arXiv:2304.09045v1 [math.GR] 18 Apr 2023

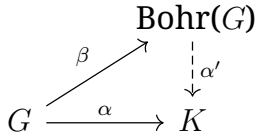
算术群的 Bohr 紧化

BACHIR BEKKA

Abstract. 给定一个群 Γ，其 Bohr 紧化 Bohr(Γ) 和副有限完备化 Prof(Γ) 是与 Γ 自然相关的紧群；此外，Prof(Γ) 可识别为 Bohr(Γ) 对其连通分支 Bohr(Γ) 取商所得的群。$_0$. 我们研究代数群 G 在有理数域 Q 上的算术子群 Γ 的 Bohr(Γ) 的结构。当 G 幺幂时，我们证明 Bohr(Γ) 可识别为直积 Bohr(Γ^{Ab})$_0$ ×Prof(Γ)，其中 $\Gamma^{\mathrm{Ab}} = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 是 Γ. 的阿贝尔化。在一般情形下，利用 Levi 分解 G = U ⋊H（其中 U 幺幂而 H 约化），我们证明 Bohr(Γ) 可描述为 Bohr(Γ ∩ U) 的某个商与 Bohr(Γ ∩H) 的半直积。当 G 为单群且具有较高的实秩时，Bohr(Γ) 除去一个有限群外，同构于乘积 K ×Prof(Γ)，其中 K 是 G(R) 的极大紧因子。

1. Introduction

给定一个拓扑群 G， G 的 Bohr 紧化是一个由紧（Hausdorff）群 Bohr(G) 和连续同态 $\beta\colon G \to$ Bohr(G) 组成的对 (Bohr(G) β)，其像稠密，并满足以下泛性质：对于每个紧群K 以及每个连续同态 α: $G \to K$，都存在一个连续同态 α' : Bohr(G) $\to K$ ，使得图



可交换。数对（Bohr(G) β）在以下意义下是唯一的：如果（K'， β'）是一对由紧群 K' 和连续同态 β' : $G \to K'$ 组成的数对，其像稠密且满足相同的泛性质（这样的数对将被称为.....的 Bohr紧化

2000 年数学主题分类。22D10；22C05；20E18。作者感谢法国国家研究署（ANR）通过 Lebesgue 实验室卓越计划项目（ANR-11-LABX-0020-01）给予的支持。

G），那么存在一个同构 $\alpha : \mathrm{Bohr}(G) \to K'$，它们作为拓扑群满足 $\beta' = \alpha \circ \beta$。

紧群 Bohr(G) 最早由 A. Weil（[Wei40，第 VII 章]）引入，用于研究 G 上的几乎周期函数。这一课题由 H. Bohr（[Boh25a], [Boh25b]）在 $G = \mathbf{R}$ 的情形下发起，随后由 J. von Neumann（[vN34]）等人推广到其他群。关于这一课题的更多内容，参见 [Dix77，第 §16]，或 [BH，第 4.C 节]）。

对于非阿贝尔离散群，群 Bohr(Γ) 仅在极少数情形下得到确定 Γ（关于一些一般结果，参见 [HK01] 和 [Hol64]；关于广为人知的阿贝尔群情形，参见 [AK43] 和第 11 节）。

相比之下，Γ还有另一种研究得更为充分的完备化，即 Γ 的副有限完备化。这是一个二元组 (Prof(Γ) α)，由一个逆有限群（即有限群的射影极限）Prof(Γ) 组成；该群相对于这类群满足类似的泛性质，并配有一个从 α 到 $\Gamma \to \mathrm{Prof}(\Gamma)$ 的同态，其像稠密。群 Prof(Γ) 可以实现为射影极限 $\varprojlim \Gamma/H$，其中 H 遍历 Γ. 的所有有限指数正规子群。关于上述内容，参见 [RZ00]。

Bohr(Γ) 的泛性质给出一个连续满同态 $\alpha' : \mathrm{Bohr}(\Gamma) \to \mathrm{Prof}(\Gamma)$。容易看出（见下文命题 7），$\alpha'$ 的核是 $\mathrm{Bohr}(\Gamma)_0$, Bohr(Γ) 的连通分支；因此，我们有一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \longrightarrow \mathrm{Bohr}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Prof}(\Gamma) \longrightarrow 1.$$

本文将讨论 Γ 是线性代数群中的算术子群的情形。具体设定如下。设 G 是定义在有理数域 Q 上的连通线性代数群，并给定一个忠实表示 ρ: G $\to GL_m$. 。我们考虑 G 的 Q-点群 G(Q) 的子群 G(Z)，即

$$\mathbf{G}(\mathbf{Z}) = \rho^{-1}\left(\rho(\mathbf{G}) \cap GL_m(\mathbf{Z})\right).$$

若 Γ 是 G(Q) 的子群，且 Γ 与 G(Z) 可公度，则称其为算术子群，即 $\Gamma \cap$ G(Z) 在 Γ 和 G(Z) 中都具有有限指数。注意，Γ 是实李群 G(R) 的离散子群。

我们首先讨论 G 为幺幂群的情形。更一般地，我们描述任意有限生成幂零群的 Bohr紧化。注意，幺幂代数有理数域群中的算术子群是有限生成的（参见[Rag72]中定理 2.10 的推论 2）。

对于两个拓扑群 H 和 L，如果 H 和 L拓扑同构，我们记作 $H \cong L$。注意，当 Δ 是有限

生成阿贝尔群时，Bohr(Δ) 可分解为直和 Bohr(Δ) =Bohr(Δ)$_0$ ⊕ Prof(Δ)；参见命题 11。

定理1. 设 Γ 为一个有限生成幂零群。我们有一个直积分解

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Bohr}(\Gamma^{\mathrm{Ab}})_0 \times \mathrm{Prof}(\Gamma),$$

其中 $\Gamma^{\mathrm{Ab}} = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 是 Γ. 的阿贝尔化。该同构由自然映射 Γ → Bohr(Γ^{Ab})和 Γ → Prof(Γ)以及投影 Bohr(Γ^{Ab}) →Bohr(Γ^{Ab})$_0$共同诱导。

定理1的证明中的一个关键工具是：幂零群 Γ 的换位子群 $[\Gamma,\Gamma]$ 中的元素是扭曲的（见命题 15）。

现在我们转而讨论有理数域 Q 上一般代数群 G 的情形。令 U 为 G 的幺幂根基。于是 U 定义在 Q 上，并且存在一个连通约化 Q- 子群 H，使得 G = U H 构成一个半直积形式的 Levi 分解（见 [Mos56]）。

群 Λ = H(Z) 通过自同构作用于 Δ = U(Z)，因而根据 Bohr(Δ) 的泛性质，也作用于 Bohr(Δ)。一般而言，这个作用不能扩张为 Bohr(Λ) 在 Bohr(Δ) 上的作用。不过，正如我们将在下文看到的（定理2的证明），Bohr(Λ) 通过自同构自然地作用于 Bohr(Δ) 的一个适当商群。

注意（见 [BHC62, 推论4.6]），G(Q) 的每个算术子群都与 Δ (Z) ⋊H(Z) 可公度。回顾一下，如果两个拓扑群 G_1 和 G_2 存在有限指数子群 H_1 和 H_2，分别属于 G_1 和 G_2，且 H_1 与 H_1. 拓扑同构，则称它们（作为抽象群）可公度。如果是这种情况，那么 Bohr(G_1) 和 Bohr(G_2) 可公度；事实上，Bohr(G_1) 或 Bohr(G_2) 中的任一个都可以用另一个来描述（见命题 8 和 9）。因此，我们通常只处理算术群公度类中选定的一个代表元。

定理2. 设 G 是定义在有理数域 Q 上的连通线性代数群，其 Levi 分解为 G = U ⋊ H。令 Λ := H(Z) Δ := U(Z)，且 $\widetilde{\Gamma} := \Delta \rtimes \Lambda$. 令 $\Delta^{\mathrm{Ab}}{}_{\Lambda-\mathrm{fin}}$为对偶群 Δ^{Ab}的子群，由具有有限 Λ-轨道的特征标组成。我们有一个半直积分解

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong (Q \times \mathrm{Prof}(\Delta)) \rtimes \mathrm{Bohr}(\Lambda),$$

其中，Q 是 Bohr(Δ^{Ab}) 的连通分支，N 是 $\Delta^{\mathrm{Ab}}{}_{\Lambda-\mathrm{fin}}$ 在 Bohr(Δ^{Ab}) 中的湮灭子。该同构由自然同态 Δ → Bohr(Δ^{Ab})/N 和 Λ → Bohr(Λ) 诱导。

定理 1 和定理 2 将算术群 Γ 在 G 中的 Bohr(Γ) 的确定约化为 G 为约化群的情形。我们还可以进一步约化到 G 为单连通且几乎单的情形。事实上，回顾一下，若群 L 是子群 L_1、.....、L_n 的几乎直积，则乘积映射 $L_1 \times \cdots \times L_n \to L$ 是具有有限核的满同态。

设 G 是定义在有理数域 Q 上的连通约化代数群。G 的换位子群 L := [G, G] 是连通半单 Q-群，并且 G 是一个几乎直积 G = TL，其中 T 是中心 Q-环面（见 [Bor91] 中的 (14.2) 和 (18.2)）。此外，L 是连通的几乎 Q-单 Q-子群 L_i 的几乎直积 $L = L_1 \cdots L_n$，这些子群称为 L 的几乎 Q-单因子（见 [Bor91, (22.10)]）。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，令 L_i 为 L_i. 的单连通覆盖群。令 $G = T \times L_1 \times \cdots \times L_n$。令 Γ 为 G(Q) 中的算术子群 $T(Z) \times L_1(Z) \times \cdots \times L_n(Z)$。Γ 在同源 $p : G \to G$ 下的像 Γ 是 G(Q) 的算术子群（见 [BHC 62] 中的推论 6.4 和 6.11）。映射 $p : \Gamma \to \Gamma$ 诱导出同构 $\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Bohr}(\Gamma)/F$，其中 F 是有限正规子群 $F = \beta(\ker p)$，而 $\beta : \Gamma \to \mathrm{Bohr}(\Gamma)$ 是自然映射（见命题 10）。

作为 Margulis 超刚性结果的一个直接推论，我们在高秩假设下，给出了单代数 Q-群 G 中算术格的 Bohr紧化的描述。对于任意 G，这样的描述似乎并不可能。例如，双生成元自由非阿贝尔群 F_2 是SL_2(有理数域)中的一个算术格，但我们不知道如何简单地描述 Bohr(F_2)。

