舒尔稳定三项式的一般复系数稳定性区域

GERARDO BARRERA

赫尔辛基大学，数学与统计学系。邮政信箱*68*号，*Pietari Kalmin katu 5*，*FI-00014*。赫尔辛基，芬兰。*gerardo. barreravargas@ helsinki. fi https: // orcid. org/ 0000-0002-8012-2600*

WALDEMAR BARRERA

数学学院，尤卡坦自治大学。北环路*CAT 13615*号地块，梅里达，尤卡坦，墨西哥。*bvargas@ correo. uady. mx https: // orcid. org/ 0000-0001-6885-5556*

JUAN PABLO NAVARRETE

尤卡坦自治大学数学学院。北环路*CAT 13615*号地块，墨西哥尤卡坦梅里达。*jp. navarrete@ correo. uady. mx https: // orcid. org/ 0000-0002-3930-4365*

arXiv:2304.09147v2 [math.CV] 8 Sep 2023

摘要。本文刻画了形如$f(\zeta) := a\zeta^n + b\zeta^m + c$, $\zeta \in \mathbb{C}$的三项式的稳定区域，其中 a、b 和 c 是非零复数，并且n，$m \in \mathbb{N}$ 满足 $n > m$。更确切地说，我们给出了系数 a、b 和 c 的充要条件，使得三项式 f 的所有根都属于复平面中的开单位圆盘。证明基于1908年引入的Bohl定理 [7]。

目录

1.**引言** 21.1. **稳定性问题** 21.2.**预备知识** 31.3. **主要结果及其推论** 5

2020 数学主题分类。主要分类 12D10、26C10、30C15；次要分类 93D23、11B37。关键词和短语。自回归过程；Bohl定理；特征多项式；Hurwitz多项式；线性延迟差分方程；定位；射影平面；三项式方程；Schur多项式；稳定性。*通讯作者：Gerardo Barrera。

2. **主要结果：定理 1.3 的证明** 142.1. **开区间的算术性质** 142.2. **定理 1.3 的证明** 18 附录 A. **奇偶性论证及到实数情形的投影** 19A.1. **推论 1.14 的证明** 21 附录 B. **Bohl定理** 22**声明** 24 参考文献 25

1. 引言

1.1. 稳定性问题。 在应用中，对给定多项式的根进行计算并定量确定其位置是普遍存在的需求。近年来，数学和应用数学领域已产生了大量相关文献。众所周知，线性离散动力系统（例如线性递推方程，广泛应用于应用数学和计算机科学，用于模拟依赖于有限序列的过程未来的发展）渐近稳定，当且仅当其对应的特征多项式的所有根的复模都严格小于一。当一个多项式的所有根的复模都严格小于一时，该多项式称为舒尔稳定多项式。舒尔稳定多项式这一概念源于对动力系统稳定性的研究，尤其是所谓的控制理论。

回顾一下，具有常系数和两个延迟的一般线性递推方程定义如下。给定复数初始序列 φ_0，φ_1，…，φ_{n-1}，令 $(\varphi(t))_{t\geq n}$ 为离散时间初值问题的唯一解

$$\begin{cases} X(t) = -bX(t-(n-m)) - cX(t-n) & \text{for} \quad t \in \{n, n+1, n+2, \dots, \}, \\ X(t) = \varphi_t & \text{for} \quad t \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 b 和 c 是非零复数，且 n，$m \in \mathbb{N}$ 满足 $n > m$。(1.1) 中的时间位移$n-m$和 n 称为延迟。众所周知，与 (1.1) 相关联的特征多项式为 $T(\zeta) := \zeta^n + b\zeta^m + c$, $\zeta \in \mathbb{C}$, 因此，动力系统 (1.1) 渐近稳定，当且仅当 T是舒尔稳定多项式。关于线性递推方程理论的更多细节，请参阅专著 [29,39, 52]。

具有实系数的 (1.1) 形式的离散时间稳定动力系统已广泛用于建模。例如，在数值分析中，它们用于对所谓的线性延迟微分方程进行数值离散化；在数学生物学中，用于各种离散种群增长模型的线性化过程；在金融数学中，用于确定利率、贷款摊还和价格波动；在概率论中，用于所谓的马尔可夫链第一步分析；在统计学中，用于自回归线性模型，见 [9, 20, 23, 29, 47, 60]。具有复系数的 (1.1) 形式的系统则自然出现在对线性递推方程系统的研究中，例如带有单个延迟的离散时间 Hopfield网络线性化模型，或某些离散时间种群动力学模型的局部稳定性分析，见 [33, 41, 44, 50]。

由于具有常系数和两个延迟的线性递推方程的稳定性等价于三项式的舒尔稳定性，本文对以下形式三项式的

稳定区域进行参数化

$$f(\zeta) := a\zeta^n + b\zeta^m + c, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

其中 a、b 和 c 是复数，且 n，$m \in \mathbb{N}$，其中 $n > m$。换言之，我们给出了复系数 a、b 和 c 的充要条件，使得 f 的所有根都属于复平面中的开单位圆盘。在这种情况下，我们称 (1.2) 是一个*Schur*稳定三项式。当系数 a、b 或 c 中有些为零时，后一结论显然成立。事实上，我们注意到

$$f \text{ is a Schur stable trinomial if and only if } \begin{cases} |c|/|b| < 1 & \text{for } a = 0 \text{ and } b \neq 0, \\ |c| < 1 & \text{for } a = 0 \text{ and } b = 0, \\ |c|/|a| < 1 & \text{for } a \neq 0 \text{ and } b = 0, \\ |b|/|a| < 1 & \text{for } a \neq 0,\, b \neq 0 \text{ and } c = 0, \end{cases}$$

其中 $|\cdot|$ 表示复模。因此，不失一般性，我们总是假设 a、b 和 c 是非零复数。

P. Ruffini、N. H. Abel 和 É. Galois 的著名研究表明，对于 $n \geq 5$，一般而言，不存在用根式表示 (1.2) 根的公式。我们推荐参考 [8,48, 59] 中关于多项式的专著，以及 [57] 中关于多项式求解简史的介绍。由于具有理论重要性且有广泛应用，实系数形式为 (1.2) 的三项式一直是众多定性和定量研究的对象，参见 [6] 及其中的参考文献列表。大量文献研究了系数为实数时三项式的根的位置，包括根的级数表示以及稳定区域的形状，参见 [2, 3, 9,10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 43, 45, 46, 49, 50,54, 55, 58, 61, 62, 65, 67]。对于复系数三项式，其根的模的上下界也已在 [18, 25, 43, 50, 56,66] 中得到。研究者还从几何、拓扑和动力学视角研究了三项式，参见例如 [1, 4, 5, 7, 30, 31, 40, 42, 51, 53, 63, 64] 及其中的参考文献。利用 Cohn降阶法（参见 [21]或 [48]中的引理 42.1），实系数三项式的稳定区域已在 [15] 中给出。最近， [14]中的作者将 Bohl定理（见下文定理 1.1）应用于实系数三项式，并得到了 [15] 中的结果。然而，据我们所知，对于复系数情形，利用 Bohl定理尚未得到完整刻画，而且该情形无法直接由实数情形推出；关于复数情形计数论证中的困难，请参见第 1.2 小节。

1.2. 预备知识。 在整篇手稿中， $n > m > 0$ 保持固定。我们的主要工具是 [7]中给出的 Bohl定理。根据非负数 $|a|r^n$、$|b|r^m$ 和 $|c|$ 是否为某个三角形（包括退化三角形）的边长，Bohl定理给出了半径为 r 且以原点为中心的开球内方程（1.2）的根的数量。Bohl定理如下:

定理 1.1 （三项式的Bohl定理 [7, 14]）。
假设 n 和 m 是互质数。令 $r > 0$，并假设 $|a|r^n$、$|b|r^m$ 和 $|c|$ 是某个三角形的边长（除下述情形外，该三角形可以是退化的）。令 ω_1 和 ω_2 分别为与边长为 $|a|r^n$ 和 $|b|r^m$ 的边相对的角。那么，(1.2) 在半径为 r 的开圆盘内的根的个数， $D_r := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$,

等于开区间 $(P-\omega(r)\ P+\omega(r))$ 中整数的个数，其中

$$P:=\frac{n(\beta-\gamma+\pi)-m(\alpha-\gamma+\pi)}{2\pi},\qquad \omega(r):=\frac{n\omega_1+m\omega_2}{2\pi}, \tag{1.3}$$

