arXiv:2304.09013v1 [math.ST] 18 Apr 2023

# 多元偏斜椭圆随机向量的海森序与递增海森序

Chuancun Yin（统计与数据科学学院，曲阜师范大学，
山东 273165，中国）

2023年4月19日

摘要 本文建立了多元偏斜椭圆随机向量的一些随机比较结果。这些多元随机比较涉及海森序和递增海森序，以及它们的许多特殊情形。本文仅基于对基础模型参数的比较，简明地给出了这些序的必要和/或充分条件。

关键词：特征函数；Hessian序；递增Hessian序；偏斜椭圆分布；偏态正态分布；随机序

## 1 引言

随机序理论为比较随机变量和随机向量提供了一个有用的工具。如今，随机序被应用于精算学、风险管理、经济学、决策理论、可靠性、质量控制、医学及其他相关领域。更多详情请参见 Denuit 等（2005年）、M¨uller 和 Stoyan（2002年）以及 Shaked 和 Shanthikumar（2007年）的专著。在众多随机序中，海森序和递增海森序近年来受到越来越多的关注。海森序包括许多著名的多元随机序，例如凸序、分量凸序、方向凸序、超模序、共正序和完全正序。

递增海森序由一些重要的序组成，例如多元通常序、递增凸序、递增超模序和递增完全正序；参见 Arlotto 和 Scarsini（2006年）、Amiri 和 Balakrishnan（2022年）以及 Amiri、Balakrishnan 和 Eftekharian（2022年）。

文献中已经相当广泛地讨论了多元正态分布和椭圆分布的海森序与递增海森序。例如，关于多元正态分布随机序的结果可见于 Houdr´e 等（1998年）、M¨uller（2001年）以及 Denuit 和 M¨uller（2002年）。Landsman 和 Tsanakas（2006年）、Davidov 和 Peddada（2013）以及 Pan、Qiu 和 Hu（2016）引入了多元椭圆分布的随机序。Yin（2021年）将该结果推广到了一般多元椭圆分布。Amiri、Izadkhah 和 Jamalizadeh（2020年），以及 Amiri 和 Balakrishnan（2022年）研究了多元偏态正态分布的尺度-形状混合的线性序、海森序和递增海森序。Amiri 和 Balakrishnan（2022年）为多元偏态正态分布的尺度-形状混合类建立了一些随机比较结果。Pu、Zhang 和 Yin（2023）对一类多元椭圆分布的广义位置—尺度混合进行了统一研究。关于矩阵变元偏态正态分布的相关结果可见于 Pu、Balakrishnan 和 Yin（2022年）。上述研究均局限于椭圆分布、多元椭圆分布的广义位置—尺度混合、偏态正态分布以及多元偏态正态分布的尺度-形状混合。然而，多元偏斜椭圆分布的随机序尚未得到充分研究。对于多元偏斜椭圆分布的随机序是否存在必要条件和/或充分条件，仍是一个悬而未决的问题。本文拟对这些问题进行研究。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们回顾一些

关于多元偏斜椭圆分布和随机序概念的结果。此外，我们为 $\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$,建立了一个恒等式，其中函数 $f$ 满足一些较弱的正则性条件。第3节介绍海森序、递增海森序和线性序及其特殊情形的一些一般结果。最后，第4节给出一些总结性意见。

# 2 预备知识

## 2.1 偏椭圆分布

近年来，人们对偏椭圆分布这一主题产生了浓厚兴趣，因为这类分布能够同时处理不对称性和尾部权重行为。Azzalini 和 Capitanio（1999年）曾提及偏椭圆分布的一种初始表述；Branco 和 Dey（2001年）基于条件机制，研究了导出多元偏态正态分布的构造。Azzalini 和 Capitanio（2003年）考察了偏椭圆分布，并表明，与偏态正态族类似，偏椭圆分布可以通过加性构造方法获得。关于多元偏态正态分布和偏斜椭圆分布的相关发展，可参见 Genton（2004）、Lee 和 McLachlan（2022年）以及 Azzalini（2022年）的总结。若一个 $n$ 维随机变量 $\mathbf{X}$ 的密度具有以下形式，则称其服从多元偏椭圆分布

$$f(\mathbf{x}) = 2|\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} g((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})) F_g(\boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.1)$$

其中

$$|\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} g((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))$$

是 $n$ 元椭圆分布 $\mathbf{Y} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}, g)$ 的概率密度函数，其中 $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{ij})$ 是与向量 $\mathbf{Y}$ 相关联的满秩 $n \times n$ 尺度矩阵，$F_g(\cdot)$ 是标准椭圆分布的一元累积分布函数，其

密度生成函数为 $g$。我们将其记为 $\mathbf{X} \sim SE_n(\boldsymbol{\mu}, \Omega\ \boldsymbol{\alpha}, g)$。有关更多详细信息，请参见 Branco 和 Dey（2001）。偏斜椭圆分布包括更为熟悉的偏斜正态分布、偏斜-$t$ 分布和偏斜 Chaucy 分布。

记 $\omega = \text{diag}\{\sqrt{\omega_{11}}, \cdots, \sqrt{\omega_{nn}}\}$，则 X 具有随机表示 $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \omega \mathrm{Y}$，其中

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\delta}|U_0| + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{U_1}. \tag{2.2}$$

这里，$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_n)'$，其中 $\delta_1$、$\cdots$、$\delta_n \in (-1, 1)$，且

$$(U_0, \mathbf{U}_1')' \sim EC_{n+1}\left((0, \mathbf{0}')', \boldsymbol{\Psi}^*, g\right),$$

其中 $\mathbf{0} = (0_1, 0_2, ..., 0_n)'$，且

$$\boldsymbol{\Psi}^* = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix},$$

是相关矩阵。这里，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)'$，其中 $\lambda_i = \delta_i(1 - \delta_i^2)^{-\frac{1}{2}}$、$i = 1$、$\cdots$、$n$。

多元偏斜椭圆向量 X 的特征函数如下（参见 Yin 和 Balakrishnan（2023））。

引理 2.1。假设 $\mathbf{X} \sim SE_n\left(\boldsymbol{\mu}, \Omega\ \boldsymbol{\alpha}_w, g^{(n+1)}\right)$ 具有概率密度函数 (2.1)，则其特征函数为

$$E(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}) = 2e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}} \int_0^\infty \left(e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_w)u_0} \cdot \phi_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}\right)\right) P(U_0 \in du_0), \tag{2.3}$$

其中，$\phi_{L|u_0}(\cdot)$ 是特征生成元，且 $\boldsymbol{\delta}_\omega = \omega\boldsymbol{\delta}$。

## 2.2 随机序

若 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微，则按惯例记作

$$\nabla_f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x})\right)',\ \mathbf{H}_f(\mathbf{x})) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x})\right)_{n \times n}$$

关于 $f$ 的梯度和海森矩阵。

当且仅当一个函数的海森矩阵具有非负的非对角元素时，该函数才是超模的，即当且仅当对于每个 $i \neq j$ 以及 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$， $f\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$ 时，$f$ 是超模的。 $f$ 当且仅当对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$， $\nabla_f(\mathbf{x}) \geq 0$ 时，称其为递增；当且仅当对于所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{H}f(\mathbf{x})$ 为半正定矩阵时，称 $f$ 为凸；当且仅当对于 $1 \leq i$、$j \leq n$ 以及 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$， $f\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$ 时，称 $f$ 为方向凸。