定理 3. 设 G 是一个连通、单连通且几乎单的 Q-群。假设实半单李群 G(R) 与任一形如 $SO(m, 1) \times K$ 或 $SU(m, 1) \times K$ （其中 K 是紧李群）的群都不局部同构。令 G_{nc} 为 G 的几乎 R-单因子 G_i 中满足 G_i(R) 非紧的因子的直积。令 $\Gamma \subset$G(Q) 为一个算术子群。我们有如下直积分解

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \times \mathrm{Prof}(\Gamma)$$

以及一个同构

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \cong \mathbf{G}(\mathbf{R})/\mathbf{G}_{\mathrm{nc}}(\mathbf{R}),$$

由自然映射 $\Gamma \to G(R)/G(R)_{nc}$ 和 $\Gamma \to$ Prof(Γ) 诱导。

定理 3 中的群 Γ 是李群$G = G(R)$ 中的不可约格，也就是说，齐性空间 G/Γ 带有一个 G-不变

概率测度；此外，当且仅当 G 在有理数域 Q 上是各向异性时， Γ 在 G中是余紧的（以上内容均见 [BHC62, (7.8), (11.6)]）。下面的推论直接由定理 3 以及半单李群中的非余紧算术格含有非平凡幺幂元素这一事实得出（见 [Mor15, (5.5.14)]）。

推论4。采用定理 3 中的记号，假设 G 在有理数域 Q 上各向同性。对于 G(Q) 的任意算术子群 Γ ，自然映射 Bohr(Γ) $\to$ Prof(Γ) 是一个同构。

如第6节所示，即使 G(Z) 在 G(R) 中余紧，也可能出现 Bohr(G(Z)) $\cong$ Prof(G(Z)) 的情形。

一般的算术格 Γ 有第三种完备化： Γ 的同余完备化 Cong(Γ) 是射影极限 $\varprojlim \Gamma/H$，其中 H 遍历 Γ的同余子群族；回顾一下，Γ 的正规子群若包含约化模某个整数 $N \geq 1.$ 的映射 G(Z) $\to$ G(Z/NZ) 的核，则称为同余子群。存在一个自然满同态 π： Prof(Γ) $\to$Cong(Γ)。所谓同余子群问题，询问 π 是否为单射，因而是否为拓扑群的同构；更一般地，也可以要求描述 $\pi.$ 的核。关于各种代数群中的算术子群（以及更广义的 S-算术子群），这一问题已得到广泛研究；例如，已知当 $\Gamma = SL_n$(Z) 对于 $n \geq 3$ 或 $\Gamma = Sp_{2n}$(Z) 对于 $n \geq 2$ 时， π 是同构（见 [BMS67]）；此外，当环面 T 的 T(Z) 为 Γ =时（见 [Che51]），以及当幺幂群 U 的 U(Z) 为 $\Gamma =$ 时（见下文命题 16），同样的结论也成立。关于同余子群问题的更多内容，可参见 [Rag76]或 [PR94，第9节。5]

本文的结构如下。第2节中，我们建立关于可公度群的 Bohr紧化及其与酉表示之间关系的一些一般性事实；我们还明确描述有限生成阿贝尔群的 Bohr紧化。第3节给出定理1的证明。第4节包含定理2的证明，第5节则给出定理 3 的证明。第6节专门对若干算术群的 Bohr紧化进行显式计算。

2. Some preliminaries

2.1. Bohr紧化与酉表示。给定一个拓扑群 G，我们将考察 G 的有限维酉表示，即连续同态 $G \to U(n)$。两个

这样的表示若可由一个酉矩阵共轭得到，则称它们等价。若表示 π 满足 $\mathbf{C}^n$ ，且 $\{0\}$ 中只有 $\pi(G)$-不变子空间 $\mathbf{C}^n$，则称其为不可约表示。我们用 $\mathbf{Rep}_{\mathrm{fd}}(G)$ 表示 $\widehat{G}$ 的有限维酉表示的等价类集合，用 G_{fd} 表示其中不可约表示的子集。每个 $\pi \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{fd}}(G)$ 都是来自 G_{fd} 的表示的有限直和

当 K 是紧群时， K 的每个不可约酉表示$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$都是有限维的，并且 $K_{\mathrm{fd}} = K$ 是 K.的酉对偶空间。$\widehat{\ }$根据彼得-外尔定理， K 分离 K中的各点。

设 $\beta : G \to H$ 是拓扑群 G 与 H 之间的连续同态，且其像稠密；则 β 诱导出单射映射

$$\widehat{\beta} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{fd}}(H) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{fd}}(G) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\beta} : \widehat{H}_{\mathrm{fd}} \to \widehat{G}_{\mathrm{fd}},$$

$\widehat{\ }$由 $\beta(\pi) = \pi \circ \beta$ 给出，其中 $\pi \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{fd}}(H)$。以下命题可视为众所周知的结果，是识别群的 Bohr 紧化的一个有用工具。

命题 5. 设 G 是拓扑群， K 是紧群，且 $\beta : G \to K$ 是一个像稠密的连续同态。以下性质等价:

(i) (K, β) 是 G的 Bohr 紧化; $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(ii) 诱导映射 $\beta :$ $K \to G_{\mathrm{fd}}$ 是满射; $\widehat{\ }$(iii) 诱导映射 $\beta : \mathbf{Rep}_{\mathrm{fd}}(K) \to \mathbf{Rep}_{\mathrm{fd}}(G)$ 是满射。

证明。假设 (i) 成立，并令 $\pi : G \to U(n)$ 为 G的不可约表示；根据 Bohr 紧化的泛性质，存在连续同态 $\pi' : K \to U(n)$，使得 $\widehat{\ } \pi = \beta(\pi')$，于是 (ii) 成立。

反之，假设 (ii) 成立。令 L 为紧群，并令$\alpha : G \to L$ 为具有稠密像的连续同态。选取$\widehat{\ }$一个族 $\pi_i : L \to U(n_i)$，其中的元素是 L. 的代表元。根据彼得-外尔定理，我们可以通过映射$\backsim x \mapsto \oplus_i \pi_i(x)$ 将 L 与其在 $\prod_i U(n_i)$ 中的像等同。对于每个 i，都有 $\pi_i \circ \alpha \in G_{\mathrm{fd}}$ ，因此，对于某个表示 $\pi_i' : K \to U(n_i)$（它是 K的表示），有 $\pi_i \circ \alpha = \backsim \beta(\pi_i') = \pi_i' \circ \beta$。定义一个连续同态

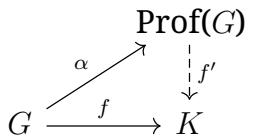
$$\alpha' : K \to \prod_i U(n_i) \qquad x \mapsto \oplus_i \pi_i'(x).$$

我们有 $\alpha' \circ \beta = \alpha$ 因此

$$\alpha'(K) = \alpha'\left(\overline{\beta(G)}\right) \subset \overline{\alpha(G)} = L.$$

因此，（i）和（ii）等价。显然，（ii）与（iii）等价。□

G 的副有限完备化（Prof(G) α）也可以类似地根据其某些酉表示来刻画。首先回忆一下，（Prof(G) α）是由一个逆有限群 Prof(G) 和一个连续同态 $\alpha: G \to$ Prof(G) 组成的对，其像稠密，并满足如下泛性质：对于每个逆有限群 K 以及每个连续同态 $f: G \to K$，存在一个连续同态 f' : Bohr(G) $\to K$，使得该图



交换。回忆一下，逆有限群的类与全不连通紧群的类重合（参见 [BH, 命题 4.C.10]）。

将 Rep$_{\text{finite}}$(G) 记为有限维酉表示 π of G forwhich π(G) 有限的等价类集合；令 G_{finite}为 Rep$_{\text{finite}}$(G) 中不可约表示的子集。

如果 $\alpha: G \to H$ 是拓扑群$G$and H 之间的连续同态，且像稠密，那么 β 诱导出单射映射

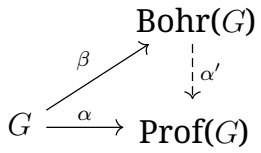
$$\widehat{\alpha}: \mathrm{Rep}_{\text{finite}}(H) \to \mathrm{Rep}_{\text{finite}}(G) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\alpha}: \widehat{H}_{\text{finite}} \to \widehat{G}_{\text{finite}}.$$

注意，如果 K 是逆有限群，则 $K = K_{\text{finite}}$。（反之，根据彼得-外尔定理，如果 K 是紧群且$K = K_{\text{finite}}$，那么 K 是逆有限群。）以下命题的证明类似于命题 5 的证明，故略去。

命题6. 设 K 为全不连通紧群，且 α:$G \to K$ 为具有稠密像的连续同态。以下性质等价：

(i) (K, α) 是 G 的副有限完备化；(ii) 诱导映射 $\widehat{\alpha}$: $K \to G_{\text{finite}}$ 是满射；(ii) 诱导映射 β : Rep$_{\text{finite}}$(K) $\to$ Rep$_{\text{finite}}$(G) 是满射。

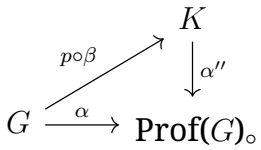
Bohr(G) 的泛性质意味着存在一个连续满同态 α' : Bohr(G) → Prof(G)，使得图



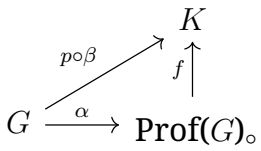
可交换。我们记下引言中提到的以下这一基本而初等的事实。

命题 7。 α' : Bohr(G) →Prof(G) 的核与 Bohr(G)$_0$ Bohr(G) 的连通分支重合。

证明。由于 Bohr(G)$_0$ 连通，而 Prof(G) 全不连通，因此 Bohr(G)$_0$ 包含于 Kerα'。于是， α' 可分解为一个连续满同态 α'' : K → Prof(G)，其中 K := Bohr(G)/Bohr(G)$_0$ ，并且有如下交换图



其中 p : Bohr(G) → K 是典范满同态。由于 K 是全不连通紧群，存在连续满同态 f : Prof(G) → K ，并且有一个交换图



对于每个 $g \in G$，我们有

$$f(\alpha''(p \circ \beta(g))) = f(\alpha(g)) = p \circ \beta(g);$$

由于 $p \circ \beta$(G) 在 K 中稠密，因此 $f \circ \alpha''$ 在 K. 上是恒等映射。这意味着 α'' 是单射，因而是同构。□