且 α、 β、 γ 分别是 a、 b、 c的辐角。然而，当 $|b|r^m=|a|r^n+|c|$、$r^{n-m}>\frac{m|b|}{n|a|}$ 和 $P+\omega\ (r)$ 为整数时，式（1.2）在 D_r 中的根数等于 m。

此外，当 $|a|r^n$、 $|b|r^m$ 和 $|c|$ 不是任何三角形的边长时，

$$\text{如果}\,|c|>|a|r^n+|b|r^m,\ \text{则式}\ f\ \text{在}\ (1.2)\ \text{中给出的根数为}\ D_r=\begin{cases}0 & ;\ \text{如果}\,|b|r^m>|a|r^n+|c|,\ \text{则为}\\ n & \\ m & ;\ \text{如果}\,|a|r^n>|b|r^m+|c|.,\ \text{则为}\ n\end{cases} \tag{1.4}$$

注 1.2（例外情形）。

*Bohl*定理的原始表述在 [7] 中还包含另外两个例外，参见附录 *B* 中定理 *B.1* 的条目（*a*）和条目（*b*）。然而，当 n 和 m是互质数时，这些例外已包含在定理 *1.1* 中，即三角形退化的情形。我们将在附录 *B* 中对此进行详细讨论。

从现在起直到本手稿结尾，我们假设 $a=1$ ，并有意宽泛地使用记号，写作

$$f(\zeta):=\zeta^n+b\zeta^m+c,\quad \zeta\in\mathbb{C}. \tag{1.5}$$

我们先给出以下观察。若 $\gcd(n,m)=\ell\in\{2,3,\dots,m\}$，其中 gcd 表示最大公因数函数，则令 $\widetilde{n}:=n/\ell$ 和 $\widetilde{m}:=m/\ell$，它们满足 $\gcd(\widetilde{n},\widetilde{m})=1$。那么，经过变量替换 $\zeta\mapsto\zeta^\ell$ 可得： f 是舒尔稳定三项式，当且仅当

$$\widetilde{f}(\zeta):=\zeta^{\widetilde{n}}+b\zeta^{\widetilde{m}}+c,\quad \zeta\in\mathbb{C}\quad \text{is a Schur stable trinomial.}$$

因此，不失一般性，从此处直到手稿结尾，我们假设最大公约数$(n,m)=1$。此外，如果 **(1.5)** 是一个 Schur稳定三项式，那么著名的韦达公式给出 $|c|<1$。

对于任意 $s\in\mathbb{R}$，我们定义角流 *angular flow* $g_s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 如下:

$$\begin{aligned} g_s(\zeta):&=e^{-\mathrm{i}ns}f(e^{\mathrm{i}s}\zeta)\\ &=e^{-\mathrm{i}ns}(e^{\mathrm{i}ns}\zeta^n+be^{\mathrm{i}ms}\zeta^m+c)\\ &=\zeta^n+be^{-\mathrm{i}(n-m)s}\zeta^m+e^{-\mathrm{i}ns}c, \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 i 表示虚单位。我们指出， g_s 的根集恰好是 f 的根集经过旋转 $e^{-\mathrm{i}s}$ 后所得的集合。换言之，对于任意 $s\in\mathbb{R}$， f 是一个 Schur稳定三项式，当且仅当 g_s 是一个 Schur稳定三项式。

代数基本定理表明，两个三项式 f 和 g 具有相同的根，当且仅当对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，有 $f=\lambda g$。前述等价实际上是一种等价关系。因此，自然可以将三项式子空间（模去前述等价关系）与复射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 等同起来。我们回顾一下:

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}:=\{[a:b:c]:\quad \text{where}\quad [a:b:c]:=\{\lambda(a,b,c):\lambda\in\mathbb{K}^*\}\}$$

其中 $\mathbb{K}$ 是域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，且 $\mathbb{K}^*:=\mathbb{K}\setminus\{0\}$。设

$$\begin{aligned} \Omega_n:&=\{[a:b:c]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}:\ a\zeta^n+b\zeta^m+c\ \text{ is a Schur stable trinomial}\}\\ &=\{[1:b:c]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}:\ \zeta^n+b\zeta^m+c\ \text{ is a Schur stable trinomial}\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

并定义连续投影 $\Pi_n : \Omega_n \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$，如下：

$$\Pi_n([1 : b : c]) = [1 : |b| : (-1)^n|c|]. \tag{1.8}$$

于是，我们自然地说，元素 $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ 在 $\mathbb{K}$ 上是舒尔稳定的，当且仅当 $[a : b : c] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$。此外，集合 Ω_n 称为稳定区域。由 [5] 中的命题 7.9 可知，$\Pi_n(\Omega_n) \subset \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$，也就是说，函数 Π_n 将复系数的舒尔稳定三项式映射为实系数的舒尔稳定三项式。此外，我们指出，Π_n 的像，即 $\Pi_n(\Omega_n)$，可分解为两个不相交的集合“Δ”和“Γ”：这取决于数 1、$|b|$ 和 $|c|$ 是否为某个三角形（可以是退化三角形）的边长，参见附录 A 中的引理 A.3。

在最近的论文 [14]，中，应用定理 1.1 得到了当其系数为实数时，(1.2) 的舒尔稳定性的刻画。然而，当系数为复数时，这样的刻画并不直接。事实上，当系数为复数时，我们注意到枢轴量 P 取连续值；而当系数为实数时，枢轴量 $P \in \{\ell/2 : \ell \in \mathbb{Z}\}$，见下文中的 (1.10)。对于固定的 $\omega > 0$ 和取连续值的 P，可以注意到，开区间 $(P - \omega, P + \omega)$ 中整数的数量可能取三个不同的值。

下面我们解释将定理 1.1 应用于复系数情形的主要思路。根据定理 1.1，与 (1.5) 相关联的枢轴量 P 为

$$P = \frac{n(\pi + \arg(b) - \arg(c)) - m(\pi - \arg(c))}{2\pi}. \tag{1.9}$$

特别地，对于与形如以下形式的点相关联的三项式

$$[1 : x : y] \quad \text{with} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

所有可能的枢轴量 P 由下式给出

$$P = \begin{cases} \frac{n-m}{2} & \text{for} \quad x > 0 \quad \text{and} \quad y > 0, \quad \text{i.e., first quadrant,} \\ n - \frac{m}{2} & \text{for} \quad x < 0 \quad \text{and} \quad y > 0, \quad \text{i.e., second quadrant,} \\ \frac{n}{2} & \text{for} \quad x < 0 \quad \text{and} \quad y < 0, \quad \text{i.e., third quadrant,} \\ 0 & \text{for} \quad x > 0 \quad \text{and} \quad y < 0, \quad \text{i.e., fourth quadrant.} \end{cases} \tag{1.10}$$

我们注意到 $P \in \mathbb{Z} \cup \{\ell + 1/2 : \ell \in \mathbb{Z}\}$。考虑与~点 $[1 : b : c] \in \Omega_n$相关联的三项式，其中 $b,\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 对应的枢轴量 P和 $\widetilde{\omega}$ 在 $r = 1$的 (1.3) 中定义。我们注意到，与形如以下形式的点相关联的三项式的对应枢轴量（在 $r = 1$的 (1.3) 中定义）

$$[1 : \pm|b| : \pm|c|],$$

~ ~ ~为 P和 $\omega = \widetilde{\omega}$，其中 P满足 (1.10)。我们强调，区间 $I := (P - \widetilde{\omega},\ P + \widetilde{\omega})$ 和 $I := (P - \omega,\ P + \omega)$ 的长度相同，为 $2\widetilde{\omega} = 2\omega$。然而，它们包含的整数个数可能并不相同。巧妙选取在 (1.8) 中定义的 Π_n 意味着~I 和 I 包含相同数量的整数，这使我们能够将问题化归为实数情形，参见 [5]中的命题 7.9。

1.3. 主要结果及其推论。 在本小节中，我们陈述本文的主要结果及其推论。

本手稿的主要结果是对 Ω_n 的如下刻画。

定理 1.3（三项式的 Schur稳定性：射影记法）。
假设 *gcd*（n, m）$= 1$。令Ω_n 为（1.7）中定义的集合，令 Π_n 为（1.8）中给出的投影。则以下结论成立。Ω_n 中的每个元素都可以参数化为如下形式

$$[1 : xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s} : ye^{-\mathrm{i}ns}],$$