如果对于所有 $\mathbf{x} \geq 0$，二次型 $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$，则称 $n \times n$ 矩阵 A 为共正；如果存在一个非负$m \times n$ 矩阵 B，使得 $\mathrm{A} = \mathrm{B}'\mathrm{B}$，则称 A 为完全正。

用 $\mathcal{C}_{cop}$ 表示共正矩阵锥，用 $\mathcal{C}_{cp}$ 表示完全正矩阵锥。令 $\mathcal{C}^*_{cop}$ 和 $\mathcal{C}^*_{cp}$ 分别为 $\mathcal{C}_{cop}$ 和 $\mathcal{C}_{cp}$的对偶。众所周知（见 Hall（1986）中的定理 16.2.1），两个锥 $\mathcal{C}_{cp}$ 和 $\mathcal{C}_{cop}$ 都是闭凸集。此外， $\mathcal{C}^*_{cop} = \mathcal{C}_{cp}$ 和 $\mathcal{C}^*_{cp} = \mathcal{C}_{cop}$。

积分随机序是一种可以通过比较其期望来刻画的随机序。令 $\mathcal{F}$ 为某类可测函数 $f$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。如果存在一组 $F$ 实值可测映射，使得对于两个随机向量 X 和 Y，当

$$E[f(\mathbf{X})] \leq E[f(\mathbf{Y})] \ \forall f \in \mathcal{F} \tag{2.4}$$

只要期望有定义即可。M¨uller（1997）中可以找到对此类序关系的统一论述。Denuit 和 M¨uller（2002年）证明，这些序关系只需通过考察无穷可微函数即可定义。

定义 2.1. 向量空间 $V$ 的子集 $\mathcal{C}$ 是一个锥，当 $x \in \mathcal{C}$ 且对每个 $\lambda \geq 0$， $\lambda x \in \mathcal{C}$。锥 $\mathcal{C}$ 是凸的，当且仅当 $\alpha x + \beta y \in \mathcal{C}$ 且对每个 $x$，$y \in \mathcal{C}$ 和 $\alpha$， $\beta \geq 0$。此外，如果 $\mathcal{C}$ 在内积 $\langle$ 下封闭，$\rangle$，则 $\mathcal{C}^* = \{y \in V\colon \langle x, \ y\rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{C}\}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的对偶。进一步地，若 $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$ 为自对偶。

令 $\mathbb{S}$ 为对称 $n \times n$ 矩阵空间，令 $\mathbb{H}$ 为一个闭凸

锥，其内积为 $\mathbb{S}$，$\langle A,\ B\rangle = tr(AB)$，其中 $A$、$B \in \mathbb{S}$。然后，我们定义函数类

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{H},\ \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

and

$$\mathbb{I} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \nabla_f(\mathbf{x}) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

令 $\mathcal{C}_{psd}$ 和 $\mathcal{C}_+$ 分别为 $\mathbb{S}$ 中半正定矩阵和非负矩阵所构成的锥。这些锥均为闭凸锥，其对应的对偶锥分别为 $\mathcal{C}^*_{psd} = \mathcal{C}_{psd}$ 和 $\mathcal{C}^*_+ = \mathcal{C}_+$；参见 Hall（1986）的定理 16.2.1。令 $\mathcal{C}_{+off}$ 和 $\mathcal{C}_{+diag}$ 分别为非负非对角元素矩阵和非负主对角线元素矩阵所构成的锥。这些锥均为闭凸锥，其对应的对偶锥（参见 Arlotto 和 Scarsini（2009））分别为 $\mathcal{C}^*_{+off}$ 和 $\mathcal{C}^*_{+diag}$，其中

$$\mathcal{C}^*_{+off} = \{C \in \mathbb{S} : c_{ii} = 0, c_{ij} \geq 0,\ for\ i \neq j \in \{1, \cdots, n\}\},$$

and

$$\mathcal{C}^*_{+diag} = \{C \in \mathbb{S} : c_{ii} \geq 0, c_{ij} = 0,\ for\ i \neq j \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

那么，$f$ 为凸函数，当且仅当 $\mathbf{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{psd}$；为方向凸函数，当且仅当 $\mathbf{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_+$；为逐分量凸函数，当且仅当 $\mathbf{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{+diag}$；为超模函数，当且仅当 $\mathbf{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{+off}$。

现在，我们介绍海森序和递增海森序，作为特殊的积分序，如下所示。

定义 2.2（Arlotto 和 Scarsini（2009年））若 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ 属于 (2.1)，则称该序为海森序。若 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \cap \mathbb{I}$ 属于 (2.1)，则称该序为递增 Hessian序。

随机向量的一些著名海森序如下。

(1) 凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是凸函数类，则 $\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{Y}$；

(2) 超模序：若 $\mathcal{F}$ 是所有二次可微函数的类，则 $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$，

满足 $f$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$

$1 \leq i < j \leq n$。(3) 方向凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有二阶可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i$、$j \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{dcx} \mathbf{Y}$。(4) 分量凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有二阶可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{ccx} \mathbf{Y}$。(5) 完全正序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有满足 $\mathrm{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{cp}$ 的函数 $f$ 的类，则 $X \leq_{cp} Y$。(6) 共正序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有满足 $\mathrm{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{cop}$ 的函数 $f$ 的类，则 $X \leq_{cop} Y$。随机向量的一些著名递增海森序如下。(a) 通常随机序：如果 $\mathcal{F}$ 是递增函数类，则 $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$；(b) 递增凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是递增凸函数类，则 $\mathbf{X} \leq_{icx} \mathbf{Y}$；(c) 递增超模序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有二阶可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \geq 0$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i < j \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{ism} \mathbf{Y}$。(d) 递增方向凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有二阶可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i \leq n$），并且 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i$、$j \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{idcx} \mathbf{Y}$。(e) 上正交序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有无穷次可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$。(f) 递增分量凸序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有二阶可微函数 $f$ 的类，且满足 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \geq 0$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x}) \geq 0$（对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq i \leq n$），则 $\mathbf{X} \leq_{iccx} \mathbf{Y}$。(g) 递增完全正序：如果 $\mathcal{F}$ 是所有递增函数 $f$ 的类，且满足 $\mathrm{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{cp}$，则 $X \leq_{icp} Y$。

(h) 递增共正序： $X \leq_{icop} Y$ 如果 $\mathcal{F}$ 是所有递增函数 $f$ 的类，且满足 $\mathbf{H}f(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{cop}$。

最后，我们介绍以下几种线性序。若函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{a}'\mathbf{X})$，其中$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$且 $\psi$是标量凸函数，则称该函数为线性凸函数。若函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{a}'\mathbf{X})$，其中$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$ 且 $\psi$是标量凸函数，则称该函数为正线性凸函数。(i) 线性凸序：若对$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$有$\mathbf{a}'\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{a}'\mathbf{Y}$，则$\mathbf{X} \leq_{lcx} \mathbf{Y}$；(ii) 正线性凸序：若对$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$有$\mathbf{a}'\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{a}'\mathbf{Y}$，则$\mathbf{X} \leq_{plcx} \mathbf{Y}$；(iii) 递增正线性凸序：若对$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$有$\mathbf{a}'\mathbf{X} \leq_{icx} \mathbf{a}'\mathbf{Y}$，则$\mathbf{X} \leq_{iplcx} \mathbf{Y}$；(iv) 正线性通常序：若对$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$有$\mathbf{a}'\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{a}'\mathbf{Y}$，则$\mathbf{X} \leq_{plst} \mathbf{Y}$；(v) 线性通常序：若对$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$有$\mathbf{a}'\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{a}'\mathbf{Y}$，则$\mathbf{X} \leq_{lst} \mathbf{Y}$。

