma,\tau)})\to C^{n+1}(\mathcal{A},M_{(\sigma,\tau)})$ 现在可表示为

$$(\delta_0 m)(a)=m\cdot a-a\cdot m=m\tau(a)-\sigma(a)m$$

对于 $m \in M_{(\sigma,\tau)}$ 和 $a \in \mathcal{A}$，以及

$$\begin{aligned}(\delta_n\omega)(a_1,\dots,a_{n+1}) &= a_1\cdot\omega(a_2,\dots,a_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\omega(a_1,\dots,a_ja_{j+1},\dots,a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1}\omega(a_1,\dots,a_n)\cdot a_{n+1} \\ &= \sigma(a_1)\omega(a_2,\dots,a_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\omega(a_2,\dots,a_ja_{j+1},\dots,a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1}\omega(a_1,\dots,a_n)\tau(a_{n+1})\end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$。特别地，对于 $n = 1$ 可得

$$(\delta_1\omega)(a_1,a_2) = \sigma(a_1)\omega(a_2) + \omega(a_1)\tau(a_2) - \omega(a_1a_2)$$

这意味着，1-余循环 $\omega \in C^1(\mathcal{A}, M_{(\sigma,\tau)})$ 是一个取值于 M 的 (σ,τ)-导子。我们将所有取值于 M 的 $\mathcal{A}$ 的 (σ,τ)-导子与所有内 (σ,τ)-导子的集合分别记为 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M)$ 和 $\mathrm{Inn}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M)$。于是定义

$$\begin{aligned}Z^n_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) &= Z^n(\mathcal{A},M_{(\sigma,\tau)}) \\ B^n_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) &= B^n(\mathcal{A},M_{(\sigma,\tau)})\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}Z^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) &= \mathrm{Der}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M), \\ B^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) &= \mathrm{Inn}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M).\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{A}$ 取值于 $M_{(\sigma,\tau)}$ 的霍赫希尔德上同调群定义为

$$H^n_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) = Z^n_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M)/B^n_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M).$$

现在考虑 (σ,τ)-霍赫希尔德上同调群，其中 $n = 0$，1。对于 $n = 0$，有

$$H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M) = \{m \in M_{(\sigma,\tau)} : m\tau(a) = \sigma(a)m, \text{ for } a \in \mathcal{A}\}.$$

命题 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个交换代数，且 (σ,τ) 是一个正则对。 n

$$H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},\mathcal{A}) = 0.$$

证明. 设 $b \in H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},\mathcal{A})$，则对 $a \in \mathcal{A}$ 有 $b\delta(a) = 0$（利用了 $\mathcal{A}$ 是交换的这一事实）。此外，由于 (σ,τ) 是一个正则对，存在 $a_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta(a_0)$ 不是零因子。于是

$$b\delta(a_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

因此，$H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},\mathcal{A}) = 0$. □

对于 $n = 1$，$(\delta_1\omega)(a_1,a_2) = 0$ 蕴含

$$\omega(a_1a_2) = \sigma(a_1)\omega(a_2) + \omega(a_1)\tau(a_2)$$

这表明 $\omega \in Z^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A},M)$ 是一个 (σ,τ)-导子。对于满足以下条件的 $\omega \in C^1(\mathcal{A},M_{(\sigma,\tau)})$，

$$\omega = (\delta_0 m)(a) = m\tau(a) - \sigma(a)m$$

这意味着 $\omega \in B^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}, M)$ 是一个内 (σ,τ)-导子。因此

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}, M) = \mathrm{Der}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}, M)/\mathrm{Inn}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}, M)$$

构成所有从 $\mathcal{A}$ 到 $M.$、取值于 $M.$ 的外（σ,τ）-导子。当 $M = \mathcal{A}$ 时，我们将简写为 $H^1_{(\sigma,\tau)}$（$\mathcal{A}$） $= H^1_{(\sigma,\tau)}$（$\mathcal{A},\mathcal{A}$）。注意，若 $H^1_{(\sigma,\tau)}$（$\mathcal{A}$） $= 0$，则每个（σ,τ）-导子都是内导子。

现在考虑若干能够确定低次数（σ,τ）-上同调的情形。首先，由推论 2.9 可立即得出，对于强正则的对称（σ,τ）-导子，$H^1_{(\sigma,\tau)}$（$\mathcal{A}, M$）为零。我们将其表述如下。

命题 3.2. 设 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ 满足（σ,τ）是强正则端同态对。若 $\mathcal{A}$ 上每个取值于 M 的（σ,τ）-导子都是对称的，则 $H^1_{(\sigma,\tau)}$（$\mathcal{A}, M$） $= H^1_{(\tau,\sigma)}$（$\mathcal{A}, M$） $= 0$。

特别地，对于交换代数 $\mathcal{A}$，每个 (σ,τ)-导子都是对称的，因此可以得出：若 (σ,τ) 是强正则端同态对，则 $H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A}) = 0$。

3.3. (σ,τ)-霍赫希尔德上同调的例子。设 $\mathcal{A} = \mathbb{K}[x]$ 为域 $\mathbb{K}.$ 上以不定元 x 为变量的多项式代数。$\mathbb{K}[x]$ 的零维和一维霍赫希尔德上同调都同构于 $\mathbb{K}[x]$，即 $H^0(\mathbb{K}[x]) \simeq \mathbb{K}[x]$ 且 $H^1(\mathbb{K}[x]) \simeq \mathbb{K}[x]\frac{d}{dx}$。（例如参见 [Wit20]）。本节将介绍 0 次和 1 次的 (σ,τ)-霍赫希尔德上同调群。

在 0 次情形下，假设 $\sigma \neq \tau$，即可应用命题 3.1。在这种情况下，存在一个多项式 $p_0 \in \mathbb{K}[x]$，使得 $\delta(p_0) \neq 0$，这意味着 $\delta(p_0)$ 不是零因子，因为 $\mathbb{K}[x]$ 是整环。因此

$$H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) = 0.$$

接下来，我们考虑 $H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x])$。

命题 3.3。设 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[x])$，且设 $\delta = \tau - \sigma$。则

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{K}[x]/I_\delta,$$

其中

$$I_\delta = \{p(x)\delta(x) : p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$$

是由 $\delta(x)$ 生成的理想。

证明。在 $\mathbb{K}[x]$ 中，一个 (σ,τ)-导子 X 完全由以下内容确定：

$$X(x) = f_0(x) \in \mathbb{K}[x]$$

反过来，任意这样的 $f_0 \in \mathbb{K}[x]$ 选择都可以通过使用扭曲莱布尼茨法则得到一个 (σ,τ)-导子，这意味着 $Z^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) \simeq \mathbb{K}[x]$，其中同构由 $X \mapsto X(x) = f_0(x)$ 给出。现在，如果 $X \in B^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x])$，则

$$X(x) = g_0(x)(\tau(x) - \sigma(x)) = g_0(x)\delta(x),$$

对于某个 $g_0 \in \mathbb{K}[x]$，这意味着

$$B^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) \simeq I_\delta.$$

因此

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) = Z^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x])/B^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{K}[x]/I_\delta. \qquad \square$$

为说明上述结果，我们将其应用于一个具体情形。

命题 3.4. 设 σ, τ 是多项式代数 $\mathbb{K}[x]$ 的端同态，由 $\sigma(x) = qx$ 和 $\tau(x) = x$ 给出，其中 $q \neq 0$，1。于是

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{K}[x], \mathbb{K}[x]) = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

证明。根据 σ 和 τ 的定义，可得

$$\delta(x) = \tau(x) - \sigma(x) = (1-q)x$$

并注意到

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)\delta(x) = x, \left(\frac{x}{1-q}\right)\delta(x) = x^2, \ldots, \left(\frac{x^{n-1}}{1-q}\right)\delta(x) = x^n,$$

除了 1 以外，都属于理想 $I_\delta = \langle p(x)\delta(x) | p(x) \in \mathbb{K}[x] \rangle$。因此，对于 $\lambda \in \mathbb{K}.$， I_δ 是一个没有 $\lambda 1$ 的多项式代数 $\mathbb{K}[x]$。利用命题 3.3，对于端同态 $\sigma(x) = qx$ 和 $\tau(x) = x$， $\mathbb{K}[x]$ 的外部 (σ, τ)-导子为

$$\mathbb{K}[x]/I_\delta = \{\lambda 1 | \lambda \in \mathbb{K}\}. \qquad \square$$

推论 3.5. Jackson 导数是 $\mathbb{K}[x].$ 的一个外部 (σ, τ)-导子。

证明。在 $\mathbb{K}[x]$ 中，每个（σ， τ）-导子 X 都由 X（x） $= f_0$（x） $\in \mathbb{K}[x].$ 确定。令 X 为 Jackson 导数。容易证明， X 是一个（σ， τ）-导子，且 σ（x） $= qx$， τ（x） $= x$，以及 X（x） $= 1.$。由于 Jackson 导数由 f_0（x） $= 1$ 确定，因此根据命题 3.4，它是 $\mathbb{K}[x].$ □的一个外导子。