其中 $[1:\ x:\ y] \in \Pi_n$（Ω_n），$0 \le s \le 2\pi$ 且 t 为满足下式的实数
(1) $|t| \le \frac{\pi}{n}$ 当 $[1$ 时：$x:\ y] \in \Gamma_n$ 模2，(2)
$|t| < \frac{\pi}{(2\omega-n+1)\ n}$ 当 $[1$ 时：$x:\ y] \in \Delta_n$ 模 2，

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &:= \{[1:u:v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 \le u,\ 0 \le v,\ u+v < 1\},\\
\Delta_0 &:= \{[1:u:v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 < u,\ 0 < v,\ u+v \ge 1,\ 2\omega(u,v) > n-1\},\\
\Gamma_1 &:= \{[1:u:v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 \le u,\ v \le 0,\ u-v < 1\},\\
\Delta_1 &:= \{[1:u:v] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 < u,\ v < 0,\ u-v \ge 1,\ 2\omega(u,v) > n-1\},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

and

$$\omega(u,v) := \frac{n \arccos\left(\frac{u^2+v^2-1}{2u|v|}\right) + m \arccos\left(\frac{1-u^2+v^2}{2|v|}\right)}{2\pi}. \tag{1.12}$$

反之，每个具有此形式的点都属于Ω_n。

下文中，我们将定理 1.3 改写为多项式记法，这更便于研究 (1.1)。

定理 1.4（三项式的 Schur 稳定性：多项式记法）。
假设 *gcd*$(n, m) = 1$。以下结论成立：每个形如 (1.5) 的 *Schur* 稳定三项式都可以参数化为

$$\zeta^n + xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}\zeta^m + ye^{-\mathrm{i}ns} \tag{1.13}$$

其中，$\zeta^n + x\zeta^m + (-1)^n y$ 是一个 *Schur* 稳定三项式，$0 \le s \le 2\pi$ 且 t 是满足以下条件的实数
(1) $|t| \le \frac{\pi}{n}$ *for* $(x, y) \in \Gamma_{n \bmod 2}$，
(2) $|t| < \frac{\pi(2\omega-n+1)}{n}$ *for* $(x, y) \in \Delta_{n \bmod 2}$，

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u,\ 0 \le v,\ u+v < 1\},\\
\Delta_0 &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u,\ 0 < v,\ u+v \ge 1,\ 2\omega(u,v) > n-1\},\\
\Gamma_1 &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u,\ v \le 0,\ u-v < 1\},\\
\Delta_1 &:= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u,\ v < 0,\ u-v \ge 1,\ 2\omega(u,v) > n-1\},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

and

$$\omega(u,v) := \frac{n \arccos\left(\frac{u^2+v^2-1}{2u|v|}\right) + m \arccos\left(\frac{1-u^2+v^2}{2|v|}\right)}{2\pi}.$$

反之，每个形如(1.13) 的三项式都是 *Schur* 稳定的。

在有意滥用记号的情况下，经过自然的对应，我们在（1.11）和（1.14）中使用相同的标记。

我们继续沿用定理 1.3 的记号和假设。

注1.5 （像的分裂）。

我们强调，对于奇数 n，$\Delta_1 = \Delta_{n \bmod 2}$ 且 $\Gamma_1 = \Gamma_{n \bmod 2}$；对于偶数 n，$\Delta_0 = \Delta_{n \bmod 2}$且 $\Gamma_0 = \Gamma_{n \bmod 2}$。此外，附录 *A* 中的引理 *A.3* 表明

$$\Pi_n(\Omega_n) = \begin{cases} \Delta_0 \cup \Gamma_0 & for\ n\ being\ an\ even\ number, \\ \Delta_1 \cup \Gamma_1 & for\ n\ being\ an\ odd\ number. \end{cases}$$

注 1.6 （三角形的存在性）。

根据余弦定理，对于任意满足 $[1: \ x: \ y] \in \Delta_{n \bmod 2}$ 的情形，都存在一个边长为 1、 $x = |x|$ 和 $|y|$ 的三角形。

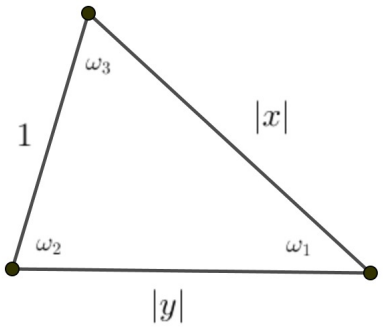

图 1. 稳定区域的 Bohl 三角形

根据余弦定理，我们有

$$\omega_1 = \arccos\left(\frac{x^2+y^2-1}{2|x||y|}\right), \quad \omega_2 = \arccos\left(\frac{1+y^2-x^2}{2|y|}\right)$$

and

$$\omega_3 = \arccos\left(\frac{1+x^2-y^2}{2|x|}\right).$$

回顾 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \pi$，并且对于 $-1 \leq \theta \leq 1$，$\arccos(-\theta) = \pi - \arccos(\theta)$。由 **(1.12)**可知

$$2\omega(x,y) = \frac{n\omega_1 + m\omega_2}{\pi} > n-1$$

等价于 $n\omega_3 + (n-m)\omega_2 < \pi$。我们还注意到，前述不等式等价于 $n(\pi - \omega_1) - m\omega_2 < \pi$。

注 1.7 （实系数三项式的 Schur稳定性）。

由 [5] 中的命题 *7.9* 可知 $[1: \ x: \ y] \in \Pi_n(\Omega_n) \subset \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$，因此这意味着相应的三项式 $\zeta \mapsto \zeta^n + x\zeta^m + y$ 是一个舒尔稳定三项式，其中 x、$y \in \mathbb{R}$。我们指出，具有一般实系数的三项式的 *Schur*稳定性已在例如 [13], 的第 *3* 节、 [14], 的定理 *2* 以及 [45] 的定理 *1.3* 中得到确立。

注1.8 (Ω_n 的维数及参数的含义)。我们指出，稳定区域 Ω_n 是 $\mathbb{C}^2$中的一个开集。因此，它可以自然地用四个实参数(x, y, s, t)参数化。更准确地说，

(i) 参数 x 和 y 由定理 *1.3* 中的条件 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Pi_n(\Omega_n)$ 给出，(ii) 参数 s 由将 (1.6) 中定义的角流应用于 $[1\colon\ x\colon y]\in\Pi_n(\Omega_n)$得到，也就是说，

$$[0,2\pi]\ni s\mapsto e^{\mathrm{i}s}\cdot[1:x:y]:=[1:e^{-\mathrm{i}(n-m)s}x:e^{-\mathrm{i}ns}y],$$

(iii) 最后，定理 *1.3* 中满足 *(1)* 或 *(2)* 的参数 t，可解释为枢轴 $P(t)$ 的允许变动：从 $\Pi_n(\Omega_n)$ 中一个枢轴为 $P(0)=P$（由 (1.10) 明确给出）的三项式出发，使得 *Bohl*定理（定理 *1.1*）给出的开区间恰好包含 n 个整数。由 (1.9) 和 (1.10)，我们可推得 $|t|=\frac{2\pi}{n}|P(t)-P|$。 —

此外，它是 $\mathbb{R}^4$的一个开可缩子空间，尤其是道路连通的，参见 [5]中的定理 *7.18*。

在下方的图2中，我们绘出了特定情形下的 $\Pi_n(\Omega_n)$：$(n,m)=(3,1)$；$(n,m)=(3,2)$；以及 $(n,m)=(4,3)$。我们强调，具有实系数的三项式的稳定区域，即 $\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$，可以由投影 $\Pi_n(\Omega_n)$ 重构，得到由黑色曲线和直线围成的开集，参见图2。例如，对于 $(n,m)=(4,3)$，有如下结果：

（a）对于任意 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Delta_0\cup\Gamma_0$，取 $t=0$ 和 $s=\pi$ 可得

$$[1:-x:y]=[1:xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:ye^{-\mathrm{i}ns}]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

（b）对于任意 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Gamma_0$，取 $t=\pi/4$ 和 $s=\pi/4$ 可推出

$$[1:x:-y]=[1:xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:ye^{-\mathrm{i}ns}]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

（c）根据条目（b），我们知道，只要 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Gamma_0$，就有 $[1\colon\ x\colon\ -y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。注意，取 $t=0$ 和 $s=\pi$ 可得

$$[1:-x:-y]=[1:xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:-ye^{-\mathrm{i}ns}]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

当 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Gamma_0$时。

（d）如果 $[1\colon\ x\colon\ y]\in\Delta_0$，那么 $[1\colon\ x\colon\ -y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。回顾 $n=4$ 和 $m=3$。由矛盾，假设存在 $|t|<\frac{\pi}{(2\omega-n+1)\ n}$ 和 $0\le s\le 2\pi$，使得

$$[1:x:-y]=[1:xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:ye^{-\mathrm{i}ns}].$$

