arXiv:2304.09081v2 [math.CV] 7 Aug 2023

# 增长空间中的移位不变子空间与有限熵集

Adem Limani

Abstract. 我们研究由主函数 $w$ 所确定的复平面单位圆盘上的增长空间中的若干类移位不变子空间，其中包括经典的 Korenblum 增长空间。我们的主要结果完整描述了由增长空间中的 Nevanlinna 类函数生成的移位不变子空间，并证明这些子空间属于 Beurling 型。特别是，我们的结果推广了著名的 Korenblum-Roberts 定理。研究表明，奇异内函数在我们的描述中起着决定性作用；该描述通过与单位圆盘内解析函数的边界零点集相关的载体集上的某些 $w$-熵条件来表述，而这些解析函数在单位圆上的连续模不超过 $w$ 。此外，这使我们能够确立由内函数生成的移位不变子空间与上述解析函数空间包含于相应模型空间之间的密切联系。

## 1. Introduction

1.1. **Basic notions.** Let $w$ be a weight, that is, a continuous non-decreasing function defined on the unit-interval $[0,1]$ with $w(0) = 0$ and denote by $\mathcal{G}_w$ the corresponding growth space of analytic functions $g$ in the unit disc $\mathbb{D}$ satisfying

$$\lim_{|z|\to 1-} w(1-|z|)g(z) = 0.$$

The space $\mathcal{G}_w$ is obtained by taking the closure of analytic polynomials in the norm

$$\|g\|_{\mathcal{G}_w} := \sup_{z\in\mathbb{D}} w(1-|z|)|g(z)| < \infty,$$

因此，赋予上述范数后，集合 $\mathsf{G}_w$ 成为一个可分巴拿赫空间，解析多项式在其中张成稠密线性子空间。增长空间的典型例子包括经典的 Korenblum 增长空间，它们对应于形如 $w(t) = t^\alpha$ with$\alpha > 0$ 的权函数。关于这些空间的详细论述，请参阅综述 [20]。我们用 $H^\infty$ 表示 $\mathbb{D}$ 中有界解析函数构成的代数，并赋予其上确界范数 $\|f\|_{H^\infty} = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$。不难验证， $H^\infty$ 是 $\mathsf{G}_w$ 的乘子代数，也就是说，对于任意 $g \in \mathsf{G}_w$， $fg \in \mathsf{G}_w$ 当且仅当 $f \in H^\infty$。令 $\mathsf{N}$ 表示由 $\mathbb{D}$ 中满足以下条件的解析函数 $f$ 构成的 Nevanlinna 类

$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{D}} \log^+|f(r\zeta)|dm(\zeta) < +\infty,$$

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona 08193
*E-mail address*: AdemLimani@mat.uab.cat.
*Date*: August 8, 2023.

其中 $dm$ 表示单位圆 $\partial\mathbb{D}$ 上归一化的勒贝格测度。一个标准事实是，任何属于 N 的函数 $f$ 都具有唯一的 Herglotz-Nevanlinna 因子分解 $f = Of(S_{\mu_1}/S_{\mu_2})B_\Lambda$，其中 $Of$ 是 $f$ 的外因子，其定义为

$$\mathcal{O}_f(z) = \exp\left(\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log|f(\zeta)|dm(\zeta)\right), \qquad z\in\mathbb{D}$$

其中 $\mu_k$、 $k=1$ 是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的互相奇异的正有限Borel测度，二者都与 $dm$ 互相奇异，并诱导出相应的奇异内函数:

$$S_{\mu_k}(z) = \exp\left(-\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\mu_k(\zeta)\right) \qquad z\in\mathbb{D}, \qquad k=1,2,$$

其中 $B_\Lambda$ 表示 Blaschke 乘积

$$B_\Lambda(z) = e^{i\gamma}\prod_{\lambda\in\Lambda}\frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{\lambda-z}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad z\in\mathbb{D},$$

对应于 Blaschke序列 $\Lambda\subset\mathbb{D}$，该序列编码了 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 中的零点，并满足

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\lambda|)<\infty,$$

且 $\gamma$ 是实值常数。在 $\mathbb{D}$ 中的有界解析函数 $\Theta$ 若在 $dm$ 中几乎处处的每一点 $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ 都具有模一径向极限 $\lim_{r\to1-}|\Theta(r\zeta)|=1$，则称其为内函数；所有内函数都具有如下形式: $\Theta = B_\Lambda S_\mu$，其中 $\Lambda$ 是某个 Blaschke序列， $\mu$ 是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上且与 $dm$ 互相奇异的正有限测度。为简便起见，我们沿用上述记号表示 N 中的 Herglotz-Nevanlinna 因子及其对应因子；关于这一理论的更多信息，请参阅 [12] 中的综述。给定一个在 $\mathbb{D}$ 中解析的函数 $g$，我们记 $M_z$ 为移位算子 $M_z(g)(z) = zg(z)$，它对应于将 $g$ 的泰勒系数向前移位一个单位。若 Banach空间 $X$ 中由 $\mathbb{D}$ 上的解析函数组成的闭线性子空间 V 满足 $M_z$V $\subseteq$V，则称其为移位不变的（或 $M_z$-不变的）。令 $H^2\subset$N 表示由函数组成的 Hardy 空间

$$\|f\|_{H^2}^2 := \sup_{0<r<1}\int_{\partial\mathbb{D}}|f(r\zeta)|^2dm(\zeta)<\infty.$$

1.2. **Previous work.** The celebrated Beurling Theorem on the function theoretical description of shift invariant subspaces in $H^2$ asserts that any shift invariant subspace $\mathcal{V}\subseteq H^2$ is for the form

$$\mathcal{V} = \Theta_{\mathcal{V}}H^2 := \left\{\Theta_{\mathcal{V}}f : f\in H^2\right\}$$

for a uniquely associated inner function $\Theta_{\mathcal{V}}$. Beurling's elegant description of shift invariant subspaces has been an exemplary guide towards investigating the structures of $M_z$-invariant subspaces on various other analytic function spaces, such as the Bergman spaces, Korenblum growth spaces and the Dirichlet spaces, for instance see [24], [2], [32] and further sources therein. In the context of growth spaces, it is known that the structure of $M_z$-invariant subspaces in $\mathcal{G}_w$ is very complicated, as they can be of arbitrary large index, see [7].

我们的主要目标是描述 G$_w$ 中一类重要的单生成 $M_z$-不变子空间。为此，我们用 $[g]_{\mathcal{G}_w}$ 表示包含 G$_w$ 中元素 $g$ 的最小闭 $M_z$- 不变子空间，并将其称为由 $g$ 生成的 $M_z$- 不变子空间。若函数 $g$ 满足 $[g]_{\mathcal{G}_w}$ =G$_w$，则称其在 G$_w$ 中是循环的。换言之，若存在解析多项式序列 $\{Q_n\}_n$ 使得

$$\lim_n\|gQ_n-1\|_{\mathcal{G}_w}=0.$$

事实上，由于解析多项式在 $\mathsf{G}_w$ 中稠密， $g$ 在 $\mathsf{G}_w$ 中是循环的，当且仅当 $1 \in [g]_{\mathcal{G}_w}$。一个常用的观察结果是， $[g]_{\mathcal{G}_w}$ 实际上等于 $gH^\infty$ 在 $\mathsf{G}_w$ 范数下的闭包，因此我们可以用有界解析函数序列代替上述解析多项式 $\{Q_n\}_n$。H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu 在 [19], 中的工作对由 Nevanlinna类函数生成的 Bergman空间中的移位不变子空间作出了完整描述，参见定理 A。在 Korenblum 增长空间的背景下，他们的结果可以表述如下。设 $w(t) = t^\alpha$，其中 $\alpha > 0$ 是主函数，且 $f \in \mathsf{G}_w \cap \mathsf{N}$ 具有 Herglotz-Nevanlinna 分解 $f = \mathsf{O}f(S_\mu/S_\nu)B_\Lambda$。那么，$\mathsf{G}_w$ 中由 $f$ 生成的 $M_z$-不变子空间属于 Beurling 型，也就是说，它由刻画 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 中零点的 Blaschke序列 $\Lambda$ 以及正奇异博雷尔测度 $\mu_f \le \mu$ 唯一确定；后者是 $\mu$ 中支撑在 Beurling-Carleson 集的可数并上的部分，也就是说，它支撑在满足以下条件的零勒贝格测度闭集 $E \subset \partial\mathbb{D}$ 的可数并上

$$\sum_k m(I_k) \log m(I_k) > -\infty$$

其中 $\{I_k\}_k$ 是 $\partial\mathbb{D} \setminus E$的连通分支。更确切地说，由 $f$生成的 $M_z$-不变子空间等于 $[f]_{\mathcal{G}_w} = \left[B_\Lambda S_{\mu_f}\right]_{\mathcal{G}_w}$，而由 $BS_{\mu_f}$ 生成的移位不变子空间满足以下特征性的持久性:

$$[f]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathcal{N}_+ \subseteq B_\Lambda S_{\mu_f} \mathcal{N}_+. \tag{1}$$

这里，$\mathsf{N}_+$ 表示N中具有如下形式的（唯一）Herglotz-Nevanlinna 表示式的函数所构成的斯米尔诺夫类: $f = \mathsf{O}_f S_\mu B_\Lambda$。事实上，他们的结果是通过广义 Nevanlinna 表示式来表述 Korenblum 增长空间中的函数，并使用所谓的前测度这一概念；该概念最初由 B. Korenblum 在 [23], [24]的开创性工作中引入。

**1.3.** 主要结果。本文旨在将上述结果推广到与衰减速度慢于多项式的权函数 $w$ 相关的增长空间 $\mathsf{G}_w$。在 $[0,1]$ 上定义的连续、非递减且次可加的函数 $w$，若满足 $w(0) = 0$，则称为连续模。给定 $\partial\mathbb{D}$ 上的一个正有限连续（无原子）Borel 测度 $\nu$，定义

$$\omega_\nu(\delta) := \{\nu(I) : m(I) \le \delta,\ \arcs I \subseteq \partial\mathbb{D}\},$$

很容易验证这是一个连续模，通常称为 $\nu$ 的连续模。反过来，也可以证明，任意连续模都可表示为 $\omega_\nu$，其中 $\nu$ 是某个正的有限连续 Borel 测度（例如参见 [5]）。注意，如果 $w$ 是一个连续模，那么只有当 $0 < \lambda \le 1$ 时， $w^\lambda$ 才需要是连续模；因此，为弥补这种不稳定性，我们作出如下定义。

定义 **1.1.** 若单位区间 $[0,1]$ 上的连续非递减函数 $w$ 满足 $w(0) = 0$，且存在一个数 $\lambda = \lambda(w) > 0$，使得 $w^\lambda$ 是一个连续模，则称其为主函数。

因此，对于任意 $\lambda > 0$， $w$ 是主函数，当且仅当 $w^\lambda$ 是主函数。我们还需要引入一个推广经典 Beurling-Carleson 集的概念。给定一个主函数 $w$，我们称一个勒贝格测度为零的闭集 $E \subset \partial\mathbb{D}$ 具有有限 $w$-熵，当且仅当

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \log w\left(\mathbf{dist}(\zeta, E)\right) dm(\zeta) > -\infty \tag{2}$$

where $\mathbf{dist}(\zeta, E)$ denotes the unit-normalized distance from $\zeta$ to $E$ along $\partial\mathbb{D}$. An important observation is that any closed subset of finite $w$-entropy again has finite $w$-entropy, and that

sets of finite $w$-entropy are closed under the formation of finite unions. Indeed, the later follows from the observation

$$\mathbf{dist}(\zeta, \cup_{k=1}^{n} E_k) = \min_{1\le k\le n} \mathbf{dist}(\zeta, E_k), \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

给定一个主函数 $w$ 和一个定义在 $\partial\mathbb{D}$上的正有限奇异博雷尔测度 $\mu$ ，我们考虑以下量

$$\sup\{\mu(E) : E \subset \partial\mathbb{D} \text{ of finite } w\text{-entropy}\}.$$

根据定义，我们可以选取一列集合 $\{E_n\}_n$ ，其中每个 $E_n$ 都具有有限的 $w$-熵；不妨设该序列递增，并使得 $\mu(E_n)$收敛于上述上确界。容易验证， $\mu$ 可按照下式唯一分解（除去 $\mu$-零集）：

$$\mu = \mu_P + \mu_C \tag{3}$$

其中 $\mu_P$ 集中在 $\cup_n E_n$上，而 $\cup_n E_n$是有限 $w$-熵集合的可数并； $\mu_C$不赋予任何有限 $w$-熵集合正测度。接下来，我们对主函数 $w$作如下假设：

$(A_1)$

$$\log\frac{1}{w(t)} \asymp \log\frac{1}{w(t^2)}, \qquad 0 < t < 1.$$

这里， $A \asymp B$ 的含义是存在一个常数 $c > 0$ ，使得 $c^{-1}B \le A \le cB$ 成立。注意，上述条件实质上保证主函数 $w$ 不会过快地衰减至零；满足上述条件的主函数例子包括 $t^c$、$\log^{-c}(e/t)$、$(\log|\log(e/t)|)^{-c}$、$(\log|\log|\log(e/t)||)^{-c}$、.....、 $c > 0$ ，以及任意多个此类对数复合。因此，条件（$A_1$）实质上并不限制 $w$ 趋于零的速度。需要指出的是，为了使论述清晰，我们决定仅将注意力限制在主函数 $w$上；但经过某些修改，我们的结果仍然适用于按 $w(t) = \exp(-\alpha\log^{\beta}(e/t))$的速度衰减的权函数，其中 $\alpha$、$\beta > 0$，因为它们同样满足条件（$A_1$）。关于这些问题的进一步讨论将在第4节中给出。现在我们表述主要结果，该结果完整描述了由Nevanlinna类N中的函数生成的 $G_w$ 中的移位不变子空间。

**Theorem 1.1.** *Let $w$ be a majorant satisfying $(A_1)$ and let $f$ be a function in $\mathcal{G}_w \cap \mathcal{N}$ with Herglotz-Nevanlinna factorization $f = \mathcal{O}_f(S_\mu/S_\nu)B_\Lambda$ and let $\mu$ be decomposed according to (3). Then the following statements hold:*