2.2. 可公度群的 Bohr紧化。设 G是一个拓扑群， H 是G中的有限指数闭子群。我们首先根据 Bohr(G) 确定 Bohr(H)。

命题 8. 设 (Bohr(G) β) 为 G 的 Bohr紧化。令 K := β(H)。

(i) K 是 Bohr(G) 的有限指数子群。(ii) (K, $\beta|_H$) 是 H. 的 Bohr紧化

(iii) K 和 Bohr(G) 的单位元连通分支相同。

证明。显然，条目 (i) 成立，条目 (iii) 由条目 (i) 推出。为证明条目 (ii)，设 π 是 H 在 $\mathbf{C}^n$. 上的一个酉表示。由于 H 在 H 中的指数有限，诱导表示 $\rho := \mathrm{Ind}_H^G \pi$ 是 G 的一个有限维酉表示。因此，存在 $\rho' \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{fd}}(\mathrm{Bohr}(G))$，使得 $\rho = \rho' \circ \beta$。现在，π 等价于 ρ 在 H 上的限制表示的一个子表示（见 [BH, 1.F]）；因此，我们可以将 π 视为 H 的表示，其由空间 ρ. 的一个 $\rho(H)$-不变子空间 W 定义。于是，W 是 $\rho'(K)$-不变的，从而定义了 K. 的一个表示 π'。我们有 $\pi = \pi' \circ (\beta|_H)$，由命题 5 可知条目 (ii) 成立。□

接下来，我们希望用 Bohr(H) 来确定 Bohr(G)。

给定一个紧群 K 和一个有限集 X，我们定义另一个紧群，将其称为 (K, X) 的诱导群，记作

$$\mathrm{Ind}(K, X) := K^X \rtimes \mathrm{Sym}(X),$$

其中，由 X 上双射组成的群 Sym(X) 通过指标置换作用在 K^X 上:

$$\sigma((g_x)_{x\in X}) = (g_{\sigma^{-1}(x)})_{x\in X} \qquad \text{for all} \quad \sigma \in \mathrm{Sym}(X), (g_x)_{x\in X} \in K^X$$

注意，如果 $\pi: K \to U(n)$ 是 K 在 $V = \mathbf{C}^n$ 上的表示，那么 Ind(π) 在 V^X 上的 Ind(K, X) 的酉表示定义为

$$\mathrm{Ind}(\pi)((g_x)_{x\in X}, \sigma)(v_x)_{x\in X} = (\pi(g_x)v_{\sigma^{-1}(x)})_{x\in X},$$

对于 $((g_x)_{x\in X}, \sigma) \in \mathrm{Ind}(K, X)$ 以及 $(v_x)_{x\in X} \in V^X$.

回到我们的情形，其中 H 是 G 的有限指数闭子群，我们取 X 作为 H 的右陪集截面；因此，我们有不交并 $G = \bigsqcup_{x\in X} Hx$。对于每个 $g \in G$ 和 $x \in X$，令 $x \cdot g$ 和 $c(x, g)$) 分别为 X 和 H 中满足$xg = c(x, g)(x \cdot g)$的唯一元素。注意，

$$X \times G \to X, \qquad (x, g) \mapsto x \cdot g$$

是 G 在 X 上的作用（在右侧），这等价于 G 在 $H\backslash G$上的自然作用，该作用由右乘法给出。特别地，对于每个 $g \in G$，映射 $\sigma(g)$: $x \mapsto x \cdot g^{-1}$ 属于 Sym(X)，并且我们有一个同态

$$G \mapsto \mathrm{Sym}(X),\ g \mapsto \sigma(g).$$

命题 9. 设 (Bohr(H) β) 是 H 的 Bohr紧化。设 Ind(Bohr(H) X) 是如上定义的紧群。考虑~映射 $\beta\colon G \to$ Ind(Bohr(H) X)，定义为

$$\widetilde{\beta}(g) = (\beta(c(x,g)))_{x\in X}, \sigma(g)) \qquad for\ all \quad g \in G.$$

~在 Ind(Bohr(H) X) 中， β(G) 的闭包连同映射 β，构成 G. 的 Bohr紧化

~证明。容易验证， $\beta\colon G \to$ Ind(Bohr(H) X) 是一个连续同态。设 $\rho\colon G \to U(n)$ 是 G. 的有限维酉表示。令 $\pi := \rho|_H \in$ Rep^{fd}(H)。存在$\pi' \in$ Rep^{fd}(Bohr(H))，使得 $\pi = \pi' \circ \beta$。设 $\widetilde{\pi} :=$ Ind$_H^G \pi$. 众所周知（见 [BH, 1.F]），$\widetilde{\pi}$ 可在 V^X 上实现，其中 $V := \mathbf{C}^n$，其定义公式如下:

$$\widetilde{\pi}(g)(v_x)_{x\in X}) = (\pi(c(x,g))v_{x\cdot g})_{x\in X} = (\pi(c(x,g))v_{\sigma(g^{-1})x})_{x\in X},$$

对所有 $g \in G$ 以及 $(v_x)_{x\in X} \in V^X$. 。因此，对于如上定义的 Ind(Bohr(H) X) 的酉表示 Ind(π')，我们有

$$(*) \qquad \widetilde{\pi}(g) = \mathrm{Ind}(\pi')(\widetilde{\beta}(g)) \qquad \text{for all} \quad g \in G,$$

~也就是说， $\widetilde{\pi} =$ Ind(π') $\circ \beta$. 现在,

$$\widetilde{\pi} = \mathrm{Ind}_H^G \pi = \mathrm{Ind}_H^G(\rho|_H)$$

等价于张量积表示 $\rho\otimes\lambda_{G/H}$，其中 $\lambda_{G/H}$是 G/H 的正则表示（参见 [BHV08, E.2.5]）。由于 $\lambda_{G/H}$包含 G的平凡表示，因此 ρ等价于 $\widetilde{\pi}$的一个子表示；所以，我们可以将 ρ 视为 G 的表示，它由 V^X的一个 $\widetilde{\pi}$(G)-不变子空间 W 定义。记⌢L为 β(G)的闭包，由 (∗) 可知， W 在~Ind(π')(L)下不变，因此定义了 L的一个表示 ρ'。于是 $\rho = \rho' \circ \beta$，结论由命题 5 得出。□

我们还需要以下关于 G 的商群的 Bohr 紧化的著名描述（参见 [HK01, 引理 2.2]），它是用 G的 Bohr 紧化来表述的。

命题 10. 设 (Bohr(G) β) 是拓扑群 G 的 Bohr紧化，且 N 是 G. 的闭正规子群。设 K_N 为 β(N) 在 Bohr(G) 中的闭包。

(i) K_N 是 Bohr(G) 的正规子群，且 β 诱导出一个连续同态 $\overline{\alpha}$: $G/N \to$ Bohr(G)$/K_N$(ii) (Bohr(G)$/K_N, \overline{\alpha}$) 是 G/N. 的 Bohr紧化

证明。设 (Bohr(G/N) $\overline{\beta}$) 是 $G/N.$ 的 Bohr紧化。典范同态 α : $G \to G/N$ 诱导出一个连续同态 $\alpha' :$ Bohr(G) $\to$ Bohr(G/N)，使得该图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Bohr}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \vdots{\scriptstyle \alpha'} \\ G/N & \xrightarrow{\overline{\beta}} & \mathrm{Bohr}(G/N) \end{array}$$

可交换。因此， $\beta(N)$，进而 K_N，包含于 Ker α'。因此，我们得到诱导同态 $\overline{\alpha}$: $G/N \to$ Bohr(G)$/K_N$ 和 $\overline{\alpha'}$: Bohr(G)$/K_N \to$ Bohr(G/N)，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Bohr}(G)/K_N \\ & \overset{\overline{\alpha}}{\nearrow} & \vdots{\scriptstyle \overline{\alpha'}} \\ G/N & \xrightarrow{\overline{\beta}} & \mathrm{Bohr}(G/N). \end{array}$$

由此可知，(Bohr(G)$/K_N, \overline{\alpha}$) 对 G/N 具有与 (Bohr(G/N) $\overline{\beta}$) 相同的泛性质。由于 $\overline{\alpha}$ 的像稠密，(Bohr(G)$/K_N, \overline{\alpha}$) 因此是 $G/N.$ 的 Bohr 紧化 □

2.3. 有限生成阿贝尔群的 Bohr 紧化。设 G 是一个局部紧阿贝尔群。其对偶群 $\widehat{G}$ 由从 G 到圆群 $\mathbf{S}^1$ 的连续同态组成；赋予其紧子-$\widehat{G}$集上一致收敛拓扑后， G 仍是一个局部紧阿贝尔群。设 G_{disc} 是赋予离散拓扑的 $\widehat{G}$ 群 G。众所周知（例如参见 [BH，命题 4.C.4]）， G 的 Bohr 紧化与 K （G_{disc} 的对偶群）一致，并配有嵌入 i : $G \to \widehat{K}$，该嵌入由 $i(g)(\chi) = \chi(g)$ 给出，对所有 $g \in G$ 和 $\chi \in G.$ 均成立。注意，这意味着根据庞特里亚金对偶性，Bohr(G) 的对偶群与 G_{disc} 一致。

关于 Bohr 紧化结构的更精确信息，可在离散有限生成阿贝尔群的情形下得到。众所周知，这样的群 Γ 分解为 $\Gamma = F \oplus A$一个有限群 F （即其挠子群）与 A 一个有限秩的自由阿贝尔群 $k \geq 0$的直和，该秩称为 Γ的秩。回顾一下，$\mathbf{Z}_p$ 表示 p-进整数环，其中 p 为素数；而 $\mathbf{A}$ 表示 $\mathbf{Q}$ 上的阿代尔环。

命题 11. 设 Γ 是一个秩为 $k.$ 的有限生成阿贝尔群

(i) 我们有一个直和分解

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \oplus \mathrm{Prof}(\Gamma).$$

(ii) 我们有

$$\mathrm{Prof}(\Gamma) \cong F \oplus \prod_{p \text{ prime}} \mathbf{Z}_p^k,$$

其中 F 是一个有限群。

(iii) 我们有

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \cong \prod_{\omega \in \mathfrak{c}} \mathbf{A}^k/\mathbf{Q}^k,$$