注 2.1。以下蕴含关系众所周知（例如参见 Shaked 和 Shanthikumar (2007年) 和 Scarsini (1998年)）。

$$\mathbf{X} \leq_{ilcx} \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{X} \leq_{lcx} \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{X} \leq_{icx} \mathbf{Y} \text{ and } E(\mathbf{X}) = E(\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{lcx} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{plcx} \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{icx} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{ilcx} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{iplcx} \mathbf{Y}.$$

## 2.3 $\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$ 的恒等式

记 $\mathbf{O}_{n\times n}$ 为所有元素均为 0 的 $n \times n$ 矩阵，记 $\mathbf{I}_n$ 为$n \times n$ 单位矩阵。对于大小相同的对称矩阵 $A$和 $B$，记号 $A \preceq B$或 $B - A \succeq \mathbf{O}$ 表示 $B - A$ 为半正定。向量或矩阵之间的不等式表示逐分量不等式。全文假设所有涉及的积分和期望均存在。

设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是来自多元偏椭圆分布族的 $n$ 维随机向量，且

$$\mathbf{X} \sim SE_n\left(\boldsymbol{\mu}^x, \boldsymbol{\Omega}^x, \boldsymbol{\alpha}^x_w, g^{(n+1)}\right), \quad \mathbf{Y} \sim SE_n(\boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\Omega}^y, \boldsymbol{\alpha}^y_w, g^{(n+1)}). \tag{2.5}$$

X 的均值向量和协方差矩阵分别为

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x, \tag{2.6}$$

$$Var(\mathbf{X}) = \frac{1}{n+1}E(R_0^2)\boldsymbol{\Omega}^x - (E(|U_0|))^2\boldsymbol{\delta}_w^x\boldsymbol{\delta}_w^{x\prime}, \tag{2.7}$$

其中，$R_x$ 由 $\mathbf{X} \overset{d}{=} R_0\mathbf{M}_x + \boldsymbol{\mu}^x$定义；参见 Yin 和 Balakrishnan（2023）。

以下引理给出了关于 $\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$, 的恒等式的一般形式，这是研究 X 与 Y 之间随机比较的关键工具。

引理 2.2。设 X 和 Y 如（2.5）中所述。假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是二阶连续可微的，并且在无穷远处满足某些多项式增长条件:

$$f(\mathbf{x}) = O(||\mathbf{x}||), \ \bigtriangledown f(\mathbf{x}) = O(||\mathbf{x}||). \tag{2.8}$$

*Then*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \ = \ & \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x)' \nabla f(\mathbf{x}) \phi_\lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\lambda \\ & + E(|U_0|) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x)' \nabla f(\mathbf{x}) \phi_{1,\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\lambda \\ & + \frac{\mathbb{E}(R^2)}{2n} E(|U_0|) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} tr\{(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x)\mathbf{H}_f(\mathbf{x})\} \phi_{2,\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\lambda,\end{aligned}$$

其中，tr($A$)表示矩阵的迹 $A$， $R \geq 0$ 是在 $[0, \infty$中具有 $R \sim F$的随机变量，称为生成变量， $\phi_\lambda$、$\phi_{1、\lambda}$、$\phi_{2、\lambda}$是下面指定的三个密度函数。

证明。对于 $0 \leq \lambda \leq 1$，令

$$\boldsymbol{\mu}_\lambda := \lambda\boldsymbol{\mu}^y + (1-\lambda)\boldsymbol{\mu}^x,$$

$$\boldsymbol{\delta}_\lambda := \lambda\boldsymbol{\delta}_w^y + (1-\lambda)\boldsymbol{\delta}_w^x,$$

and

$$\boldsymbol{\Omega}_\lambda := \lambda\boldsymbol{\Omega}^y + (1-\lambda)\boldsymbol{\Omega}^x.$$

定义

$$\Psi_\lambda(\mathbf{t}) = 2e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda} \int_0^\infty \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \phi_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0),\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

通过使用傅里叶反演定理

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \Psi_\lambda(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

相对于 $\lambda$ 的 $\Psi_\lambda$ 导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_\lambda(\mathbf{t})}{\partial \lambda} &= 2i\mathbf{t}'(\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x) e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda} \int_0^\infty \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \phi_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0) \\
&\quad + 2i\mathbf{t}'(\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x) e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda} \int_0^\infty u_0 \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \phi_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0) \\
&\quad + 2\mathbf{t}'(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x)\mathbf{t} e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda} \int_0^\infty \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \phi'_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0) \\
&= i\mathbf{t}'(\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x)\Psi_\lambda(\mathbf{t}) \\
&\quad + iE(|U_0|)\mathbf{t}'(\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x)\Psi_{1,\lambda}(\mathbf{t}) \\
&\quad - \left(\frac{\mathbb{E}(R^2)}{2n}\right) E(|U_0|)\mathbf{t}'(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x)\mathbf{t}\Psi_{2,\lambda}(\mathbf{t}),
\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_{1,\lambda}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda}}{E(U_0 1_{\{U_0>0\}})} \int_0^\infty u_0 \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \phi_{L|u_0}\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0),$$

and

$$\Psi_{2,\lambda}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}_\lambda}}{E(U_0 1_{\{U_0>0\}})} \int_0^\infty \left( e^{i(\mathbf{t}'\boldsymbol{\delta}_\lambda)u_0} \cdot \Psi_1\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Omega}_\lambda \mathbf{t}\right) \right) P(U_0 \in du_0),$$

它们是两个特征函数。这里，

$$\Psi_1(u) = \frac{1}{\mathbb{E}(R^2)} \int_0^\infty {}_0F_1\left(\frac{n}{2}+1; -\frac{r^2 u}{4}\right) r^2 \mathbb{P}(R \in dr)$$

是一个特征生成元，且

$${}_0F_1(\gamma; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{z^k}{k!},$$

它是阶数为 (0, 1) 的广义超几何级数。因此,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_\lambda(\mathbf{x})}{\partial \lambda} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \frac{\partial \Psi_\lambda(\mathbf{t})}{\partial \lambda} d\mathbf{t} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n i \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \Psi_\lambda(\mathbf{t}) \mathbf{t}'(\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x) d\mathbf{t} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n iE(|U_0|) \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \Psi_{1,\lambda}(\mathbf{t}) \mathbf{t}'(\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x) d\mathbf{t} \\
&\quad - \left(\frac{\mathbb{E}(R^2)}{2n}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n E(|U_0|) \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \mathbf{t}'(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x) \mathbf{t} \Psi_{2,\lambda}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \\
&= \sum_{i=1}^n (\mu_i^y - \mu_i^x) \frac{\partial \phi_\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\
&\quad + E(|U_0|) \sum_{i=1}^n (\delta_i^y - \delta_i^x) \frac{\partial \phi_{1,\lambda}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}(R^2)}{2n} E(|U_0|) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\omega_{ij}^y - \omega_{ij}^x) \frac{\partial^2 \phi_{2,\lambda}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^x = (\omega_{ij}^x)_{n\times n}$, $\boldsymbol{\Omega}^y = (\omega_{ij}^y)_{n\times n}$ 且

$$\phi_{k,\lambda}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \Psi_{k,\lambda}(\mathbf{t}) d\mathbf{t},\ k = 1, 2.$$

定义 $g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi_\lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$。结合 (2.8) 并使用分部积分，可得