接下来，令 $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_N$（$\mathbb{C}$）表示（$N \times N$）阶复矩阵代数。如果 σ、$\tau \in \mathrm{End}$（$\mathcal{A}$）是自同构，则可以很容易地描述 $H^0_{\sigma\tau}$（Mat_N（$\mathbb{C}$））。
命题 3.6。如果 σ、$\tau \in \mathrm{Aut}$（Mat_N（$\mathbb{C}$））， 则 $H^0_{(\sigma,\tau)}\big(\mathrm{Mat}_N$（$\mathbb{C}$）$\big) \simeq \mathbb{C}$。

证明。由于 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 是中心单代数，斯科伦-诺特定理表明所有自同构都是内自同构；也就是说，存在 $U, V \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$（在相差一个复数倍的意义下唯一），使得对所有 $A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$， $\tau(A) = U^{-1}AU$且 $\sigma(A) = V^{-1}AV$。根据定义

$$H^0_{(\sigma,\tau)}(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})) = \{A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) : A\tau(B) = \sigma(B)A \quad \forall\, B \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\},$$

并可计算得

$$A\tau(B) = \sigma(B)A \quad \Leftrightarrow \quad AU^{-1}BU = V^{-1}BVA \quad \Leftrightarrow \quad [VAU^{-1}, B] = 0.$$

要使上述关系对所有 $B \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 都成立，必有$VAU^{-1} = z\mathbb{1}_N$，其中存在某个 $z \in \mathbb{C}$，且 $\mathbb{1}_N$表示单位矩阵。因此可得

$$H^0_{(\sigma,\tau)}\big(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\big) = \{zV^{-1}U : z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}. \qquad \square$$

众所周知，$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 上的所有导子都是内导子，这意味着

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})) = 0.$$

此外，事实是，对于 $n \geq 1$ 和任意双模 M， $H^n(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ M) = 0$（参见例如 [Red01]），由此得到以下结果。

命题 3.7. 令 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 表示 $N\times N$ 复矩阵代数，并令 M 为一个 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$-双模。那么

$$H^n_{(\sigma,\tau)}(Mat_N(\mathbb{C}),M)=0$$

对于 $n\geq 1$。

证明。由于对于任意双模 M 和 $n\geq 1$，都有 $H^n(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ M)=0$，因此

$$H^1_{(\sigma,\tau)}(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}),M)=H^1(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}),M_{(\sigma,\tau)})=0. \qquad \square$$

特别地，上述结果意味着 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 上的每个 (σ,τ)-导子都是内导子。

4. Symmetric (σ,τ)-algebras

研究 (σ,τ)-代数上的 (σ,τ)-联络的框架已在 [AI22],[AIL20] 和 [AIL22] 中得到研究。本节将扩展该框架，以涵盖第 2 节中已引入的对称 (σ,τ)-导子。为此，我们引入对称 (σ,τ)-代数和对称 (σ,τ)-联络，并研究 (σ,τ)-代数中端同态的强正则条件如何影响此类联络。下面回顾 [AI22] 中的一些基本定义。

定义 4.1. (σ,τ)-代数 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一对对象，其中 $\mathcal{A}$ 是结合代数，且 X_a 是 $\mathcal{A}$ 的一个 (σ_a,τ_a)-导子，其中 $a\in I$.

定义 4.2. 对于 (σ,τ)-代数 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$，记 $T\Sigma\subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 为由 $\{X_a\}_{a\in I}$ 生成的向量空间。称 $T\Sigma$ 为 Σ 的切空间。

回顾一下，若一对端同态 (σ,τ) 存在 $f_0\in\mathcal{A}$，使得 $\delta(f_0)=\tau(f_0)-\sigma(f_0)$ 可逆，则称其为强正则。在一个 (σ,τ)-代数中，存在若干对端同态；对于该 (σ,τ)-代数中的每个 (σ,τ)- 导子 X_a，都有端同态对 (σ_a,τ_a)，其中 $a\in I$. 。我们希望考虑 (σ,τ)- 代数中的所有端同态对同时强正则的情形，即存在 $f_a\in\mathcal{A}$，对于 $a\in I$，使得 $\delta_a(f_a)=\tau_a(f_a)-\sigma_a(f_a)$ 可逆。我们称具有此性质的 (σ,τ)-代数为强正则代数。类似地，若 (σ,τ)-代数中的每个 (σ,τ)-导子都是对称的，则称该 (σ,τ)-代数为对称代数。下面给出精确定义。

定义 4.3. 若 (σ,τ)-代数 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 满足：对所有 $a\in I$，(σ_a,τ_a) 都是 $\mathcal{A}$ 的（强）正则端同态对，则称其为（强）正则的。

定义 4.4. 对称 (σ,τ)-代数 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一种 (σ,τ)-代数，其中 X_a 对于 $a\in I$ 是对称的 (σ_a,τ_a)-导子。

注意，若 $\mathcal{A}$ 是交换代数，则任意 (σ,τ)-代数 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 都是对称的，因为交换代数上的 (σ,τ)-导子是对称的。要使这样的代数成为正则 (σ,τ)-代数，可以考虑该代数没有零因子且对所有 $a\in I$. 都有 $\sigma_a\neq\tau_a$ 的情形。同样，这是可行的，因为此时，对于某个 $f_a\in\mathcal{A}$，$\delta_a(f_a)=\tau_a(f_a)-\sigma_a(f_A)\neq 0$。要得到强正则代数，例如可取单变量多项式代数 $\mathbb{K}[x]$ x，并假设 $\sigma_a=\sigma$，其中 $\sigma(p)(x)=p(x-h)$ 对 $h\in\mathbb{K}$ 成立，且 $p(x)\in\mathbb{K}$，并假设 $\tau_a=\tau$，其中 $\tau(p)(x)=p(x)$。在这种情况下，每一对 (σ_a,τ_a) 在 $\mathbb{K}[x]$. 中都是强正则的。

现在回顾 (σ,τ)-代数上的模的定义。

定义4.5. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一个 (σ,τ)-代数。左 Σ-模 $(M,\{(\hat{}\sigma_a,\hat{}\tau_a)\}_{a\in I})$ 是一个左 $\mathcal{A}$-模 M，并配有 $\mathbb{C}$-线性映射 $\hat{}\sigma_a,\hat{}\tau_a: M\to M$，使得

$$\hat{\sigma}_a(fm)=\sigma_a(f)\hat{\sigma}(m)$$
$$\hat{\tau}_a(fm)=\tau_a(f)\hat{\tau}_a(m)$$

对于 $f\in\mathcal{A}$、$m\in M$ 和 $a\in I$。

类似地，可以定义右 Σ-模以及 Σ-双模（参见 [AI22]）。现在让我们回顾几个 Σ-模的例子。

例4.6。设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一个 (σ,τ)-代数，且设 $\mathcal{A}^n$ 是一个自由左 $\mathcal{A}$-模，其基为 $\{e_i\}, i=1,\dots,n.$。通过如下设定，在 $\mathcal{A}^n$ 上引入一个典范的 Σ-模结构

$$\hat{\sigma}^0_a(m)=\sigma_a(m^i)e_i,\quad \hat{\tau}^0_a(m)=\tau_a(m^i)e_i$$

其中 $m=m^ie_i\in\mathcal{A}^n$（隐含对 i 从 1 到 n 求和）。现在，设 $f\in\mathcal{A}$ 一个 d $m\in\mathcal{A}^n$，有

$$\hat{\sigma}^0_a(fm)=\sigma_a(fm^i)e_i=\sigma_a(f)\sigma_a(m^i)e_i=\sigma_a(f)\hat{\sigma}^0_a(m)$$
$$\hat{\tau}^0_a(fm)=\tau_a(fm^i)e_i=\tau_a(f)\tau_a(m^i)e_i=\tau_a(f)\hat{\tau}^0_a(m),$$

这表明 $(\mathcal{A}^n,\{(\hat{}\sigma^0_a,\hat{}\tau^0_a)\}_{a\in i})$ 是一个左 Σ-模。

上面的例子是一个自由 Σ-模的例子。现在来看一个不是自由模的 Σ-模的例子。

例4.7. 设 $\mathcal{A}=\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 为复数 $(N\times N)$-矩阵构成的代数，并设$\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a=1}^n)$，其中 $X_a:\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\to\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 定义为

$$X_a(A)=A-\sigma_a(A)$$

其端同态为 $\sigma_a(A)=U_aAU_a^{-1}$，对任意 $A\in\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 以及某些复数 $(N\times N)$-矩阵 U_a，满足 $[U_a,U_b]=0$，其中 $a,b=1,\dots,n.$。那么 X_a 是一个 (σ_a,Id)-导子，而 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{(\sigma_a,\mathrm{Id})\}_{a=1}^n)$ 是一个自由 Σ-模。

根据 [AI22],，将适当的投影算子作用于任意 Σ-模，可得到一个投射 Σ-模。令 $p=v_0v_0^\dagger$ 为 $v_0\in\mathbb{C}^N$ 上满足 $|v_0|=1$ 的投影算子。那么，$(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})p,\{(\hat{}\sigma_a,\hat{}\tau_a)\}_{a=1}^n)$，其中$\hat{}\sigma_a(A)=\sigma_a(A)p$ 且$\hat{}\tau_a(A)=Ap$，是一个投射 Σ-模。注意，$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})p$同构于 $\mathbb{C}^N$，而后者不是自由左$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$-模。