于是，对于某个整数 ℓ，我们有 $s\in\{\pi/4,(3/4)\pi,(5/4)\pi,(7/4)\pi\}$ 以及 $t-(n-m)s=2\pi\ell$。由于 $\omega\le n/2$，我们得到 $|t|=|s+2\pi\ell|<\frac{\pi}{(2\omega-n+1)\ n}\le\frac{\pi}{n}$，也就是说，

$$|s+2\pi\ell|<\frac{\pi}{4}\quad\text{for}\quad s\in\{\pi/4,(3/4)\pi,(5/4)\pi,(7/4)\pi\}\quad\text{and}\quad\ell\in\mathbb{Z},$$

这就产生了矛盾。类似的推理表明，只要 $[1:x\colon\ y]\in\Delta_0$，就有 $[1\colon\ -x\colon\ -y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。

注 1.9（Γ_0、Γ_1、Δ_0 和 Δ_1的几何解释）。
众所周知，Γ_j和 Δ_j属于$\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$，参见 [45] 中的定理 *2*以及 [45]第*1712*页的图。事实上，（射影）*Cohn* 域 $\mathcal{C}\colon=\{[1\colon\ u\colon\ v]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\colon\ |u|+|v|<1\}$属于$\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。它对应于 $\mathbb{R}^2$中的区域，其中，与点 $[1\colon\ x\colon\ y]$ 相关联的三项式的系数绝对值不是任何三角形（包括退化三角形）的边长。对于 Δ_j，我们可以对其作出几何解释。更准确地说，它是 $\mathbb{R}^2$中的区域，其中，与点 $[1\colon\ x\colon\ y]$ 相关联的三项式的系数绝对值是某个三角形的边长

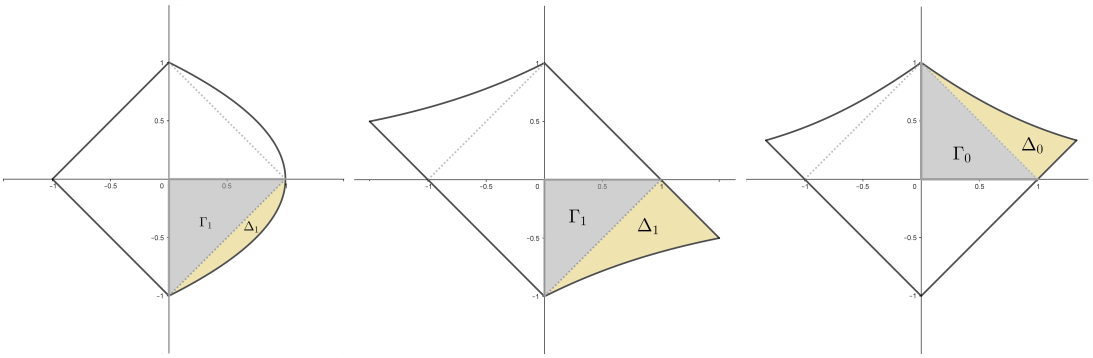

图2。对于特定情形（n，m）=（3，1），（3，2）和（4，3），分别绘制了 $\Pi_n(\Omega_n)$。集合 Γ_j 是一个包含两条直角边的直角三角形，但其斜边（点线）属于 Δ_j。界定 Δ_j 的实线曲线不属于该集合。

（该三角形可以是退化三角形）。此外，图*2*中的虚线表示该三角形退化的情形。

在以下推论中，我们始终假设 gcd(n，m) $=1$，并采用定理 1.3中的记号。

推论1.10（非稳定投影）。
如果 $[1:\ x:\ y]\notin\Pi_n(\Omega_n)$，那么 $[1:\ xe^{it}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:\ ye^{-ins}]\notin\Omega_n$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 和 $s\in[0,2\pi]$均成立。换言之，如果 $[1:\ b:\ c]$ 在 Π_n 下的投影不是舒尔稳定的，那么 $[1:\ b:\ c]$也不是舒尔稳定的。

证明。 该证明是定理 1.3 的直接推论。 □

注1.11（非舒尔稳定的复系数三项式）。
设 u 和 v 为正数。假设三项式 $\zeta\mapsto\zeta^n+u\zeta^m+(-1)^nv$ 不是舒尔稳定的。那么，推论*1.10*表明，对于满足 $|a|=u$ 和 $|b|=v$ 的任意复数 a 和 b，三项式 $\zeta\mapsto\zeta^n+a\zeta^m+b$ 都不是舒尔稳定的。此外，若我们假设 $\zeta\mapsto\zeta^n+u\zeta^m+(-1)^nv$ 的所有根的模都不等于 *1*，那么根据多项式根关于系数的连续性，对于满足 $|a|=u$ 和 $|b|=v$ 的任意复数 a 和 b，存在 $\varepsilon:=\varepsilon(a、b、n、m)>0$，使得对于满足 $|a-a_*|<\varepsilon$ 和 $|b-b_*|<\varepsilon$ 的任意复数 a_* 和 b_*，三项式 $\zeta\mapsto\zeta^n+a_*\zeta^m+b_*$ 都不是舒尔稳定的。

Remark 1.12 (Schur Stability of the region jection Π_n does not imply Schur stability).
我们强调，推论*1.10*的逆命题并不成立。换言之，一般而言，$\Pi_n[1:\ b:\ c]\in\Pi_n(\Omega_n)$ 并不意味着 $[1:\ b:\ c]\in\Omega_n$。例如，设 $n=4$且 $m=3$，并假设 $\zeta\mapsto\zeta^n+x\zeta^m+(-1)^ny$，其中 $x>0$ 且 $y>0$ 是一个舒尔稳定三项式。此外，假设 $[1:\ x:\ (-1)^ny]\in\Delta_0$，见图 *2*。则形如 $\zeta\mapsto\zeta^n-x\zeta^m\pm y$ 的三项式并非舒尔稳定。

使用数学软件可以验证，尽管其对应的投影 $\zeta\mapsto\zeta^{11}+\zeta^{10}-0.05$ 是舒尔稳定三项式，$\zeta\mapsto\zeta^{11}-e^{\mathrm{i}\cdot0.6}\zeta^{10}-0.05e^{\mathrm{i}\cdot0.6}$也不是舒尔稳定的。

注 1.13 (实系数情形的舒尔稳定性：刻画)。由 [15] 中的定理 *1.3* 可知，$[1:\ x:\ y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 当且仅当以下条件之一成立：

(C_1) $|x|+|y|<1$,

(C_2) $|x|+|y|\geq 1$、 $|x|-1<|y|<1$、 $(-1)^m x^n y^{n-m}<0$ 以及

$$\frac{n\ \arccos\left(\frac{1+x^2-y^2}{2|x|}\right)+(n-m)\ \arccos\left(\frac{1-x^2+y^2}{2|y|}\right)}{\pi}<1. \tag{1.15}$$

此外， [14] 中的推论*2*给出了$\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$的以下刻画。点$[1:\ x:\ y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 当且仅当以下条件之一成立：上述给出的（C_1），或者

(C_2') $|x|+|y|\geq 1$、 $(-1)^m x^n y^{n-m}<0$ 以及

$$\frac{n\ \arccos\left(\frac{1-x^2-y^2}{2|x||y|}\right)-m\ \arccos\left(\frac{1-x^2+y^2}{2|y|}\right)}{\pi}<1. \tag{1.16}$$

我们强调，（1.15）与（1.16）是等价的，并且它们还等价于条件 $2\omega(x、\ y)>n-1$, 其中 $\omega(x、\ y)$ 定义于（1.12）中，见注 *1.6*。

接下来，我们将证明，定理 1.3 尤其给出了 $\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 的刻画，即一般实系数三项式的稳定区域。我们回顾一下， $\Pi_n([1:\ a:\ b])=[1:\ x:\ y]$, 其中 $x=|a|>0$ and $y=(-1)^n|b|$, 见（1.8），并且

$$\Pi_n(\Omega_n)=\begin{cases}\Delta_0\cup\Gamma_0 & \text{for } n \text{ being an even number,}\\ \Delta_1\cup\Gamma_1 & \text{for } n \text{ being an odd number,}\end{cases}$$