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi_\lambda(\mathbf{x})}{\partial \lambda} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x)' \nabla f(\mathbf{x}) \phi_\lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + E(|U_0|) \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x)' \nabla f(\mathbf{x}) \phi_{1,\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}(R^2)}{2n} E(|U_0|) \int_{\mathbb{R}^n} tr\{(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x) \mathbf{H}_f(\mathbf{x})\} \phi_{2,\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\lambda) d\lambda$，结论得证。 □

以下结果是引理 2.2 的直接推论。

推论 2.1. 设 X 和 Y 如（2.5）所示。假设 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$满足引理 2.2 的条件，并且对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\boldsymbol{\mu}^y - \boldsymbol{\mu}^x)'\nabla f(\mathbf{x}) \geq 0, \tag{2.9}$$

$$(\boldsymbol{\delta}_w^y - \boldsymbol{\delta}_w^x)'\nabla f(\mathbf{x}) \geq 0, \tag{2.10}$$

$$tr\{(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x)\mathbf{H}_f(\mathbf{x})\} \geq 0. \tag{2.11}$$

那么，我们有 $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$。

# 3 主要结果

接下来，我们研究偏斜椭圆族中积分随机序成立的充要条件。

## 3.1 海森序

以下定理给出了偏斜椭圆族中海森序的充分条件的一般形式。

定理 3.1. 设 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{S}$，且 $\mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ 是由 $\mathbb{H}$ 生成的闭凸锥。假设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 中所示。若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，$\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}^*$，则 $\mathbf{X} \leq_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}}} \mathbf{Y}$。

证明。如果这些条件成立，那么根据推论 2.1，对于 $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ 我们有 $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$。因此定理得证。□

在下一个定理中，我们给出一些著名海森序的充分条件。

定理 3.2。设随机变量 X 和 Y 如（2.5）中所示。

（a）如果 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$，那么 $\mathbf{X} \leq_{cx} \mathbf{Y}$；（b）如果 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$、$\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$ 且对于所有 $1 \leq i \neq j \leq n$都有 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$，那么 $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$;

(c) 若对于所有 $1 \leq i, j \leq n$，$\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 和 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$，则 $\mathbf{X} \leq_{dcx} \mathbf{Y}$;

(d) 若对于所有 $1 \le i \le n$, $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$, $\omega_{ii}^x \le \omega_{ii}^y$ , 且对于所有 $1 \le i < j \le n$, $\omega_{ij}^x = \omega_{ij}^y$ , 则 $\mathbf{X} \le_{ccx} \mathbf{Y}$; (e) 若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$, $\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x$ 是共正的, 则 $\mathbf{X} \le_{cp} \mathbf{Y}$; (f) 若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$, $\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x$ 是完全共正的, 则 $\mathbf{X} \le_{cop} \mathbf{Y}$。

证明 (a)。设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是二阶可微凸函数, 则对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$ 都是半正定的。由于 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x \succeq O$, 我们可以将其写为 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x = \sum_{i=1}^r \beta_i \beta_i'$, 其中 $r$ 是 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x$ 的秩, $\beta_i$ 是秩为 1 的向量。因此

$$tr\{(\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x)\mathbf{H}_f(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i' \mathbf{H}_{f(\mathbf{x})} \beta_i \ge 0.$$

根据引理 2.1, 我们有 $E[f(\mathbf{Y})] \ge E[f(\mathbf{X})],$ , 这意味着 $\mathbf{X} \le_{cx} \mathbf{Y}$。断言 (b)-(f) 可用相同的方法证明。□

本节给出的以下结果为两个随机向量的序关系提供了必要条件。

定理 3.3。设 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{S}$ , 并设 $\mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ 是由 $\mathbb{H}$ 生成的闭凸锥。假设随机变量 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 如 (2.5) 中所示。如果 $\mathbf{X} \le_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}}} \mathbf{Y}$, 那么, $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}^*$。

证明。注意, $\mathbf{O}_{n\times n} \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}$。对于 $i = 1$、$\cdots$、$n$, 考虑函数 $f_i(\mathbf{x}) = x_i$ 和 $g_i(\mathbf{x}) = -x_i$。显然, $f_i$、$g_i \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ , 因为 $\mathbf{H}_{f_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_{f_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}_{n\times n}$。将 $f_i(\mathbf{x})$ 和 $g_i(\mathbf{x})$ 应用于 $\mathbf{X} \le_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}}} \mathbf{Y}$, 可得 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$。令 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y = \boldsymbol{\mu}$。选取矩阵 $\mathbf{A} \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ , 并定义函数 $f$ 为

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}).$$

注意, 由于 $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{A}$, 将 $f(\mathbf{x})$ 应用于 $\mathbf{X} \le_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}}} \mathbf{Y}$ 可得

$$E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = Ef(\mathbf{X}) \le Ef(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}).$$

这等价于

$$E(tr[\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}]) \leq E(tr[\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}]),$$

结合 (2.7)，可得

$$tr[(\boldsymbol{\Omega}^y-\boldsymbol{\Omega}^x)'\mathbf{A}] \geq 0.$$

由 A $\in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ 的任意性，得到 $\Omega^y$ –$\Omega^x \in \mathcal{C}^*_{\mathbb{H}}$。至此，定理 3.3 的证明完成。□

在下一个定理中，我们给出一些著名海森序的必要条件。

定理 3.4。设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 中所述。

(a) 若 X $\leq_{cx}$ Y，则，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$；(b) 若 X $\leq_{sm}$ Y，则，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$，$\omega^x_{ii} = \omega^y_{ii}$ 且$\omega^x_{ij} \leq \omega^y_{ij}$ 对所有 $1 \leq i \neq j \leq n$ 均成立；

(c) 如果 X $\leq_{dcx}$ Y，则对所有 $1 \leq i、\ j \leq n$，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$，且 $\omega^x_{ij} \leq \omega^y_{ij}$；

(d) 如果 X $\leq_{ccx}$ Y，则对所有 $1 \leq i \leq n$，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$，且对所有 $1 \leq i < j \leq n$，$\omega^x_{ii} \leq \omega^y_{ii}$，以及 $\omega^x_{ij} = \omega^y_{ij}$；

(e) 如果 X $\leq_{cp}$ Y，则 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的；

(f) 如果 X $\leq_{cop}$ Y，则 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是完全共正的。

证明。定理 3.3 表明，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^x_w = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}^y_w$ 在所有情形 (a)-(f) 下均成立。现在，我们只验证关于 $\Omega^y$ 和 $\Omega^x$的条件。

(a) 若 X $\leq_{cx}$ Y，则 $\Omega^y$ –$\Omega^x \succeq O$，因为 $\mathcal{C}^*_{psd} = \mathcal{C}_{psd}$。

(b) 若 X $\leq_{sm}$ Y，则，

$$\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x \in \mathcal{C}^*_{+off} = \{C \in \mathbb{S} : c_{ii} = 0, c_{ij} \geq 0,\ for\ i \neq j \in \{1, \cdots, n\}\},$$

因此，对于所有 $1 \leq i \neq j \leq n$，$\omega^x_{ii} = \omega^y_{ii}$ 且$\omega^x_{ij} \leq \omega^y_{ij}$。

（c）如果 X $\leq_{dcx}$ Y，那么 $\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_+^* = \mathcal{C}_+$，因此对于所有 $1 \leq i,\ j \leq n,\ \omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$。

（d）如果 X $\leq_{ccx}$ Y，则，

$$\boldsymbol{\Omega}^y - \boldsymbol{\Omega}^x \in \mathcal{C}_{+diag}^* = \{C \in \mathbb{S} : c_{ii} \geq 0, c_{ij} = 0,\ for\ i \neq j \in \{1, \cdots, n\}\},$$