现在，我们回顾 Σ-模上的(σ,τ)-联络的定义。

定义4.8。设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$为一个$(\sigma,\tau)$-代数，且$(M,\{(\hat{}\sigma_a,\hat{}\tau_a)\}_{a\in I})$为一个左 Σ-模。M 上的左(σ,τ)-联络是一个映射 $\nabla: T\Sigma\times M\to M$，满足

$$\nabla_X(m_1+m_2)=\nabla_Xm_1+\nabla_Xm_2$$
$$\nabla_X(\lambda m)=\lambda\nabla_Xm$$
$$\nabla_{X+Y}m=\nabla_Xm+\nabla_Ym$$
$$\nabla_{\lambda X}m=\lambda\nabla_Xm$$
$$\nabla_{X_a}(fm)=\sigma_a(f)\nabla_{X_a}m+X_a(f)\hat{\tau}_a(m)$$

对于所有 X、$Y\in T\Sigma$、m、m_1、$m_2\in M$、$\lambda\in\mathbb{C}$、$f\in\mathcal{A}$ 和 $a\in I$。

类似地，右 Σ-模 $(M,\{(\hat{\sigma}_a,\hat{\tau}_a)\}_{a\in I})$ 上的右 (σ,τ)-联络满足 S

$$\nabla_{X_a}(mf)=\hat{\sigma}_a(m)X_a(f)+\big(\nabla_{X_a}m\big)\tau_a(f),$$

除线性性质外。此外，若 M 是一个（σ， τ）-双模，且 ∇ 同时是左（σ， τ）-联络和右（σ， τ）-联络，则称 ∇ 为（σ， τ）-双模联络（参见 [AI22]）。

我们希望引入一种涉及对称（σ， τ）-导子的（σ， τ）-联络。由于对称（σ， τ）-导子满足两条莱布尼茨法则，并且（σ， τ）-联络可视为沿（σ， τ）-导子方向的协变导数，因此自然需要一种对称（σ， τ）-联络的概念，使其满足两条莱布尼茨法则，分别对应于对称（σ， τ）-导子的两条法则。下文将定义对称（σ， τ）-联络，并讨论此类联络在（强）正则对称（σ， τ）-代数上的情形。

定义4.9. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 为一个 (σ,τ)-代数，且 $(M,\{(\hat{\sigma}_a,\hat{\tau}_a)\}_{a\in I})$ 是一个左 Σ-模。 M 上的左 (σ,τ)-联络称为对称的，如果

$$\nabla_{X_a}(fm)=\tau_a(f)\nabla_{X_a}m+X_a(f)\hat{\sigma}_a(m) \tag{4.1}$$

对所有 $a\in I$ 和 $m\in M$ 均成立。

在 Σ-双模上，容易构造出与内 (σ,τ)-导子相对应的联络。

命题4.10. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 为一个 (σ,τ)-代数，使得对于所有 $a\in I$， X_a 都是一个内 (σ_a,τ_a)- 导子；即存在 $\{f_a\}_{a\in I}\subseteq\mathcal{A}$ ，使得

$$X_a(f)=f_a\tau_a(f)-\sigma_a(f)f_a$$

对于 $a\in I$。如果 $(M,\{(\hat{\sigma}_a,\hat{\tau}_a)\}_{a\in I})$ 是一个 Σ-双模，那么

$$\nabla_{X_a}(m)=f_a\hat{\tau}_a(m)-\hat{\sigma}_a(m)f_a$$

定义了（σ， τ）-双模联络，其作用于（M， $\{(\hat{\sigma}_a,\hat{\tau}_a)\}_{a\in I}$）。

证明。容易证明，关于 $T\Sigma$ 和 M 的线性成立。下面证明 ∇ 满足左、右扭曲莱布尼茨法则。对于 $f\in\mathcal{A}$ 和 $m\in M$，有

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_a}(fm)=f_a\hat{\tau}_a(fm)-\hat{\sigma}_a(fm)f_a=f_a\tau_a(f)\hat{\tau}_a(m)-\sigma_a(f)\hat{\sigma}_a(m)f_a\\
&=\sigma_a(f)f_a\hat{\tau}_a(m)-\sigma_a(f)\hat{\sigma}_a(m)f_a+f_a\tau_a(f)\hat{\tau}_a(m)-\sigma_a(f)f_a\hat{\tau}_a(m)\\
&=\sigma_a(f)(f_a\hat{\tau}_a(m)-\hat{\sigma}_a(m)f_a)+(f_a\tau_a(f)-\sigma_a(f)f_a)\hat{\tau}_a(m)\\
&=\sigma_a(f)\nabla_{X_a}(m)+X_a(f)\hat{\tau}_a(m),
\end{aligned}$$

这表明 ∇ 满足左扭曲莱布尼茨法则。类似地，我们来检验 ∇ 满足右扭曲莱布尼茨法则。于是有

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_a}(mf)=f_a\hat{\tau}_a(mf)-\hat{\sigma}_a(mf)f_a=f_a\hat{\tau}_a(m)\tau_a(f)-\hat{\sigma}_a(m)\sigma_a(f)f_a\\
&=\hat{\sigma}_a(m)f_a\tau_a(f)-\hat{\sigma}_a(m)\sigma_a(f)f_a+f_a\hat{\tau}_a(m)\tau_a(f)-\hat{\sigma}_a(m)f_a\tau_a(f)\\
&=\hat{\sigma}_a(m)(f_a\tau_a(f)-\sigma_a(f)f_a)+(f_a\hat{\tau}_a(m)-\hat{\sigma}_a(m)f_a)\tau_a(f)\\
&=\hat{\sigma}_a(m)X_a(f)+\nabla_{X_a}(m)\tau_a(f).\quad\square
\end{aligned}$$

现在，设 $(\mathcal{A}, \{X_a\}_{a\in I})$ 是一个对称强正则 (σ,τ)-代数；由命题 2.8 可知，存在 $\{f_a\}_{a\in I} \subseteq \mathcal{A}$ 使得 $[f_a, \sigma_a(f)] = [f_a, \tau_a(f)] = 0$，并且

$$X_a(f) = f_a\delta_a(f) = f_a\big(\tau_a(f) - \sigma_a(f)\big)$$

对于 $f \in \mathcal{A}$。给定一个（左） Σ-模（$M, \{\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a\}_{a\in I}$），可以很容易验证

$$\nabla_{X_a} m = f_a\hat{\delta}_a(m) = f_a\big(\hat{\tau}_a(m) - \hat{\sigma}_a(m)\big)$$

定义了（σ,τ）上的对称左联络（$M, \{\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a\}_{a\in I}$）。以下结果表明，强正则对称（$\sigma,\tau$）-代数上的每个对称（$\sigma,\tau$）-联络都具有这种形式。

命题 4.11. 设 $\Sigma = (\mathcal{A}, \{X_a\}_{a\in I})$ 是一个强正则对称（σ,τ）-代数，并记

$$X_a(f) = f_a\delta_a(f) = f_a\big(\tau_a(f) - \sigma_a(f)\big)$$

对于 $f_a \in \mathcal{A}$，使得 $[f_a, \tau_a(f)] = [f_a, \sigma_a(f)] = 0$.。若 ∇ 是 Σ-模（$M, \{\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a\}_{a\in I}$）上的（左）对称（$\sigma,\tau$）-联络，则

$$\nabla_{X_a}(m) = f_a\hat{\delta}_a(m) = f_a\big(\hat{\tau}(m) - \hat{\sigma}(m)\big)$$

对于 $m \in M$ 和 $a \in I$。

证明。由于假设 ∇ 是对称的，有

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_a}(fm) - \nabla_{X_a}(fm) \\ &= \sigma_a(f)\nabla_{X_a} m + X_a(f)\hat{\tau}_a(m) - \tau_a(f)\nabla_{X_a} m - X_a(f)\hat{\sigma}_a(m) \\ &= (\sigma_a(f) - \tau_a(f))\nabla_{X_a} m + X_a(f)(\hat{\tau}_a(m) - \hat{\sigma}_a(m)) \\ &= -\delta_a(f)\nabla_{X_a} m + X_a(f)\hat{\delta}_a(m). \end{aligned}$$

利用 $X_a(f) = f_a\delta_a(f)$ 以及 $[f_a, \delta_a(f)] = 0$，可得

$$\delta_a(f)\big(\nabla_{X_a} m - f_a\hat{\delta}_a(m)\big) = 0 \tag{4.2}$$

对于 $f \in \mathcal{A}$和 $m \in M$。由于 (σ,τ) 是强正则对，存在 $g_a \in \mathcal{A}$使得 $\delta(g_a)$ 可逆。因此，将 $f = g_a$ 代入 (4.2) 得到

$$\nabla_{X_a} m = f_a\hat{\delta}_a(m)$$

对于 $m \in M$。 □

我们将这些结果总结为以下推论。

推论 4.12. 设 $\Sigma = (\mathcal{A}, \{X_a\}_{a\in I})$ 是一个强正则对称 (σ,τ)-代数，且 $(M, \{\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a\}_{a\in I})$ 是一个左 Σ-模。那么，存在唯一的对称左 (σ,τ)-联络作用于 $(M, \{\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a\}_{a\in I})$。