*(i) The shift invariant subspace generated by $f$ in $\mathcal{G}_w$ is completely determined by the corresponding pair $(\Lambda, \mu_P)$. More precisely, we have $[f]_{\mathcal{G}_w} = [B_\Lambda S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w}$ where the following permanence property holds:*

$$[f]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathcal{N}_+ \subseteq B_\Lambda S_{\mu_P}\mathcal{N}_+.$$

*(ii) The singular inner function $S_\nu$ is cyclic in $\mathcal{G}_w$.*

*In particular, $f$ is cyclic in $\mathcal{G}_w$ if and only if it is of the form $f = \mathcal{O}_f S_{\mu_C}/S_\nu$.*

我们指出，(*i*) 断言，任何由函数$f$ 在 $G_w$ 中生成的 $M_z$-不变子空间，其中该函数属于 $N \cap G_w$ 且具有上述陈述中的 Nevanlinna 分解，都完全由相应的对 $(\Lambda, \mu_P)$ 决定。该对由相应的 Blaschke序列 $\Lambda$ 和关联的奇异测度 $\mu_P$ 组成，其中后者是集中在具有有限 $w$-熵的集合的可数并上的 $\mu$ 的“最大”部分。用 [24], 的术语来说，这样

的子空间被称为 Beurling 型，因此我们的结果将其中的定理 A 扩展到了增长空间 $\mathsf{G}_w$ （对应于主函数 $w$）的情形。诚然， [24] 中的刻画是通过使用前测度这一概念，以 Korenblum 增长空间的广义 Nevanlinna 因子分解来表述的；对于某些 Shannon 型主函数 $w$ ，在 $\mathsf{G}_w$ 的背景下也可以进行类似的描述（见 [26] 第 543 页的定理 1，以及 [18] 中的详细说明），所采用的证明方法与 [19] 中的方法类似。我们的结果还断言，出现在 $\mathsf{G}_w \cap \mathsf{N}$ 中元素分母里的奇异内因子 $S_\nu$ 必须在 $\mathsf{G}_w$ 中是循环的。这一观察和陈述 $(ii)$ 此前已在 [4] 和 [8] 中的伯格曼空间背景下出现。作为定理 1.1 的推论，我们在 $\mathsf{G}_w$ 的背景下得到以下 Korenblum-Roberts 定理的推广。

推论 1.2. 设 $w$ 是满足 $(A_1)$ 的主函数，并设 $\mu$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的正有限 Borel 奇异测度，按 (3) 分解。则对于任意 $H^\infty$ 函数 $f$，其 Herglotz-Nevanlinna 分解为 $f = \mathsf{O}_f S_\mu B_\Lambda$ ，以下二分结论成立：

(i) 内函数 $\Theta_0 := B_\Lambda S_{\mu_P}$ 生成 $\mathsf{G}_w$ 的一个真 $M_z$-不变子空间，并满足持久性：

$$[\Theta_0]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathcal{N}_+ \subseteq \Theta_0 \mathcal{N}_+.$$

(ii) $\mathsf{O}_f S_{\mu_C}$ 在 $\mathsf{G}_w$ 中是循环的。

此外，由 $f$ 生成的移位不变子空间完全由相应的配对 $(\Lambda, \mu_P)$ 决定，且等于 $[B_\Lambda S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w}$。

对于满足 $\alpha > 0$ 的权函数 $w(t) = t^\alpha$ ，著名的 Korenblum-Roberts 定理仍然成立，参见 [33] 中的定理 2 以及 [25] 中的主要结果。我们指出，关于 $(ii)$ 中循环性的结果实际上适用于任意主函数 $w$ ，不要求存在 $(A_1)$。H. Shapiro 很早以前便证明了任意增长空间 $\mathsf{G}_w$ 中都存在循环奇异内函数，见 [34] （关于这一方向近期的进一步研究，另见 [29] ）；因此，我们通过对 $\mathsf{G}_w$ 中所有循环奇异内函数进行分类，补全了这一图景。事实上，以下观察是推论 1.2 的结果：函数 $f \in H^\infty$ 在 $\mathsf{G}_w$ 中是循环的，当且仅当 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 中没有零点，且其相应的奇异内因子不对任何有限熵集赋予正测度。注意，对于任意 $\lambda > 0$， $E$ 是有限 $w$-熵集当且仅当 $E$ 是有限 $w^\lambda$-熵集，因此我们的循环性结果也适用于函数空间的情形：这些函数 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析，并配备如下形式的 Bergman 型度量

$$\left( \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p w(1-|z|) dA(z) \right)^{\min(1,1/p)}$$

for any $0 < p < \infty$. Furthermore, it can also be phrased in the setting of

$$\mathcal{G}_w^\infty := \bigcup_{\lambda>0} \mathcal{G}_{w^\lambda}$$

赋予局部凸归纳极限拓扑，即使每个增长空间 $\mathsf{G}_{w^\lambda}$, $\lambda > 0$ 连续嵌入 $\mathsf{G}_w^\infty$ 的最大局部凸拓扑。我们提及，关于内函数循环性的一种结果此前已在 [18] 中出现过，当时对 $w$ 采用了几项不同且限制更严格的正则性假设，并使用了源自 B. Korenblum 在 [23], 中工作的不同方法；事实上，这些方法使作者能够描述内函数以外的循环向量。此外，关于由泰勒系数增长限制定义的某些加权 Bergman 空间中奇异内函数的循环性，此前也在 [9], 的研究中得到探讨，其中熵的类似概念起着决定性作用。本文的新颖之处在于，我们只要求一个

关于 $w$ 的非常温和的假设，这足以涵盖衰减速率任意缓慢的主函数 $w$ 。对于以某种指数速率衰减的主函数，情况则完全不同：熵型概念不再在决定相应增长空间中奇异内函数的循环性方面发挥主要作用。关于这一问题的更多细节，请参阅 [14], [6] 中的近期研究及其中的参考文献。

1.4. 模型空间的应用。接下来，我们将把关于由内函数 $\Theta$ 在 $G_w$ 中生成的移位不变子空间的描述应用于说明：函数属于相关模型空间 $K_\Theta$ 与其在 $\partial\mathbb{D}$上具有某种 $w$-光滑性之间存在密切联系。给定一个内函数 $\Theta$，我们回顾相应的模型空间 $K_\Theta$ 定义为 Hardy 空间 $H^2$中 $\Theta H^2 = \{\Theta h : h \in H^2\}$的正交补，即

$$K_\Theta := H^2 \ominus \Theta H^2.$$

作为 Beurling定理的推论，模型空间是 $H^2$ 上伴随移位 $M_z^*$ 的唯一闭不变子空间，并且在复函数论和算子理论中发挥着基础性作用，参见 [12]。给定一个连续模 $w$，我们用 $A_w$ 定义由 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数 $f$ 组成的 Banach空间，这些函数可连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$ ，且其连续模在 $\partial\mathbb{D}$上受 $w$ 控制，并赋予范数

$$\|f\|_{\mathcal{A}_w} := \|f\|_{H^\infty} + \sup_{\xi,\zeta\in\partial\mathbb{D}} \frac{|f(\xi) - f(\zeta)|}{w(|\xi - \zeta|)}. \tag{4}$$

换言之，$A_w := H^\infty \cap C_w(\partial\mathbb{D})$，其中 $C_w(\partial\mathbb{D})$ 表示定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上、连续模不劣于 $w$ 的连续函数空间。由 [36] 中的工作可知，$A_w$ 中的函数实际上在整个 $\mathbb{D}$ 上的连续模都不超过 $w$ （简短证明另见 [10]）。与经典的 Beurling-Carleson 集是 $\mathbb{D}$ 中解析函数的边界零点集、且这些函数可光滑延拓至 $\partial\mathbb{D}$ 的情形类似（参见 [11] 和 [37]），有限熵集对应于 $\mathbb{D}$ 中有界解析函数的边界零点集；这些函数可连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$，且在 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续模不超过 $w$ 。参见 [35] 以及下文（4）中 $A_w$ 的定义。B. Malman 最近在[29] 中证明，对于任意连续模 $w$，都存在一个奇异内函数 $\Theta$ ，使得 $A_w \cap K_\Theta = \{0\}$。这一结果应与 A.B. Aleksandrov 在 [1] 中著名的稠密性定理形成对照（略有改进的版本另见 [27] ）：该定理断言，在任意模型空间 $K_\Theta$ 中，可连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$ 的函数总是在 $K_\Theta$ 中稠密。当 $w(t) = t^\alpha$ ，且 $0 < \alpha < 1$ 具有 Hölder 连续性时，K. Dyakonov 和 D. Khavinson 证明，交集 $A_w \cap K_\Theta$ 非平凡，当且仅当 $\Theta$ 在 $\mathbb{D}$ 中有零点，或与之相关的奇异测度在 $\partial\mathbb{D}$ 上的某个 Beurling-Carleson 集上取正值，参见 [13]。最近，作者与 B. Malman 合作证明，$A_w \cap K_\Theta$ 在 $K_\Theta$ 中稠密，当且仅当与 $\Theta$ 对应的奇异测度集中在可数个 Beurling-Carleson 集的并上，参见 [28]。

To this end, we make the following assumption on the modulus of continuity $w$: there exists a constant $0 < \alpha < 1$, such that $w^{1+\alpha}$ is a modulus of continuity and

$(A_2)$

$$\int_0^1 w^\alpha(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

换言之，我们实质上要求连续模 $w$ 略微优于 Dini连续。除了 H¨older 权函数类之外，这也包括具有

对数衰减的权函数，其典型例子为 $w(t) = \log^{-c}(e/t)$，其中 $c > 1$ 任意。在这一附加假设下，我们得到模型空间的如下完整结构定理，它推广了文献 [28] 中的主要结果。

定理 1.3。设 $w$ 是满足条件（$A_2$）的连续模，并设 $\Theta = BS_\mu$ 是一个内函数，其中 $B$ 表示其 Blaschke 因子。则以下陈述成立：

存在性：当且仅当 $\Theta = S_{\mu_C}$ 时，$\mathrm{A}_w \cap K_\Theta = \{0\}$。

稠密性：当且仅当 $\Theta = BS_{\mu_P}$ 时，$\mathrm{A}_w \cap K_\Theta$ 在 $K_\Theta$ 中稠密。

此外，$\mathrm{A}_w \cap K_\Theta$ 在 $K_\Theta$ 中的闭包等于 $K_{\Theta_P}$，其中 $\Theta_P = BS_{\mu_P}$。

上述结果结合推论 1.2，确认了由 $\mathrm{G}_w$ 中的内函数 $\Theta$ 生成的移位不变子空间、模型空间 $K_\Theta$ 中 $\mathrm{A}_w$- 函数的包含关系，以及用 $w$- 熵描述的 $\mathrm{A}_w$- 函数的边界零点集之间存在密切联系。我们指出，对于缺乏诸如（$A_2$）这类 Dini 型附加正则性条件的连续模 $w$，会遇到若干主要困难。首先，$C_w$（$\partial\mathbb{D}$）中函数的 Cauchy 投影在 $\partial\mathbb{D}$ 上未必连续；其次，相应的类 $\mathrm{A}_w$ 不再能用伪连续延拓或导数增长条件来刻画。第三，所谓的“$K$-性质”并不成立；该性质断言，类 $\mathrm{A}_w$ 在具有有界余解析符号的任意 Toeplitz 算子作用下保持不变。这给在 $w$ 为一般连续模的情形下构造属于某些模型空间的 $\mathrm{A}_w$ 中函数造成了根本障碍。关于这些问题的进一步讨论，读者可参阅 [17] 及其中的参考文献，以及下文引理 5.3 的证明。我们指出，利用 [27], 中的定理 1.1，还可以推出定理 1.3 的 $H^p$- 版本。

1.5. 本文概述。本文的组织如下。第 2 节致力于建立关于循环性的结果，其核心是将 J. Roberts 在 [33] 中发展的技术推广到我们的更一般情形，并巧妙地运用奇异测度的分解以及涉及 Corona 定理的迭代逼近方案。第 3 节中，我们推广 [4], 的工作中发展出的一套方法，通过嵌入到某些 Privalov 星形域上的 Hardy 空间，对 $\mathrm{G}_w$ 中的移位不变子空间进行描述。推论 1.2 和定理 1.1 的证明将在第 4 节中按此确切顺序给出，其中最后一个小节还包含一些进一步的推广和建议的研究方向。第 5 节致力于证明定理 1.3；在该节中，我们考察 $\mathrm{G}_w$ 中移位不变子空间的 Cauchy 对偶重述，并结合关于 Cauchy 投影如何扭曲连续模的结果，以及 N. A. Shirokov 对 $\mathrm{A}_w$ 中函数的内因子和边界零点集的描述。

1.6. **Acknowledgements.** This work has benefited profoundly from the insightful discussions with Oleg Ivrii, Artur Nicolau and Bartosz Malman, leading to a substantial improvement of the previous version of this manuscript. Furthermore, I would also like to thank Omar El-Fallah for bringing to my attention a couple of important references.

## 2. Cyclic singular inner functions

In this section, we shall derive the following result on cyclic singular inner functions in $\mathcal{G}_w$.

**Theorem 2.1.** *Let $w$ be a majorant and $\mu$ be a positive finite singular Borel measure on $\partial\mathbb{D}$. Then $S_{\mu_C}$ is cyclic in $\mathcal{G}_w$.*

Observe that the cyclicity theorem holds for any majorant $w$. Most of our efforts in this section will be devoted to extending the work developed by J. Roberts in [33] to the general setting of growth spaces.