阿代尔螺旋 $\mathbf{A}^k/\mathbf{Q}^k$ 的不可数多个副本的乘积。

证明。我们有 $\Gamma \cong F \oplus \mathbf{Z}^k$，其中 F 是一个有限群，并且 $\mathbf{Bohr(Z}^k\mathbf{)} = \mathbf{Bohr(Z)}^k$. 。因此，只需确定 Bohr(Z)。如上所述，Bohr(Z) 可以视为圆群 $\mathbf{S}^1$ 的对偶群，其中 $\mathbf{S}^1$ 被视为离散群。选取 R 在有理数域 Q 上的一组线性基 $\{1\} \cup \{x_\omega \mid \omega \in \mathfrak{c}\}$。那么 $\mathbf{S}^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 同构于阿贝尔群

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \oplus_{\omega \in \mathfrak{c}} \mathbf{Q}.$$

因此，

$$\mathrm{Bohr}(\mathbf{Z}) \cong \widehat{\mathbf{Q}/\mathbf{Z}} \oplus \prod_{\omega \in \mathfrak{c}} \widehat{\mathbf{Q}}.$$

Now,

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \oplus_{p \text{ prime}} Z(p^\infty),$$

其中 $Z(p^\infty) = \mathbf{lim}\text{—}\!\!\rightarrow_k \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 的 p-主分量。因此，

$$\widehat{Z(p^\infty)} \cong \varprojlim_k \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_p.$$

另一方面，有理数域可与螺旋群 $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ 等同（例如参见 [HR79, (25.4)]）。由此可得

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \prod_{p \text{ prime}} \mathbf{Z}_p \oplus \prod_{\omega \in \mathfrak{c}} \mathbf{A}/\mathbf{Q}.$$

□

2.4. 表示在正规子群上的限制。设Γ 为一个群， N 为 Γ的正规子群。回顾一下， Γ 作用于$\widehat{N}_{\mathrm{fd}}$: 对于 $\sigma \in N_{\mathrm{fd}}$ 和 $\gamma \in \Gamma$，共轭表示 $\sigma^\gamma \in N_{\mathrm{fd}}$ 定义为

$$\sigma^\gamma(n) = \sigma(\gamma^{-1} n \gamma), \quad \text{for all } n \in N.$$

Γ_σ 的稳定子是由所有使σ^γ 等价于 σ的 $\gamma \in \Gamma$ 组成的子群；注意到 Γ_σ 包含 N.

给定 ρ 在有限维向量空间 V上的酉表示以及 $\sigma \in N_{\mathrm{fd}}$，我们将 ρ 的 σ-等型分量记为 V^σ，即所有满足以下条件的 ρ-不变子空间 W 之和： ρ 在 W 上的限制表示等价于 σ. 。注意， V分解为直和$V = \oplus_{\sigma \in \Sigma_\rho} V^\sigma$，其中 Σ_ρ是满足 $V^\sigma \neq \{0\}$.的 $\sigma \in N_{\mathrm{fd}}$ 的有限集

命题 12. 设 π 是 Γ在有限维向量空间 V. 上的不可约酉表示。设 $V = \oplus_{\sigma \in \Sigma_{\pi|_N}} V^\sigma$ 是将 π 到 N 的限制表示 $\pi|_N$ 分解为等型分量所得的分解。那么 $\Sigma_{\pi|_N}$ 与一个 Γ-轨道重合：存在 $\sigma \in N_{\mathrm{fd}}$ 使得 $\Sigma_{\pi|_N} = \{\sigma^\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}$；特别地， Γ_σ 在 Γ.中具有有限指数

证明。令 $\sigma \in \Sigma_{\pi|_N}$，并为 Γ_σ 的左陪集选取一个截面 T，满足 $e \in T$。于是，对于所有 $t \in T$， $V^{\sigma^t} = \pi(t)V^\sigma$。由于 π 是不可约的，且 $\sum_{t \in T} \pi(t)V^\sigma$ 是 $\pi(\Gamma)$-不变的，因此可知 $\Sigma_{\pi|_N}$ 是一个 Γ-轨道。□

3. Proof of Theorem 1

3.1. 扭曲与 Bohr紧化。设 Γ 是一个有限生成群，其生成元有限集为 S。对于 $\gamma \in \Gamma$，记 $\ell_S(\gamma)$ 为相对于 $S \cup S^{-1}$ 的 γ 的字长，并令

$$t(\gamma) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\ell_S(\gamma^n)}{n}.$$

数 $t(\gamma)$ 称为 γ 在 [GS91] 中的平移数

定义 13. 若 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $t(\gamma) = 0.$，则称其为扭曲的

事实上，由于序列 $n \mapsto \ell_S(\gamma^n)$ 是次可加的，根据 Fekete引理，我们有

$$t(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ell_S(\gamma^n)}{n} = \inf \left\{ \frac{\ell_S(\gamma^n)}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

扭曲这一性质与生成元集合的选择无关。扭曲元素在 [BGS85, (7.5), p.90], 中称为代数抛物的，不过我们更倾向于使用[FH06]中的术语。扭曲与 Bohr 紧化的相关性在于

以下命题；关于一个证明类似的相关结果，参见 [LMR00, (2.4)]。

命题14。设 Γ 是一个有限生成群，$\gamma \in \Gamma$ 是一个扭曲元素。那么，对于 Γ的任意有限维酉表示 $\pi\colon \Gamma \to U(N)$，矩阵 $\pi(\gamma) \in U(N)$的阶有限。

证明。只需证明酉矩阵 $\pi(\gamma)$的所有特征值都是单位根。反设 π 有一个无限阶特征值$\lambda \in \mathbf{S}^1$ 。

设 S 是 Γ 的一个有限生成元集，其中 $S = S^{-1}$.群$\pi(\Gamma)$由集合 $\{\pi(s) \mid s \in S\}$. 生成。因此，$\pi(G)$包含于 $GL_N(L)$中，其中 L 是由 $\pi(s)$的矩阵系数生成的C的子域。由此可知，λ包含于 L的一个有限生成扩张 ℓ中。根据Tits的引理（[Tit72，引理4.1]），存在一个赋有绝对值 $|\cdot|$ 的局部紧域 k 以及一个域嵌入 $\sigma\colon \ell \to k$，使得 $|\sigma(\lambda)| \neq 1$. 将 γ 替换为 γ^{-1}后，我们可以假设 $|\sigma(\lambda)| > 1$.

定义一个函数（“范数”） $\xi \mapsto \|\xi\|$ 在 k^N 上为

$$\|\xi\| = \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_N|\} \qquad \text{for all} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in k^N.$$

对于矩阵 $A \in GL_N(k)$，令 $\|A\| = \sup_{\xi \neq 0} \|A\xi\|/\|\xi\|$. 显然，对所有 $\xi \in k^N$ 都有 $\|A\xi\| \leq \|A\|\|\xi\|$，因此

$$(*) \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \text{for all} \quad A, B \in GL_N(k).$$

特别地，对所有 $A \in GL_N(k)$和 $n \in \mathbf{N}$，都有 $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ 。

对于矩阵 $w \in GL_n(\ell)$，记 $\sigma(w)$为 $GL_n(k)$中的矩阵，它由对 w. 的各项应用 σ 得到。令 $A_s = \sigma(\pi(s))$，其中 $s \in S$且 $A{:=}\ \sigma(\pi(\gamma))$。结合

$$C := \max\{\|A_s\| : s \in S\},$$

显然，不等式（$*$）蕴含

$$(**) \qquad \|A^n\| = \|\sigma(\pi(\gamma^n))\| \leq C^{\ell_S(\gamma^n)} \qquad \text{for all} \quad n \in \mathbf{N}.$$

另一方面，$\sigma(\lambda)$是 A的特征值；因此，存在 $\xi \in k^N \setminus \{0\}$ 使得 $A\xi = \sigma(\lambda)\xi$，从而对所有 $n \in \mathbf{N}$都有 $A^n\xi = \sigma(\lambda)^n\xi$ 。因此，对每个 $n \in \mathbf{N}$，都有

$$\|A^n\xi\| = |\sigma(\lambda)|^n\|\xi\|$$

由此可知

$$\|A^n\| \geq |\sigma(\lambda)|^n.$$

鉴于（$**$），因此我们得到

$$\frac{\ell_S(\gamma^n)\log C}{n} \geq \log|\sigma(\lambda)| \qquad \text{for all} \quad n \in \mathbf{N}.$$

由于 $|\sigma(\lambda)| > 1$，这与 $\liminf_{n\to\infty} \ell_S(\gamma^n)\, n = 0$. 的事实相矛盾 □

3.2. 幂零群中的扭曲元素。设 Γ 是一个有限生成幂零子群。对于 Γ 中的子集 A、B，我们用 $[A,B]$ 表示由所有交换子 $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ 生成的 Γ 的子群，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$.。令

$$\Gamma^{(0)} \supset \Gamma^{(1)} \supset \cdots \supset \Gamma^{(d-1)} \supset \Gamma^{(d)} = \{e\}$$

Γ 的下中心列定义如下：递归地令 $\Gamma^{(0)} = \Gamma$ 且 $\Gamma^{(k+1)} = [\Gamma^{(k)}, \Gamma]$.。$\Gamma$ 的幂零阶是满足 $\Gamma^{(d-1)} \neq \{e\}$ 且 $\Gamma^{(d)} = \{e\}$ 的最小 $d \geq 1$。

命题 15。设 Γ 是一个有限生成幂零子群。每个 $\gamma \in \Gamma^{(1)} = [\Gamma, \Gamma]$ 都是扭曲的。

证明。设 S 是 Γ 的一个有限生成元集，且 $S = S^{-1}$.。设 $d \geq 1$ 为 Γ 的幂零阶。由于 $d = 1$ 的情形是平凡的，我们假设 $d \geq 2$.。我们将对 $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ 使用归纳法，证明每个 $\gamma \in \Gamma^{(d-i)}$ 都是扭曲的。

• 第一步。假设 $i = 1$。众所周知，$\Gamma^{(d-1)}$ 中的每个元素 γ 都是扭曲的（例如参见 [BGS85，第 7.6 节，第 91] 页）；事实上，还有更精确的估计：对于每个 $\gamma \in \Gamma^{(d-1)}$，我们有 $\ell_S(\gamma^n) = O(n^{1/d})$，当 $n \to \infty$ 时成立（参见 [Tit81，2.3 Lemme] 或 [DK18，引理 14.15]）。

• 第二步。假设对于每个步长为 $d' \geq 2$ 的有限生成幂零子群 Λ，每个元素 $\delta \in \Lambda^{(d'-i)}$ 都是扭曲的，且 $i \in \{1, \ldots, d'-2\}$. 令 $\gamma \in \Gamma^{(d-i-1)}$ 并固定 $\varepsilon > 0$.