5. Curvature

(σ,τ)-联络的曲率在 [AI22] 中定义。本节探讨对称 (σ,τ)-联络的曲率是否满足扭曲线性条件。在经典微分几何中，联络的曲率是结合流形上的向量场所诱导的李代数结构来讨论的。对于 (σ,τ)-联络，则结合 (σ,τ)-李代数结构来讨论曲率。下面回顾几个定义。

定义 5.1. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一个（σ,τ）-代数，令 $T\Sigma$ 表示由 $\{X_a\}_{a\in I}$. 生成的复向量空间。给定一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $R\colon T\Sigma\otimes_{\mathbb{C}}T\Sigma\to T\Sigma\otimes_{\mathbb{C}}T\Sigma$，若满足以下条件，则称（$T\Sigma,R$）为（$\sigma,\tau$）-李代数：

(1) $R^2=\mathrm{id}_{T\Sigma\otimes_{\mathbb{C}}T\Sigma}$, (2) $m($
$X_a\otimes_{\mathbb{C}}X_b-R(X_a\otimes_{\mathbb{C}}X_b))\in T\Sigma$,

对所有 $a,b\in I$，其中 $m\colon T\Sigma\otimes_{\mathbb{C}}T\Sigma\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ 表示由 $m(X_a\otimes_{\mathbb{C}}X_b)=X_a\circ X_b$. 给出的复合映射

给定一个 (σ,τ)-李代数 $(T\Sigma,R)$，引入括号 $[\cdot,\cdot]_R\colon T\Sigma\times T\Sigma\to T\Sigma$如下：

$$[X,Y]_R=m(X_a\otimes_{\mathbb{C}}X_b-R(X_a\otimes_{\mathbb{C}}X_b))$$

对于 $X,Y\in T\Sigma$。此外，若 I是有限集，则引入 R的分量， as
以及结构常数 $C_{ab}^p\in\mathbb{C}$，如下：

$$[X_a,X_b]_R=R_{ab}^{pq}X_p\otimes X_q=C_{ab}^pX_p$$

（其中默认对重复指标求和）。现在，回顾关于 $T\Sigma$上的 (σ,τ)-李代数结构的曲率定义。

定义 5.2. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 是一个 (σ,τ)-代数，使得 $(T\Sigma,R)$ 是一个 (σ,τ)-李代数，并设 $(M,\{(\hat{\sigma}_a,\hat{\tau}_a)\}_{a\in I})$ 是一个 Σ-模。给定一个 (σ,τ)-联络∇， ∇ 的曲率定义为

$$\mathrm{Curv}(X,Y)n=m_\nabla(X\otimes_{\mathbb{C}}Y-R(X\otimes_{\mathbb{C}}Y))n-\nabla_{[X,Y]_R}n$$

对于 $n\in M$和 $X,Y\in T\Sigma$，其中 $m_\nabla(X\otimes_{\mathbb{C}}Y)=\nabla_X\circ\nabla_Y$.

用分量表示，曲率可写为

$$\mathrm{Curv}(X_a,X_b)=\nabla_{X_a}\circ\nabla_{X_b}-R_{ab}^{pq}\nabla_{X_p}\circ\nabla_{X_q}-C_{ab}^p\nabla_{X_p}.$$

现在来讨论 (σ,τ)-联络曲率的线性性质。一般而言，(σ,τ)-联络的曲率不满足任何线性性质。曲率能否满足线性性质，取决于如何定义 (σ,τ)-李代数上的映射 R，代数上的端同态 σ_a's 和 τ_a's 如何相互作用，以及 Σ-模上的映射 $\hat{\tau}_a$'s 如何与联络相互作用。例如，对于

$f \in \mathcal{A}$ 和 $m \in M$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Curv}(X_a, X_b)(fm) &= \nabla_{X_a}(\nabla_{X_b}(fm)) - R^{pq}_{ab}\nabla_{X_p}(\nabla_{X_q}(fm)) - C^p_{ab}\nabla_{X_p}(fm)\\ &= \nabla_{X_a}(\sigma_b(f)\nabla_{X_b}(m) + X_b(f)\hat{\tau}_b(m)) - R^{pq}_{ab}\nabla_{X_p}(\sigma_q(f)\nabla_{X_q}(m)\\ &\quad + X_q(f)\hat{\tau}_q(m)) - C^p_{ab}(\sigma_p(f)\nabla_{X_p}(m) + X_p(f)\hat{\tau}_p(m))\\ &= \sigma_a(\sigma_b(f))\nabla_{X_a}(\nabla_{X_b}(m)) + X_a(\sigma_b(f))\hat{\tau}_a(\nabla_{X_b}(m))\\ &\quad + \sigma_a(X_b(f))\nabla_{X_a}(\hat{\tau}_a(m)) + X_a(X_b(f))\hat{\tau}_a(\hat{\tau}_b(m))\\ &\quad - R^{pq}_{ab}(\sigma_p(\sigma_q(f))\nabla_{X_p}(\nabla_{X_q}(m)) + X_p(\sigma_q(f))\hat{\tau}_p(\nabla_{X_q}(m)))\\ &\quad - R^{pq}_{ab}(\sigma_p(X_q(f)) + X_p(X_q(f))\hat{\tau}_p(\hat{\tau}_q(m)))\\ &\quad - C^p_{ab}(\sigma_p(f)\nabla_{X_p}(m) + X_p(f)\hat{\tau}_p(m)).\end{aligned}$$

尽管一般的 (σ,τ)-联络的曲率通常不具有线性性质，但对于特定的 (σ,τ)-李代数或特定的 (σ,τ)-联络，曲率可以满足线性性质。例如，在 [AI22], 中，矩阵代数上的 (σ,τ)-联络的曲率满足某种扭曲线性性质。为此，我们考察相对于特定 (σ,τ)-李代数的一般 (σ,τ)-联络的曲率。假设

$$R^{pq}_{ab} = \delta^q_a\delta^p_b = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a = q, b = p,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

并且 $C^p_{ab} = 0$ 对所有 $a, b \in I$. 均成立。于是，$(T\Sigma, R)$ 的生成元上的括号为

$$[X_a, X_b]_R = X_a \circ X_b - X_b \circ X_a = 0, \tag{5.1}$$

这意味着 (σ,τ)-联络 ∇ 的曲率现在可以写为

$$\mathrm{Curv}(X_a, X_b) = \nabla_{X_a} \circ \nabla_{X_b} - \nabla_{X_b} \circ \nabla_{X_a}.$$

命题 5.3. 设 $\Sigma = (\mathcal{A}, \{X_a\}_{a\in I})$ 是一个 (σ,τ)-代数，且 $(T\Sigma, R)$ 是括号为以下形式的 (σ,τ)-李代数

$$[X_a, X_b]_R = X_a \circ X_b - X_b \circ X_a = 0$$

并设 $(M, \{(\hat{}\sigma_a, \hat{}\tau_a)\}_{a\in I})$ 是一个左 Σ-模。若 $\nabla\colon T\Sigma \times M \to M$是一个左 (σ,τ)-联络，并且

$$\begin{aligned}[\sigma_a, \sigma_b] = 0 = [\sigma_a, X_b],\\ [\hat{\tau}_a, \hat{\tau}_b] = 0 = [\hat{\tau}_a, \nabla_{X_b}]\end{aligned} \tag{5.2}$$

对所有 a、$b \in I$，则

$$Curv(X_a, X_b(fm)) = \sigma_a(\sigma_b(f))Curv(X_a, X_b)m \tag{5.3}$$

对于 $f \in \mathcal{A}$ 和 $m \in M$.

证明。由于 (σ,τ)-李代数括号由 (5.1) 给出，曲率可写为

$$\mathrm{Curv}(X_a, X_b) = \nabla_{X_a} \circ \nabla_{X_b} - \nabla_{X_b} \circ \nabla_{X_a}.$$

现在，对于 $f\in\mathcal{A}$ 和 $m\in M$，应用交换关系 (5.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Curv}(X_a,X_b)(fm)=\nabla_{X_a}(\nabla_{X_b}(fm))-\nabla_{X_b}(\nabla_{X_a}(fm))\\
&=\nabla_{X_a}(\sigma_b(f)\nabla_{X_b}(m)+X_b(f)\hat{\tau}_b(m))-\nabla_{X_b}(\sigma_a(f)\nabla_{X_a}(m)+X_a(f)\hat{\tau}_a(m))\\
&=\sigma_a(\sigma_b(f))\nabla_{X_a}(\nabla_{X_b}(m))+X_a(\sigma_b(f))\hat{\tau}_a(\nabla_{X_b}(m))+\sigma_a(X_b(f))\nabla_{X_a}(\hat{\tau}_b(m))\\
&+X_a(X_b(f))\hat{\tau}_a(\hat{\tau}_b(m))\\
&-\sigma_b(\sigma_a(f))\nabla_{X_b}(\nabla_{X_a}(m))-X_b(\sigma_a(f))\hat{\tau}_b(\nabla_{X_a}(m))-\sigma_b(X_a(f))\nabla_{X_b}(\hat{\tau}_a(m))\\
&-X_b(X_a(f))\hat{\tau}_b(\hat{\tau}_a(m))\\
&=\sigma_a(\sigma_b(f))(\nabla_{X_a}(\nabla_{X_b}(m))-\nabla_{X_b}(\nabla_{X_a}(m)))\\
&=(\sigma_a\circ\sigma_b)(f))\mathrm{Curv}(X_a,X_b)m,
\end{aligned}$$