**2.1.** 通过补弧描述有限 $w$-熵集。我们需要将有限 $w$-熵的条件改写为关于补弧的离散求和。为此，回忆一下，对于任意主函数 $w$，存在一个数 $\lambda > 0$ 使得$w^\lambda(t)/t$几乎递减，即

$$\frac{w^\lambda(t)}{t} \le 2\frac{w^\lambda(s)}{s}, \qquad 0 < s < t < 1. \tag{5}$$

事实上，取一个数 $\lambda > 0$ 使得 $w^\lambda$ 是一个连续模，并令 $m \ge 1$ 为满足 $2^{m-1} \le t/s < 2^m$ 的整数；注意到根据$w^\lambda$ 的单调性和次可加性，我们可推出

$$\frac{w^\lambda(t)}{t} \le \frac{w^\lambda(2^m s)}{t} \le 2^m \frac{w^\lambda(s)}{t} \le 2\frac{w^\lambda(s)}{s}.$$

特别地，我们有 $tw^\lambda(1)/2 \le w^\lambda(t)$，从而 $\lim_{t\to 0+} t\log\, w(t) = 0$。下面的引理在 [14] 中是在对 $w$稍强的假设下给出的，但为方便读者，我们将附上一个对任意主函数都成立的简短证明概要。

**Lemma 2.2.** *Let $w$ be a majorant. Then a closed set $E \subset \partial\mathbb{D}$ of Lebesgue measure zero has finite $w$-entropy if and only if*

$$\sum_k m(I_k)\log w(m(I_k)) > -\infty.$$

*where $\{I_k\}_k$ are the connected components of $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Moreover, if $\partial\mathbb{D} \setminus E = \cup_k J_k$ for some disjoint collection of open arcs $\{J_k\}_k$ satisfying*

$$\sum_k m(J_k)\log w(J_k) > -\infty,$$

*then $E$ has finite $w$-entropy.*

*Proof.* Using simple change of variables one shows that

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \log w\left(\mathbf{dist}(\zeta, E)\right) dm(\zeta) = \sum_k \int_0^{m(I_k)/2} \log w(t)dt.$$

Now since $w$ is non-decreasing, we clearly have

$$\int_0^{m(I_k)/2} \log w(t)dt \le \frac{m(I_k)}{2}\log w(m(I_k)).$$

On the other hand, let $\lambda > 0$ such that $w^\lambda$ is a modulus of continuity and using the fact that $w^\lambda(t)/t$ is almost-decreasing in (5) in conjunction with integration by parts, it is not difficult to show that

$$\int_0^{m(I_k)/2} \log w(t)dt \ge m(I_k)\log w(m(I_k)) - \frac{(1+\log 2)}{\lambda} m(I_k),$$

This is enough to establish the first claim. For the second assertion, we note that any open arc $J_l$ is contained in a maximal connected component $I_k$, hence since $w$ is non-decreasing we have

$$\sum_k m(I_k)\log\frac{1}{m(I_k)} = \sum_k \sum_{l:J_l\subseteq I_k} m(J_l)\log\frac{1}{m(I_k)} \le \sum_k \sum_{l:J_l\subseteq I_k} m(J_l)\log\frac{1}{m(J_l)} < \infty.$$

By the previous argument, we conclude that $E$ has finite $w$-entropy. □

**2.2.** 适配于 $w$ 的二进网格。本节中，我们将考察与特定主函数 $w$ 适当适配的二进网格。令 $\mathbf{D}_n$ 表示满足 $m(I) = 2^{-n}$ 的 $2^n$ 二进弧 $I$ 的集合。受近期 [22], 中工作的启发，我们称二进弧的集合 $\mathbf{D}_w = \cup_{k\geq 0}\mathbf{D}_{n_k}$ 为二进 $w$ 网格，若正整数序列 $\{n_k\}_{k\geq 0}$ 满足以下条件：存在一个正数 $\beta > 0$，使得

$$\sup_{k\geq 0} \frac{w^\beta(2^{-n_k})}{w(2^{-n_{k+1}})} < \infty. \tag{6}$$

本小节的主要结果是一个引理，它使我们能够针对任意主函数 $w$，构造一个具有某种特殊性质的二进 $w$ 网格；这一性质对后续研究十分重要。

**引理 2.3.** 对任意主函数 $w$ 和任意正整数 $n_0 > 0$，存在一个二进 $w$ 网格 $\mathbf{D}_w = \cup_{k\geq 0}\mathbf{D}_{n_k}$，并具有以下附加性质

$$w(2^{-n_{k+1}}) \leq \prod_{j=0}^{k} w(2^{-n_j}), \qquad k \geq 0. \tag{7}$$

证明。为简洁起见，令 $\eta(t) = \lambda\log 1/w(t)$，其中 $\lambda > 0$ 满足 $w^\lambda$是连续模。我们将通过归纳法递归地构造序列 $\{n_k\}_{k\geq 0}$。为此，任取满足 $w^\lambda(2^{-n_0}) < 1/2$ 的 $n_0 > 0$，并注意到由 $w^\lambda$ 的单调性和次可加性，容易推出

$$\frac{1}{2}\eta(t/2) \leq \eta(t) \leq \eta(t/2) \tag{8}$$

对任意 $0 < t \leq 2^{-n_0}$ 均成立。固定一个稍后指定的常数 $C > 1$。由于 $\eta$ 单调不增且连续，存在 $0 < \delta_0 < 2^{-n_0}$ 使得

$$C \leq \frac{\eta(\delta_0)}{\eta(2^{-n_0})} < 5C.$$

取满足 $2^{-n_1} \leq \delta_0 < 2^{-(n_1-1)}$ 的最小正整数 $n_1 > n_0$。由 (8) 中 $\eta$ 的性质可知

$$C \leq \frac{\eta(2^{-n_1})}{\eta(2^{-n_0})} < 10C.$$

现在根据 归纳法，假设已选定 $n_k > 0$，并令满足下列条件的 $0 < \delta_k < 2^{-n_k}$

$$C \leq \frac{\eta(\delta_k)}{\eta(2^{-n_k})} < 5C.$$

We then choose $n_{k+1} > n_k$ be the smallest positive integer with $2^{-n_{k+1}} \leq \delta_k < 2^{-(n_{k+1}-1)}$. Again, using (8) it follows that

$$C \leq \frac{\eta(2^{-n_{k+1}})}{\eta(2^{-n_k})} < 10C.$$

Consequently, we obtain an increasing sequence of positive integers $\{n_k\}_{k\geq 0}$, which by construction satisfies (6), and thus we conclude that $\mathcal{D}_w = \cup_{k\geq 0}\mathcal{D}_{n_k}$ is dyadic $w$-grid. It remains to verify (7), which is equivalent to

$$\sum_{j=0}^{k} \eta(2^{-n_j}) \leq \eta(2^{-n_{k+1}}), \qquad k \geq 0.$$

Observe that a straightforward iteration shows that

$$\eta(2^{-n_j}) \le C^{-1}\eta(2^{-n_{j+1}}) \le \left(C^{-1}\right)^{k-j+1}\eta(2^{-n_{k+1}}), \qquad 0 \le j \le k.$$

逐项使用这些估计并求和几何级数，可得

$$\sum_{j=0}^{k}\eta(2^{-n_j}) \le \eta(2^{-n_{k+1}})\sum_{j=0}^{k}\left(C^{-1}\right)^{k+1-j} \le \frac{1}{C-1}\eta(2^{-n_{k+1}}).$$

取 $C > 2$ 后即可得到所需结论。

□

2.3. 奇异测度的结构定理。我们的主要目标是将奇异测度的 Roberts 分解推广到关于有限 $w$-熵集的情形。为此，回忆一下，正有限Borel测度 $\nu$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续模（不一定连续）再次定义为

$$\omega_\nu(\delta) := \sup\{\nu(I) : m(I) \le \delta,\ I \subset \partial\mathbb{D} \text{ arc}\}$$

容易验证， $\omega_\nu$ 在 $[0,1]$ 上是非递减且次可加的，其中 $\omega_\nu(0) = 0$。此外，（5）中的论证还表明，函数 $\omega_\nu(t)/t$ 在 $(0,1]$上是几乎递减的。现在可以表述本小节的主要结果了。

命题 2.4（Roberts 分解）。设 $\mu$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的正有限 Borel 奇异测度。对于任意整数 $n_0 > 0$、任意常数 $c > 0$ 以及任意二进制 $w$-网格 $\mathbf{D}_w = \cup_{k\ge0}\mathbf{D}_{n_k}$，存在 $\partial\mathbb{D}$ 上的正测度 $\{\mu_k\}_{k\ge0}, \mu_\infty$ ，使得 $\mu$ 分解为

$$\mu = \sum_{k\ge0}\mu_k + \mu_\infty,$$

其中每个 $\mu_k$ 都满足

$$\omega_{\mu_k}(2^{-n_k}) \le c2^{-n_k}\log\frac{1}{w(2^{-n_k})}, \qquad k \ge 0 \tag{9}$$

并且 $\mu_\infty$ 支撑于一个有限 $w$-熵集合上。此外，如果 $\mu$ 不赋予任何有限 $w$-熵集合正测度，那么对于上述任意参数选择 $n_0$, $c$ 以及二进制 $w$-网格 $\mathbf{D}_w$ ，都有 $\mu_\infty \equiv 0$ 。

请注意，命题 2.4 给出的每一种分解都取决于参数 $n_0, c$ 以及二进制 $w$-网格 $\mathbf{D}_w$ 的选择。应将此分解与式（3）中给出的抽象分解进行比较；后者对 $\mu$ 中不赋予任何有限 $w$-熵集合正测度的部分，提供了更为详尽的描述。

*Proof of Proposition* 2.4. The proof is very similar to the decomposition provided in [33], which we shall adapt to our setting and provide details in certain steps which deviate from the mentioned work. Fix $n_0$, $c > 0$ and let $\mathcal{D}_w = \cup_{k\ge0}\mathcal{D}_{n_k}$ be a dyadic $w$-grid. We declare a dyadic arc $I \in \mathcal{D}_{n_0}$ to be *light* for $\mu$ if

$$\mu(I) \le cm(I)\log\frac{1}{w(m(I))} = c2^{-n_0}\log\frac{1}{w(2^{-n_0})},$$

an否则为重。定义博雷尔子集 $F \subseteq I \in$单位圆盘$_{n_0}$ 上的奇异测度 $\mu_0$ 如下：

$$\mu_0(F) = \begin{cases}\mu(F) & \text{, if } I \text{ is light,}\\ \frac{\mu(F)}{\mu(I)}c2^{-n_0}\log\frac{1}{w(2^{-n_0})} & \text{, if } I \text{ is heavy.}\end{cases}$$

以这种方式构造的测度 $\mu_0$ 称为 $\mu$的单位圆盘$n_0$-栅格。注意，根据构造， $\mu-\mu_0$ 是一个非负奇异测度，其支撑包含于 $H_0$：单位圆盘$n_0$中的重区间之并。此外，有

$$\mu_0(I)=c\,2^{-n_0}\log\frac{1}{w(2^{-n_0})},\qquad \text{if } I \text{ is heavy},$$

and

$$\omega_{\mu_0}(2^{-n_0})\le c\,2^{-n_0}\log\frac{1}{w(2^{-n_0})}.$$

为了继续推进，现在的思路是将测度 $\mu_1$ 定义为 $\mu-\mu_0$ 的单位圆盘$n_1$栅格。事实上，通过归纳法无限次迭代这一过程，我们得到一个奇异测度序列 $\{\mu_k\}_{k\ge0}$，其中每个 $\mu_k$ 都是 $\mu-\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j$ 的单位圆盘$n_k$栅格，且支撑于 $H_{k-1}$ 内：即单位圆盘$n_{k-1}$中所有重弧的并集，并满足

$$\mu_k(I)=c2^{-n_k}\log\frac{1}{w(2^{-n_k})},\qquad \text{if } I \text{ is heavy},$$

and

$$\omega_{\mu_k}(2^{-n_k})\le c\,2^{-n_k}\log\frac{1}{w(2^{-n_k})}.$$

现在令 $\mu_\infty:=\mu-\sum_{k\ge0}\mu_k$，并注意到根据构造，对于所有 $k\ge0$， $H_k\supseteq H_{k+1}$，且差 $\mu-\sum_{j=0}^{k}\mu_j$ 的支撑位于 $H_k$ 内，因此 $\mu_\infty$ 的支撑位于 $F:=\cap_k H_k$ 内。为验证 $F$ 的勒贝格测度为 $0$，注意恒等式

$$\mu_k(I)=c\,m(I)\log\frac{1}{w(m(I))}$$

for heavy arcs $I$ in $\mathcal{D}_{n_k}$, we get

$$cm(H_k)\log\frac{1}{w(2^{-n_k})}=\mu_k(H_k)\le\mu_k(\partial\mathbb{D})\le\mu(\partial\mathbb{D}),\tag{10}$$

hence $m(F)=\lim_k m(H_k)=0$. Fix $k\ge1$ and let $\mathcal{L}_k$ denote the set of interiors of the light arcs in $\mathcal{D}_{n_k}$, which are contained in $H_{k-1}$. Set $F_0:=\partial\mathbb{D}\setminus\cup_k\cup_{J\in\mathcal{L}_k}J$. By definition $F_0$ is a closed set containing $F$. In fact, $F_0\setminus F$ is a countable set which solely consists of endpoints of adjacent light arcs, hence $F_0$ also has Lebesgue measure zero. In order to show that $F$ has finite a $w$-entropy, it is sufficient to verify that $F_0$ has finite $w$-entropy, which on account of Lemma 2.2 amounts to showing that

$$\sum_{k\ge1}\sum_{J\in\mathcal{L}_k}m(J)\log\left(\frac{1}{w(m(J))}\right)<\infty.$$

Set $L_k:=\cup_{J\in\mathcal{L}_k}J$ and note that

$$\sum_{k\ge1}\sum_{J\in\mathcal{L}_k}m(J)\log\left(\frac{1}{w(m(J))}\right)=\sum_{k\ge1}m(L_k)\log\left(\frac{1}{w(2^{-n_k})}\right)\le\sum_{k\ge2}m(H_{k-1})\log\left(\frac{1}{w(2^{-n_k})}\right).$$

Now using the assumption that $\mathcal{D}_w=\cup_{k\ge0}\mathcal{D}_{n_k}$ is a dyadic $w$-grid, there exists a constant $\beta>0$, independent of $k$, such that

$$\log\left(\frac{1}{w(2^{-n_k})}\right)\le\beta\log\left(\frac{1}{w(2^{-n_{k-1}})}\right),\qquad k\ge1.$$

Using this in conjunction with (10), we obtain

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{J\in\mathcal{L}_k} m(J)\log\left(\frac{1}{w(m(J))}\right)\leq \frac{\beta}{c}\sum_{k\geq 1}\mu_k(\partial\mathbb{D})\leq \frac{\beta}{c}\mu(\partial\mathbb{D}).$$