由此可得，对于所有 $1 \leq i \leq n,\ \omega_{ii}^x \leq \omega_{ii}^y$，并且对于所有 $1 \leq i < j \leq n,\ \omega_{ij}^x = \omega_{ij}^y$。

（e）如果 X $\leq_{cp}$ Y，则，$\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_{cp}^* = \mathcal{C}_{cop}$，因此 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的。

（f）如果 X $\leq_{cop}$ Y，则，$\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_{cop}^* = \mathcal{C}_{cp}$，因此 $\Omega^y - \Omega^x$ 是完全共正的。定理 3.4 的证明完成。□

## 3.2 递增Hessian序

下面的定理给出了偏椭圆分布的递增海森序的一般形式的充分条件。

定理 3.5. 设 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{S}$，且令 $\mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ 为由 $\mathbb{H}$ 生成的闭凸锥。假设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 中所述。若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}^*$，则 X $\leq_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}} \cap \mathbb{I}}$ Y。

证明. 若条件成立，则根据推论 2.1，对于 $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \cap \mathbb{I}$，有 $\mathbb{E}[f(\mathrm{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathrm{Y})]$。定理得证。□

在下一个定理中，我们给出递增海森序的一些特殊情形。

定理 3.6. 假设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 中所述。

(1) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^x = \Omega^y$，则 X $\leq_{st}$ Y；(2) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$，则 X $\leq_{icx}$ Y；(3) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$、$\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$ 且 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$ 对所有 $1 \leq i \neq j \leq n$ 均成立，则 X $\leq_{ism}$ Y；(4) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$ 对所有 $1 \leq i$、$j \leq n$ 均成立，则 X $\leq_{idcx}$ Y；(5) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$、$\omega_{ii}^x \leq \omega_{ii}^y$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 均成立，且 $\omega_{ij}^x = \omega_{ij}^y$ 对所有

$1 \le i < j \le n$，则 $\mathrm{X} \le_{iccx} \mathrm{Y}$;

(6) 如果 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，则 $\mathrm{X} \le_{icp} \mathrm{Y}$;
(7) 如果 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是完全共正的，则 $\mathrm{X} \le_{icop} \mathrm{Y}$;
(8) 如果对于所有 $1 \le i \ne j \le n$，$\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$、$\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$ 和 $\omega_{ij}^x \le \omega_{ij}^y$，则 $\mathrm{X} \le_{uo} \mathrm{Y}$。

证明 (1)。对于任意递增二阶可微函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。如果 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^x = \Omega^y$，则根据引理 2.1.，我们得到 $\mathbb{E}[f(\mathrm{X})] \le \mathbb{E}[f(\mathrm{Y})]$,，因此 $\mathrm{X} \le_{st} \mathrm{Y}$，证毕。

断言 (2)–(8) 可以用相同的方法证明。 □

以下结果给出了两个随机向量的序关系所需的必要条件。

定理 3.7. 设 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{S}$，且 $\mathcal{C}_{\mathbb{H}}$ 是由 $\mathbb{H}$ 生成的闭凸锥。假设随机变量 X 和 Y 如（2.5）中所述，且具有有限二阶矩。若 $\mathrm{X} \le_{\mathcal{F}_{\mathbb{H}} \cap \mathbb{I}} \mathrm{Y}$，则 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$，并且 $\Omega^y - \Omega^x \in \mathcal{C}_{\mathbb{H}}^*$。

若随机变量 $X$ 具有位置参数 $\mu$、尺度参数 $\sigma$ 和偏度参数 $\delta$ 的偏椭圆分布，记为 $X \sim SE_1(\mu, \sigma^2, \delta, g)$，则称其密度具有以下形式

$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma} g\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) G\left(\alpha \frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

其中，$g$ 和 $G$ 分别是椭圆分布的密度生成函数和累积分布函数

以下技术性假设是必要的。

假设 3.1。我们假设密度生成函数 $g$ 满足 $\sigma_1 \ne \sigma_2$,

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{g\left(\frac{t^2}{\sigma_2^2}\right)}{g\left(\frac{t^2}{\sigma_1^2}\right)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{g\left(\frac{t^2}{\sigma_2^2}\right)}{g\left(\frac{t^2}{\sigma_1^2}\right)} = C,$$

其中 $C \in [-\infty, 1) \cup (1, \infty]$。

下一个引理给出了一元连续随机变量满足通常随机序的必要条件。

引理 3.1。（Jamali 等人（2020））。设 $X_1$ 和 $X_2$ 是两个随机变量，其概率密度函数分别为 $f_1$ 和 $f_1$。如果 $X_1 \leq_{st} X_2$，则

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \leq 1 \ \ and \ \ \lim_{t\to+\infty} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \geq 1.$$

下面的引理给出了一元偏斜椭圆分布满足通常随机序的必要/充分条件。一元偏斜正态情形可见 Jamali、Amiri 和 Jamalizadeh（2020）。

引理 3.2。设 $X \sim SE_1$（$\mu_x$、$\sigma_x^2$、$\delta_x$、$g$）和 $Y \sim SE_1$（$\mu_y$、$\sigma_y^2$、$\delta_y$、$g$），且有 $\delta_x\delta_y \geq 0$。

（1）如果 $\mu_x \leq \mu_y$、$\sigma_x = \sigma_y$ 和 $\delta_x \leq \delta_y$，则 $X \leq_{st} Y$。

（2）如果 $X \leq_{st} Y$，则 $\mu_x \leq \mu_y$、$\delta_x \leq \delta_y$ 和 $\sigma_x = \sigma_y$，前提是密度生成函数 $g_1$ 满足假设 3.1。

证明 第 (1) 部分可直接由推论 2.1 得出。

(2) 如果 $X \leq_{st} Y$，那么 $EX \leq EY$，因此 $\mu_x + E(|U_0|)\sigma_x\delta_x \leq \mu_y + E(|U_0|)\sigma_y\delta_y$。根据引理 3.1，如果 $X \leq_{st} Y$，那么

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \frac{g\left(\frac{(t-\mu_y)^2}{\sigma_2^2}\right)}{g\left(\frac{(t-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right)} \frac{G\left(\frac{\alpha_2(t-\mu_y)}{\sigma_y}\right)}{G\left(\frac{\alpha_1(t-\mu_x)}{\sigma_x}\right)} \leq 1,$$

and

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{g\left(\frac{(t-\mu_y)^2}{\sigma_2^2}\right)}{g\left(\frac{(t-\mu_x)^2}{\sigma_1^2}\right)} \frac{G\left(\frac{\alpha_2(t-\mu_y)}{\sigma_2}\right)}{G\left(\frac{\alpha_1(t-\mu_x)}{\sigma_1}\right)} \geq 1,$$

其中，$G$ 是 $g$的累积分布函数，并且

$$\alpha_1 = \frac{\delta_x}{\sigma_x\sqrt{1-(\frac{\delta_x}{\sigma_x})^2}}, \ \ \alpha_2 = \frac{\delta_y}{\sigma_y\sqrt{1-(\frac{\delta_y}{\sigma_y})^2}}.$$

但是，在条件 $\delta_x\delta_y \geq 0$下，只有当$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$时这才可能成立。此外，采用与 Amiri 等人（2020年）相同的论证，可知条件 $\mu_x \leq \mu_y$、$\delta_x \leq \delta_y$ 必须成立。□

引理 3.3。设 $X \sim SE_1(\mu_x, \sigma_y^2, \delta_x, \phi)$ 和 $Y \sim SE_1(\mu_y, \sigma_y^2, \delta_y, \phi)$。