见注1.5。

推论 1.14 （实系数情形的舒尔稳定性）。

对任意整数 $n\geq 2$，当且仅当 $[1:\ x:\ y]\in\Gamma_{n\ 模\ 2}$ 时， $[1:\ x:\ -y]$, $[1:-x:\ y]$, $[1:-x:\ -y]\in\mathcal{C}:=\{[1:\ u:\ v]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}:\ |u|+|v|<1\}$，其中 $x>0$ *and* $(-1)^n y>0$。此外，

(i) 当 n 为正偶整数时，可得 $[1:\ x:\ y]\in\Delta_0$ 当且仅当 $[1:\ -x:\ y]\in(\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})\setminus\mathcal{C}$ 且 $x>0$。*(ii)* 当 $n\geq 3$ 为正奇数且 m 为正偶数时，则 $[1:\ x:\ y]\in\Delta_1$ 当且仅当 $[1:\ -x:\ -y]\in(\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})\setminus\mathcal{C}$、 $x>0$ 和 $y<0$。*(iii)* 当 $n\geq 3$ 为正奇数且 m 为正奇数时，则 $[1:\ x:\ y]\in\Delta_1$ 当且仅当 $[1:\ x:\ -y]\in(\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})\setminus\mathcal{C}$ 且 $y<0$。

证明。 证明见附录 A 的附录 A.1 小节。 □

正如我们在注 1.9 或推论 1.14 中已经指出的，Cohn 域$\mathcal{C}\subset\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。然而，其边界 $\partial\mathcal{C}:=\{[1:\ u:\ v]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}:\ |u|+|v|=1\}$ 不属于 $\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。根据注 1.13 或推论 1.14，我们有 $\{[1:\ u:\ v]\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}:|u|+|v|=1,\ (-1)^m u^n v^{n-m}<0\}$ 属于 $\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。

下面的推论表明，具有 $1\leq m<n-1$ 的三项式 $\zeta\mapsto\zeta^n+b\zeta^m+c$，以及满足 $|b|=1$ 和 $0<|c|<1$ 的 $b,\ c\in\mathbb{C}$，从来都不是舒尔稳定的。

推论 1.15 (具有两个模为一系数的三项式)。

假设 $|b|=1$ 和 $0<|c|<1$。若 $1\leq m<n-1$，则 $\Pi_n([1:\ b:\ c])=[1:\ 1:\ (-1)^n|c|]\notin\Omega_n$。因此 $[1:\ b:\ c]\notin\Omega_n$。

证明。 假设 $0<|c|<1$。注意到

$$\frac{\pi}{3}\leq\arccos\left(\frac{|c|}{2}\right)<\frac{\pi}{2}. \tag{1.17}$$

我们先考虑 n 为偶数的情形。 n 为奇数的情形类似。由 (1.8) 可得 $\Pi_n([1:\ b:\ c]) = [1:1,|c|]$。现在，我们验证 $[1:1:\ |c|] \in \Delta_0$，其中 Δ_0 在 (1.11) 中定义。为简便起见，记 $\omega := \omega(1,|c|)$。注意到，当且仅当 $2\omega > n-1$

$$2\omega = (n+m)\frac{\arccos\left(\frac{|c|}{2}\right)}{\pi} > n-1.$$

由前述不等式及 (1.17) 可得

$$(n+m)\frac{1}{2} > n-1$$

从而得到 $m = n-1$。根据推论1.10，我们得出该陈述的第二部分。 □

推论 1.15 意味着，与 $[1:\pm 1:\ c]$ 相关的三项式仅在$m = n-1$时稳定。在 [46], 中的定理 2 中，作者研究了与 $[1:\ -1:\ c]$ 相关的三项式的舒尔稳定性，其中 $c \in \mathbb{R}$ 和 $m = n-1$。下面的推论给出了与 $[1:1:\ c]$相关的三项式的舒尔稳定性。

推论 1.16 （ [46]中的定理 2：实数情形）。
假设 $b = 1$、 $0 < c < 1$ 和 $m = n-1$。

(i) 如果 n 是奇数，则 $[1:1:\ c] \notin \Omega_n$。此外， $[1:1:\ -c] \in \Omega_n$ 当且仅当

$$\frac{(n-1)\pi}{2n-1} < \arccos\left(\frac{c}{2}\right) < \frac{\pi}{2}. \tag{1.18}$$

(ii) 如果 n 是偶数，则 $[1:\ 1:\ -c] \notin \Omega_n$。此外， $[1:\ 1:\ c] \in \Omega_n$ 当且仅当

$$\frac{(n-1)\pi}{2n-1} < \arccos\left(\frac{c}{2}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

作为推论 1.15 的结果，我们有： $n = 2$ 和 $c \in$ （-1，1）是 Lambert三项式（见 [67]） $L_n(\zeta) = \zeta^n + \zeta + c$、 $\zeta \in \mathbb{C}$在 $c \in \mathbb{R}$ 时为舒尔稳定所必需的条件。然而，这些条件并不充分。事实上，根据推论1.16， L_2 是舒尔稳定三项式，当且仅当 $0 < c < 1$。

推论*1.16* 的证明。我们先证明条目（i）。由 (1.10) 可知$P = 1/2$。于是，借助附录 A 中的引理 A.1，定理 1.1 推出了该陈述的第一部分。

接下来证明该陈述的第二部分。由定理 1.3，只需证明 $\Pi_n([1:1:\ -c]) = [1:1:\ -c] \in \Delta_1$。为简便起见，记 $\omega := \omega(1,|c|)$。注意到 $2\omega > n-1$ 当且仅当

$$2\omega = (2n-1)\frac{\arccos\left(\frac{|c|}{2}\right)}{\pi} > n-1$$

这就得到了 (1.18) 的左端。由于 $c \in$ (0,1)，(1.18) 的右端便显然成立。

条目（ii）的证明类似，这里略去。 □

下面的推论给出了与 $[1:\ b:\ c]$相关的三项式在 $m = n-1$ 和复系数 $|b| = 1$ 及 $0 < |c| < 1$ 下的舒尔稳定性。特别地，它意味着 [46], 中的定理 2以及 [50]中的定理 1和定理 2。

推论 1.17 （ [46], 中的定理 2以及 [50]中的定理 1和定理 2：复数情形）。假设 $|b| = 1$, $0 < |c| < 1$ 且 $m = n - 1$。点 $[1 : b : c] \in \Omega_n$ 当且仅当

$$\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)\pi < \arccos\left(\frac{|c|}{2}\right) < \frac{\pi}{2},$$

以及 $[1 : b : c]$ 可以表示为以下形式

$$[1 : e^{it}e^{-is} : (-1)^n|c|e^{-ins}], \quad where \quad s \in [0, 2\pi]$$

and

$$|t| < \frac{(2n-1)\arccos\left(\frac{|c|}{2}\right) - (n-1)\pi}{n}.$$

证明。 该证明直接由定理 1.3 得出。 □

注记 1.18 （关于复系数三项式的讨论）。

（i） 我们强调，定理 *1.3* 将 [14] 中关于实系数三项式的结果推广到了复系数情形。（ii） 我们指出，特别地，定理 *1.3* 给出了实系数三项式的稳定区域，见注 *1.13* 和推论 *1.14*。（iii）利用所谓的舒尔–科恩方法，定理 *2* 和定理 *4* 中分析了具有复系数及 n 一般且 $m = n - 1$ 的指数的三项式具有舒尔稳定性的充要解析条件，[16], 另见定理 *14* [12]。近期，利用所谓的离散 *D*-分解方法，定理 *1* [17]给出了具有复系数和一般指数 n 且 m 的三项式具有舒尔稳定性的充要解析条件。我们指出，我们的主要结果定理 *1.3* 是稳定区域的一种隐式几何参数化，见注*1.8*。

下面，我们将 [17] 中定理 *1* 的结果与定理 *1.3* 的结论进行比较。我们验证 [17] 中的定理 *1* 蕴含定理 *1.3*。考察下面的证明可以看出，逆命题同样成立。不难看出， [17] 中定理 *1* 的条件（*4*）等价于定理 *1.3* 中的条目（*1*）。下文中，我们假设 [17] 中定理 *1* 的（*5*）—（*6*）中给出的条件成立。对于三项式 (1.5)，它们表示为： $|b| + |c| \geq 1$、 $|b| - 1 < |c| < 1$和

(1.19)
$$n\arccos\left(\frac{1+|b|^2-|c|^2}{2|b|}\right) + (n-m)\arccos\left(\frac{1-|b|^2+|c|^2}{2|c|}\right) < \arccos\left(\cos\left(n\arg(-b) - (n-m)\arg(-c)\right)\right),$$