这表明 $\mu_\infty$ 支撑于闭集 $F_0$，该闭集具有有限的 $w$-熵，因此证明完成。

□

实际上可以证明，命题 2.4 中的描述刻画了不对有限 $w$-熵集赋予测度的奇异测度 $\mu$。这一有趣的观察与我们进一步的发展无关，因此对于这方面的结果，请读者参阅[22] 中的近期工作。

2.4. 通过 Corona 定理得到的循环性。以下出现在 [33] 中的经典 Corona 定理的定量版本将是我们开展研究的关键工具。

定理 2.5（Corona 定理）。存在一个绝对常数 $K>0$，使得只要 $f_1$、$f_2\in H^\infty$ 满足 $\|f_j\|_{H^\infty}\leq 1$，对于 $j=1$，2，以及

$$\inf_{z\in\mathbb{D}}|f_1(z)|+|f_2(z)|\geq\delta,$$

对于某个 $0<\delta<1/2$，存在 $h_1$、$h_2\in H^\infty$，使得对于 $j=1$、2，有 $\|h_j\|_{H^\infty}\leq\delta^{-K}$，从而贝祖方程

$$f_1(z)h_1(z)+f_2(z)h_2(z)=1,\qquad z\in\mathbb{D}.$$

建立定理 2.1 的初始步骤是考虑奇异内函数$S_{\mu_k}$，其中 $\mu_k$ 是出现在 Roberts 分解命题 2.4 中的一个奇异测度，并在 $H^\infty$的单位球中寻找合适的 Corona 伴侣函数 $f_k$，使得解$h_k$、$g_k$具有如下性质：$1-S_{\mu_k}h_k=f_kg_k$的 G$_w$-范数关于 $n_k$而言非常小。事实证明，某些单项式可以作为 $S_{\mu_k}$的 Corona 伴侣函数 $f_k$，因此我们需要一个引理来量化 G$_w$中矩的渐近增长。

引理 2.6。对于任意主函数 $w$，单项式的 G$_w$-范数满足以下界

$$\|z^n\|_{\mathcal{G}_w}\leq 3w(1/n)$$

*for any large positive integer $n$.*

*Proof.* Note that since $w$ is non-decreasing, we trivially have the estimate

$$\sup_{1-|z|<1/n} w(1-|z|)|z|^n\leq w(1/n).$$

Now let $\lambda>0$ such that $w^\lambda$ is a modulus of continuity and note that since $w^\lambda(t)/t$ is almost non-increasing, we have for any $1-|z|\geq 1/n$

$$w(1-|z|)|z|^n\leq 2^{1/\lambda}\frac{w(1/n)}{(1/n)^{1/\lambda}}(1-|z|)^{1/\lambda}|z|^n.$$

Since $(1-t)^\lambda t^n$ reaches its maximum at $t_n=n/(n+\lambda)$ on the unit-interval $[0,1]$, we obtain

$$\sup_{1-|z|>1/n} w(1-|z|)|z|^n\leq 2^{1/\lambda}\left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^{n+1/\lambda} w(1/n)\leq 2w(1/n).$$

This proves the desired claim.

□

2.5. **Proof of cyclicity in $\mathcal{G}_w$.** With the preparations in the previous subsections at hand, we now turn to our main task.

定理 2.1 的证明。固定参数 $c > 0$，使得 $48cK < 1$，其中 $K > 0$ 表示定理 2.5 中出现的 Corona 常数，并令 $n_0 > 0$ 为满足 $w(2^{-n_0})^{12c} < \min(1/4, 3^{-1/K})$ 的任意正整数。设 $\mu$ 是单位圆盘 $\partial\mathbb{D}$ 上的正有限奇异博雷尔测度，且不对任何有限 $w$-熵集赋予测度。对上述参数 $c$、$n_0$ 和 $\{n_k\}_{k\geq 0}$ 应用引理 2.3 和命题 2.4，可得到分解

$$\mu = \sum_{k\geq 0} \mu_k$$

其中每个 $\mu_k$ 都满足（9）。现在回忆一下，单位圆盘 $\partial\mathbb{D}$ 上的任意正有限Borel测度 $\nu$ 都满足以下估计

$$|S_\nu(z)| \geq \exp\left(-6\,\frac{\omega_\nu(1-|z|)}{1-|z|}\right) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{11}$$

例如，参见 [3] 中的定理 2，以了解这一事实的一个简单证明。

步骤 1：使用 Corona 定理进行初始估计：

固定任意 $k \geq 0$，并注意到当 $1-|z| \geq 2^{-n_k}$ 时，连续模的几乎递减性质给出

$$\frac{\omega_{\mu_k}(1-|z|)}{1-|z|} \leq 2\frac{\omega_{\mu_k}(2^{-n_k})}{2^{-n_k}} \leq 2c\log\frac{1}{w(2^{-n_k})}.$$

将其与应用于 $\nu = \mu_k$ 的（11）式结合，我们得到以下下界：

$$|S_{\mu_k}(z)| \geq w(2^{-n_k})^{12c}, \qquad |z| \leq 1-2^{-n_k}. \tag{12}$$

现在选择 $S_{\mu_k}$ 的 Corona 伴随函数为单项式 $z^{2^{n_k}}$，容易验证，当 $|z| > 1-2^{-n_k}$ 时（这里利用了假设 $w(2^{-n_0})^{12c} < 1/4$），有

$$|z|^{2^{n_k}} \geq (1-2^{-n_k})^{2^{n_k}} \geq 1/4 \geq w(2^{-n_k})^{12c}.$$

这意味着

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} |S_{\mu_k}(z)| + |z|^{2^{n_k}} \geq w(2^{-n_k})^{12c},$$

因此应用 Corona 定理，我们可以找到满足估计 $\|g_k\|_{H^\infty}$、$\|h_k\|_{H^\infty} \leq w(2^{-n_k})^{-12cK}$ 的函数 $g_k$、$h_k \in H^\infty$，它们在 $\mathbb{D}$ 上解方程 $S_{\mu_k}h_k + z^{2^{n_k}}g_k = 1$。将其与 $\mathsf{G}_w$ 上关于矩的引理 2.6 结合，我们得到

$$\|S_{\mu_k}h_k - 1\|_{\mathcal{G}_w} \leq \|g_k\|_{H^\infty}\left\|z^{2^{n_k}}\right\|_{\mathcal{G}_w} \leq 3w(2^{-n_k})^{1-12cK}.$$

In fact, utilizing the assumption on $c$ and $n_0$ once again, we actually get

$$\|S_{\mu_k}h_k - 1\|_{\mathcal{G}_w} \leq 3w(2^{-n_k})^{1-12cK} \leq w(2^{-n_k})^{1-24cK} \leq w(2^{-n_k})^{24cK}. \tag{13}$$

*Step 2: The iterative procedure:*

现在的思路是将所有的 $S_{\mu_k}$'s 结合起来，并迭代式（13）中的估计。为此，固定一个非常大的正整数 $N > 0$，并设 $\nu_N := \sum_{k=0}^{N}\mu_k$。记与 $S_{\mu_k}$ 相关联的 Corona

解对，如式（13）所示，并设 $H_N := h_0 \cdots h_N$。有了这些，我们可以按以下方式合并各项

$$1 - S_{\nu_N} H_N = (1 - S_{\mu_0} h_0) + S_{\mu_0} h_0 (1 - S_{\mu_1} h_1) + \cdots + \left( \prod_{k=0}^{N-1} S_{\mu_k} h_k \right) (1 - S_{\mu_N} h_N).$$

Using this and applying (13) in conjunction with the estimates $\|h_k\|_{H^\infty} \le w(2^{-n_k})^{-12cK}$ for each $k \ge 0$, we obtain

$$\|S_{\nu_N} H_N - 1\|_{\mathcal{G}_w} \le w(2^{-n_0})^{24cK} + \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{w(2^{-n_k})^2}{w(2^{-n_0}) \cdots w(2^{-n_{k-1}})} \right)^{12cK}, \qquad N \ge 1.$$

Using Lemma 2.3 we have

$$\frac{w(2^{-n_k})^2}{w(2^{-n_0}) \cdots w(2^{-n_{k-1}})} \le w(2^{-n_k}) \le w(2^{-n_0})^{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

This in conjunction with the assumption on $w(1/n_0)^{12c} \le 1/4$ provides us a constant $C > 0$, independent of $n_0, c, N$, such that

$$\|S_{\nu_N} H_N - 1\|_{\mathcal{G}_w} \le \sum_{k=0}^{\infty} w(2^{-n_0})^{(k+1)12cK} \le C w(2^{-n_0})^{12cK} \tag{14}$$

for all $N \ge 1$.

第 3 步：最终的极限过程：

现在，(14) 中的上述估计对任意大的 $N > 0$ 都成立这一事实，对于将该估计提升为对 $\mu$ 成立而非仅对每个 $\nu_N$ 成立至关重要。为此，我们需要以下引理。该引理断言，赋予从 $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ 继承的弱星拓扑的 $H^\infty$ 连续嵌入到 $\mathsf{G}_w$ 中。

引理 2.7. 设 $\{g_k\}_k \subset H^\infty$ 是一个在紧集上一致收敛到有界解析函数 $g$ 且满足 $\sup_k \|g_k\|_{H^\infty} < \infty$ 的序列。那么， $g_k$ 在 $\mathsf{G}_w$ 的范数下收敛到 $g$。

证明。固定任意 $\varepsilon > 0$，并令 $C := \sup_k \|g_k - g\|_{H^\infty}$；根据假设，该值必为有限值。由于 $w$ 是非递减的，我们有

$$\sup_{1-|z|<\varepsilon} w(1-|z|)|g_k(z) - g(z)| \le C w(\varepsilon).$$

但是， $g_k$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧集上一致收敛到 $g$，因此

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{1-|z|\ge\varepsilon} w(1-|z|)|g_k(z) - g(z)| = 0.$$

Combining both these estimates, we arrive at

$$\limsup_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{\mathcal{G}_w} \le C w(\varepsilon).$$

Letting $\varepsilon \to 0+$ finishes the proof. □

We now turn to the final part of the proof. Note that for any large $N$, we have the following estimate:

$$\|S_\mu H_N - 1\|_{\mathcal{G}_w} \le \|S_{\nu_N} H_N - 1\|_{\mathcal{G}_w} + \|S_{\mu-\nu_N} - 1\|_{\mathcal{G}_w} \le C w(2^{-n_0})^{12cK} + \|S_{\mu-\nu_N} - 1\|_{\mathcal{G}_w}.$$

现在，由于测度 $\nu_N$ 增大到 $\mu$，不难证明 $S_{\mu-\nu_N}$ 在紧集上一致收敛于 1，并且显然具有一致有界的 $H^\infty$-范数，因此根据

引理 2.7，我们得出 $S_{\mu-\nu_N}$ 在 G$_w$的范数意义下收敛于 1。将 $N \to \infty$ 代入上面的方程，我们得到

$$\inf_{h\in H^\infty} \|S_\mu h - 1\|_{\mathcal{G}_w} \le Cw(2^{-n_0})^{12cK}.$$

由于在命题 2.4 的分解中以及引理 2.3 中，$n_0 > 0$ 可以取为任意大的数，我们最终得出结论：$S_\mu$ 在 G$_w$ 中是循环的，从而完成定理 2.1 的证明。

□

## 3. Proper shift invariant subspaces in $\mathcal{G}_w$

本节主要致力于证明分解式 (3) 中出现的奇异内函数 $S_{\mu_P}$ 在 G$_w$中满足持久性。

定理 3.1. 设 $w$ 是满足条件 $(A_1)$ 的主函数，且 $\mu$ 是 $\partial\mathbb{D}$上的正有限奇异测度。那么，$S_{\mu_P}$ 在 G$_w$ 中生成一个满足持久性的真 $M_z$-不变子空间

$$[S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathcal{N}_+ \subseteq S_{\mu_P}\mathcal{N}_+.$$

本节的论述受到 [4], 中相关工作的启发，并针对我们的广义情形作了某些调整与偏离。

3.1. 识别奇异部分。设 $\Omega \subseteq \mathbb{D}$ 为一个包含原点的若尔当区域，且 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ 是一个共形映射，并满足 $\varphi(0) = 0$。对于 $0 < p \le \infty$，我们回顾 Hardy 空间 $H^p(\Omega)$ 由 $\Omega$ 中满足以下条件的解析函数 $f$ 组成:

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} := \sup_{0<r<1}\left(\int_{\partial\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)(r\zeta)|^p dm(\zeta)\right)^{\min(1,1/p)} < \infty.$$

换言之，$f$ 属于 $H^p(\Omega)$ 当且仅当 $f \circ \varphi$ 属于 $\mathbb{D}$上的经典 Hardy 空间$H^p := H^p(\mathbb{D})$。在这种情况下，我们始终有连续嵌入 $H^p \subseteq H^p(\Omega)$。本节的主要目标是描述 $H^p$中函数在 $H^p(\Omega)$ 中的奇异内因子，即函数 $f \in H^p$的 $f \circ \varphi$ 的奇异内因子。为此，设 $f \in H^p$具有 Nevanlinna 分解 $f = O_f S_\mu B$。 [4] 中已经指出了以下事实；为完整起见，我们仍将其纳入。回顾 Beurling定理关于 $H^p$ 的结论可知，$O_f$ 在 $H^p$中是循环的，因此根据连续包含，它在 $H^p(\Omega)$中也具有循环性。然而，对单连通区域应用 Beurling定理可知，$O_f$ 在 $H^p(\Omega)$中也必然是外函数。因此，我们得出结论：$O_f$ 不会在 $H^p(\Omega)$ 中为 $f$ 产生任何奇异内因子。由于共形映射不含奇异内因子，且 $\mathbb{D}$ 上的任意 Blaschke 乘积 $B$ 都是单位圆盘的归一化共形自映射的乘积，$B\circ\varphi$ 也不会产生奇异内因子。由此，我们得出结论：$f \circ \varphi$ 的奇异内因子位于因子 $S_\mu \circ \varphi$之中。设 $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$，并将相应的 Aleksandrov-Clark 测度 $\sigma_{\zeta_0}$ 记为共形映射 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ 的 Aleksandrov-Clark 测度，其中 $\varphi(0) = 0$，即

$$\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\zeta_0-\varphi(z)|^2} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\sigma_{\zeta_0}(\zeta) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