商群 $\overline{\Gamma} = \Gamma/\Gamma^{(d-1)}$ 是步长为 $d' = d-1$ 的幂零群，并且 $p(\gamma) \in \overline{\Gamma}^{(d'-i)}$，其中 $p : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ 是商映射。根据归纳法假设，$p(\gamma)$ 在 Γ 中相对于生成集 $\overline{S} := p(S)$ 是扭曲的。因此，我们有 $\lim_{n\to\infty} \ell_{\overline{S}}(p(\gamma)^n)_n = 0$；于是，我们可以找到一个整数 $N \geq 1$ 使得

$$(*) \qquad \forall n \geq N, \exists \delta_n \in \Gamma^{(d-1)} \ : \ \frac{\ell_S(\gamma^n \delta_n)}{n} \leq \varepsilon.$$

根据第一步，由于 $\delta_N \in \Gamma^{(d-1)}$，我们有 $\lim_{k\to\infty} \ell_S(\delta_N^k)_k = 0$；因此，存在 $K \geq 1$ 使得

$$(**) \qquad \forall k \geq K \ : \ \frac{\ell_S(\delta_N^k)}{k} \leq \varepsilon.$$

令 $k \geq K$. 。我们有

$$(***) \qquad \frac{\ell_S(\gamma^{Nk})}{Nk} = \frac{\ell_S((\gamma^{Nk}\delta_N^k)(\delta_N^{-1})^k)}{Nk} \leq \frac{\ell_S(\gamma^{Nk}\delta_N^k)}{Nk} + \frac{\ell_S(\delta_N^k)}{Nk}.$$

现在，由于 $\Gamma^{(d-1)}$ 包含于 Γ的中心中，元素 δ_N 和γ_N 可交换，因此根据（$*$），我们有

$$\frac{\ell_S(\gamma^{Nk}\delta_N^k)}{Nk} = \frac{\ell_S((\gamma^N\delta_N)^k)}{Nk} \leq k\frac{\ell_S(\gamma^N\delta_N)}{Nk} = \frac{\ell_S(\gamma^N\delta_N)}{N} \leq \varepsilon.$$

因此，结合（$***$）和（$**$），我们得到

$$\forall k \geq K \ : \ \frac{\ell_S(\gamma^{Nk})}{Nk} \leq 2\varepsilon.$$

这表明 t（γ）$= 0$. □

3.3. 幺幂群中的同余子群。下面的结果表明，同余子群问题对于幺幂群有肯定的解；该结果是众所周知的（参见[Rag76，第108]页中的证明概要）。为方便读者起见，我们重述其简短证明。

命题16. 设 U 是定义在有理数域 Q 上的幺幂代数群。设 Γ是 U(Q) 的一个算术子群。那么 Γ 的每个有限指数子群都是同余子群。

证明。我们可以找到一个序列

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \supset \mathbf{U}_1 \supset \cdots \supset \mathbf{U}_{d-1} \supset \mathbf{U}_d = \{e\}$$

U 的正规 Q-子群，使得商群 $\mathbf{U}_i/\mathbf{U}_{i+1}$ 与 $\mathbf{G}_a$（1 维加法群）在 Q 上同构（见 [Bor63, (15.5)]）。

我们对 $d \geq 1$ 作归纳。若 $d = 1$，则 Γ 与整数环可公度，结论显然成立。假设 $d \geq 2$. 那么，U 可写成半直积 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \rtimes \mathbf{G}_a$. 根据 [BHC62，推论4.6]，Γ 与 $\mathbf{U}_1$(整数环)$\rtimes$整数环 可公度。令 H 为 Γ. 中的一个有限指数子群。那么 $H \cap \mathbf{U}_1$(整数环) 在 $\mathbf{U}_1$(整数环) 中具有有限指数，因此根据归纳假设，它包含约化映射 $\mathbf{U}_1$(整数环) $\to \mathbf{U}_1$(整数环/N_1整数环) 模某个 $N_1 \geq 1$. 的核。此外，$H \cap$整数环 $= N_2$整数环 对某个 $N_2 \geq 1$. 成立。因此，H 包含约化映射 U(整数环) $\to$U(整数环/N_1N_2整数环) 模 N_1N_2. □的核。

3.4. 定理1的证明。令 Γ为一个有限生成幂零群，且 $\alpha: \Gamma \to$Prof(Γ) 为典范同态。回顾（参见命题 11 ）， $\Gamma^{\mathrm{Ab}} = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 的 Bohr 紧化分解为一个直和

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma^{\mathrm{Ab}}) = \mathrm{Bohr}(\Gamma^{\mathrm{Ab}})_0 \oplus B_1,$$

对于闭子群 $B_1 \cong$ Prof(Γ^{Ab})。令 $p:$ Bohr(Γ^{Ab}) $\to$ Bohr(Γ^{Ab})$_0$为相应的投影。记 $\beta_0 : \Gamma \to$ Bohr(Γ^{Ab}) 为由商同态 $\Gamma \to \Gamma^{\mathrm{Ab}}$ 诱导的映射。设

$$K := \mathrm{Bohr}(\Gamma^{\mathrm{Ab}})_0 \times \mathrm{Prof}(\Gamma),$$

并令 $\beta:$ $\Gamma \to K$ 为同态 $\gamma \mapsto$ ($p \circ \beta_0(\gamma)$ $\alpha(\gamma)$)。我们声称 (K, β) 是 Γ. 的 Bohr紧化

• 第一步。我们声称 $\beta(\Gamma)$ 在 K. 中稠密。事实上，令 L 为 K 中 $\beta(\Gamma)$ 的闭包， L_0 为其连通分支。由于 Prof(Γ) 全不连通， L_0 在 Prof(Γ) 上的投影是平凡的；因此，$L_0 = K_0 \times \{1\}$ 是 Bohr(Γ $_{\mathrm{Ab}}$)$_0$ 的一个连通闭子群 K_0。于是， L 在 Bohr(Γ_{Ab})$_0$ 上的投影诱导出一个连续同态

$$f : L/L_0 \to \mathrm{Bohr}(\Gamma^{\mathrm{Ab}})_0/K_0.$$

注意到， f的像稠密，因为 $p \circ \beta_0(\Gamma)$ 在 Bohr(Γ^{Ab})$_0$ 中稠密；因此，由 L/L_0. 的紧性可知， f 是满射。再次利用紧性可知，Bohr(Γ^{Ab})$_0/K_0$ 拓扑同构于L/L_0. 的一个商。由于 L/L_0 是全不连通的，这意味着（见 [Bou71，第 3 章，第 4 节，推论 3]）Bohr(Γ^{Ab})$_0/K_0$ 也是全不连通的，因而 $K_0 =$ Bohr(Γ^{Ab})$_0$. 。所以，Bohr(Γ^{Ab})$_0 \times \{1\}$ 包含于 L. 。由此可知， L 是 Bohr(Γ^{Ab})$_0$ 与 Prof(Γ)的一个子群的乘积。由于 $\alpha(\Gamma)$ 在 Prof(Γ) 中稠密，该子群就是 Prof(Γ)，也就是说， $L = K$ ，命题得证。

• 第三步。 我们断言，每个不可约酉表示$\frown$ $\curvearrowright \pi:$ $\Gamma \to U(N)$ Γ都具有以下形式： $\chi \otimes \rho$对于某个 $\chi \in \Gamma_{\mathrm{Ab}}$ 和 $\rho \in \Gamma_{\text{有限}}$.

事实上，命题 14 和 15 表明， $\pi([\Gamma,\Gamma])$ 是 $U(N)$ 的一个周期子群。由于 Γ是有限生成的， $[\Gamma,\Gamma]$ 也是有限生成的（实际上， Γ 的每个子群都是有限生成的；参见 [Rag72, 2.7 定理]）。因此，根据 Schur 定理（参见 [Weh73, 4.9 推论]），$\pi([\Gamma,\Gamma])$ 是有限的。由此可知，存在 $[\Gamma,\Gamma]$ 的一个有限指数正规子群 H ，使得 $\pi|_H$ 是 H 的平凡表示。

接下来，我们断言，存在 Δ中 Γ 的有限指数正规子群，使得 $\Delta \cap [\Gamma,\Gamma] = H$. 事实上，由于 $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 是阿贝尔有限生成的，我们有 $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \cong \mathbf{Z}^k \oplus F$，其中$F$ 是某个有限子群， $k \geq 0$. 是某个整数。令 Γ_1 为 Γ 中该副本的原像

$\mathbf{Z}^k$ 在 $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$. 中。于是， Γ_1 是 Γ.的有限指数正规子群。此外， Γ_1 可以写成迭代半直积

$$\Gamma_1 = (\dots((([\Gamma,\Gamma] \rtimes \mathbf{Z}) \rtimes \mathbf{Z}) \rtimes \mathbf{Z})).$$

Set

$$\Delta := (\dots((H \rtimes \mathbf{Z}) \rtimes \mathbf{Z}) \rtimes \mathbf{Z})).$$

于是， Δ 是 Γ 的有限指数正规子群，其中 $\Delta \cap [\Gamma,\Gamma] = H$.

由于 $\pi|_H$ 在 H 上是平凡的，且由于 $[\Delta,\Delta] \subset H$， $\pi|_\Delta$对 Δ 的限制表示 π 可通过 Δ^{Ab}. 分解。因此，根据命题 12，存在 Δ^{Ab} 中的一个⌒有限 Γ-轨道 $\mathcal{O}$ ，使得我们有直和分解$V = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{O}} V^\chi$，其中 V^χ 是 $\pi|_\Delta$.的 χ-等型分量

固定 $\chi \in \mathcal{O}$. 。由于 χ 在 H 上是平凡的，且由于 $\Delta \cap [\Gamma,\Gamma] = H$，我们可以将 χ 视为子群 $\Delta/$（$\Delta \cap [\Gamma,\Gamma]$）的酉特征 Γ^{Ab}⌒。因此， χ 可延拓为特征标 $\widetilde{\chi} \in \Gamma^{\mathrm{Ab}}$ （例如参见 [HR79, （24.12）]）。这意味着 $\Gamma_\chi = \Gamma$；事实上，

$$\chi^\gamma(\delta) = \widetilde{\chi}(\gamma^{-1}\delta\gamma) = \widetilde{\chi}(\delta) = \chi(\delta)$$

对每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\delta \in \Delta$. 这表明 $\mathcal{O}$ 是单点集，因此$V = V^\chi$. 我们记作

$$\pi = \widetilde{\chi} \otimes (\overline{\widetilde{\chi}} \otimes \pi).$$

于是 $\rho := \overline{\widetilde{\chi}} \otimes \pi$ 是 Γ 的不可约酉表示，在 Δ 上平凡；因此， ρ 具有有限像，且 $\pi = \widetilde{\chi} \otimes \rho$.