展示了扭曲线性性质。 □

根据上述命题，并非所有左 (σ,τ)-联络的曲率都满足扭曲线性性质 (5.3)。命题 5.3 的交换关系 (5.2) 限制了需要考虑的左 (σ,τ)-联络，因为要求该联络与所有 a 的映射 $\hat{}\tau_a$ 交换，即对于所有 $a,b.$，$[\hat{}\tau_a,\nabla_{X_b}]=0$。在本命题中，我们希望曲率满足扭曲线性性质 (5.3)，同时对左 (σ,τ)-联络不作过多限制。然而，这可能会对端同态和 (σ,τ)-导子施加额外条件。举例来说，考虑由 $\nabla_{X_a}(e_i)=\gamma_{ai}^k e_k$ 给出的左 (σ,τ)-联络，其中 $\gamma_{ai}^k\in\mathcal{A}$，它定义在例4.6的自由 Σ-模上。于是有

$$\begin{aligned}
&[\hat{\tau}_a,\nabla_{X_b}](m^ie_i)=\hat{\tau}_a(\nabla_{X_b}(m^ie_i))-\nabla_{X_b}(\tau_a(m^i)e_i)\\
&=\tau_a(\sigma_b(m^i))\tau_a(\gamma_{bi}^k)e_k+\tau_a(X_b(m^i))e_i-\sigma_b(\tau_a(m^i))\gamma_{bi}^k e_k-X_b(\tau_a(m^i))e_i\\
&=(\tau_a(\sigma_b(m^i))\tau_a(\gamma_{bi}^k)-\sigma_b(\tau_a(m^i))\gamma_{bi}^k+\tau_a(X_b(m^k))-X_b(\tau_a(m^k)))e_k,
\end{aligned}$$

如果不施加额外条件，该式通常不等于零。在此例中，可以选择附加条件 $[\tau_a,\sigma_b]=0=[\tau_a,X_b]$，并令 $\tau_a(\gamma_{bi}^k)=\gamma_{bi}^k$，对所有 a、$b.$ 均成立。为遵循命题 5.3 中的条件以及上述例子所施加的附加条件，自然可以选择 $\tau_a=\mathrm{Id}$，从而得到满足扭曲线性性质的曲率。在下面的推论中，所述 (σ,Id)-联络的曲率，对于该 (σ,τ)-李代数，均满足扭曲线性性质。

推论5.4. 设 $\Sigma=(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I}$ 是一个 (σ,τ)-代数，使得 $(T\Sigma,R)$ 是一个 (σ,τ)-带有括号的李代数

$$[X_a,X_b]_R=X_a\circ X_b-X_b\circ X_a=0$$

使得 X_a 是满足以下条件的 (σ_a,Id)-导子

$$[\sigma_a,\sigma_b]=0=[\sigma_a,X_b] \tag{5.4}$$

对于 $a,b\in I.$，由此可得，Σ-模 $(M,\{(\hat{}\sigma_a,\mathrm{Id})\}_{a\in I})$ 上所有左 (σ,Id)-联络的曲率都满足扭曲线性性质

$$Curv(X_a,X_b)(fm)=\sigma_a\big(\sigma_b(f)\big)\,Curv(X_a,X_b)m.$$

对于 $f\in\mathcal{A}$ 和 $m\in M$

现在我们讨论命题 4.11 中唯一的对称 (σ,τ)-联络的曲率。回顾一下，唯一的联络 $\nabla_{X_a}(m) = f_a\delta_a(m)$ 定义在强正则对称 (σ,τ)-代数 $(\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 上，其中 $X_a = f_a\delta_a$ 是内 (σ,τ)-导子，且 $a \in I$. 取 $\hat{}\sigma_a = \hat{}\tau_a = \mathrm{Id}$ 会使该联络变得平凡。我们希望关注 $\hat{}\sigma_a \neq \hat{}\tau_a = \mathrm{Id}$ 且 $f_a \in \mathbb{C}$ 的特殊情形，其中 $a \in I$. 为此，令 $\Sigma = (\mathcal{A},\{X_a\}_{a\in I})$ 表示强正则对称 (σ,τ)-代数，其中$X_a = f_a\delta_a = f_a(\mathrm{Id} - \sigma_a)$，且 $f_a \in \mathbb{C}$ 和 $a \in I$. 在此情形下，向量空间 $T\Sigma$ 由 $\{\delta_a\}_{a\in I}$ 张成。定义 $R\colon T\Sigma \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma \to T\Sigma \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma$ 为

$$R(X_a \otimes_{\mathbb{C}} X_b) = R(f_a\delta_a \otimes_{\mathbb{C}} f_b\delta_b) = f_bf_a(\delta_b \otimes_{\mathbb{C}} \delta_a)$$

这意味着 $R^2 = \mathrm{Id}$。假设 $[\sigma_a,\sigma_b] = 0$，则有

$$[X_a,X_b]_R = m(X_a \otimes_{\mathbb{C}} X_b - R(X_a \otimes_{\mathbb{C}} X_b)) = f_af_b(\delta_a \circ \delta_b - \delta_b \circ \delta_a) = 0,$$

这表明，在（σ,τ）-李代数（$T\Sigma, R$）上，括号为 $[X_a,X_b]_R = 0$。现在计算上述（σ,τ）-代数的唯一联络的曲率。由于 $[X_a,X_b]_R = 0$，则对于 $m \in M$ 和 $X_a, X_b \in T\Sigma$，有 $\nabla_{[X_a,X_b]_R}(m) = 0$，且唯一联络的曲率为

$$\mathrm{Curv}(X_a,X_b)m = f_af_b(\hat{\delta}_a \circ \hat{\delta}_b - \hat{\delta}_b \circ \hat{\delta}_a)(m).$$

我们指出，一般而言，上述曲率不为零，因为 $[\sigma_a,\sigma_b] = 0$ 并不意味着 $[\hat{}\sigma_a, \hat{}\sigma_b] = 0.$。由推论5.4可知，关系式（5.4）在（$\sigma,\tau$）-代数上成立；又由于括号 $[X_a,X_b]_R = 0$，因此唯一的（σ,Id）-联络满足扭曲线性条件（5.3）。

现在我们回顾 [AI22], 中构造的矩阵代数 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 上的 (σ,τ)-联络示例，并将其与对称 (σ,τ)-联络联系起来。

考虑矩阵代数 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，并选取可逆的 $(N\times N)$-矩阵 U_a、$a = 1$、.....、n，使得对所有 a、$b.$，都有 $[U_a,U_b] = 0$。定义端同态 $\sigma_a\colon \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 如下:

$$\sigma_a(A) = U_aAU_a^{-1}$$

并定义对称（内）(σ_a, Id)-导子 $X_a\colon \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 如下:

$$X_a(A) = A - U_aAU_a^{-1}$$

对于 $A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 及 $a = 1$、.....、$n.$。如 [AI22] 所述， $\Sigma = (\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \{X_a\}_{a=1}^n)$ 是一个 (σ,τ)-代数，而 $(T\Sigma, R)$（其中 $R(X\otimes Y) = Y \otimes X$）是一个 (σ,τ)-李代数，满足

$$\begin{aligned}(X_a \circ X_b)(A) &= X_a(X_b(A)) = X_a(A - U_bAU_b^{-1})\\ &= (A - U_bAU_b^{-1}) - U_a(A - U_bAU_b^{-1})U_a^{-1}\\ &= (A - U_aAU_a^{-1}) - U_b(A - U_aAU_a^{-1})U_b^{-1}\\ &= X_b(A - U_aAU_a^{-1}) = (X_b \circ X_a)(A)\end{aligned}$$

这表明 $[X_a,X_b]_R = 0.$

由于 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 是其自身上的自由模，且由单位矩阵 1 生成，因此 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \{(\sigma_a, \mathrm{Id})\}_{a=1}^n)$ 是一个自由 Σ-模。在这个 Σ-模上，可以构造

~ ~ ~一个 (σ,τ)-联络，定义为 $\nabla_{X_a}(1) = \Gamma_a$和 $\Gamma = \mathbb{1} - \Gamma_a$，其中 $\Gamma_a \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，对于$a = 1$，……，$n.$。这个联络明确表示为

$$\nabla_{X_a}(A) = A - U_a A U_a^{-1}\Gamma_a. \tag{5.5}$$

下面证明，左 (σ, Id)-联络 (5.5) 是对称的左 (σ,τ)-联络。取相同的 (σ,τ)-代数 $\Sigma = (\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{X_a\}_{a\in I})$ 和相同的自由模 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$。现在定义映射 $\hat{}\sigma_a : \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，使得 $\hat{}\sigma_a(A) = U_a A U_a^{-1}\Gamma_a \text{for } a = 1, \ldots, n.$ 于是 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{(\hat{}\sigma_a, \mathrm{Id})\}_{a=1}^n)$ 是一个左 Σ- 模。在这个新的左 Σ-模 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{(\hat{}\sigma_a, \mathrm{Id})\}_{a=1}^n)$ 上定义 (σ, Id)-联络 (5.5)。由于 (5.5) 是左 (σ, Id)- 联络，只需证明它满足 (4.1)。设 $A, B \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，则有