现在，若 $\zeta_0 \notin \varphi(\partial\mathbb{D})$，则不难看出，$d\sigma_{\zeta_0}$ 相对于 $\partial\mathbb{D}$ 上的勒贝格弧长测度 $dm$ 绝对连续（例如，参见 [4]中的引理 2.1）。在另一种情况下，

我们有 $\zeta_0 = \varphi(\eta_0)$，其中存在唯一的 $\eta_0 \in \partial\mathbb{D}$，于是可以证明

$$\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\zeta_0-\varphi(z)|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\varphi^{-1}(\zeta_0)-z|^2}\frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta_0))|} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\tau_{\zeta_0}(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}$$

其中 $\tau_{\zeta_0}(\{\eta_0\}) = 0$。这里，$\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta_0)) = \varphi'(\eta_0)$ 表示 $\varphi$ 在 $\eta_0$处的角导数，即 $\varphi'$ 在 $\zeta_0$处的非切向极限；如果该极限不存在，按照惯例将其声明为 $\infty$。由于 $\partial\Omega$ 是可求长的，根据 F. 和 M. Riesz 定理可知，$\varphi' \in H^1$，因此 $\varphi$ 在 $\partial\mathbb{D}$中的 $dm$-几乎处处存在角导数。如前所述，还可以证明 $d\tau_{\zeta_0}$ 相对于 $dm$是绝对连续的。现在利用上述表达式，我们可以表示

$$-\log|(S_\mu \circ \varphi)(z)| = \int_{\varphi(\partial\mathbb{D})} \frac{1-|z|^2}{|\varphi^{-1}(\zeta)-z|^2}\frac{d\mu(\zeta)}{|\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta))|} + \int_{\partial\mathbb{D}\setminus\varphi(\partial\mathbb{D})} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\tau_\zeta(\zeta) d\mu(\zeta).$$

上述讨论表明，奇异部分应包含在第一项中，这一点确实已在 [4]的定理 2.1 中得到验证。事实上，仔细遵循其中给出的论证，实际上可以得到关于 $S_\mu \bigcirc \varphi$的奇异内因子的如下精确描述，现将其表述如下，以便今后引用。

定理 3.2（定理 2.1, [4]）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{D}$ 是一个包含原点且边界为 Jordan 曲线的区域，并设 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ 是一个共形映射，满足 $\varphi(0) = 0$。假设 $\mu$ 是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的正有限奇异博雷尔测度，并将其对应的奇异内函数记为 $S_\mu$。那么 $S_\mu \bigcirc \varphi$ 的奇异内因子为

$$\exp\left(-\int_{\varphi^{-1}(\Gamma)} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{|\varphi'(\zeta)|} d(\sigma\circ\varphi)(\zeta)\right), \qquad z \in \mathbb{D}$$

*wher*e $\Gamma := \{\zeta \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{D} : |\varphi'(\zeta)| < \infty\}$，且 $(\sigma \bigcirc \varphi)(E) := \sigma(\varphi(E))$，其中 $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ 为博雷尔集。

关于相关主题的最新研究，也请读者参阅 [21]。

3.2. Privalov 星形域的构造及其嵌入 Hardy 空间。现在我们将构造一些边界足够规则的 Privalov 星形域，使相应的共形映射处处具有角导数。为此，设$E \subset \partial\mathbb{D}$ 是一个勒贝格测度为零的闭集。我们定义单连通区域

$$\Omega_E := \{r\zeta \in \mathbb{D} : \zeta \in \partial\mathbb{D},\ 0 \le r < 1 - h(\zeta)\}. \tag{15}$$

where $h : \partial\mathbb{D} \to [0, 1/2]$ is a continuous function defined by

$$h(e^{it}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{(t-a_k)(b_k-t)}{(b_k-a_k)}\right)^2 & , e^{it} \in J_k \\ 0 & , e^{it} \in E. \end{cases}$$

where $J_k = \{e^{it} : a_k < t < b_k\}$ is a connected component of $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Note that $h$ is comparable to

$$h(\zeta) \asymp \mathbf{dist}(\zeta, E)^2 \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Alternatively, $\Omega_E$ can be described as the simply connected domain enclosed by the Jordan curve $\gamma_E : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ defined by

$$\gamma_E(\zeta) = \zeta\,(1 - h(\zeta)), \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}. \tag{16}$$

根据构造，容易验证，对于任意 $0 < \alpha < 1$，$\gamma_E$ 是一条 $C^{1+\alpha}$-光滑的 Jordan曲线，其切线为 $C^\alpha$-光滑的。应用 Kellogg 定理（例如，

参见 [16] 中的定理 4.3）可知，任意共形映射 $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega_E$ 都能延拓为定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的 $C^{1+\alpha}$-光滑函数，并且在 $\mathbb{D}$ 上满足 $\varphi' \neq 0$ ；其逆映射 $\varphi^{-1} : \Omega_E \to \mathbb{D}$ 也有类似结论。下文中，我们将利用上述构造的普里瓦洛夫星形域 $\Omega_E$ ，建立从 $\mathsf{G}_w$ 到 Hardy 空间 $H^\infty(\Omega_E)$ 的连续嵌入。正是在此处，假设（$A_1$）将发挥至关重要的作用。为此，我们约定，若两个实数 $A$、$B$ 满足 $A \lesssim B$，即对于某个常数 $c > 0$ 有 $A \le cB$，则称它们满足该关系。我们的第一个引理涉及构造一个具有某些预设性质的卡尔森型函数。

引理 3.3. 设 $w$ 是满足 $(A_1)$ 的主函数，并设 $E \subset \partial\mathbb{D}$ 是一个有限$w$-熵集，且 $\Omega_E$ 表示在 (15) 中定义的相应普里瓦洛夫星形域。则存在一个外函数 $G_E : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，它可连续延拓到 $\partial\mathbb{D}$，并满足以下估计

$$|G_E(z)| \le w(1 - |z|), \qquad z \in \partial\Omega_E \cap \mathbb{D}.$$

证明. 设 $I$ 是 $\partial\mathbb{D}\setminus E$ 的一个连通分支，并令 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 表示与 $I$ 相关联且满足以下性质的惠特尼弧族

$$m(I_n) = \mathbf{dist}(I_n, E) \asymp 2^{-|n|} m(I), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

其中可比性与 $n$ 无关。注意，(5) 中主函数的一般性质意味着，对于 $\partial\mathbb{D} \setminus E$ 的任意连通分支 $I$

$$\log \frac{1}{w(m(I_n))} \lesssim |n| + \log \frac{1}{w(m(I))} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

因此，对 $\partial\mathbb{D} \setminus E$ 的所有连通分支 $I$ 求和，立即得到

$$\sum_I \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(I_n) \log \frac{1}{w(m(I_n))} \lesssim \sum_I m(I) \left(1 + \log \frac{1}{w(m(I))}\right) < \infty. \tag{17}$$

为简洁起见，我们现在构造由 $\partial\mathbb{D} \setminus E$ 的连通分支族所对应的所有惠特尼弧组成的联合族 $\{J_k\}_k$ ，并令 $\xi_k$ 表示每条惠特尼弧 $J_k$ 的中心。对于每个 $k$，我们定义相应的解析函数

$$\psi_k(z) := m(J_k) \log \frac{1}{w(m(J_k))} \frac{\xi_k}{\rho_k \xi_k - z}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

where $\rho_k = 1 + m(J_k)$. Using these components, we build the corresponding Carleson function by defining

$$G_E(z) := \exp\left(-N \sum_k \psi_k(z)\right) \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{18}$$

where $N > 0$ is a positive number to be chosen later. Note that the $w$-entropy condition on $E$ in conjunction with the observation in (17) ensures that $\sum_k \psi_k(z)$ converges uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$ and thus $G_E$ is a well-defined analytic function there. Furthermore, we also note that

$$\mathrm{Re}\,(\psi_k(z)) = m(J_k) \log \frac{1}{w(m(J_k))} \frac{\rho_k - \mathrm{Re}(z\overline{\xi_k})}{|\rho_k \xi_k - z|^2} > 0, \qquad z \in \mathbb{D}$$

这意味着 $G_E : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是外函数。事实上，由于 $\sum_k \psi_k$ 的极点 $\{\rho_k\xi_k\}_k$ 仅在 $E$处聚集， $G_E$ 实际上可以解析延拓穿过每条惠特尼弧 $J_k$。此外，通过泰勒展开进行的直接推导表明，$\mathrm{Re}(\xi_k/(\rho_k\xi_k - \zeta)) \asymp 1/m(J_k)$

只要 $\zeta \in J_k$，且可比性常数与 $k$无关。结合惠特尼弧的性质，我们很容易推导出

$$|G_E(\zeta)| \lesssim w(\mathbf{dist}(\zeta, E))^{cN}, \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus E$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。这表明 $G_E$ 可连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$，并且在 $E$上满足 $G_E = 0$。现在只需验证 $G_E$ 在 $\partial\Omega_E \cap \mathbb{D}$上的径向估计。固定任意一点 $z = |z|\zeta \in \partial\Omega_E \cap \mathbb{D}$，记包含 $z$ 的径向投影 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 的唯一 Whitney 弧为 $J_k$。在这种情况下，回顾普里瓦洛夫星形域 $\Omega_E$ 的构造可知，我们有

$$1 - |z| = h(\zeta) \asymp \operatorname{dist}(\zeta, E)^2 \asymp m(J_k)^2 \qquad z \in \partial\Omega_E \cap \mathbb{D},\ \zeta \in J_k.$$

As p如前所述，利用泰勒展开进行类似计算可得

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\xi_k}{\rho_k\xi_k - z}\right) \asymp 1/m(J_k), \qquad z \in \partial\Omega_E \cap \mathbb{D},\ \zeta \in J_k.$$

结合关于主函数$w$的假设（$A_1$）（这里至关重要），我们得到

$$|G_E(z)| \lesssim w\left(\operatorname{dist}(\zeta, E)\right)^{cN} \lesssim w\left(1 - |z|\right)^{c'N}, \qquad z \in \partial\Omega_E \cap \mathbb{D}$$

其中常数 $c$、$c' > 0$ 均为绝对常数。现在只需将 $N > 0$取充分大即可。□

引理 3.3 的一个重要推论是以下结果，我们将其表述如下以供后文参考。

命题 3.4. 设 $M_E(g)(z) = G_E(z)g(z)$ 表示由式 (18) 中定义的 Carleson 外函数 $G_E$ 所确定的乘法算子。则线性映射 $M_E$ 将 $\mathsf{G}_w$ 连续地映入 $H^\infty(\Omega_E)$。

*P*证明. 设 $Q$ 为解析多项式，并注意到由引理 3.3 可得 t

$$\sup_{z\in\partial\Omega_E\cap\mathbb{D}} |G_E(z)Q(z)| \le \|Q\|_{\mathcal{G}_w}.$$

现在，由于 $G_E$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上连续，最大值原理推出

$$\sup_{z\in\Omega_E} |G_E(z)Q(z)| \le \|Q\|_{\mathcal{G}_w}.$$

利用解析多项式在 $\mathsf{G}_w$ 中稠密这一事实，可知 $M_E(g) = G_E g$ 唯一地延拓为定义在整个 $\mathsf{G}_w$ 上的连续线性算子，并将其映入 $H^\infty(\Omega_E)$。□

3.3. 持久性。结合前几小节中发展的工具，我们现在转而证明定理 3.1

*Proof of Theorem* 3.1. We shall divide the proof in two different steps.

*Step 1: Support on a single set of finite w-entropy:*

We first show that if $\mu$ is a positive finite singular Borel measure supported on a single set $E \subset \partial\mathbb{D}$ of finite $w$-entropy, then $S_\mu$ satisfies the permanence property in $\mathcal{G}_w$, that is

$$[S_\mu]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathcal{N}_+ \subseteq S_\mu \mathcal{N}_+.$$

令 $f \in [S_\nu]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathbf{N}_+$ 为任意元素，并选取一个解析多项式 $Q_n$序列，使得 $S_\nu Q_n \to f$ 属于 $\mathsf{G}_w$。将 $f = u/v$ 写成 $u$、$v \in H^\infty$ 和 $v$ 外函数，并利用这一事实

即 $H^\infty$ 是 $\mathsf{G}_w$ 的乘子，我们有 $vS_\nu Q_n \to u$ 属于 $\mathsf{G}_w$。现在应用命题 3.4，得到

$$Q_n(z)G_E(z)v(z)S_\nu(z) \to G_E(z)u(z)$$

在 $\Omega_E$ 上一致收敛，因此也按 $H^2(\Omega_E)$ 的范数收敛。然而，这意味着函数 $G_E u$ 属于由 $G_E v S_\nu$ 生成的 $H^2(\Omega)$ 的 $M_z$-不变子空间。回顾 $G_E$ 和 $v$ 是 $H^\infty$ 中的外函数，我们可以在 $H^2(\Omega_E)$ 的背景下应用 Beurling定理，从而得出 $u \bigcirc \varphi$ 可被 $S_\mu \bigcirc \varphi$ 的奇异内因子 $S_{\widetilde{\mu}}$ 整除，该因子在定理 3.2 中有明确给出。将 $\varphi^{-1}$ 复合到右侧后，我们得到 $u$ 可被 $S_{\widetilde{\mu}} \bigcirc \varphi^{-1}$ 的奇异内因子整除。现在将定理 3.2 应用于 $\widetilde{\mu}$，以 $\varphi$ 替换 $\varphi^{-1}$，实际上可得 $u$ 可被 $S_\mu$ 整除。这足以证明所需结论。

步骤 2：具有有限 $w$-熵的集合的并：

设 $E = \cup_n E_n$ 是 $\mu_P$的载体集，其中 $E_n \subset E_{n+1}$ 以及每个 $E_n$ 都具有有限的 $w$-熵。为简便起见，令$\mu_n = \mu_P|_{E_n}$，并注意到上一步给出的论证实际上表明，每个奇异内函数$S_{\mu_n}$ 都满足以下性质：

$$[S_{\mu_n}]_{\mathcal{G}_w} \cap H^\infty \subseteq S_{\mu_n} H^\infty.$$

现在任取元素$f \in \left[S_{\mu_p}\right]_{\mathcal{G}_w} \cap \mathsf{N}_+$，并将 $f = u/v$ 写成其中 $u$、$v \in H^\infty$ 和 $v$为外函数的形式。直接验证可得$u \in \left[S_{\mu_p}\right]_{\mathcal{G}_w} \cap H^\infty$，因此结合每个$S_{\mu_n}$ 都整除 $S_{\mu_P}$这一事实，我们得到以下包含关系

$$u \in \left[S_{\mu_p}\right]_{\mathcal{G}_w} \cap H^\infty \subseteq \bigcap_n [S_{\mu_n}]_{\mathcal{G}_w} \cap H^\infty \subseteq \bigcap_n S_{\mu_n} H^\infty$$

因此，对于任意 $n$，存在 $h_n \in H^\infty$ 使得$u = S_{\mu_n} h_n$。现在由于

$$\sup_n \|h_n\|_{H^\infty} = \|u\|_{H^\infty} < \infty$$

应用 Helly 选择定理，我们可以提取一个子序列$\{h_{n_k}\}_k$，其在弱星拓扑下收敛到某个 $h \in H^\infty$。但是，由于序列$\{\mu_n\}_n$ 递增至 $\mu_P$，任何子序列也同样如此，因此我们得出 $u = S_{\mu_P} h$。这表明 $S_{\mu_P}$ 具有持久性，从而完成定理的证明。

□

## 4. Proof of main results

Here we summarize our developments in the previous sections in order to deduce Theorem 1.1 and Corollary 1.2.