• 第三步。设 $\pi \in \Gamma_{\mathrm{fd}}\widehat{\ }$. 我们断言存在一个表示⌒$\pi' \in K$ ，使得 $\pi = \pi' \circ \beta$. 一旦证明这一点，命题 5 将推出 (K,β) 是 Γ 的 Bohr紧化。

⌒根据第二步，我们可以写成 $\pi = \chi \otimes \rho$ ，其中 $\chi \in \Gamma^{\mathrm{Ab}}\widehat{\ }$且 $\rho \in \Gamma_{\mathrm{finite}}$. 一方面，根据 Prof(Γ) 的泛性质，我们可以将 $\rho = \rho' \circ \alpha$ 写成⌒⌒$\rho' \in$Prof(Γ)。另一方面，⌒我们可以将 χ 分解为 $\chi = \chi_0\chi_1$ ，其中 $\chi_0 \in \Gamma^{\mathrm{Ab}}$ 具有无限阶，且⌒$\chi_1 \in \Gamma^{\mathrm{Ab}}$ 具有有限阶。对于 Bohr(Γ^{Ab}) 的酉特征 χ_0' ，有 $\chi_0 = \chi_0' \circ (p \circ \beta_0)$，而对于 Prof($\Gamma^{\mathrm{Ab}}$) 的酉特征 χ_1' ，有 $\chi_1 = \chi_1' \circ \alpha$。对于 $\pi' =$⌒$\chi_0 \otimes (\chi_1' \otimes \rho')$，有 $\pi' \in K$ 和 $\pi = \pi' \circ \beta$.

4. Proof of Theorems 2

设 G $=$U $\rtimes$H 是 G 的 Levi 分解，并令

$$\Lambda = \mathbf{H}(\mathbf{Z}), \quad \Delta = \mathbf{U}(\mathbf{Z}), \qquad \text{and} \qquad \Gamma = \Delta \rtimes \Lambda.$$

将自然同态记为 $\beta_\Delta\colon\ \Delta \to$ Bohr(Δ) 和 $\beta_\Lambda\colon\ \Lambda \to$ Bohr(Λ)。注意，根据 Bohr(Δ) 的泛性质，每个元素 $\lambda \in \Lambda$ 都定义了 Bohr(Δ) 的连续自同构 $\theta_b(\lambda)$

使得

$$\theta_b(\lambda)(\delta) = \beta_\Delta(\lambda\delta\lambda^{-1}) \qquad \text{for all} \quad \delta \in \Delta.$$

相应的同态 θ_b : $\Lambda \to$Aut(Bohr(Δ)) 定义了 Λ 在 Bohr(Δ) 上的作用。根据定理1，我们有

$$\mathrm{Bohr}(\Delta) = \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0 \times \mathrm{Prof}(\Delta).$$

$\frown$群 Λ 自然地作用于 Δ^{Ab}，并通过对偶性作用于 Δ^{Ab}. 。令

$$H := \widehat{\Delta^{\mathrm{Ab}}}_{\Lambda-\mathrm{fin}} \subset \widehat{\Delta^{\mathrm{Ab}}}$$

为 Δ^{Ab} 中具有有限 Λ-轨道的特征子群。注意，$\frown H$ 包含 Δ^{Ab}.的挠子群

Let

$$\alpha : \Lambda \to \mathrm{Aut}(H)$$

为由 Λ 在 H. 上的作用所给出的同态

对于局部紧群 G，其连续自同构群 Aut(G)（即 G 的连续自同构群）赋予紧开拓扑；在此拓扑下，它也是一个（不一定局部紧的）拓扑群（见 [HR79, (26.3)]）。

• 第一步。我们断言， α(Λ) 在 Aut(H) 中的闭包是紧的。事实上，将 Aut(H) 视为乘积空间 H^H 的一个子集。Aut(H) 的拓扑与 H^H. 上由乘积拓扑诱导的拓扑一致。这样看来， α(Λ) 是有限个 Λ-轨道 χ^Λ. 的乘积 $\prod_{\chi\in H}\chi^\Lambda$ 的子空间。由于 $\prod_{\chi\in H}\chi^\Lambda$ 是紧的，因而也是闭的，故断言得证。

接下来，令 N 为 Bohr(Δ^{Ab}) 中 H 的湮灭子。那么， N 是 Λ-不变的，而 Λ 在 Bohr(Δ^{Ab})/N 上诱导的作用，是由 θ_b. 给出的作用的一个商。

令 C 为 Bohr(Δ^{Ab})/N. 的连通分支。那么， C 与 Bohr(Δ^{Ab})$_0$ 在 Bohr(Δ^{Ab})/N 中的像重合（见 [Bou71，第 3 章，第 4 节，推论 3]），因此

$$C \cong \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0/(N \cap \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0).$$

由于 C 在 Λ下是不变的，我们得到 Λ 在 C上的作用；令

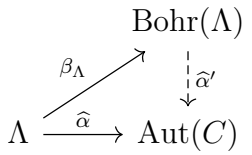
$$\widehat{\alpha} : \Lambda \to \mathrm{Aut}(C)$$

为相应的同态。

• 第二步。我们断言， $\widehat{\alpha}$ of Λ 在 C 上的作用可延拓为 Bohr(Λ) 的作用；更确切地说，存在一个连续同态

$$\widehat{\alpha}' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(C)$$

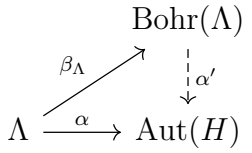
使得该图



可交换。事实上，根据第一步， α(Λ) 在 Aut(H) 中的闭包 K 是一个紧群。因此，根据 Bohr(Λ) 的泛性质，存在一个连续同态

$$\alpha' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to K \subset \mathrm{Aut}(H)$$

使得图



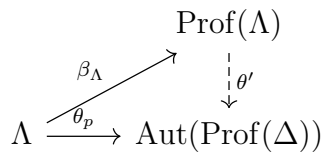
可交换。由于 $\widehat{H} = \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})/N$，我们通过对偶性得到一个连续同态 $\widehat{\alpha}' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})/N)$。$\mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})/N$ 的连通分支 C 在 Bohr(Λ) 下不变。这证明了具有所述性质的映射 $\widehat{\alpha}' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(C)$ 的存在。

接下来注意，根据 Prof(Δ) 的泛性质，每个元素 $\lambda \in \Lambda$ 都定义了 Prof(Δ) 的一个连续自同构 $\theta_p(\lambda)$，使得

$$\theta_p(\lambda)(\delta) = \beta_\Delta(\lambda\delta\lambda^{-1}) \qquad \text{for all} \quad \delta \in \Delta.$$

相应的同态 $\theta_p : \Lambda \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(\Delta))$ 定义了 Λ 在 Prof(Δ) 上的一个作用。

• 第三步。我们断言， Λ 在 Prof(Δ) 上的作用 θ_p 可以扩展为 Bohr(Λ) 的作用；更准确地说，存在一个同态$\theta' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(\Delta))$，使得该图



彼此可交换。事实上，由于 Δ 是有限生成的，且其在 Bohr(Δ) 中的像稠密，逆有限群 Bohr(Δ) 是有限生成的（也就是说，存在 Bohr(Δ) 的一个有限子集生成一个稠密子群）。这意味着 Aut(Bohr(Δ)) 是一个逆有限

群（见 [RZ00，推论4.4.4]），因此存在一个同态 θ'_p : Prof(Λ) → Aut(Prof(Δ))，使得 $\theta'_p \circ \alpha_\Lambda = \theta_{p\cdot}$。接着我们将 θ'_p 提升为一个同态 θ' : Bohr(Λ) → Aut(Prof(Δ))。

令

$$Q := \mathrm{Bohr}(\Delta)/(N \cap \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0) = C \times \mathrm{Prof}(\Delta);$$

我们通过同态获得了 Λ 在 Q 上的作用

$$\widehat{\alpha} \oplus \theta_p : \Lambda \to \mathrm{Aut}(C) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(\Delta)) \subset \mathrm{Aut}(Q)$$

并且根据第二步和第三步，Bohr(Λ) 在 Q 上有一个作用，由下式给出：

$$\widehat{\alpha}' \oplus \theta' : \mathrm{Bohr}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(C) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(\Delta))$$

使得图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Bohr}(\Lambda) \\ & \overset{\beta_\Lambda}{\nearrow} & \big\downarrow {\scriptstyle \widehat{\alpha}' \oplus \theta'} \\ \Lambda & \xrightarrow[\widehat{\alpha} \oplus \theta_p]{} & \mathrm{Aut}(C) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(\Delta)) \end{array}$$

可交换。

Let

$$B := (C \times \mathrm{Prof}(\Delta)) \rtimes \mathrm{Bohr}(\Lambda)$$

是由 $\widehat{\alpha}' \oplus \theta'$. 定义的半直积。令

$$p : \mathrm{Bohr}(\Delta) \to C = \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0/(N \cap \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0)$$

是商满同态。

- 第四步。我们断言， B与映射 β : $\Gamma \to B$，由下式给出：

$$\beta(\delta, \lambda) = (p(\beta_\Delta(\delta)), \beta_\Lambda(\lambda)) \qquad \text{for all} \quad (\delta, \lambda) \in \Gamma,$$

是 $\Gamma = \Delta \rtimes \Lambda$.的 Bohr 紧化

首先，我们需要验证 β 是一个像稠密的同态。由于 $p \circ \beta_\Delta$ 和 β_Λ 都是像稠密的同态，只需证明

$$\beta(\lambda\delta\lambda^{-1}, e) = ((\widehat{\alpha}' \oplus \theta')(\beta_\Lambda(\lambda))(p(\beta_\Delta(\delta)), e) \qquad \text{for all} \quad (\delta, \lambda) \in \Gamma.$$