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_a}(AB) = AB - U_a ABU_a^{-1}\Gamma_a \\
&= AB - AU_a BU_a^{-1}\Gamma_a + AU_a BU_a^{-1}\Gamma_a - U_a AU_a^{-1}U_a BU_a^{-1}\Gamma_a \\
&= A(B - U_a BU_a^{-1}\Gamma_a) + (A - U_a AU_a^{-1})U_a BU_a^{-1}\Gamma_a \\
&= A\nabla_{X_a}(B) + X_a(A)\hat{\sigma}_a(B),
\end{aligned}$$

这表明 (5.5) 是 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{\hat{}\sigma_a, \mathrm{Id}\}_{a=1}^n)$ 上的对称左 (σ,τ)-联络。文献 [AI22] 中证明了该联络的曲率满足扭曲线性条件 (5.3)。由于 $(T\Sigma, R)$ 上的括号为零，即 $[X_a, X_b]_R = 0 \text{for } X_a, X_b \in T\Sigma$，因此 $(\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{(\hat{}\sigma_a, \mathrm{Id})\}_{a=1}^n)$ 上任意 (σ,τ)-联络的曲率为

$$\mathrm{Curv}(X_a, X_b) = \nabla_{X_a} \circ \nabla_{X_b} - \nabla_{X_b} \circ \nabla_{X_a}.$$

具体而言，(σ, Id)-联络 (5.5) 的曲率为

$$\mathrm{Curv}(X_a, X_b)A = U_a U_b A[U_b^{-1}\Gamma_b, U_a^{-1}\Gamma_a]$$

对于 $A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，我们希望验证交换关系 (5.2) 在此情形下成立。由于 $\hat{}\tau_a = \tau_a = \mathrm{Id}$，两个交换关系 $[\hat{}\tau_a、\hat{}\tau_b] = 0 \text{ and} [\hat{}\tau_a, \nabla_{X_b}] = 0$ 已经满足。还需验证 $[\sigma_a, \sigma_b] = 0 \text{ and } [\sigma_a, X_b] = 0.$令 $A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，则有

$$\begin{aligned}
&[\sigma_a, \sigma_b](A) = \sigma_a(\sigma_b(A)) - \sigma_b(\sigma_a(A)) = \sigma_a(U_b AU_b^{-1}) - \sigma_b(U_a AU_a^{-1}) \\
&= U_a U_b AU_b^{-1}U_a^{-1} - U_b U_a AU_a^{-1}U_b^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&[\sigma_a, X_b](A) = \sigma_a(X_b(A)) - X_b(\sigma_a(A)) = \sigma_a(A - U_b AU_b^{-1}) - X_b(U_a AU_a^{-1}) \\
&= U_a(A - U_b AU_b^{-1})U_a^{-1} - U_a AU_a^{-1} + U_b(U_a AU_a^{-1})U_b^{-1} \\
&= U_a AU_a^{-1} - U_a U_b AU_b^{-1}U_a^{-1} - U_a AU_a^{-1} + U_b U_a AU_a^{-1}U_b^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

（利用 $[U_a, U_b] = 0$）证明交换关系（5.2）成立。因此，根据推论5.4，我们已验证定义在 Σ-模（$\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})\ \{(\hat{}\sigma_a, \mathrm{Id})\}_{a=1}^n$）上的左对称（$\sigma$, Id）-联络（5.5），在关系（5.2）成立且（σ,τ）-李代数（$T\Sigma, R$）的括号满足（5.1）的条件下，其曲率满足扭曲线性性质（5.3）。

6. Commutative (σ,τ)-algebras

本节展示，交换代数上的正则对和强正则对的概念可用于构造（σ,τ）-导子的模，并可在其上计算某些联络的曲率和挠率。注意，当 $\mathcal{A}$ 为交换的时，Der$^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$是一个 $\mathcal{A}$-模，且由对称（σ,τ）-导子组成。例如，在唯一分解整环 $\mathcal{A}$上， $\mathcal{A}$-模Der$^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$是自由秩一模，其生成元为 $\frac{\delta}{g}$，其中 g 是δ [HLS06]的像的最大公因子。 [HLS06] 还进一步表明，每个（σ,τ）-导子都具有$X(f) = f_0{}^{\delta(f)}{}_{g}\cdot$的形式。下面回顾这些结果。

定理 6.1（[HLS06]）。设 $\mathcal{A}$ 是一个唯一分解整环，且 $\sigma,\tau \in$End$(\mathcal{A})$ 满足 $\sigma \neq \tau$。则 Der$^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 是一个秩为一的自由 $\mathcal{A}$-模，由下式生成：

$$\Delta = \frac{(\tau-\sigma)}{g} : x \longmapsto \frac{(\tau-\sigma)(x)}{g} \tag{6.1}$$

其中 $g = \gcd((\tau-\sigma)(\mathcal{A}))$。

注意，当 g 在 $\mathcal{A}$ 中不可逆时，式 (6.1) 中的 (σ,τ)-导子 Δ 不一定是内 (σ,τ)-导子。现在，我们来试着理解非唯一分解整环上的交换代数会出现什么情况。首先说明，若存在公因子，则 (σ,τ)-导子必须具有与式 (6.1) 类似的形式。

命题 6.2。设 X 是交换代数 $\mathcal{A}$. 上的一个 (σ,τ)-导子。若存在 $g_0 \in \mathcal{A}$，使得对所有 $f \in \mathcal{A}$， $\delta(g_0)$ 整除 $\delta(f)X(g_0)$，则

$$X(f) = \frac{X(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)}.$$

证明。由于 X 是对称的（σ,τ）-导子，引理 2.7 表明

$$X(f)\delta(g) = \delta(f)X(g)$$

对于 $f,g \in \mathcal{A}$. 现在，设 $g_0 \in \mathcal{A}$ 满足：对所有 $f \in \mathcal{A}$， $\delta(g_0)$ 都整除 $X(g_0)\delta(f)$，则有

$$\frac{X(f)\delta(g_0)}{\delta(g_0)} = \frac{X(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)} \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{X(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)},$$

如所需。 □

存在公因子实际上是内（σ,τ）-导子的一个刻画，下面的结果将说明这一点。

推论 6.3。设 X 是交换代数 $\mathcal{A}$. 上的（σ,τ）-导子。那么， X 是内导子，当且仅当存在 $g_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta(g_0)$ 整除 $X(g_0)$。

证明。假设存在 $g_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta(g_0)$ 整除 $X(g_0)$，那么对于所有 $f \in \mathcal{A}$， $\delta(g_0)$ 整除 $X(g_0)\delta(f)$，由命题 6.2，

$$X(f) = \frac{X(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)}.$$

由于 $\delta(g_0)$ 整除 $X(g_0)$，令 P_0 使得 $X(g_0)=P_0\delta(g_0)$，则有

$$X(f)=\frac{X(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)}=\frac{P_0\delta(g_0)\delta(f)}{\delta(g_0)}=P_0\delta(f),$$

这表明 X 是内的。反过来，假设 X 是内的。那么，根据定义，对于所有 $f\in\mathcal{A}.$， $\delta(f)$ 都整除 $X(f)$。因此，存在 $g_0\in\mathcal{A}$，使得 $\delta(g_0)$ 整除 $X(g_0)$. □

我们来看看命题 6.2 如何应用于多项式代数 $\mathbb{K}[x]$ 上的 (σ,τ)-导子（该代数是唯一分解整环，因此也可以应用定理 6.1）。假设对于 $p(x)\in\mathbb{K}[x]$， $\sigma(p)(x)=p(qx)$，且 $\tau(p)(x)=p(x)$，并且$q\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$。有

$$\begin{aligned}\delta(p)&=\tau\left(\sum_{i=0}^{N}a_ix^i\right)-\sigma\left(\sum_{i=0}^{N}a_ix^i\right)=\sum_{i=1}^{N}(1-q^i)a_ix^i\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left((1+q+\cdots+q^k)a_{k+1}x^k\right)(1-q)x=r(x)(1-q)x,\end{aligned}$$

这表明 $(1-q)x$ 是 $\delta(\mathbb{K}[x])$ 的最大公因子。由命题 6.2，令 $g_0=x$，可得 $\delta(x)=(1-q)x$，因此，$\mathbb{K}[x]$ 上任意 (σ,τ)-导子 X 都具有如下形式：

$$X=p(x)\frac{\delta}{(1-q)x}\tag{6.2}$$

对于由 $X(x)$ 确定的 $p(x)=\mathbb{K}[x]$。由推论 6.3 可知，上述导子X 是内导子，当且仅当 $p(x)$ 能被 x 整除，也就是说，当且仅当 $p(x)$ 没有常数项。换言之，如果 $p(x)$ 有常数项，那么 (6.2) 中的导子 X 是外导子。此外，这意味着在这种情况下，由 (2.3) 定义的 Jackson 导数是 $\mathbb{K}[x]$ 上的外 (σ,τ)-导子，因为 $p(x)=1$。