其中，$\arg(z)$ 表示给定非零复数 z 的辐角。令$x = |b|$ 和 $y = |c|$ ，并回顾注 *1.6* 的图 *1* 中给出的角 ω_1、 ω_2 和 ω_3 的定义。不等式 (1.19) 表示为

$$n\omega_3 + (n-m)\omega_2 < \arccos\left(\cos\left(n\arg(b) - (n-m)\arg(c) + m\pi\right)\right),$$

这里我们用到了辐角$(-z) = \pi +$辐角(z)、 $z \in \mathbb{C}$、 $z \neq 0$这一事实。由于$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \pi$ 且 $2\pi\omega = n\omega_1 + m\omega_2$ （回顾一下，对于在(1.3)中定义的 $r = 1$， $\omega := \omega(1)$ ），我们得到

(1.20)
$$n\pi - 2\pi\omega < \arccos\left(\cos\left(n\arg(b) - (n-m)\arg(c) + m\pi\right)\right).$$

由于余弦函数是偶函数，我们也有

$$n\pi - 2\pi\omega < \arccos\left(\cos\left(-n\arg(b) + (n-m)\arg(c) - m\pi\right)\right). \tag{1.21}$$

现在，假设 n 是偶数。由于 最大公约数(n, m) $= 1$，我们有 m 是奇数。回顾一下，对于 $-1 \le \mu \le 1$，反余弦$(-\mu)$ $= \pi -$反余弦(μ)，并且当 $\varphi \in \mathbb{R}$ 且 k 为奇整数时，余弦$(\varphi + k\pi) = -$余弦(φ)。那么 (1.20) 等价于

$$\begin{aligned} n\pi - 2\pi\omega &< \arccos\left(-\cos\left(n\arg(b) - (n-m)\arg(c)\right)\right) \\ &= \pi - \arccos\left(\cos\left(n\arg(b) - (n-m)\arg(c)\right)\right) \\ &= \pi - n\arg(b) + (n-m)\arg(c), \end{aligned} \tag{1.22}$$

并且 (1.21) 等价于

$$\begin{aligned} n\pi - 2\pi\omega &< \arccos\left(-\cos\left(-n\arg(b) + (n-m)\arg(c)\right)\right) \\ &= \pi - \arccos\left(\cos\left(-n\arg(b) + (n-m)\arg(c)\right)\right) \\ &= \pi + n\arg(b) - (n-m)\arg(c). \end{aligned} \tag{1.23}$$

注意，(1.22) 等价于

$$\frac{n\arg(b) - (n-m)\arg(c)}{2\pi} < \frac{1}{2}(2\omega - (n-1))$$

并且 (1.23) 等价于

$$-\frac{1}{2}(2\omega - (n-1)) < \frac{n\arg(b) - (n-m)\arg(c)}{2\pi}.$$

前面两个不等式等价于

$$\frac{1}{2}(2\omega - (n-1)) > \left|\frac{n\arg(b) - (n-m)\arg(c)}{2\pi}\right|. \tag{1.24}$$

根据(1.9) 和(1.10)，点 $[1 : a : b]$ 和 $[1 : x : y]$对应的枢轴量为

$$P = \frac{n(\pi + \arg(b) - \arg(c)) - m(\pi - \arg(c))}{2\pi} \quad \textit{and} \quad P_* := \frac{n-m}{2},$$

分别为。注意，

$$\begin{aligned} P - P_* &= \frac{n(\pi + \arg(b) - \arg(c)) - m(\pi - \arg(c))}{2\pi} - \frac{(n-m)\pi}{2\pi} \\ &= \frac{n(\arg(b) - \arg(c)) + m\arg(c)}{2\pi} \\ &= \frac{n\arg(b) - (n-m)\arg(c)}{2\pi}. \end{aligned}$$

因此，(1.24)可写为

$$|P - P_*| < \frac{1}{2}(2\omega - (n-1)).$$

由注*1.8*中的第 *(iii)* 条可得

$$|t| < \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}(2\omega - (n-1)) = \frac{\pi}{n}(2\omega - (n-1)),$$

这就是定理 *1.3*中第 *(2)* 条的表述。

n 为奇数时的情形与此类似。

手稿的其余部分安排如下。第 2 节给出定理 1.3 的证明。最后，在附录 A 中，我们陈述并证明贯穿手稿使用的辅助结果。此外，在附录 A 的附录 A.1 小节中，我们给出推论 1.14 的证明。在附录 B 中，为使论述完整，我们证明了 [7] 中给出的 Bohl定理原始表述中的例外情形已包含在定理 1.1 的计数过程中。

2. 主要结果的证明：定理 1.3

定理 1.3 的证明见第 2.2 小节。证明依赖于定理 1.1 以及关于开区间的基本算术性质（其中所含整数的个数）。这些内容见引理 2.1、引理 2.3 和引理 2.5，并在第 2.1 小节中证明。

2.1. 开区间的算术性质。 从现在起，除非另有说明，

$$I = (P-\omega, P+\omega)$$

表示一个中心（枢轴）为 $P \in \mathbb{R}$ 、半径为 $\omega \geq 0$ 的开区间，其中 $I = \emptyset$ 对于 $\omega = 0$ 和任意 $P \in \mathbb{R}$。数 $P-\omega$ 和 $P+\omega$ 称为 I 的边界点。为简便起见，我们用 $\mu(I)$ 表示 I 的长度，并注意到 $\mu(I) = 2\omega$。此外，我们用 $\#I$ 表示集合 $I \cap \mathbb{Z}$ 的基数。

下文将证明，不含整数边界点且恰好包含 k 个整数的开区间 I 的长度满足 $k-1 < \mu(I) < k+1$。我们指出，对于 $k=0$，下界 $k-1=-1$ 没有实际意义。这就是下面引理的内容。

引理 2.1（根据基数定位长度）。假设 $\#I = k$ 对某个 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 成立，且 I 的边界点不是整数，则有 $k-1 < 2\omega < k+1$。

证明。 根据假设，存在唯一的 $\ell \in \mathbb{Z}$，使得

$$\ell - 1 < P-\omega < \ell \quad \text{and} \quad \ell + k - 1 < P+\omega < \ell + k. \tag{2.1}$$

由于 $2\omega = (P+\omega) - (P-\omega)$，(2.1) 推出

$$k-1 = (\ell + (k-1)) - \ell < 2\omega < \ell + k - (\ell - 1) = k+1.$$

上述不等式即证明了该结论。 □

注 2.2（ I 的边界点）。
如果在引理 *2.1* 中省略边界点不是整数这一限制，则可推出 $k-1 < 2\omega \leq k+1$。

现在，我们详细研究以下问题。给定一个满足$k-1 < \mu(I) < k+1$的开区间 I，其中包含多少个整数？不难看出，可能的值有三个： $k-1$、 k 或 $k+1$。此外，一旦区间的长度 I固定，可能的值只有两个，这取决于 $k-1 < \mu(I) \leq k$ 还是$k < \mu(I) < k+1$。在第一种情况下，可能的值为 $k-1$ 和 k；在第二种情况下，可能的值为 k 和 $k+1$。以下引理阐述了这一内容。

引理 2.3（给定长度的基数定位）。设 k 是一个非负整数，使得 $k-1 < 2\omega < k+1$（对 $k=0$ 而言为 $0 \leq 2\omega < 1$），则 $\#I \in \{k-1, k, k+1\}$（对 $k=0$ 而言为 $\#I \in \{0,1\}$）。此外，

（i）如果 $k-1<2\omega<k$（等价地，如果 $2\omega-（k-1）<k+1-2\omega$），则 $\#I\in\{k-1,k\}$。（ii）如果 $2\omega=k$（等价地，如果 $2\omega-（k-1）=k+1-2\omega$），则 $\#I=k$，或者 I 的边界点是整数，且$\#I=k-1$。（iii）如果 $k<2\omega<k+1$（等价地，如果 $2\omega-（k-1）>k+1-2\omega$），则$\#I\in\{k,k+1\}$。

证明。 通过反证法进行证明。假设 $\#I=k+j$ 对于某个$|j|>1$成立。根据注 2.2，我们有

$$k+j-1<2\omega\le k+j+1,$$

这与假设 $k-1<2\omega<k+1$矛盾。因此，$\#I\in\{k-1,k,k+1\}$。

接下来，我们证明条目（i）。假设 $k-1<2\omega<k$。我们断言，不存在长度为 2ω 且恰好包含 $k+1$ 个整数的区间。事实上，根据注 2.2，我们有$k<2\omega\le k+2$，这与 $k-1<2\omega<k$ 的假设矛盾。