确实如此：由于 p 关于 Λ作用是等变的，我们有

$$p(\beta_\Delta(\lambda\delta\lambda^{-1})) = p(\theta_b(\lambda)\beta_\Delta(\delta)) = (\widehat{\alpha}' \oplus \theta')(\beta_\Lambda(\lambda))p(\beta_\Delta(\delta)).$$

接下来，设 π 是 Γ 在有限维向量空间 $V.$ 上的酉表示。根据命题 5，我们必须证明存在 B 在 V 上的酉表示 $\widetilde{\pi}$，使得 $\pi = \widetilde{\pi} \circ \beta$。

考虑将 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 分解为不可约的 $\pi(\Delta)$-不变子空间 V_i；记相应的 Δ. 的不可约表示为 σ_1、.....、σ_s。根据定理1，每个 σ_i 都具有 $\sigma_i = \chi_i \otimes \rho_i$ 的形式，其中 $\chi_i \in \Delta^{\mathrm{Ab}}$ 和 $\rho_i \in \Delta_{\mathrm{finite}}$。

我们将每个 χ_i 分解为乘积 $\chi_i = \chi_i' \chi_i''$，其中 $\chi_i' \in \Delta^{\mathrm{Ab}}$ 为有限阶，且 $\chi_i'' \in \Delta^{\mathrm{Ab}}$ 为无限阶。由于 χ_i' 具有有限像，将 ρ_i 替换为 $\chi_i' \otimes \rho_i$后，我们可以并且将假设每个非平凡的 χ_i 都具有无限阶。

固定 $i \in \{1, \ldots, s\}$. 我们可以将 χ_i和 ρ_i扩展为 Bohr(Δ) 的酉表示；也就是说，我们可以找到 Bohr(Δ) 在 V_i 上的表示 $\widetilde{\chi_i}$ 和 $\widetilde{\rho_i}$，使得 $\chi_i = \widetilde{\chi_i} \circ \beta_\Delta$ 和 $\rho_i = \widetilde{\rho_i} \circ \beta_\Delta$. 根据命题 12， σ_i 的稳定子 Γ_{σ_i} 在 Γ. 中具有有限指数。因此，σ_i 的 Λ-轨道是有限的，这意味着 $\chi_i \in H$；因此， $\widetilde{\chi_i}$ 可因子化为

$$C = \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0 / (N \cap \mathrm{Bohr}(\Delta^{\mathrm{Ab}})_0)$$

并且我们有 $\chi_i = \widetilde{\chi_i} \circ (p \circ \beta_\Delta)$。由于 ρ_i 具有有限像， $\widetilde{\rho_i}$ 可通过 Prof(Δ) 进行分解。因此， $\widetilde{\sigma_i} := \widetilde{\chi_i} \otimes \widetilde{\rho_i}$ 是 Prof($C \times$)在 V_i上的酉表示。令

$$\widetilde{\pi_\Delta} := \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{\sigma_i}.$$

于是， $\widetilde{\pi_\Delta}$ 是 Prof($C \times$)在 V 上的酉表示，满足$\pi|_\Delta = \widetilde{\pi_\Delta} \circ (\beta|_\Delta)$。

另一方面，由于 $\pi|_\Lambda$ 是 Λ的有限维表示，我们可以找到 Bohr(Λ)在 V 上的表示 $\widetilde{\pi_\Lambda}$，使得 $\pi|_\Lambda = \widetilde{\pi_\Lambda} \circ (\beta|_\Lambda)$。对于 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\delta \in \Delta$，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi_\Delta}(\beta(\lambda)\beta(\delta)\beta(\lambda)^{-1}) &= \widetilde{\pi_\Delta}(\beta(\lambda\delta\lambda)^{-1}) \\
&= \pi(\lambda\delta\lambda)^{-1}) \\
&= \pi(\lambda)\pi(\delta)\pi(\lambda)^{-1} \\
&= \widetilde{\pi_\Lambda}(\beta(\lambda))\widetilde{\pi_\Delta}(\beta(\delta))\widetilde{\pi_\Lambda}(\beta(\lambda))^{-1}.
\end{aligned}$$

由于 β 在 B中具有稠密像，因此可得

$$\widetilde{\pi_\Delta}(bab^{-1}) = \widetilde{\pi_\Lambda}(b)\widetilde{\pi_\Delta}(a)\widetilde{\pi_\Lambda}(b)^{-1} \qquad \text{for all} \quad (a,b) \in B$$

因此公式

$$\widetilde{\pi}(a,b) = \widetilde{\pi_\Delta}(a)\widetilde{\pi_\Lambda}(b) \qquad \text{for all} \quad (a,b) \in B$$

定义了 B 在 V上的酉表示，使得 $\pi = \widetilde{\pi} \circ \beta$.

5. Proof of Theorem 3

回顾一下，我们假设 G 是一个连通、单连通且几乎 Q-单的代数群。群 G 可以由一个绝对单的代数群 H 通过所谓的标量限制得到；更准确地说（见 [BT65, 6.21, (ii)]），存在一个数域 K 以及其上的一个绝对单代数群 H K，具有如下性质：G 可以写成（更准确地说，与其 Q-同构于）Q-群 $\mathrm{H}^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathrm{H}^{\sigma_s}$，其中 σ_i's 是将 K 嵌入 C 的不同（非共轭）嵌入。假设 σ_1、.....、σ_{r_1} 是满足 $\sigma_i(K) \subset$ R 的嵌入，我们可以将 G(R) 识别为

$$\mathbf{H}^{\sigma_1}(\mathbf{R}) \times \cdots \times \mathbf{H}^{\sigma_{r_1}}(\mathbf{R}) \times \mathbf{H}^{\sigma_{r_1+1}}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \mathbf{H}^{\sigma_{r_s}}(\mathbf{C}).$$

令 $\mathrm{G_c}$ 为那些 H^{σ_i} 的乘积，其中 H^{σ_i}(R) 是紧的。

现在假设实半单李群 G(R) 不局部同构于形如 $SO(m, 1) \times L$ 或 $SU(m, 1) \times L$ 的群，其中 L 是紧李群。令 $\Gamma \subset$G(Q) 为一个算术子群。

置 $K :=$ $\mathrm{G_c}$(R) $\times$ Prof(Γ)，并令 $\beta\colon \Gamma \to K$ 由 $\beta(\gamma) = (p(\gamma)\ \alpha(\gamma))$ 定义，其中 p : G(R) $\to$ $\mathrm{G_c}$(R) 是典范投影，而$\alpha\colon \Gamma \to$ Prof(Γ) 是与 Prof(Γ) 相关联的映射。我们断言，(K, β) 是 Γ 的 Bohr紧化，

首先，我们证明 β(Γ) 的像是稠密的。注意，$\mathrm{G_c}$(R) 是连通的（参见 [Bor91, (24.6.c)]）。根据强逼近定理（参见 [PR94, 定理 7.12]），p(G(Z)) 在 $\mathrm{G_c}$(R) 中稠密。由于 $\mathrm{G_c}$(R) 是连通的，且 Γ 与 G(Z) 可公度，因此 p(Γ) 在 $\mathrm{G_c}$(R) 中稠密。现在，α(Γ) 在 Prof(Γ) 中稠密，而 Prof(Γ) 是全不连通的。如定理1证明的第一步所述，我们得出 β(Γ) 在 K. 中稠密

设 $\pi\colon \Gamma \to U(n)$ 是 Γ. 的有限维酉表示。那么，根据 Margulis 超刚性定理（参见 [Mar91, 第 VIII 章，定理 B]），[Mor15, 推论 16.4.1]），存在连续同态 ρ_1 : G(R) $\to$ $U(n)$ 和同态 $\rho_2\colon \Gamma \to U(n)$，使得

(i) ρ_2(Γ) 是有限的；(ii) 对所有 $g \in$ G(R) 和 $\gamma \in \Gamma$，$\rho_1(g)\rho_2(\gamma) = \rho_2(\gamma)\rho_1(g)$；(iii) 对所有 $\gamma \in \Gamma$.，$\pi(\gamma) = \rho_1(\gamma)\rho_2(\gamma)$

根据 Segal 和冯·诺伊曼的一项经典结果 [SvN50], ρ_1 可经 $\mathrm{G_c}$(R) 分解，也就是说，$\rho_1 = \rho_1' \circ p$ 对于 $\mathrm{G_c}$(R) 的一个酉表示 ρ_1'。由 (i) 可得，$\rho_2 = \rho_2' \circ \alpha$ 对于 Prof(Γ) 的一个酉表示ρ_2'。此外，(ii) 和 (iii) 表明 $\pi = (\rho_1|_\Gamma) \otimes \rho_2$. 因此，

$\pi = (\rho_1' \otimes \rho_2') \circ \otimes \beta$。由命题 5 可知，$(K, \beta)$ 是 Γ.的 Bohr紧化

6. A few examples

我们计算各种算术群的 Bohr紧化。

(1) 对于整数 $n \geq 1$，$(2n+1)$ 维 Heisenberg群是由形如以下矩阵组成的幂零Q-群 H_{2n+1}

$$m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n & z \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

算术群 $\Gamma = \mathrm{H}_{2n+1}$(整数环) 是 2步幂零的；其换位子群 $[\Gamma, \Gamma]$ 与其中心 $\{m(0, 0, z) : z \in$整数环$\}$ 重合。因此，$\Gamma^{\mathrm{Ab}} \cong$ 整数环^{2n}。根据定理1，我们有

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Bohr}(\mathbf{Z}^{2n})_0 \times \mathrm{Prof}(\Gamma)$$

因此，根据命题 11 和命题16

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong (\prod_{\omega \in \mathfrak{c}} \mathbf{A}/\mathbf{Q}) \times \prod_{p \text{ prime}} \mathbf{H}_{2n+1}(\mathbf{Z}_p).$$