(1) 若 $\mu_x \leq \mu_y$, $\sigma_x \leq \sigma_y$ 和 $\delta_x \leq \delta_y$，则 $X \leq_{icx} Y$。(2) 若 $X \leq_{icx} Y$ 和 $\mu_x = \mu_y$，则 $\sigma_x\delta_x \leq \sigma_y\delta_y$ 和 $\sigma_x \leq \sigma_y$，前提是 $X$ 和 $Y$ 的支撑集为 $\mathbb{R}$。

证明 (1) 由推论 2.1 立即得到。(2) 若 $X \leq_{icx} Y$，则 $EX \leq EY$，因此 $\mu_x + E(|U_0|)\sigma_x\delta_x \leq \mu_y + E(|U_0|)\sigma_y\delta_y$，这意味着 $\sigma_x\delta_x \leq \sigma_y\delta_y$ ，因为 $\mu_x = \mu_y$。由于 $X$ 和 $Y$ 具有相同的生成元，因此它们有如下随机表示:

$$X = \mu_x + \sigma_x\delta_x|U_0| + \sigma_x\sqrt{1-\delta_x^2}U_1 \ \ and \ \ Y = \mu_y + \sigma_y\delta_y|U_0| + \sigma_y\sqrt{1-\delta_y^2}U_1,$$

其中 $(U_0, U_1)$。若 $\sigma_x\sqrt{1-\delta_x^2} > \sigma_y\sqrt{1-\delta_y^2}$，则当 $t$ 足够大时，

$$\begin{aligned} E(X-t)_+ &= \int_t^\infty P\left(U_1 > \frac{s-\mu_x-\sigma_x\delta_x|U_0|}{\sigma_x\sqrt{1-\delta_x^2}}\right)ds \\ &> \int_t^\infty P\left(U_1 > \frac{s-\mu_y-\sigma_y\delta_y|U_0|}{\sigma_y\sqrt{1-\delta_y^2}}\right)ds = E(Y-t)_+, \end{aligned}$$

这与 $X \leq_{icx} Y$ 矛盾。因此，我们得出

$$\sigma_x\sqrt{1-\delta_x^2} \leq \sigma_y\sqrt{1-\delta_y^2},$$

这意味着 $\sigma_y^2 - \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2\delta_y^2 - \sigma_x^2\delta_x^2 \geq 0$。 □

引理 3.4. 设 $X \sim SE_1(\mu_x, \sigma_y^2, \delta_x, \phi)$ 和 $Y \sim SE_1(\mu_y, \sigma_y^2, \delta_y, \phi)$。

(1) 如果 $\mu_x = \mu_y$、$\sigma_x \leq \sigma_y$ 和 $\delta_x = \delta_y$，则 $X \leq_{cx} Y$。(2) 如果 $X \leq_{cx} Y$ 和 $\mu_x = \mu_y$，则 $\sigma_x\delta_x = \sigma_y\delta_y$ 和 $\sigma_x \leq \sigma_y$，前提是 $X$ 和 $Y$ 支持在 $\mathbb{R}$ 上。

证明 (1) 立即由推论 2.1 得出。 (2) 众所周知，当且仅当 $X \leq_{icx} Y$ 和 $E\left(X\right) = E\left(Y\right)$ 时，$X \leq_{cx} Y$。因此，根据引理 3.3，$\sigma_x \leq \sigma_y$ 和 $\mu_x + E\left(|U_0|\right)\sigma_x\delta_x = \mu_y + E\left(|U_0|\right)\sigma_y\delta_y$，这意味着 $\sigma_x\delta_x = \sigma_y\delta_y$，因为 $\mu_x = \mu_y$。

以下结果给出了递增海森序在一些特殊情形下的必要条件。

定理 3.8. 设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 所示。(1) 若 $\mathrm{X} \leq_{st} \mathrm{Y}$，且 $\delta_{iw}^x\delta_{iw}^y \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$，则 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$, $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y = \Omega^x$；(2) 若 $\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{Y}$ 且 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，则 $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的；(3) 若 $(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{ism} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$，则对所有 $1 \leq i \leq n$，$\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$，且对所有 $1 \leq i < i \leq n$, $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$；(4) 若 $(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{idcx} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$，则对所有 $1 \leq i, j \leq n$, $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$；(5) 若 $\mathrm{X} \leq_{iccx} \mathrm{Y}$ 且 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，则 $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$，且对所有 $1 \leq i, j \leq n$，$\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$；(6) 若 $\mathrm{X} \leq_{icp} \mathrm{Y}$，则 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的；(7) 若 $\mathrm{X} \leq_{icop} \mathrm{Y}$，则 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是完全共正的；(8) 若 $\mathrm{X} \leq_{uo} \mathrm{Y}$ 且 $\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$，则对所有 $1 \leq i \leq n$，$\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$, $\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$。

证明。(1) 令 $f$ 具有 $f(\mathbf{x}) = h_1(x_i)$ 和 $f(\mathbf{x}) = h_2(x_i + x_j)$ 的形式，其中 $h_1$ 和 $h_2$ 是任意两个单变量递增函数。由 $\mathrm{X} \leq_{st} \mathrm{Y}$ 可得 $X_i \leq_{st} Y_i$ 和 $X_i + X_j \leq_{st} Y_i + Y_j$。注意，$\mathrm{X} \sim SE_n\left(\boldsymbol{\mu}^x、\Omega^x, \boldsymbol{\alpha}_w^x, g^{(n+1)}\right)$ 和 $\mathrm{Y} \sim SE_n(\boldsymbol{\mu}^y, \Omega^y, \boldsymbol{\alpha}_w^y, g^{(n+1)})$ 导出 $X_i \sim SE_1(\mu_i^x, \omega_{ii}^x, \alpha_{iw}^x, g^{(1)})$、$Y_i \sim SE_1(\mu_i^y, \omega_{ii}^y, \alpha_{iw}^y, g^{(1)})$、$X_i + X_j \sim SE_1(\mu_i^x + \mu_j^x, \omega_{ii}^x + \omega_{jj}^x + 2\omega_{ij}^x, \alpha_{iw}^x + \alpha_{jw}^x, g^{(1)})$ 和 $Y_i + Y_j \sim SE_1(\mu_i^y + \mu_j^y, \omega_{ii}^y + \omega_{jj}^y + 2\omega_{ij}^y, \alpha_{iw}^y + \alpha_{jw}^y, g^{(1)})$。应用引理 3.2 (2)，可知对于所有 $1 \leq i, j \leq n$，有 ${\mu_i}^x \leq {\mu_i}^y$, $\delta_{iw}^x \leq \delta_{iw}^y$ 和 $\omega_{ij}^x = \omega_{ij}^y$。因此，$\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$, $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y = \Omega^x$。

(2) $\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{Y}$ 蕴含 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$，结合 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$ 可得 $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$。对于所有 $\mathrm{a} \geq 0$，函数 $f_a(\mathrm{x}) = f(\mathrm{a}'\mathrm{x})$ 对所有递增凸函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都是递增凸函数。因此，若 $\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{Y}$，则对于 $\mathrm{a} \geq 0$，有 $\mathrm{a}'\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{a}'\mathrm{Y}$。注意，$\mathrm{a}'\mathrm{X} \sim SE_1(\mathrm{a}'\boldsymbol{\mu}^x, \mathrm{a}'\Omega^x\mathrm{a}, \mathrm{a}'\boldsymbol{\delta}_w^x, g^{(1)})$ 且 $\mathrm{a}'\mathrm{Y} \sim SE_1(\mathrm{a}'\boldsymbol{\mu}^y, \mathrm{a}'\Omega^y\mathrm{a}, \mathrm{a}'\boldsymbol{\delta}_w^y, g^{(1)})$，由引理 3.3 (2) 可得 $\mathrm{a}'(\Omega^y - \Omega^x)\mathrm{a} = \mathrm{a}'\Omega^y\mathrm{a} - \mathrm{a}'\Omega^x\mathrm{a} \geq 0$。