现在，我们给出两个长度为 2ω 的开区间 I_1 和 I_2，它们分别恰好包含k 和 $k-1$ 个整数。例如，这两个开区间为

$$I_1:=\left(\frac{k-1}{2}-\omega,\ \omega+\frac{k-1}{2}\right),\quad I_2:=(0,2\omega)$$

长度为 2ω、 $I_1\cap\mathbb{Z}=\{0,\dots,k-1\}$ 和 $I_2\cap\mathbb{Z}=\{1,\dots,k-1\}$。

条目（ii）和条目（iii）的证明类似，故略去。 □

备注2.4 （给定长度时至多有三个不同的值）。

粗略地说，引理 *2.3* 可以这样理解：移动原区间 I 的中心（枢轴）P，同时保持其长度 2ω 不变，则新区间中的整数个数会减少一个、保持不变或增加一个。此外，根据区间长度所处的两个整数之间的位置，引理 *2.3* 可以精确判定新区间中的整数个数何时保持不变、减少一个或增加一个。

大体而言，下一个引理使我们能够量化：在保持区间长度以及新区间所含整数个数不变的情况下，无整数边界点的开区间 I 的初始枢轴点 $P\in\mathbb{Z}/2:=\{\ell/2:\ \ell\in\mathbb{Z}\}$ 最多可以移动多远；新区间同样没有整数边界点。

引理 2.5 (给定长度和枢轴时基数的定位**)**。假设$\#I=k\ge0$，I 的边界点不是整数，并且 $P\in\mathbb{Z}/2$。我们考虑开区间 $I':=（P'-\omega，\ P'+\omega）$并定义

$$\nu_1:=2\omega-(k-1),\qquad \nu_2:=k+1-2\omega.$$

于是可得

(i) 若 $0\le k-1<2\omega<k$ 且 $|P-P'|<\nu_1/2$，则 $\#I'=k$，并且 I' 的边界点均非整数。(ii) 若 $0\le k-1<2\omega<k$ 且 $|P-P'|=\nu_1/2$，则 I' 的某个边界点是整数，并且 $\#I'=k-1$。(iii) 若 $k=2\omega$ 且 $|P-P'|<\nu_1/2=\nu_2/2$，则 $\#I'=k$，并且 I'的边界点均非整数。(iv) 若 $k=2\omega$ 且 $|P-P'|=\nu_1/2=\nu_2/2$，则 I' 的两个边界点都是整数，并且 $\#I'=k-1$。(v) 若 $k<2\omega<k+1$ 且 $|P-P'|<\nu_2/2$，则 $\#I'=k$，并且 I'的边界点均非整数。

(vi) 若 $k<2\omega<k+1$ 且 $|P-P'|=\nu_2/2$，则 I' 的某个边界点是整数，并且 $\#I'=k$。

证明。我们从条目（i）的证明开始。条目（i）的证明分为两种情况：$P\in\mathbb{Z}$ 或 $P\in(\mathbb{Z}+1/2)$。

首先，我们假设 $P\in\mathbb{Z}$。根据附录 A 中引理 A.1 的条目（i），有$k=2k'+1$，其中 k' 为某个非负整数。此外，

$$I\cap\mathbb{Z}=\{P-k',P-k'+1,\dots,P,\dots,P+k'-1,P+k'\}.$$

由于 $|P'-P|<\nu_1/2=\omega-\binom{k-1}{2}=\omega-k'$，我们有

$$P'-\omega<P-k' \quad\text{and}\quad P+k'<P'+\omega, \tag{2.2}$$

那么，由于 $2\omega<k=2k'+1$，$|P'-P|<k'+1-\omega$。后者推出

$$P-(k'+1)<P'-\omega \quad\text{and}\quad P'+\omega<P+k'+1. \tag{2.3}$$

由（2.2）至（2.3），我们推得

$$I'\cap\mathbb{Z}=\{P-k',P-k'+1,\dots,P,\dots,P+k'-1,P+k'\}$$

且 $P'-\omega$、$P'+\omega$ 不是整数。因此，$\#I'=2k'+1=k$。

我们继续证明 $P=\ell+1/2$ 的情形，其中 $\ell\in\mathbb{Z}$。根据附录 A 中引理 A.1 的条目（ii），对于某个非负整数 k'，我们有 $\#I=2k'$。此外，

$$I\cap\mathbb{Z}=\{\ell-k'+1,\ell-k'+2,\dots,\ell+k'-1,\ell+k'\}.$$

由于 $|P'-(\ell+1/2)|=|P'-P|<\omega-k'+1/2$，因此

$$P'-\omega<\ell-k'+1 \quad\text{and}\quad \ell+k'<P'+\omega. \tag{2.4}$$

假设 $2\omega<k=2k'$ 也可写为 $\omega-k'+1/2<k'+1/2-\omega$。因此，$|P'-(\ell+1/2)|<\omega-k'+1/2<k'+1/2-\omega$，这意味着

$$\ell-k'<P'-\omega \quad\text{and}\quad P'+\omega<\ell+k'+1. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$I'\cap\mathbb{Z}=\{\ell-k'+1,\ell-k'+2,\dots,\ell+k'\}=I\cap\mathbb{Z},$$

且数值 $P'-\omega$ 和 $P'+\omega$ 不是整数。至此，条目（i）的证明完成。

我们继续证明条目（ii）。与条目（i）的证明一样，条目（ii）的证明分为两种情况：$P\in\mathbb{Z}$ 或 $P\in(\mathbb{Z}+1/2)$。我们指出，由于假设，$P'\neq P$。

我们先假设 $P\in\mathbb{Z}$。根据附录 A 中引理 A.1 的条目（i），有 $k=2k'+1$，其中 k' 是某个非负整数。此外，

$$I\cap\mathbb{Z}=\{P-k',P-k'+1,\dots,P,\dots,P+k'-1,P+k'\}.$$

假设 $|P'-P|=\nu_1/2=\omega-k'>0$ 可得 $P'-P=\omega-k'$ 或 $P'-P=-(\omega-k')$。如果 $P'-P=\omega-k'$，那么

$$P'-\omega=P-k'\in\mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

不等式 $P-P'<0<\omega-k'$ 意味着

$$P+k'<P'+\omega. \tag{2.7}$$

根据假设 $2\omega<k=2k'+1$，这意味着 $\omega-k'<k'+1-\omega$。因此，$|P-P'|=\omega-k'<k'+1-\omega$，从而得到

$$P'+\omega<P+k'+1. \tag{2.8}$$

由 (2.6)、(2.7) 和 (2.8) 可推得

$$I' \cap \mathbb{Z} := \{P - k' + 1, P - k', \ldots, P, \ldots, P + k' - 1, P + k'\}$$

并且 $P' - \omega$是一个整数。对于 $P' - P = -(\omega - k')$ 的情形，证明是类似的，故略去。

我们继续证明 $P = \ell + 1/2$ 的情形，其中 $\ell \in \mathbb{Z}$。根据附录 A 中引理 A.1 的条目（ii），对于某个非负整数 k'，我们有 $k = 2k'$ 。此外，

$$I \cap \mathbb{Z} = \{\ell - k' + 1, \ell - k' + 2, \ldots, \ell + k' - 1, \ell + k'\}.$$

与前一种情形一样，我们有 $P' - (\ell + 1/2) = P' - P = \omega - k' + 1/2 > 0$或$P' - P = -(\omega - k' + 1/2) < 0$。我们证明 $P' - P = \omega - k' + 1/2$ 的情形。对于 $P' - P = -(\omega - k' + 1/2)$ 的情形，证明是类似的，故略去。

注意到 $P' - (\ell + 1/2) = P' - P = \omega - k' + 1/2 > 0$ 意味着

$$P' - \omega = \ell - k' + 1. \tag{2.9}$$

In a此外，不等式 $\ell + 1/2 - P' = P - P' < 0 < \omega - k' + 1/2$ 意味着

$$\ell + k' < P' + \omega. \tag{2.10}$$

根据假设 $2\omega < k = 2k'$，我们有 $\omega - k' + 1/2 < k' + 1/2 - \omega$。因此，

$$|P' - \ell - 1/2| = |P' - P| = \omega - k' + 1/2 < k' + 1/2 - \omega,$$

这意味着

$$P' + \omega < \ell + k' + 1. \tag{2.11}$$

由（2.9）、（2.10）和（2.11）可得

$$I' \cap \mathbb{Z} = \{\ell - k' + 2, \ldots, \ell + k' - 1, \ell + k'\}$$

且 $P' - \omega$ 是整数。条目（ii）的证明完成。

条目（iii）、条目（iv）、条目（v）和条目（vi）的证明类似，细节留给感兴趣的读者。□

在下面的引理中，条目（1）和条目（2）是引理 2.5 的简洁重述。为使论述完整，我们在此陈述它们。此外，我们引入条目（3），以便了解新区间 I' 的基数何时与初始区间 I不同。