(2) 令 $\mathrm{G} = SL_n$ for $n \geq 3$ or $\mathrm{G} = Sp_{2n}$ for $n \geq 2$. 则 $SL_n(\mathbf{Z})$ 和 $Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ 分别是$SL_n(\mathbf{R})$ 和 $Sp_{2n}(\mathbf{R})$ 中的非紧算术格。因此，由推论 4 可得，$\mathrm{Bohr}(SL_n(\mathbf{Z})) = \mathrm{Prof}(SL_n(\mathbf{Z}))$，且 $\mathrm{Bohr}(Sp_{2n}(\mathbf{Z})) = \mathrm{Prof}(Sp_{2n}(\mathbf{Z}))$。由于 $SL_n(\mathbf{Z})$ 和 $Sp_{2n}(\mathbf{Z})$ 具有同余子群性质，因此

$$\mathrm{Bohr}(SL_n(\mathbf{Z})) \cong \prod_{p \text{ prime}} SL_n(\mathbf{Z}_p) \cong SL_n(\mathrm{Prof}(\mathbf{Z}))$$

类似地

$$\mathrm{Bohr}(Sp_{2n}(\mathbf{Z})) \cong \prod_{p \text{ prime}} Sp_{2n}(\mathbf{Z}_p) \cong Sp_{2n}(\mathrm{Prof}(\mathbf{Z})).$$

(3) 群 $\Gamma = SL_2$(整数环$[\sqrt{2}]$) 嵌入为 $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ 中的非余紧算术格。因此，根据推论4，我们有

$$\mathrm{Bohr}(SL_2(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])) \cong \mathrm{Prof}(SL_2(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])).$$

此外，由于 Γ 具有同余子群性质（参见[Ser70, 推论 3]），可得

$$\mathrm{Bohr}(SL_2(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])) \cong \mathrm{Cong}(SL_2(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])).$$

（4）对于 $n \geq 4$，考虑二次型

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - \sqrt{2}x_n^2 - \sqrt{2}x_{n+1}^2$$

保持 q 不变的无模（$n+1$）×($n+1$)-矩阵所成的群 G $= SO(q)$ 是数域 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. 上的一个几乎单代数群。G 中 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$- 有理点的子群 $\Gamma = SO(q, \mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ 通过映射嵌入为半单实李群 $SO(n+1) \times SO(n-1, 2)$ 的一个余紧格

$$SO(q, \mathbf{Q}[\sqrt{2}]) \to SO(n+1) \times SO(n-1, 2),\ \gamma \mapsto (\gamma^\sigma, \gamma),$$

其中，σ 是由 $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ 给出的 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ 的域自同构；因此，$SO(n+1) \times SO(n-1, 2)$ 是 Q-群 $R_{\mathbf{Q}[\sqrt{2}]/\mathbf{Q}}$(G) 的实点群，该 Q-群是通过从 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$-群 G 进行标量限制得到的。注意，由于 G 是几乎 Q-单的，$R_{\mathbf{Q}[\sqrt{2}]/\mathbf{Q}}$(G) 是几乎 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$-单的。根据定理 3，我们有

$$\mathrm{Bohr}(SO(q, \mathbf{Z}[\sqrt{2}])) \cong SO(n+1) \times \mathrm{Prof}(SO(q, \mathbf{Z}[\sqrt{2}]).$$

(5) 对于 $d \geq 2$，设 D 是有理数域 Q 上的一个中心除代数，并且 $D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ 同构于实 $d \times d$ 阶矩阵代数 $M_d(\mathbf{R})$。存在一个子环 $\mathcal{O}$，它是 D 中的一个 Z-格（即所谓的 D中的整序）。存在一个嵌入 $\varphi: D \to M_d(\mathbf{R})$，使得 $\varphi(SL_1(D) \subset SL_d(\mathbf{Q})$，且 $\Gamma := \varphi(SL_1(\mathcal{O})$ 是 $SL_d(\mathbf{R})$ 中的一个算术余紧格，其中 $SL_1(D)$ 是 D中范数为一的元素构成的群；关于这些内容，参见 [Mor15, §6.8.i]。对于 $d \geq 2$，我们有

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma) \cong \mathrm{Prof}(\Gamma).$$

因此，这是一个单实李群中的余紧格 Γ 的例子；对于该格，不存在像为无限像的同态 $\Gamma \to U(n)$。这类例子的存在已在 [Mor15, (16.4.3)] 中提及

(6) 对于 $n \geq 3$，令 Γ 为由 $SL_n(\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{R}^n$. 上的通常线性作用诱导的半直积 $\mathbf{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbf{Z})$。$\widehat{\ }$ $SL_n(\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}^n \cong \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 上的对偶作用由下式给出

$$SL_n(\mathbf{Z}) \times \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n,\ (g, x + \mathbf{Z}^n) \mapsto {}^t g x + \mathbf{Z}^n.$$

众所周知且易于证明，$\mathbf{Z}^n$ 中 $SL_n(\mathbf{Z})$-$\widehat{\ }$周期轨道的子群对应于 $\mathbf{Q}^n/\mathbf{Z}^n$，也就是有限像特征。由定理2可知

$$\mathrm{Bohr}(\mathbf{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbf{Z})) \cong \mathrm{Bohr}(SL_n(\mathbf{Z}))_0 \times \mathrm{Prof}(\mathbf{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbf{Z})).$$

因此，对于 $n \geq 3$，我们有

$$\mathrm{Bohr}(\mathbf{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbf{Z})) \cong \mathrm{Prof}(\mathbf{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbf{Z})) \cong \prod_{p \text{ prime}} \mathbf{Z}_p \rtimes SL_n(\mathbf{Z}_p).$$

References

[AK43] Hirotada Anzai 和 Shizuo Kakutani，《局部紧阿贝尔群的 Bohr 紧化 I》，《东京帝国学院纪要》19（1943年），476–480。↑2[BMS67] H. Bass、J. Milnor 和 J.-P. Serre，《SL_n ($n \geq 3$) 和 Sp_{2n}($n \geq 2$) 的同余子群问题的解》，高等科学研究所数学出版物 33（1967年），59–137。↑5[BHV08] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette，《Kazhdan性质（T）》，《新数学专著》，第11卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008年。↑10[BH] B. Bekka 和 P. de la Harpe，《群的酉表示、对偶与特征》，《数学研究生教程》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。↑2，7，9，10，11[Boh25a] H. Bohr，《几乎周期函数理论》，《数学学报》45（1925年），第1期，29–127（德文）。↑2[Boh25b] Harald Bohr，《几乎周期函数理论》，《数学学报》46（1925年），第1–2期，101–214（德文）。↑2[Bor91] A. Borel，《线性代数群》，第二版，《数学研究生教材》，第126卷，施普林格出版社，纽约，1991年。↑4，23[Bor63] ———，《数域上阿代尔群的若干有限性性质》，高等科学研究所数学出版物 16（1963年），5–30。↑16[BT65] A. Borel 和 J. Tits，《约化群》，高等科学研究所数学出版物 27（1965年），55–150。↑23[BHC62] A. Borel 和 Harish-Chandra，《代数群的算术子群》，《数学年刊》（第2辑）75（1962年），485–535。↑3，4，5，16[Bou71] N. Bourbaki，《数学原理：一般拓扑学，第1至4章》，Hermann，巴黎，1971年。↑17，19[Che51]C. Chevalley，《两个算术定理》，《日本数学会杂志》3（1951年），36–44（法文）。↑5[Dix77] J. Dixmier，《-代数》，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977年。↑2[DK18] C. Drutu 和 M. Kapovich，《几何群论》，《美国数学会讨论班出版物》，第63卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。↑15[FH06] J. Franks 和 M. Handel，《群在曲面上的作用中的扭曲元素》，《杜克数学杂志》131（2006年），第3期，441–468。↑13[GS91] S. M. Gersten 和 H. B. Short，《双自动群的有理子群》，《数学年刊》（第2辑）134（1991年），第1期，125–158。↑13

[BGS85] W. Ballmann、M. Gromov 和 V. Schroeder，《非正曲率流形》，《数学进展》，第61卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1985年。↑13，15[HK01] J. E. Hart 和 K. Kunen，《非阿贝尔群的 Bohr 紧化》，《第16届一般拓扑学及其应用暑期会议论文集》（纽约），2001/02，第593–626页。↑2，10[HR79] E. Hewitt 和 K. A. Ross，《抽象调和分析：第I卷》，第2版，第115卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1979年。↑12，18，19[Hol64] P. Holm，《论 Bohr 紧化》，《数学年刊》156（1964年），34–46。↑2[LMR00] A. Lubotzky、S. Mozes 和 M. S. Raghunathan，《半单群格上的文字度量与黎曼度量》，高等科学研究所数学出版物 91（2000年），5–53（2001年）。↑14[Mar91] G. A. Margulis，《半单李群的离散子群》，施普林格出版社，柏林，1991年。MR 1090825 ↑23[Mos56]G. D. Mostow，《代数群的完全可约子群》，《美国数学杂志》78（1956年），200–221。↑3[vN34] J. v. Neumann，《群中的几乎周期函数 I》，《美国数学会会刊》36（1934年），第3期，445–492。MR1501752 ↑2[PR94] V. Platonov 和 A. Rapinchuk，《代数群与数论》，《纯粹与应用数学》，第139卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1994年。↑5，23[Rag76] M. S. Raghunathan，《论同余子群问题》，高等科学研究所数学出版物 46（1976年），107–161。↑5，16[Rag72] ———，《李群的离散子群》，施普林格出版社，纽约-海德堡，1972年。↑2，17[RZ00] L. Ribes 和 P. Zalesskii，《逆有限群》，第40卷，施普林格出版社，柏林，2000年。↑2，21[SvN50] I. E. Segal 和 J. von Neumann，《关于半单李群酉表示的一个定理》，《数学年刊》（第2辑）52（1950年），509–517。↑23[Ser70] J.-P. Serre，《SL2 的同余群问题》，《数学年刊》（第2辑）92（1970年），489–527（法文）。↑25[Tit72] J. Tits，《线性群中的自由子群》，《代数杂志》20（1972年），250–270。↑14[Tit81] J acques Tits，《多项式增长群》（据 M. Gromov 等），《布尔巴基讨论班》，1980/81年卷，《数学讲义》，第901卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1981年，第176–188页。↑15[Weh73]B. A. F. Wehrfritz，《无限线性群：无限矩阵群的群论性质概述》，施普林格出版社，纽约-海德堡，1973年。↑17[Wei40] A. Weil，《拓扑群上的积分及其应用》，Hermann & Cie，巴黎，1940年。↑2[Mor15] D. Witte Morris，《算术群导论》，Deductive Press，2015年。↑5，23，25

Bachir Bekka, Univ Rennes, CNRS, IRMAR–UMR 6625, Campus Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France电子邮件地址：bachir.bekka@univ-rennes1.fr