4.1. **An extension of the Korenblum-Roberts Theorem.** With all necessary ingredients at hand our proof now becomes fairly short.

*Proof of Corollary* 1.2. We shall divide the proof in three simple steps.

*Step 1: Proof of cyclicity:*

Observe that in order to deduce the claim in $(ii)$, it suffices to establish the equality of sets

$$\left[\mathcal{O}_f S_{\mu_C}\right]_{\mathcal{G}_w} = [S_{\mu_C}]_{\mathcal{G}_w}. \tag{19}$$

完成这一步后，我们接着应用定理 2.1，得出 $\mathsf{O}_f S_{\mu_C}$ 在 $\mathsf{G}_w$中是循环的。注意，由于包含关系 $\subseteq$ 显然成立，因此只需证明 $\supseteq$。为此，我们将利用

第二章中的定理 7.4 [15], 断言，存在一个由有界解析函数组成的序列 $\{F_n\}_n$ ，满足以下性质：

(a.) $\sup_n \|F_n \mathsf{O}_f\|_{H^\infty} \le 1$。 （b.）$\lim_n F_n(\zeta)$
$\mathsf{O}f(\zeta) = 1$ 对 $dm$-a.e $\zeta \in \partial\mathbb{D}$。

换言之，外函数在 $H^\infty$ 中是弱星（序列）循环的。现在，通过与 $S_{\mu_C}$ 相乘并取泊松延拓，我们实际上得出 $F_n \mathsf{O}_f S_{\mu_C}$ 在 $H^\infty$ 中弱星收敛于 $S_{\mu_C}$。应用引理 2.7 可知，该收敛性在 $\mathsf{G}w$ 中同样成立，因此我们得出 $S_{\mu_C} \in \left[\mathsf{O}_f S_{\mu_C}\right]_{\mathcal{G}_w}$。这证明了（19），结合定理 2.1 即可得到部分（$ii$）。

步骤 2：持久性：

回顾定理 3.1，它断言 $S_{\mu_P}$ 满足持久性。当然，将 $S_{\mu_P}$ 与任意 Blaschke 乘积 $B$ 相乘后，持久性仍然保持不变。事实上，这只是因为正规族保持 $\mathbb{D}$ 内部的零点这一事实的简单推论。这就完成了（$i$）的证明。

步骤 3：证明 $[f]_{\mathcal{G}_w} = [BS_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w}$：

包含关系 $\subseteq$ 显然成立。对于反向包含，根据部分（$ii$），我们可以选取一列解析多项式 $\{Q_n\}_n$，使得 $FS_{\mu_C} Q_n$ 在 $\mathsf{G}w$ 中收敛到 1。将其乘以 $BS_{\mu_P} \in H^\infty$，可得 $fQ_n$ 在 $\mathsf{G}w$ 中收敛到 $BS_{\mu_P}$。这就得到了反向包含，因此证明完成。□

4.2. 由 Nevanlinna 函数生成的移位不变子空间。借助推论 1.2，我们现在转而证明定理 1.1。以下命题将在证明中发挥主要作用。

命题 4.1. 设 $f \in \mathsf{N} \cap \mathsf{G}w$，其 Nevanlinna 分解为 $f = \mathsf{O}f\,(S_\mu/S_\nu)\,B_\Lambda$，其中$\mu$、$\nu$ 是正互相奇异测度。那么 $S_\nu$ 在 $\mathsf{G}w$ 中是循环的，并且

$$[f]_{\mathcal{G}_w} = [fS_\nu]_{\mathcal{G}_w}.$$

证明。这里我们分两个步骤进行证明。

步骤 1： $S_\nu$的循环性：

我们首先证明 $S_\nu$ 在 $\mathsf{G}w$ 中是循环的。回忆一下，对于 $j = 1, 2$，我们可以表示为 $\mathsf{O}f = \mathsf{O}_1/\mathsf{O}_2$，其中 $\mathsf{O}_j \in H^\infty$ 为外函数。有了这一点，我们可以选取一个解析多项式序列 $\{Q_n\}_n$，使其在 $\mathsf{G}w$ 中收敛于 $f$。乘以 $S_\nu \mathsf{O}_2 \in H^\infty$ 并应用推论 1.2，我们得出 $\mathsf{O}_1 S_\mu B_\Lambda$ 属于移位不变子空间 $[\mathsf{O}_2 S_\nu]_{\mathcal{G}_w} = [S_{\nu_P}]_{\mathcal{G}_w}$。但是，推论 1.2 中 ($ii$) 的持久性表明， $S_{\nu_P}$ 整除 $S_\mu$；根据 $\mu$ 的假设， $\nu$ 互相奇异，这迫使 $\nu_P \equiv 0$成立。这说明 $\nu = \nu_C$，因此根据定理 2.1 的第 ($ii$) 部分，我们得出 $S_\nu$ 在 $\mathsf{G}w$ 中是循环的。

*Step 2: Description of* $[f]_{\mathcal{G}_w}$*:*

We now devote our attention to showing that

$$[f]_{\mathcal{G}_w} = [fS_\nu]_{\mathcal{G}_w}.$$

The inclusion $\supseteq$ vacuously holds, hence we only need to establish that $\subseteq$. To this end, we shall truncate $f$ by heigth, that is, we fix a number $N > 0$ and define the outer function

$$|\mathcal{O}_N(\zeta)| = \min\left(\left|\mathcal{O}_f(\zeta)\right|, N\right) \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Considering the function $g_N := \mathcal{O}_N S_\mu B_\Lambda \in H^\infty$, the principal step towards our goal is to deduce that

$$g_N/S_\nu \in [g_N]_{\mathcal{G}_w}, \qquad N > 0. \tag{20}$$

In order to prove this claim, we shall find inspiration from the technical lemma in [25]. To this end, consider the set of real numbers

$$M = \left\{0 \le t \le 1 : g_N/S_\nu^t \in [g_N]_{\mathcal{G}_w}\right\}$$

and note that $0 \in M$ by definition. Observe that since

$$\left|\frac{g_N(z)}{S_\nu^t(z)}\right| \le \left|\frac{g_N(z)}{S_\nu(z)}\right| \qquad z \in \mathbb{D},\ 0 < t < 1.$$

it follows that $\phi(t) = g_N/S_\nu^t$ is continuous from $[0,1]$ into $\mathcal{G}_w$ and hence $M$ is closed. Let $t_0 = \max(M)$ and suppose for the sake of obtaining a contradiction that $t_0 < 1$. Pick a number $0 < \delta < 1 - t_0$ and recall that since $S_\nu$ is cyclic in $\mathcal{G}_w$ it follows from Corollary 1.2 that $S_\nu^\delta$ is cyclic in $\mathcal{G}_{w^t}$ for any $t > 0$. Moreover, observe that $g_N/S_\nu^t$ belongs to $\mathcal{G}_{w^t}$ for any $0 < t < 1$:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} w(1-|z|)^t \left|g_N(z)/S_\nu^t(z)\right| \le \|g_N\|_{H^\infty}^{1-t} \|g_N/S_\nu\|_{\mathcal{G}_w}^t.$$

Combining these observation, we may pick a sequence of analytic polynomials $\{Q_n\}_n$ such that

$$S_\nu^\delta Q_n \to 1 \qquad \text{in } \mathcal{G}_{w^{1-t_0-\delta}},$$

然后将 $g_N/S_\nu^{t_0+\delta} \in \mathsf{G}_{w^{t_0+\delta}}$ 相乘，得到

$$(g_N/S_\nu^{t_0})Q_n \to g_N/S_\nu^{t_0+\delta} \qquad \text{in } \mathcal{G}_w.$$

现在，由于根据假设 $g_N/S_\nu^{t_0} \in [g_N]_{\mathcal{G}_w}$ $t_0 \in M$，上述论证表明 $\max(M) < t_0 + \delta \in M$。这一矛盾说明 $t_0 = 1$，因此我们得出 (20) 成立。至此，我们注意到，按构造，函数 $g := fS_\nu = \mathsf{O}_f S_\mu B_\Lambda \in \mathsf{N}^+$ 满足 $\|g_N/g\|_{H^\infty} \le 1$，故对所有 $N > 0$，都有 $[g_N]_{\mathcal{G}_w} \subseteq [g]_{\mathcal{G}_w}$。结合观察到的 $g_N/S_\nu$ 在 $\mathsf{G}_w$ 中收敛到 $g/S_\nu = f$，由 (20) 可得

$$f = g/S_\nu \in [g]_{\mathcal{G}_w} = [fS_\nu]_{\mathcal{G}_w}.$$

引理的证明至此完成。

□

现在我们完成主要定理的证明。

定理 1.1 的证明。注意，由命题 4.1 可知，$S_\nu$ 在 $(ii)$ 中的循环性成立；根据推论 1.2，只需证明 $(i)$ 中的断言，即可

$$[f]_{\mathcal{G}_w} = [B_\Lambda S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w}. \tag{21}$$

According to Proposition 4.1 we may actually assume that $f \in \mathcal{G}_w \cap \mathcal{N}^+$ with Nevanlinna factorization $f = \mathcal{O}_f S_\mu B_\Lambda$, and recall that we may also express $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_1/\mathcal{O}_2$ with $\mathcal{O}_j \in H^\infty$ outer for $j = 1, 2$. Note first that $\mathcal{O}_2 f = \mathcal{O}_1 S_\mu B$ implies that $\mathcal{O}_1 S_\mu B_\Lambda \in [f]_{\mathcal{G}_w}$, hence an application of $(i)$ from Corollary 1.2 gives the inclusion

$$[B_\Lambda S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w} = [\mathcal{O}_1 S_\mu B_\Lambda]_{\mathcal{G}_w} \subseteq [f]_{\mathcal{G}_w}. \tag{22}$$

For the reverse containment, we truncate $f$ by height, that is, we define the outer function $\mathcal{O}_N$ by

$$|\mathcal{O}_N(\zeta)| = \min\left(\left|\mathcal{O}_f(\zeta)\right|, N\right) \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D},$$

and note that

$$|\mathcal{O}_N(z)| \le \left|\mathcal{O}_f(z)\right| \qquad z \in \mathbb{D}.$$

考虑 $H^\infty$-函数 $f_N := \mathsf{O}_N S_\mu B_\Lambda$，并注意到对于每个 $N$，都有 $f_N \in [S_\mu B_\Lambda]_{\mathcal{G}_w}$。结合 $f_N$ 在 $\mathsf{G}_w$ 中收敛到 $f$ 这一事实以及推论 1.2 的第 $(i)$ 部分，我们得出

$$f \in [B_\Lambda S_\mu]_{\mathcal{G}_w} = [B_\Lambda S_{\mu_P}]_{\mathcal{G}_w}.$$

证明至此完成。 □

4.3. 若干改进与技术性说明。这里我们将简要讨论并说明我们的一些结果可实现的改进，并提出一些进一步的研究方向。首先，我们决定将注意力限制在衰减速度不快于多项式的权函数 $w$ 上，这一策略旨在使论述更加清晰。事实上，衰减速度与

$$w(t) = \exp(-\alpha \log^\beta(e/t)), \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{23}$$

同样快的权函数也可以处理，但需要在 $(A_1)$ 的基础上为我们的权函数类增加以下两个假设。

(a) 存在常数 $\kappa, C_1 > 0$ 使得

$$\sup_{0<t<1} t^n w(1-t) \le C_1 w(1/n)^\kappa, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) 存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$\int_0^\ell \log \frac{1}{w(t)} dt \le C_2 \ell \log \frac{1}{w(\ell)}, \qquad \ell > 0.$$

条件（$a$）给出了 $\mathsf{G}_w$-范数下矩的渐近衰减。在 J. Roberts 利用 Corona 定理证明内函数的循环性时，这似乎是论证中不可或缺的条件。一旦超出（23）中的权函数类，该条件便不再适用，因此，借鉴 B. Korenblum 的工作、采用线性规划的另一种方法，似乎更有希望使我们能够在某个方向上进一步扩展结果。条件（$b$）仅确保我们能够在关于 $w$-熵的不同描述之间来回转换，并且对 $w$ 的衰减速率限制宽松得多。

我们的第二条评注涉及条件（$A_1$）的用途，该条件尤其应用于第 3 节。在那里，我们旨在构造与有限 $w$-熵集合 $E$ 相关联的特殊 Privalov 星形域 $\Omega_E$，满足 $\partial\Omega_E \cap \partial\mathbb{D} = E$，以完成以下相互冲突的任务：

**(i):** $\partial\Omega_E$ is smooth enough so that any conformal map $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega_E$ has finite non-zero angular derivatives in $E$.