(3) $(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{ism} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$ 意味着 $(X_i - E(X_i)) \leq_{st} (Y_i - E(Y_i))$，因此 $(X_i - E(X_i)) \overset{d}{=} (Y_i - E(Y_i))$，因为它们具有相同的均值。因此，$\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$ 对所有 $1 \leq i \leq n$均成立。于是，$(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{sm} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$。应用定理 3.4(b)，可得 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$ 对所有 $1 \leq i \neq j \leq n$均成立。

(4) $(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{idcx} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$ 意味着 $(\mathrm{X} - E(\mathrm{X})) \leq_{dcx} (\mathrm{Y} - E(\mathrm{Y}))$，因为它们具有相同的均值。应用定理 3.4(c)，可得 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$ 对所有 $1 \leq i$、$j \leq n$均成立。

(5) 如果 $\mathrm{X} \leq_{iccx} \mathrm{Y}$，那么 $\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{Y}$（见 M¨uller 和 Stoyan（2002年））。由 (2) 可得 $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的。后一个不等式意味着 $\omega_{ij}^x \leq \omega_{ij}^y$ 对所有 $1 \leq i$、$j \leq n$均成立。

（6）如果 $\mathrm{X} \leq_{icp} \mathrm{Y}$，那么，对于 $a \in \mathbb{R}_+^n$，$\mathrm{a}'\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{a}'\mathrm{Y}$（见 Amiri 等人（2022年），第 693 页）；类似于（2），我们得到 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的。

（7）对于所有 $\mathrm{a} \geq 0$，函数 $f_a(\mathrm{x}) = f(\mathrm{a}'\mathrm{x})$ 对所有递增凸函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都是递增凸的。海森矩阵为 $\mathrm{H}f(\mathrm{x}) = (\mathrm{aa}')f''(\mathrm{a}'\mathrm{x})$。由于 $f$是凸的，我们有 $f''(\mathrm{a}'\mathrm{x}) \geq 0$。因此，$\mathrm{H}f(\mathrm{x})$ 是完全正的。如果 $\mathrm{X} \leq_{icop} \mathrm{Y}$，那么，对于 $a \in \mathbb{R}_+^n$，$\mathrm{a}'\mathrm{X} \leq_{icx} \mathrm{a}'\mathrm{Y}$；类似于（2），我们得到 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的。

(8) $\mathrm{X} \leq_{uo} \mathrm{Y}$ 蕴含 $\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $X_i \leq_{st} Y_i$ 对所有 $1 \leq i \leq n$成立；结合 $\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 可得 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$, $\omega_{ii}^x = \omega_{ii}^y$ 对所有 $1 \leq i \leq n$成立。□

## 3.3 线性序

定理 3.9. 设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 中所述。

(1) 若 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^x = \Omega^y$，则 $X \le_{plst} Y$；(2) 若 $X \le_{plst} Y$ 且 $\delta_{iw}^x \delta_{iw}^y \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n$，则 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y = \Omega^x$。

证明。(1) 根据定理 3.6(1)，若 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^x = \Omega^y$，则 $X \le_{st} Y$，因此我们有 $X \le_{plst} Y$。

(2) 注意到，$X \le_{plst} Y$ 意味着对所有 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$X_i \le_{st} Y_i$ 且 $X_i + X_j \le_{st} Y_i + Y_j$。利用引理 3.2，结合 $\delta_{iw}^x \delta_{iw}^y \ge 0$，可得 $\boldsymbol{\mu}^x \le \boldsymbol{\mu}^y$，$\boldsymbol{\delta}_w^x \le \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y = \Omega^x$。□

定理 3.10。设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 所示。

(1) 若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$，则 $X \le_{lcx} Y$；(2) 若 $X \le_{lcx} Y$，则，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$。

证明。(1)。若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$，则由定理 3.2(a) 可得 $X \le_{cx} Y$，因此 $X \le_{lcx} Y$。

(2) 若 $X \le_{lcx} Y$，则对任意 $a \in \mathbb{R}^n$，$a'X \le_{cx} a'Y$。注意到 $a'X \sim SE_1(a'\boldsymbol{\mu}^x, a'\Omega^x a, a'\boldsymbol{\delta}_w^x, g^{(1)})$ 且 $a'Y \sim SE_1(a'\boldsymbol{\mu}^y, a'\Omega^y a, a'\boldsymbol{\delta}_w^y, g^{(1)})$，众所周知，$a'X \le_{cx} a'Y$ 当且仅当 $E(a'X) = E(a'Y)$ 且 $a'X \le_{icx} a'Y$。于是 $E(X) = E(Y)$，并由引理 3.3 (2) 得到 $a'(\Omega^y - \Omega^x)a = a'\Omega^y a - a'\Omega^x a \ge 0$。因此，$\boldsymbol{\mu}^x + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\mu}^y + E(|U_0|)\boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x \succeq O$。□

定理 3.11. 设随机变量 X 和 Y 如 (2.5) 所示。

(1) 若 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 和 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，则 $X \le_{plcx} Y$；(2) 若 $X \le_{plcx} Y$ 且 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，则 $\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$ 和 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，前提是 X 和 Y 的支撑集为 $\mathbb{R}$。

证明。(1)。假设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数，并考虑函数 $u(x) := f(a'x)$，其中任意 $a \in \mathbb{R}_+^n$。设 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，$\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$

且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，则根据引理 2.2可知 $Ef(a'X) \leq f(a'Y)$，因为 $tr(H_u(x)(\Omega^y - \Omega^x)) = f''(a'x)a'(\Omega^y - \Omega^x)a \geq 0$，从而证明了 $X \leq_{plcx} Y$。

（2）假设 $X \leq_{plcx} Y$，则根据定义，对于所有 $a \in \mathbb{R}_+^n$，$a'X \leq_{cx} a'Y$，从而得到 $X_i \leq_{cx} Y_i$ 对于 $i = 1、2、.....、n$ 均成立。因此，根据引理 3.4，对于所有 $a \in \mathbb{R}_+^n$，$\boldsymbol{\delta}_w^x = \boldsymbol{\delta}_w^y$，$Var(a'X) \leq Var(a'Y)$，这意味着 $a'(\Omega^y - \Omega^x)a \geq 0$。□

定理 3.12。假设随机变量 X 和 Y 如（2.5）中所述。

（1）如果 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，则 $X \leq_{iplcx} Y$；（2）如果 $X \leq_{iplcx} Y$ 且 $\boldsymbol{\mu}^x = \boldsymbol{\mu}^y$，则 $\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的，前提是 X 和 Y 支持于 $\mathbb{R}$ 上。

证明。（1）假设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增凸函数，并考虑函数 $u(x) := f(a'x)$，其中任意 $a \in \mathbb{R}_+^n$。假设 $\boldsymbol{\mu}^x \leq \boldsymbol{\mu}^y$、$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$，且 $\Omega^y - \Omega^x$ 是共正的。由引理 2.2 可得 $Ef(a'X) \leq f(a'Y)$，因为 $\nabla f(x) \geq 0$ 且 $tr(H_u(x)(\Omega^y - \Omega^x)) = f''(a'x)a'(\Omega^y - \Omega^x)a \geq 0$，从而证明 $X \leq_{iplcx} Y$。