现在考虑一个交换代数 $\mathcal{A}$（不一定是唯一分解整环），并设 $\hat{}g\in\mathcal{A}$ 是 $\delta(\mathcal{A})$ 的一个公因子；即对于所有 $f\in\mathcal{A}$，$\hat{}g$ 都整除 $\delta(f)$。对于每个 $f\in\mathcal{A}$，定义一个线性映射 $X_f\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，使得

$$X_f(a)=f\frac{\delta(a)}{\hat{g}}$$

对于所有 $a\in\mathcal{A}.$，有

$$\begin{aligned}X_f(ab)&=f\frac{\delta(ab)}{\hat{g}}=f\frac{\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)\tau(b)}{\hat{g}}=\sigma(a)f\frac{\delta(b)}{\hat{g}}+f\frac{\delta(a)}{\hat{g}}\tau(b)\\&=\sigma(a)X_f(b)+X_f(a)\tau(b),\end{aligned}$$

这表明 X_f 是一个 (σ,τ)-导子。由于 $\mathcal{A}$ 是交换的， X_f 是对称的。与定理 6.1 类似，我们来证明：如果该公因子实际上属于 δ 的像，且 (σ,τ) 是一个正则对，那么每个 (σ,τ)-导子都具有这种形式。

命题 6.4。设（σ， τ）是交换代数 $\mathcal{A}$ 上的正则端同态对。若 $\hat{}g$ 是 $\mathrm{Im}(\delta)$ 的一个公因子，使得 $\hat{}g\in\mathrm{Im}(\delta)$，则 $\mathrm{Der}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 是一个以 $\delta/\hat{}g$ 为基的秩一自由模。

证明。设 $g_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta(g_0) = \hat{g}$。引理 2.7 表明

$$X(f)\hat{g} = \delta(f)X(g_0) \quad \Rightarrow \quad X(f) = X(g_0)\frac{\delta(f)}{\hat{g}}$$

由于 $\hat{g}$ 是 δ 的像的公因子，这表明 $\delta/\hat{g}$ 生成了 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$。现在，假设对所有 $f \in \mathcal{A}$ 都有 $f_0\delta(f)/\hat{g} = 0$，则对所有 $f \in \mathcal{A}$ 都有 $f_0\delta(f) = 0$，从而得到 $f_0 = 0$；这是因为 (σ,τ) 被假设为正则对。因此， $\delta/\hat{g}$ 是 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 的一组基。□

集合 $M_{\hat{g}} = \{f\frac{\delta}{\hat{g}} : \ f \in \mathcal{A}\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一族对称 (σ,τ)-导子，并且数对 $(\mathcal{A}, M_{\hat{g}})$ 是一个对称 (σ,τ)-代数。设 $\Sigma_{\hat{g}} = (\mathcal{A}, M_{\hat{g}})$，并令 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 为由 $M_{\hat{g}}$ 生成的切空间。容易看出 $T\Sigma_{\hat{g}} = M_{\hat{g}}$，因为

$$X_f + X_g = (f+g)\frac{\delta}{\hat{g}} = X_{f+g}.$$

此外，通过如下定义，向量空间 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 可以赋予一个 A-模结构

$$f \cdot X_g = X_{fg}$$

对于 $f, g \in \mathcal{A}.$。事实上，若 $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ 且 $X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$，则有

$$(f_1+f_2)\cdot X_g = X_{(f_1+f_2)g} = X_{f_1g+f_2g} = X_{f_1g} + X_{f_2g} = f_1 \cdot X_g + f_2 \cdot X_g$$

and

$$f_1 \cdot (f_2 \cdot X_g) = f_1 \cdot X_{f_2g} = X_{f_1(f_2g)} = X_{(f_1f_2)g} = (f_1f_2)\cdot X_g,$$

以及

$$f \cdot (X_{g_1} + X_{g_2}) = f \cdot X_{g_1+g_2} = X_{fg_1+fg_2} = f \cdot X_{g_1} + f \cdot X_{g_2}.$$

对于 $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$。

因此， $T\Sigma_{\hat{g}}$ 是一个 $\mathcal{A}$-模，它由 $\mathcal{A}$ 的 (σ,τ)-导子构成，并且是 (σ,τ)-导子模 $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$ 的子模。下一个结果表明，若 (σ,τ) 是正则对，则 $\delta/\hat{g}$ 是 $T\Sigma_{\hat{g}}$的一组基。

命题 6.5. 设 (σ,τ) 是交换代数 $\mathcal{A}$ 上的一对正则端同态，并设 $\Sigma_{\hat{g}} = (\mathcal{A}, M_{\hat{g}})$，其中 $\hat{g}$ 是 $\delta(\mathcal{A})$ 的一个公因子。则 $\frac{\delta}{\hat{g}}$ 是 $T\Sigma_{\hat{g}}$.的一组基

证明。我们希望证明，如果 $f\frac{\delta}{\hat{g}} = 0$，那么 $f = 0$。由于 (σ,τ) 是正则对，存在 $a_0 \in \mathcal{A}$，使得 $\delta(a_0)$ 不是零因子。首先证明，如果 $\delta(a_0)$ 不是零因子，那么 $^{\delta}{}_{(a_0)}\,\hat{g}$ 不是零因子。为便于论证，~~假设~~ $^{\delta}{}_{(a_0)}\,\hat{g}$ 是零因子。那么存在 $f_0 \in \mathcal{A}$，使得 $f_0\,{}^{\delta(a_0)}_{\hat{g}} = 0$，这意味着

$$\hat{g}f_0\frac{\delta(a_0)}{\hat{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0\delta(a_0) = 0 \tag{6.3}$$

这与 $\delta(a_0)$ 不是零因子的事实相矛盾。因此， $^{\delta}{}_{(a_0)}\,\hat{g}$ 不是零因子。由此可得

$$f\frac{\delta(a)}{\hat{g}} = 0, \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad f\frac{\delta(a_0)}{\hat{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0,$$

这表明 $\underline{\delta}_{\hat{g}}$ 确实是 $T\Sigma_{\hat{g}}$. 的一组基 □

接下来，让我们探讨在 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 上定义（σ，τ）-李代数结构的可能性。

命题 6.6. 设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，并假设（$\sigma$，Id）是一个正则对的自同态。若定义 R：$T\Sigma_{\hat{g}} \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma_{\hat{g}} \to T\Sigma_{\hat{g}} \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma_{\hat{g}}$ 为

$$R(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g) = X_{\sigma(g)} \otimes_{\mathbb{C}} X_{\sigma^{-1}(f)}$$

对于 X_f，$X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$，则（$T\Sigma_{\hat{g}}$，$R$）是一个（$\sigma$，$\tau$）-李代数。

证明. 令 m： $T\Sigma_{\hat{g}} \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma_{\hat{g}} \to T\Sigma_{\hat{g}}$ 表示复合 $m(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g) = X_f \circ X_g$。要证明（$T\Sigma_{\hat{g}}$，$R$）是一个（$\sigma$，$\tau$）-李代数，需要证明 $R^2 = \mathrm{Id}^{T\Sigma_{\hat{g}} \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma_{\hat{g}}}$以及

$$m(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g - R(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g)) \in T\Sigma_{\hat{g}}. \tag{6.4}$$

我们先证明，对于 $R^2 = \mathrm{Id}^{T\Sigma_{\hat{g}} \otimes_{\mathbb{C}} T\Sigma_{\hat{g}}} \cdot$，有 X_f，$X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$

$$R^2(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g) = R(X_{\sigma(g)} \otimes_{\mathbb{C}} X_{\sigma^{-1}(f)}) = X_{\sigma(\sigma^{-1}(f))} \otimes_{\mathbb{C}} X_{\sigma^{-1}(\sigma(g))} = X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g.$$

为证明（6.4），注意到

$$m(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g)(a) = X_f \circ X_g(a) = fX_{\mathbb{1}}(gX_{\mathbb{1}}(a))$$

对于 $a \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}
&m(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g - R(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g))(a) = X_f \circ X_g(a) - X_{\sigma(g)} \circ X_{\sigma^{-1}(f)}(a) \\
&= fX_{\mathbb{1}}(gX_{\mathbb{1}}(a)) - \sigma(g)X_{\mathbb{1}}(\sigma^{-1}(f)X_{\mathbb{1}}(a)) = f\sigma(g)X_{\mathbb{1}}(X_{\mathbb{1}}(a)) + fX_{\mathbb{1}}(g)X_{\mathbb{1}}(a) \\
&-\sigma(g)\sigma(\sigma^{-1}(f))X_{\mathbb{1}}(X_{\mathbb{1}}(a)) - \sigma(g)X_{\mathbb{1}}(\sigma^{-1}(f))X_{\mathbb{1}}(a) \\
&= fX_{\mathbb{1}}(g)X_{\mathbb{1}}(a) - \sigma(g)X_{\mathbb{1}}(\sigma^{-1}(f))X_{\mathbb{1}}(a) \\
&= (X_f(g) - X_{\sigma(g)}(\sigma^{-1}(f)))X_{\mathbb{1}}(a) = X_{X_f(g) - X_{\sigma(g)}(\sigma^{-1}(f))}(a)
\end{aligned}$$