**(ii):** $(G_E g) \circ \varphi \in H^2(\mathbb{D})$, for all conformal map $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega_E$.

注意，条件（$ii$）意味着奇异内因子 $S_\mu \bigcirc \varphi$ 尽可能大，参见定理 3.2。结合（ii），我们由此得以获得奇异内函数循环性与保持原理之间的精确二分。$\Omega_E$ 越规则，条件（ii）就越难满足，除非对 $w$ 作出额外假设。特别是，如果 $w$ 衰减得足够快，那么为了推出（ii），似乎需要涉及调和测度的更精确估计。在小节 3.2 中，我们利用经典的 Kellogg 定理，通过相当初等的方法“平滑”了典型 Privalov 星形域的角点

。关于出于其他目的而构造更复杂的 Privalov 星形域，我们请读者参阅 [22] 中的近期研究。

现在我们对研究过程中出现的一些相关问题作些说明。正如引言中简要提到的，对于权函数$w$ 的某些衰减速率，熵的概念不再在内函数循环性问题中发挥决定性作用。以下结果源于 T. Carleman、M. Keldysh、A. Beurling 和 N. Nikolskii 早期独立开展的工作；该结果断言，满足某些温和正则性假设的权函数 $w$ 满足以下条件

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{|\log w(t)|}{t}}\,dt = \infty \tag{24}$$

当且仅当任意奇异内函数在相应的增长空间 $\mathsf{G}_w$中都是循环的。参见 [6], [14] ，其中有关于该问题的历史描述以及上述结果的最新改进。我们的方法无法涵盖、且上述条件（24）不成立的一类自然权函数由 $w(t) = \exp(-t^{\alpha-1})$ 给出，其中 $0 < \alpha < 1$；相应的有限 $w$-熵集通常称为 $\alpha$-Beurling-Carleson 集，它们是满足以下条件的勒贝格测度为零的闭集 $E \subset \partial\mathbb{D}$

$$\sum_k m(I_k)^\alpha < \infty.$$

其中，$\{I_k\}_k$ 表示 $\partial\mathbb{D} \setminus E$ 的连通分支。我们计划在后续工作中进一步研究这些问题，并请读者参阅 [22] 以及 [30] 中对相关问题的研究。

## 5. Regular functions in model spaces

本节旨在确立我们在定理 1.3 中提出的主要应用。在整个本小节中，我们假设 $w$ 是满足条件（$A_2$）的连续模，并令 $0 < \alpha < 1$ 表示其中出现的特定常数。

**5.1.** 用模型空间表述柯西对偶。我们需要确定增长空间 $\mathsf{G}_w$ 的柯西对偶（$\mathsf{G}_w$）′，也就是说，我们希望将在 $\mathsf{G}_w$ 上的连续线性泛函确定为在 $\partial\mathbb{D}$ 上按照柯西$H^2$-配对所考虑的 $\mathbb{D}$ 中某一类解析函数。换言之，我们寻找 $\mathbb{D}$ 中的解析函数 $f$，使得极限

$$\ell_f(g) := \lim_{r\to 1-} \int_{\partial\mathbb{D}} g(r\zeta)\overline{f(r\zeta)}\,dm(\zeta) \tag{25}$$

exists for any $g \in \mathcal{G}_w$ and defines a bounded linear functional on $\mathcal{G}_w$. To this end, note that if $f$ is analytic in $\mathbb{D}$ and $g$ is an element in $\mathcal{G}_w$, an application of Green's formula gives

$$\int_{\partial\mathbb{D}} g(r\zeta)\overline{f(r\zeta)}\,dm(\zeta) = g(0)\overline{f(0)} + r\int_{\mathbb{D}} g(rz)\overline{f'(rz)}dA(z), \qquad 0 < r < 1.$$

We claim that any analytic function $f$ in $\mathbb{D}$ satisfying

$$\|f\|_{\mathcal{F}_w} := |f(0)| + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|\frac{dA(z)}{w(1-|z|)} < \infty$$

induces a bounded linear functional on $\mathcal{G}_w$ in the Cauchy $H^2$-pairing given by (25). We shall denote this class of functions by $\mathcal{F}_w$. To see this, fix an $f \in \mathcal{F}_w$ and apply Green's formula to

the difference of dilations $g_r - g_\rho$ with $g \in \mathcal{G}_w$ to obtain

$$\left| \int_{\partial\mathbb{D}} (g(r\zeta) - g(\rho\zeta))\, \overline{f(r\zeta)}\, dm(\zeta) \right| \le C \|g_r - g_\rho\|_{\mathcal{G}_w} \|f\|_{\mathcal{F}_w}.$$

由于膨胀算子在 $\mathrm{G}_w$ 中连续，柯西判别法表明，对任意 $f \in \mathrm{G}_w$，只要 $f \in \mathrm{F}_w$，$\ell_f(g)$ 就存在。因此我们得出结论：

$$\mathcal{F}_w \subseteq (\mathcal{G}_w)'.$$

这一包含关系已足以满足我们的目的，但实际上可以证明，$\mathrm{F}_w$ 与 $(\mathrm{G}_w)'$ 同构，且范数等价。接下来的结果使我们能够重新表述内函数 $\Theta$ 的循环性问题，以及相应模型空间 $K_\Theta$ 中某些函数的存在性问题。

引理 5.1. 设 $X \supset H^\infty$ 为一个 Banach空间，其中解析多项式稠密，并令 $X'$ 表示其柯西对偶。那么，内函数 $\Theta$ 在 $X$ 中是循环的，当且仅当 $X' \cap K_\Theta = \{0\}$。

证明. 我们首先注意到，$X \supset H^\infty$ 蕴含 $X' \subseteq H^2$，因此 $X$ 的柯西对偶元素在 $\partial\mathbb{D}$ 上几乎处处都有定义良好的边界值 $m$。现在，若 $\Theta$ 在 $X$ 中是循环的，那么只要 $f \in X'$，就有

$$\int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{\Theta(\zeta)\zeta^n} dm(\zeta) = 0, \qquad \forall n \ge 0, \tag{26}$$

我们必须有 $f \equiv 0$，这等价于 $X' \cap K_\Theta = \{0\}$。另一方面，若 $\Theta$ 在 $X$中不是循环的，那么根据 Hahn-Banach 分离定理，存在一个非零函数$f \in X'$ 满足 (26)。但包含关系 $X' \subseteq H^2$ 结合 F. 和 M. Riesz 定理，很容易推出 $f \in K_\Theta$，因此交集 $X' \cap K_\Theta$ 包含 $f$，从而非平凡。

□

接下来的引理是再生核希尔伯特空间理论中一个一般结果的特例，对我们的研究很有用。为求完整，我们简要概述其证明。

引理 5.2. 设 $\{\Theta_n\}_n$ 是一列内函数，具有如下性质：每个 $\Theta_n$ 都是 $\Theta_{n+1}$ 的因子，且对所有 $z \in \mathbb{D}$，$\lim_{n\to\infty} \Theta_n(z) = \Theta(z)$。那么 $\cup_n K_{\Theta_n}$ 是 $K_\Theta$ 的稠密子集。此外，若 $S \subseteq H^2$ 是一个集合，且对每个 $n$，$S \cap K_{\Theta_n}$ 在 $K_{\Theta_n}$ 中稠密，那么 $S \cap K_\Theta$ 在 $K_\Theta$ 中稠密。

*Proof-sketch:* Since each $\Theta_n$ divides $\Theta_{n+1}$ and $\Theta_n \to \Theta$ converges pointwise in $\mathbb{D}$, we have the chain of inclusions $K_{\Theta_n} \subseteq K_{\Theta_{n+1}} \subseteq K_\Theta$, hence we conclude that

$$\bigcup_n K_{\Theta_n} \subseteq K_\Theta.$$

注意，在 $K_\Theta$ 中的任意再生核都可以逐点地由 $\mathbb{D}$ 中的再生核进行逼近，其中 $n$ 可变，且 $H^2$-范数一致有界，因此在 $K_\Theta$ 中也弱收敛。利用 Banach-Saks 的论证表明，相应再生核的凸组合在 $H^2$-范数下收敛，这足以以自然的方式推出 $\cup_n K_{\Theta_n}$ 在 $K_\Theta$ 中稠密。第二个结论现在直接由第一个结论得到。

□

5.2. $\mathcal{A}_w$ 中函数的正则性。粗略地说，下面的引理表明，如果 $w$ 是一个连续模，并且对于某个满足 $\alpha > 0$ 的 $w^\alpha$，其某个幂满足 Dini 条件，那么 Cauchy 投影不会过度扭曲连续模。

引理 5.3. 设 $w$ 是一个连续模，并假设存在常数 $\alpha > 0$，使得 $w^{1+\alpha}$ 是一个连续模，且

$$\int_0^1 w^\alpha(t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

那么，柯西投影 $P_+$ 将 $C_{w^{\alpha+1}}(\partial\mathbb{D})$ 连续映入 $\mathrm{A}_w$。

证明. 回顾柯西投影 $P_+$ 将 $C_{w^{\alpha+1}}(\partial\mathbb{D})$ 映入 $\mathrm{A}_{\widetilde{w}}$，其中 $\widetilde{w}$ 是满足下列条件的主函数

$$\widetilde{w}(\delta) \le C\int_0^\delta \frac{w^{\alpha+1}(t)}{t}dt + \delta\int_\delta^1 \frac{w^{\alpha+1}(t)}{t^2}dt, \qquad 0 \le \delta \le 1$$

对某个与 $\delta$ 无关的常数 $C > 0$ 成立（例如，参见[15]第三章的定理 1.3）。由 $w^\alpha$ 的 Dini 条件以及假设 $w(t)/t$ 几乎递减可立即推出

$$\int_0^\delta \frac{w^{\alpha+1}(t)}{t}dt + \delta\int_\delta^1 \frac{w^{\alpha+1}(t)}{t^2}dt \le w(\delta)\int_0^1 \frac{w^\alpha(t)}{t}dt =: C'w(\delta).$$

这表明 $\mathrm{A}_{\widetilde{w}} \subseteq$ 包含于 $\mathrm{A}_w$，因此 $P_+ : C_{w^{\alpha+1}}(\partial\mathbb{D})$ 连续地映入 $\to \mathrm{A}_w$。 □

Next we shall need a lemma which asserts that the derivative of a function in $\mathcal{A}_w$ satisfies a certain radial growth restriction.

**Lemma 5.4.** *Let $w$ be a modulus of continuity. Then there exists a universal constant $C > 0$, such that any function $f \in \mathcal{A}_w$ enjoys the growth restriction*

$$|f'(z)| \le C\|f\|_{\mathcal{A}_w}\frac{w(1-|z|)}{1-|z|}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{27}$$

A neat and short proof of this fact is provided by Lemma 2 in [31]. With this lemma at hand, we now verify that functions in $\mathcal{A}_w$ are Cauchy dual-element of growth spaces $\mathcal{G}_{w^p}$ for a certain range of $p > 0$.

**Lemma 5.5.** *Let $w$ be a modulus of continuity satisfying condition $(A_2)$ and $0 < p < 1 - \alpha$. Then we have the containment $\mathcal{A}_w \subseteq \mathcal{F}_{w^p}$.*

*Proof.* Pick an arbitrary function $f \in \mathcal{A}_w$. According to Lemma 5.4, we have

$$|f'(z)| \le C\|f\|_{\mathcal{A}_w}\frac{w(1-|z|)}{1-|z|}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Using this we get

$$\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|\frac{dA(z)}{w(1-|z|)^p} \le C\|f\|_{\mathcal{A}_w}\int_{\mathbb{D}}\frac{w^{1-p}(1-|z|)}{1-|z|}dA(z) \le C'\|f\|_{\mathcal{A}_w}\int_0^1 \frac{w^{1-p}(t)}{t}dt.$$

假设 $\alpha < 1 - p$ 以及条件（$A_2$）确保积分是有限的，因此我们得出结论： $P_+$ 将 $\mathrm{A}_w$ ⊆映射到 $\mathrm{F}_{w^p}$。

□

正如我们将要看到的，定理 1.3 的证明需要一个关于 $\mathsf{A}_w$ 中函数的内因子的深刻结果，该结果由 N.A. Shirokov 于 [35], 提出，并将使我们能够在模型空间 $K_{S_\mu}$ 中构造 $\mathsf{A}_w$-函数，其中所涉及的奇异测度 $\mu$ 支撑于有限 $w$-熵集上。Shirokov 的定理断言，对于任意支撑于有限 $w$-熵集$E \subset \partial\mathbb{D}$ 中的正有限奇异博雷尔测度 $\mu$ ，存在一个外函数 $f \in \mathsf{A}_w$ ，使得 $fS_\mu \in \mathsf{A}_w$。不过，就我们的目的而言，我们还需要以下简单的修改，现陈述如下，以备后续参考。

**Theorem 5.6** (Shirokov)**.** *Let $w$ be a modulus of continuity and $E \subset \partial\mathbb{D}$ be a set of finite $w$-entropy. Then for any positive finite singular Borel measure $\mu$ supported on $E$, there exists an outer function $f$ in $\mathcal{A}_w$ such that the product $\overline{f}S_\mu$ belongs to $C_w(\partial\mathbb{D})$.*

*Proof.* Let $f$ be the outer function in $\mathcal{A}_w$ that satisfies $fS_\mu \in \mathcal{A}_w$ from Shirokov's Theorem. Now note that if $\zeta, \xi \in \partial\mathbb{D}$, then by triangle inequality

$$\left|\overline{f(\zeta)}S_\mu(\zeta) - \overline{f(\xi)}S_\mu(\xi)\right| = |f(\zeta)S_\mu(\xi) - f(\xi)S_\mu(\zeta)| \le 2|f(\zeta) - f(\xi)| + |fS_\mu(\xi) - fS_\mu(\zeta)|.$$

The claim now readily follows from the fact that both $f$ and $fS_\mu$ belong to $\mathcal{A}_w$. □