（2）假设 $X \leq_{iplcx} Y$，则根据定义，对于所有 $a \in \mathbb{R}_+^n$，有 $a'X \leq_{icx} a'Y$，从而得到 $X_i \leq_{icx} Y_i$（其中 $i = 1、2、.....、n$）。注意

$$\mathbf{a}'\mathbf{X} \sim SE_1(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}^x, \mathbf{a}'\Omega^x\mathbf{a}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\delta}_w^x, g^{(1)})$$

and

$$\mathbf{a}'\mathbf{Y} \sim SE_1(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}^y, \mathbf{a}'\Omega^y\mathbf{a}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\delta}_w^y, g^{(1)}).$$

因此，由引理 3.3，$\boldsymbol{\delta}_w^x \leq \boldsymbol{\delta}_w^y$ 以及 $a'(\Omega^y - \Omega^x)a \geq 0$。 □

# 4 结语

本文讨论了偏斜椭圆族分布中的海森序和递增海森序。针对不同的随机序及其一些

广为人知的特殊情形，我们建立了比较多元偏斜椭圆族分布向量的必要和/或充分条件。此外，还讨论了通常随机序、凸序和递增凸序、正凸序以及递增正凸序下的线性形式。

致谢。本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：12071251）的资助。

# 参考文献

[1] Amiri, M. 和 Balakrishnan, N.（2022）。多元偏斜正态分布的尺度-形状混合的海森序与递增海森序及其应用。Journal of Co mputational and Applied Mathematics 402（2022）113801。

[2] Amiri, M.、Balakrishnan, N.、Eftekharian, A.（2022）。多元正态方差-均值混合分布的海森序及其在评估相依多元风险投资组合中的应用。Statistical Methods & Applications 31，679-707。

[3] Amiri, M.、Izadkhah, S. 和 Jamalizadeh, A.（2020）。多元偏斜正态分布的尺度混合的线性序。Journal of Multivariate Analysis 179（2020）104647。

[4] Arellano-Valle, R. B. 和 Azzalini, A.（2006年）。关于偏态正态分布族的统一。Scand. J. Statist. 33，561-574。

[5] Arellano-Valle, R. B. 和 Genton, M. G.（2005年）。关于基本偏态分布。Journal of Multivariate Analysis 96，93-116。

[6] Arellano-Valle, R B.、Ferreira, C S. 和 Genton, M G.（2018年）。多元偏态正态分布的尺度与形状混合。Journal of Multivariate Analysis 166，98-110。

[7] Arlotto, A. 和 Scarsini, M.（2009年）海森序与多元正态分布。J Multivar Anal 100，2324-2330。[8] Azzalini, A. 和 Capitanio, A.（1999年）。多元偏态正态分布的统计应用。J. Roy. Statist. Soc. B 61，579-602。[9] Azzalini, A. 和 Capitanio, A.（2003年）。通过对称性扰动生成的分布，重点讨论多元偏态 $t$ 分布。J. R. Stat. Soc. B 65，367-389。[10] Azzalini, A. 和 Dalla Valle, A.（1996年）。多元偏态正态分布。Biometrika 83，715-726。[11] Azzalini, A.（2022年）。偏态正态族的衍生发展概述：个人视角。Journal of Multivariate Analysis 188（2022年）104851。[12] Branco, M.D. 和 Dey, D.K.（2001年）。一类一般的多元偏态椭圆分布。Journal of Multivariate Analysis 79，99-113。[13] Cambanis, S.、Huang, S. 和 Simons, G.（1981年）。关于椭圆等高分布理论。Journal of Multivariate Analysis 11，368-85。[14] Davidov, O. 和 Peddada, S.（2013年）线性随机序与多元有序分布的定向推断。Ann Stat 41:1-40。.[15] Denuit, M. 和 Muller, A.（2002年）。积分随机序的光滑生成元。Ann Appl Probab 12，1174-1184。[16] Denuit, M、Dhaene, J.、Goovaerts, M. 和 Kaas, R.（2005年）。相关风险的精算理论：度量、序与模型。Wiley，Chichester。

[17] Fang, K. T.、Kotz, S. 和 Ng, K.W.（1990）。《对称多元及相关分布》。Chapman and Hall，伦敦/纽约。[18] Genton, M. G.（2004）。《偏斜椭圆分布及其应用：超越正态性的探索》。Chapman & Hall/CRC Press，博卡拉顿。[19] Gradshteyn I. S. 和 Ryzhik, M.（2007）。《积分、级数与乘积表》。Academic Press，奥兰多，佛罗里达州。[20] Hall, M. J.（1986）。《组合理论》，第2版。Wiley，纽约。[21] Houdre, C.、Perez-Abreu, V. 和 Surgailis, D.（1998）。无限可分变量的插值、相关恒等式与不等式。《傅里叶分析与应用杂志》4：651-668。[22]Jamali, D.、Amiri, M. 和 Jamalizadeh, A.（2020）。基于积分随机序的多元偏斜正态随机向量比较，《统计通讯：理论与方法》（2020）http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2020.1740934。[23] Kim, H. 和 Genton, G.（2011）。多元偏态正态分布尺度混合的特征函数。Journal of Multivariate Analysis 102，1105-1117。[24] Kim, H. M. 和 Kim, C.（2017）。偏斜正态分布尺度混合及其二次型的矩。Communications in Statistics-Theory and Methods 46(3), 1117-1126。[25] Landsman, Z. 和 Tsanakas, A.（2006）。二元椭圆分布的随机序。《统计与概率通讯》76，488-494。[26] Lee, S. 和 McLachlan, J.（2022）。基于模型的聚类中偏斜分布概述。Journal of Multivariate Analysis 188（2022）104853。

[27] M¨uller, M.（2001）。多元正态分布的随机序。《Ann Inst Stat Math》53，567-575。[28] M¨uller, A. 和 Stoyan, D.（2002）。《随机模型与风险的比较方法》。John Wiley，奇切斯特。[29] Pan, X.、Qiu, G. 和 Hu, T.（2016）。椭圆随机向量的随机序。J Multivar Anal 148，83-88。[30] Pu, T.、Balakrishnan, N. 和 Yin, C. C.（2021）。矩阵变量偏斜正态分布的期望与特征函数恒等式及其在相关随机序中的应用。Communications in Mathematics and Statistics。https://doi.org/10.1007/s40304- 021-00267-2。[31] Pu, T.、Zhang, Y. 和 Yin, C. C.（2023）。椭圆分布的广义位置 — 尺度混合：定义与随机比较。Communications in Statistics-Theory and Methods。DOI: 10.1080/03610926.2023.2165407。[32] Scarsini, M.（1998）。多元凸序、依赖与随机相等。《J. Appl. Probab.》35，93-103。[33] Shaked, M. 和 Shanthikumar, J.（1994）。《随机序及其应用》，Academic Press，波士顿。[34] Shaked, M. 和 Shanthikumar, J.（2007）。《随机序》，Springer，纽约。[35] Vilca, F.、Balakrishnan, N. 和 Zeller, C. B.（2014）。多元偏斜正态广义双曲分布及其性质。Journal of Multivariate Analysis 128，73-85。[36] Yin, C. C.（2001）。多元椭圆分布的随机序。《Journal of Applied Probability》58，551-568。

[37] Yin, C. C. 和 Balakrishnan, N.（2023）。多元偏态椭圆分布的随机表示和概率特征。