这意味着 $m(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g - R(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g)) \in T\Sigma_{\hat{g}}$. 因此，$(T\Sigma_{\hat{g}}, R)$ 是一个 (σ,τ)-李代数。□

上述命题中的 (σ,τ)-李代数 $(T\Sigma_{\hat{g}}, R)$ 上的括号定义为

$$[X_f, X_g]_R = \big(X_f(g) - X_{\sigma(g)}(\sigma^{-1}(f))\big)X_{\mathbb{1}}$$

对于 X_f，$X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$。

对于任意的 $\sigma,\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$，$T\Sigma_{\hat{g}}$ 都可以赋予一个 $\Sigma_{\hat{g}}$-模结构。具体而言，定义 $\hat{}\sigma, \hat{}\tau$：$T\Sigma_{\hat{g}} \to T\Sigma_{\hat{g}}$ 为

$$\hat{\sigma}(X_f) = X_{\sigma(f)} \quad \text{and} \quad \hat{\tau}(X_f) = X_{\tau(f)}$$

可以得到

$$\hat{\sigma}(fX_g) = \hat{\sigma}(X_{fg}) = X_{\sigma(f)\sigma(g)} = \sigma(f)X_{\sigma(g)} = \sigma(f)\hat{\sigma}(X_g)$$

表明（连同显然的线性性质以及对 $\hat{}\tau$ 的类似计算）$(T\Sigma, \{\hat{}\sigma, \hat{}\tau\})$ 是一个 $\Sigma_{\hat{g}}$-模。现在我们研究 $\Sigma_{\hat{g}}$-模 $(T\Sigma, \{\hat{}\sigma, \hat{}\tau\})$ 上联络的曲率，其中假设 (σ,τ) 是正则端同态对，这意味着 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 是一个自由模。定义 ∇： $T\Sigma_{\hat{g}} \times T\Sigma_{\hat{g}} \to T\Sigma_{\hat{g}}$ 为

$$\nabla_{X_f}(X_g) = fX_{\delta(g)} = f\big(\hat{\tau}(X_g) - \hat{\sigma}(X_g)\big) \tag{6.5}$$

对于 X_f、$X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$，并注意到对于 f、g、$h \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_f}(gX_h) &= \nabla_{X_f}(X_{gh}) = fX_{\delta(gh)} = fX_{\sigma(g)\delta(h)+\delta(g)\tau(h)}\\ &= f\sigma(g)X_{\delta(h)} + f\delta(g)X_{\tau(h)} = \sigma(g)\nabla_{X_f}(X_h) + X_f(g)\hat{\tau}(X_h)\\ \nabla_{X_f}(gX_h) &= \nabla_{X_f}(X_{gh}) = fX_{\delta(gh)} = fX_{\tau(g)\delta(h)+\delta(g)\sigma(h)}\\ &= f\tau(g)X_{\delta(h)} + f\delta(g)X_{\sigma(h)} = \tau(g)\nabla_{X_f}(X_h) + X_f(g)\hat{\sigma}(X_h)\end{aligned}$$

这表明 ∇ 是一个对称的（σ,τ）-联络。此外，有

$$\nabla_{fX_g}(X_h) = \nabla_{X_{fg}}(X_h) = fgX_{\delta(h)} = f\nabla_{X_g}(X_h)$$

对于 $f,g,h \in \mathcal{A}$。注意，若（σ,τ）是一个强正则对，则（6.5）中定义的联络是 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 上唯一的对称（σ,τ）-联络（参见推论 4.12）。现在我们在命题 6.6 的设定下计算 ∇ 的曲率。

命题 6.7。假设 $\Sigma_{\hat{g}} = (\mathcal{A}, M_{\hat{g}})$ 是一个正则（σ,τ）-代数，并且（$T\Sigma_{\hat{g}}, R$）是一个（σ, Id）-李代数，其中 R 定义为

$$R(X_f \otimes_{\mathbb{C}} X_g) = X_{\sigma(g)} \otimes_{\mathbb{C}} X_{\sigma^{-1}(f)}$$

对于 $X_f, X_g \in T\Sigma_{\hat{g}}$，并设（$M, \{(\hat{\sigma}, \hat{\tau})\}$）是一个（左） $\Sigma_{\hat{g}}$-模。若 $\nabla\colon T\Sigma_{\hat{g}} \times M \to M$ 是一个左（σ, Id）-联络，且对所有 $f,g \in \mathcal{A}$ 都有 $\nabla_{fX_g}(m) = f\nabla_{X_g}(m)$，则 ∇ 的曲率为零。

证明。对于 f、$g \in \mathcal{A}$，计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Curv}(X_f, X_g)(m) &= \nabla_{X_f}(\nabla_{X_g}(m)) - \nabla_{X_{\sigma(g)}}(\nabla_{X_{\sigma^{-1}(f)}}(m)) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m)\\ &= \nabla_{X_f}(g\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m)) - \nabla_{X_{\sigma(g)}}(\sigma^{-1}(f)\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m)) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m)\\ &= \sigma(g)\nabla_{X_f}(\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m)) + X_f(g)\nabla_{X_1}(m) - \sigma(\sigma^{-1}(f))\nabla_{X_{\sigma(g)}}(\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m))\\ &\quad - X_{\sigma(g)}(\sigma^{-1}(f))\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m)\\ &= \sigma(g)f\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m)) + fX_{\mathbb{1}}(g)\nabla_{X_1}(m) - f\sigma(g)\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m))\\ &\quad - \sigma(g)X_{\mathbb{1}}(\sigma^{-1}(f))\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m)\\ &= (fX_{\mathbb{1}}(g) - \sigma(g)X_{\mathbb{1}}(\sigma^{-1}(f)))\nabla_{X_{\mathbb{1}}}(m) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m)\\ &= \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m) - \nabla_{[X_f,X_g]_R}(m) = 0,\end{aligned}$$

这表明曲率确实为零。 □

特别地，命题 6.7 表明，(6.5) 中给出的 $T\Sigma_{\hat{g}}$ 上的 (σ,τ)-联络的曲率为零。

我们指出，并非 $T\Sigma_{\hat{g}}$-模上的所有联络都具有零曲率。例如，由 $\mathbb{K}$-线性映射 $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 定义的联络 $\nabla_{X_f}(X_{\mathbb{1}}) = \gamma(f)\cdot X_{\mathbb{1}}$ 的曲率为

$$\begin{aligned}\mathrm{Curv}(X_f, X_g)X_{\mathbb{1}} &= \big(\sigma(\gamma(g))\gamma(f) - \sigma(\gamma(\sigma^{-1}(f)))\gamma(\sigma(g))\big)\cdot X_{\mathbb{1}}\\ &\quad + \big(X_f(\gamma(g)) - X_{\sigma(g)}(\gamma(\sigma^{-1}(f)))\big)\cdot X_{\mathbb{1}} - \gamma(X_f(g) - X_{\sigma(g)}(\sigma^{-1}(f)))\cdot X_{\mathbb{1}}.\end{aligned}$$

References

[AI22] J. Arnlind 和 K. Ilwale. 关于 (σ τ *arXiv preprint* ,)-代数的几何. , . [AIL20] J. Arnlind、K. Ilwale 和 G. Landi. 关于 q-变形的 Levi-Civita 联络. arXiv:2005.02603, 2020年.[AIL22] J. Arnlind、K. Ilwale 和 G. Landi. 量子球面上的 Levi-Civita 联络. *Math. Phys. Anal. Geom.* 25 19 2022 , ( ), . [DV88] M. Dubois-Violette. 非交换微分演算与导子. , ( ): – . [DVM96] M. Dubois-Violette 和 P. W. Michor. 非交换微分几何中中心双模上的联络. *J. Geom. Phys.*, 20(2-3):218–232, 1996年. [HLS06] J. T. Hartwig、D. Larsson 和 S. D. Silvestrov. 使用 σ-导子的李代数变形. *J. Algebra*, 295(2):314–361, 2006年. [Hoc45] G. Hochschild. 关于结合代数的上同调群. *Ann. of Math. (2)*, 46 58: –67, 1945年.[LS07] D. Larsson 和 S. D. Silvestrov. 使用扭曲导子对 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ 进行准变形. *Comm. Algebra*, 35(12):4303–4318, 2007年. [Red01] M. J. Redondo. 霍赫希尔德上同调：若干计算方法. 第5卷，第113–137页. 2001年. USP/UNICAMP/UNESP 第九届代数会议（葡萄牙语）（S˜ao Pedro，2001年）。 [Wit20] S. Witherspoon. 霍赫希尔德上同调. *Notices Amer. Math. Soc.*, 67(6):780–787, 2020年。

(Kwalombota Ilwale) Dept. of Math., Linköping University, 581 83 Linköping, Sweden
Email address: kwalombota.ilwale@liu.se