5.3. **Approximation in model spaces.**

定理 1.3 的证明。证明分为几个步骤。

步骤 1：$\mathsf{A}_w$ 函数的存在性：

我们先证明，如果 $\mu$ 不对任何有限 $w$-熵集赋予正测度，那么 $\mathsf{A}_w \cap K_{S_\mu} = \{0\}$。注意， $E$ 具有有限 $w$-熵，当且仅当对任意 $p > 0$，它都是有限 $w^p$-熵；因此，根据推论 1.2 $S_\mu$ ，对任意 $p > 0$， 1.2 $S_\mu$ 在 $\mathsf{G}_{w^p}$ 中是循环的。由引理 5.1，这等价于

$$(\mathcal{G}_{w^p})' \cap K_{S_\mu} = \{0\}, \qquad p > 0.$$

取满足条件（$A_2$）的 $0 < p < 1 - \alpha$ ，由引理 5.5 中的包含关系 $\mathsf{A}_w \subseteq \mathsf{F}_{w^p}$ ，可知 $\mathsf{A}_w \cap K_{S_\mu} = \{0\}$ 也成立。

反过来，假设 $\mu$ 对一个 $w$-集 $E \subset \partial\mathbb{D}$ 赋予正测度，并令 $\nu := \mu|_E$。我们先证明存在一个非平凡函数 $f \in \mathsf{A}_w \cap K_{S_\nu}$。完成这一步后，定理 1.3 的（$i$）部分即得证。同样注意到，由于 $E$ 是一个 $w$-集，对任意 $p > 0$ 它也是一个 $w^p$-集；并回忆假设（$A_2$）保证存在一个数 $0 < \alpha < 1$ ，使得 $w^{\alpha+1}$ 是连续模，且 $w^\alpha$ 满足 Dini 条件。根据定理 5.6，存在一个外函数$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$属于 $\mathsf{A}_{w^{\alpha+1}}$，使得 $\overline{f}S_\mu \in C_{w^{\alpha+1}}(\partial\mathbb{D})$。特别地，若 $k_\lambda(\zeta) := 1/(1 - \zeta\overline{\lambda})$表示满足 $\lambda \in \mathbb{D}$的柯西核，则每个函数 $g_\lambda := \overline{f}S_\nu k_\lambda$都属于 $C_{w^{\alpha+1}}(\partial\mathbb{D})$。根据引理 5.3，可得对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$， $P_+(g_\lambda) \in \mathsf{A}_w$。现在，由于余解析符号 $f$ 对应的 Toeplitz 算子在 $\partial\mathbb{D}$上保持光滑函数，我们有 $T_{\overline{f}}(k_\lambda)$

is also smooth on $\partial\mathbb{D}$, hence in particular belongs to $\mathcal{A}_w$. Now if $\kappa_{S_\nu}(z, \lambda) = \frac{1-\overline{S_\nu(\lambda)}S_\nu(z)}{1-\overline{\lambda}z}$ with $z, \lambda \in \mathbb{D}$ denotes the reproducing kernels of the model space $K_{S_\nu}$, we conclude that for any $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$T_{\overline{f}}(\kappa_{S_\nu}(\cdot, \lambda))(z) = T_{\overline{f}}(k_\lambda)(z) - \overline{S_\nu(\lambda)}P_+(g_\lambda)(z)$$

is function belonging to $\mathcal{A}_w \cap K_{S_\nu}$. This establishes that $\mu$ does not charge any $w$-set if and only if $\mathcal{A}_w \cap K_{S_\mu} = \{0\}$.

*Step 2: Density of $\mathcal{A}_w$ functions:*

We now turn to proof of the statement about density. To this end, we first establish the claim that the linear span of $\{T_{\overline{f}}(\kappa_{S_\nu}(\cdot, \lambda))\}_{\lambda \in \mathbb{D}}$ defined in the previous paragraphs is in fact

a dense subset of $K_{S_\nu}$. To see this, let $g \in K_{S_\mu}$ be an annihilator of set, that is

$$\int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta)g(\zeta)\overline{\kappa_{S_\nu}(\zeta,\lambda)}dm(\zeta) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{D}.$$

但这意味着 $fg \in (K_{S_\nu})^\perp = S_\nu H^2$，由于 $f$是外函数，我们可以得出函数$g \in K_{S_\nu} \cap S_\nu H^2 = \{0\}$。这证明了 $\mathsf{A}_w \cap K_{S_\nu}$ 在 $K_{S_\nu}$中是稠密的。事实上，由于任意有限 Blaschke 乘积 $B_0$ 都可以解析延拓穿过 $\partial\mathbb{D}$，按照之前的相同论证，实际上可知，对于任意有限 Blaschke 乘积 $B_0$ 以及支撑于 $w$-集上的奇异测度 $\nu$，$\mathsf{A}_w \cap K_{B_0 S_\nu}$ 在 $K_{B_0 S_\nu}$ 中都是稠密的。

步骤 3：$\mathsf{A}_w \cap K_{BS_{\mu_P}}$在 $K_{BS_{\mu_P}}$中稠密：

为证明一般情形，固定任意 Blaschke 乘积 $B$，记 $\{B_N\}_N$ 为 $B$ 的一列有限截断，它们在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛于 $B$。根据 $\mu_P$的定义，存在一列递增的集合并 $\{E_N\}_N$，其中每个集合都具有有限 $w$-熵（有限熵集的有限并仍具有有限 $w$-熵），并且 $\nu_N := \mu_{E_N}$ 在全变差范数下递增收敛至 $\mu_P$。现在我们构造由 $\Theta_N = B_N S_{\nu_N}$定义的内函数序列 $\{\Theta_N\}_N$，容易验证 $\Theta_N$在 $\mathbb{D}$ 上逐点收敛于 $BS_{\mu_P}$，并且根据构造，每个 $\Theta_N$ 都是 $BS_{\mu_P}$的一个因子。根据步骤 2 中的论证，对于每个 $N$，$\mathsf{A}_w \cap K_{\Theta_N}$在 $K_{\Theta_N}$中都是稠密的；因此调用引理 5.2，我们得出 $\mathsf{A}_w \cap K_{BS_{\mu_P}}$在 $K_{BS_{\mu_P}}$中稠密，从而证明了关于稠密性这一命题的一个方向。步骤 4：证明 $\mathsf{A}_w \cap K_\Theta$ 的闭包等于 $K_{BS_{\mu_P}}$：

现在还需推导出本步骤标题中所表述的结论。记 $\Theta = \Theta_P\Theta_C$，其中 $\Theta_P := BS_{\mu_P}$ 且 $\Theta_C := S_{\mu_C}$，并回忆一下，利用再生核进行简单计算可得 $K_\Theta$ 中的如下正交分解

$$K_\Theta = K_{\Theta_P} \oplus \Theta_P K_{\Theta_C}.$$

现在任取一个元素 $g \in H^\infty \cap K_{\Theta_C}$（例如，$K_{\Theta_C}$ 中的任意再生核均可），注意到根据推论 1.2 的 $(i)$，我们可以找到一个解析多项式序列 $\{Q_n\}_n$，使得对于任意 $p > 0$，$\Theta_C Q_n$ 在 $\mathsf{G}_{w^p}$ 中收敛于 $g$。两边乘以 $\Theta_P$ 后，我们得到 $\Theta Q_n$ 在 $\mathsf{G}_{w^p}$ 中收敛于 $\Theta_P g$。现在利用引理 5.5，可得 $\mathsf{A}_w \subset (\mathsf{G}_{w^p})'$ 对于 $0 < p < 1 - \alpha$ 成立，因此对于任意 $f \in \mathsf{A}_w \cap K_\Theta$，我们有

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \Theta_P(\zeta)g(\zeta)\overline{f(\zeta)}dm(\zeta) = \lim_n \int_{\partial\mathbb{D}} \Theta(\zeta)Q_n(\zeta)\overline{f(\zeta)}dm(\zeta) = 0.$$

This argument shows that for any $g \in H^\infty \cap K_{\Theta_C}$ the product $\Theta_P g$ is contained in $(\mathcal{A}_w \cap K_\Theta)^\perp$. Taking closures and using the fact that reproducing kernels are dense, we obtain the containment $(K_{\Theta_P})^\perp = \Theta_P K_{\Theta_C} \subseteq (\mathcal{A}_w \cap K_\Theta)^\perp$, which implies that the closure of $\mathcal{A}_w \cap K_\Theta$ in $K_\Theta$ is contained in $K_{\Theta_P}$. Using this in conjunction with the previously established claim that $\mathcal{A}_w \cap K_{\Theta_P} \subseteq \mathcal{A}_w \cap K_\Theta$ is dense in $K_{\Theta_P}$, we actually conclude that the closure of $\mathcal{A}_w \cap K_\Theta$ equals $K_{\Theta_P}$. This completes the proof of the theorem.

□

## References

[1] A. B. Aleksandrov, *Invariant subspaces of shift operators. An axiomatic approach*, 列宁格勒数学研究所斯捷克洛夫数学研究所科学研讨会记录（LOMI），113（1981），第 7–26 页，264。[2] A. Aleman, S. Richter, and C. Sundberg, *Beurling's Theorem for the Bergman space*,《数学学报》，177（1996），第 275–310 页。[3] J. Anderson, J. Fernandez, and A. L. Shields, *Inner functions and cyclic vectors in the Bloch space*,《美国数学会汇刊》，323（1991），第 429–448 页。

[4] R. Berman, L. Brown, and W. Cohn, *Cyclic vectors of bounded characteristic in Bergman spaces.*, 《密歇根数学杂志》, 31（1984）, 第 295–306 页。[5] R. D. Berman, L. Brown, and W. S. Cohn, *Moduli of continuity and generalized BCH sets*, 《落基山数学杂志》, 17（1987）, 第 315–338 页。[6] A. Borichev, O. El-Fallah, and A. Hanine, *Cyclicity in weighted Bergman type spaces*, 《纯粹与应用数学杂志》, 102（2014）, 第 1041–1061 页。[7] Borichev, A, *Invariant subspaces of given index in Banach spaces of analytic functions*, 《纯粹与应用数学杂志》, 505（1998）, 第 23–44 页。[8] P. Bourdon, *Cyclic Nevanlinna class functions in Bergman spaces*, 《美国数学学会会刊》, 93（1985）, 第 503–506 页。[9] A. Bourhim, O. El-Fallah, and K. Kellay, *Boundary behaviour of functions of Nevanlinna class*, 《印第安纳大学数学杂志》, （2004）, 第 347–395 页。[10] B. Bouya, *Closed ideals in analytic weighted Lipschitz algebras*, 《数学进展》, 219（2008）, 第 1446–1468 页。[11] L. Carleson, *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*, 《数学学报》, 87（1952）, 第 325–345 页。[12] J. Cima, A. Matheson, and W. Ross, *The Cauchy transform*, 《数学调查与专著》第 125 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2006 年。[13] K. Dyakonov and D. Khavinson, *Smooth functions in star-invariant subspaces*, 《当代数学》, 393（2006）, 第 59–66 页。[14] O. El-Fallah, K. Kellay, and K. Seip, *Cyclicity of singular inner functions from the corona theorem*, 《朱西厄数学研究所杂志》, 11（2012）, 第 815–824 页。[15] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, 第 236 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2007 年。[16] J. B. Garnett and D. E. Marshall, *Harmonic measure*, 第 2 卷, 剑桥大学出版社, 2005 年。[17] D. Girela, C. González, and J. Á. Peláez, *Toeplitz operators and division by inner functions*, 《算子理论与复分析高级课程论文集》, （2006）, 第 85 页。[18] A. Hanine, *Cyclic vectors in Korenblum type spaces*, 《斯堪的纳维亚数学学报》, （2015）, 第 53–85 页。[19] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, *Beurling type invariant subspaces of the Bergman spaces*, 《伦敦数学学会杂志》, 53（1996）, 第 601–614 页。[20] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, 《数学研究生教材》第 199 卷, 施普林格出版社, 纽约, 2000 年。[21] O. Ivrii and U. Kreitner, *Critical values of inner functions*, arXiv 预印本 arXiv:2212.14818, （2022）。[22] O. Ivrii and A. Nicolau, *Beurling-Carleson sets, inner functions and a semi-linear equation*, arXiv 预印本 arXiv:2210.01270, （2022）。[23] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, 《数学学报》, 135（1975）, 第 187–219 页。[24] B. Korenblum, *A Beurling-type theorem*, 《数学学报》, 138（1977）, 第 265–293 页。[25] B. Korenblum, *Cyclic elements in some spaces of analytic functions*, 《美国数学学会公报》, 5（1981）, 第 317–318 页。[26] B. Korenblum, *On a class of Banach spaces of functions associated with the notion of entropy*, 《美国数学会汇刊》, 290（1985）, 第 527–553 页。[27] A. Limani and B. Malman, *An abstract approach to approximation in spaces of pseudocontinuable functions* 150 2022 2509 2519 ,《美国数学学会会刊》, （ ）, 第 – 页。[28] , *On model spaces and density of functions smooth on the boundary*, 《伊比利亚美洲数学杂志》, （2022）。[29] B. Malman, *Cyclic inner functions in growth classes and applications to approximation problems*, 《加拿大数学公报》, （2022）, 第 1–12 页。[30] , *Revisiting mean-square approximation by polynomials in the unit disk*, arXiv 预印本 arXiv:2304.01400, （2023年）。[31] M. Pavlovic, *On Dyakonov's paper Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions*, 《数学学报-迪尔斯霍尔姆》, 183（1999）, 第 141 页。[32] S. Richter and C. Sundberg, *Multipliers and invariant subspaces in the Dirichlet space*, 《算子理论杂志》, （1992）, 第 167–186 页。[33] J. Roberts, *Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in $H^p$, $0 < p < 1$*, 《伊利诺伊州数学杂志》, 29（1985）, 第 25–38 页。

[34] H. Shapiro, *Some remarks on weighted polynomial approximations of holomorphic functions*, 《苏联数学-Sbornik》, 2（1967）, 第 285 页。[35] N. A. Shirokov, *Zero sets for functions from* $\Lambda_\omega$, 《POMI 科学研讨会纪要》, 107（1982）, 第 178–188 页。[36] P. Tamrazov,
*Contour and solid structure properties of holomorphic functions of a complex variable*, 《俄罗斯数学评论》, 28（1973）, 第 141 页。[37] B. A. Taylor and D. L. Williams,
*Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*, 《加拿大数学杂志》, 22（1970）, 第 1266–1283 页。