引理 2.6（枢轴的变动）。

假设$\#I = k$， I 的边界点不是整数，且 $P \in \mathbb{Z}/2 : = \{\ell/2 : \ell \in \mathbb{Z}\}$。我们将开区间（$P' - \omega$, $P' + \omega$）记为 I'，并且

$$\nu = \min\{2\omega - (k - 1), k + 1 - 2\omega\}. \tag{2.12}$$

（1）若$|P - P'| < \frac{\nu}{2}$，则$\#I' = k$，且 I' 没有边界点是整数。（2）若 $|P - P'| = \frac{\nu}{2}$，则I' 的一个边界点是整数。（3）若 $\frac{\nu}{2} < |P - P'| \leq \frac{1}{2}$，则$\#I' \neq k$，且 I' 没有边界点是整数。

证明。 我们证明条 (3)。对于 $P_0 := P - 1/2$ 和 $Q_0 := P + 1/2$，附录 A 中的引理 A.1 表明，区间 $I_0 = (P_0 - \omega, P_0 + \omega)$ 和 $J_0 = (Q_0 - \omega, Q_0 + \omega)$ 满足 $\#I_0 = \#J_0 \neq k$。

根据假设 $\frac{\nu}{2} < |P - P'| \leq \frac{1}{2}$（因此 $\nu < 1$，这意味着 I_0或 J_0 的边界点均不是整数），可得

$$|P_0 - P'| < \frac{1-\nu}{2} \quad \text{or} \quad |Q_0 - P'| < \frac{1-\nu}{2}.$$

接下来，我们证明 $\#I' = \#I_0 = \#J_0$。由于 $\#I_0 \neq k$ and $\mu(I_0) = 2\omega$，引理 2.3 推得 $\#I_0 \in \{k-1, k+1\}$。假设 $\#I_0 = k-1$。由于 $\mu(I_0) = 2\omega$，引理 2.1 得出 $k - 2 < 2\omega < k$。根据假设 $\#I = k$ and $\mu(I) = 2\omega$，则引理 2.1 推得$k - 1 < 2\omega < k + 1$。因此，$k - 1 < 2\omega < k$，从而 $\nu_0 = k - 2\omega$，其中 ν_0 是对应于 I_0的（2.12）中的值。由于

$$1 - \nu = 1 - (2\omega - (k-1)) = \nu_0,$$

将引理 2.6 的第（1）项应用于 I_0，可推出 $\#I' = \#I_0 = k - 1$，且 I' 的边界点均不是整数。$\#I_0 = k + 1$ 的情况类似。总之，$\#I' \neq k$，且 I' 的边界点均不是整数。□

2.2. **定理 1.3 的证明**。在本小节中，我们证明定理 1.3，这是截至目前我们已经证明结果的一个推论。

定理 *1.3* 的证明。不失一般性，假设 n 是偶数（n 为奇数的情形证明类似）。

我们先证明必要性。固定 $[1 : b : c] \in \Omega_n$，并将 $b = xe^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $c = ye^{\mathrm{i}\theta_2}$ 写为某些 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$，其中 $x = |b|$、$y = |c|$。根据 [5] 中的命题 7.9，我们有

$$[1 : x : y] := [1 : |b| : |c|] \in \Pi_n(\Omega_n) \subset \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \tag{2.13}$$

whe其中 Π_n 在（1.8）中定义。为方便起见，我们引入以下记号

$$e^{\mathrm{i}\theta} \cdot [1 : b : c] := [1 : be^{-\mathrm{i}(n-m)\theta} : ce^{-in\theta}]. \tag{2.14}$$

特别地，对于 $\sigma = \frac{\theta_2}{n}$，我们有

$$e^{\mathrm{i}\sigma} \cdot [1 : b : c] = [1 : xe^{\mathrm{i}t'} : y], \tag{2.15}$$

其中 $t' := \theta_1 - (n-m)\frac{\theta_2}{n}$。由于 n 和 m 是互质数，因此 n 和 $n - m$ 也互质。于是，存在至多两个 n 次单位根 $e^{2\pi \mathrm{i}k/n}$，使得

$$\left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i}k}{n}}\right)^{-(n-m)} e^{\mathrm{i}t'} = e^{\mathrm{i}t}, \quad \text{where} \quad |t| \leq \frac{\pi}{n}. \tag{2.16}$$

由（2.15）和（2.16）可得

$$e^{\frac{2\pi \mathrm{i}k}{n}} \cdot [1 : xe^{\mathrm{i}t'} : y] = [1 : xe^{\mathrm{i}t} : y]. \tag{2.17}$$

取$s = -\frac{2\pi k}{n} - \sigma$ 模 2π，其中 $0 \leq s \leq 2\pi$，借助（2.15）和（2.17）可得

$$\begin{aligned} e^{-\mathrm{i}s} \cdot [1 : b : c] &= (e^{\frac{2\pi \mathrm{i}k}{n}} e^{\mathrm{i}\sigma}) \cdot [1 : b : c] = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}k}{n}} \cdot \left(e^{\mathrm{i}\sigma} \cdot [1 : b : c]\right) \\ &= e^{\frac{2\pi \mathrm{i}k}{n}} \cdot [1 : xe^{\mathrm{i}t'} : y] = [1 : xe^{\mathrm{i}t} : y]. \end{aligned}$$

结合式（2.14），由前述等式可得

$$[1 : b : c] = e^{\mathrm{i}s} \cdot [1 : xe^{\mathrm{i}t} : y] = [1 : xe^{\mathrm{i}t} e^{-(n-m)s} : ye^{-\mathrm{i}ns}] \quad \text{with} \quad |t| \leq \frac{\pi}{n}.$$

根据式（1.11）中 Δ_0 和 Γ_0 的定义，我们注意到它们互不相交。此外，由注1.5可知，$\Pi_n(\Omega_n) = \Delta_0 \cup \Gamma_0$。

我们指出，对于 $[1: x: y] \in \Gamma_0$，无需证明任何内容。在下文中，我们假设 $[1: x: y] \in \Delta_0$。简便起见，记作 $\omega = \omega(x, y)$。我们断言

$$|t| < \frac{(2\omega - n + 1)\pi}{n}.$$

事实上，反设

$$\frac{(2\omega - n + 1)\pi}{n} \le |t| \le \frac{\pi}{n}. \tag{2.18}$$

回顾 $[1: b: c] \in \Omega_n$，因此由 (2.13) 还可得 $[1: x: y] \in \Omega_n$。现在，对于分别与 $[1: x: y]$ 和 $[1: b: c] = [1: xe^{it}e^{-i(n-m)s}: ye^{-ins}]$ 相关联的三项式 f 和 g，应用定理 1.1。由于 $[1, x, y] \in \Delta_0$，根据注 1.6，正数 1、x 和 y 是某个三角形的边长（该三角形可能退化）。相应的枢轴量 (1.3) 为

$$P_f := \frac{n-m}{2}, \qquad P_g := \frac{n(t+\pi) - m\pi}{2\pi} = P_f + \frac{nt}{2\pi} \tag{2.19}$$

and

$$\omega_f(1) = \omega_g(1) = \frac{n\omega_1 + m\omega_2}{2\pi},$$

其中，ω_1 和 ω_2 分别是三角形中与边长 1 和 x 相对的角，该三角形的边长为 1、x 和 y。回忆一下，$|t| \le \frac{\pi}{n}$。由 (2.18) 和 (2.19)

$$\frac{2\omega - (n-1)}{2} \le |P_f - P_g| = \frac{n|t|}{2\pi} \le \frac{1}{2}.$$

利用引理 2.6 的第 (2) 条和第 (3) 条，前述不等式推出三项式 $g \notin \Omega_n$，这与矛盾相悖。必要性蕴含的证明至此完成。

下面继续证明充分性蕴含。假设

$$[1 : xe^{it}e^{-i(n-m)s} : ye^{-ins}]$$

满足定理 1.3 的 (1) 和 (2)。我们证明 $[1: xe^{it}e^{-i(n-m)s}: ye^{-ins}] \in \Omega_n$。

回忆一下，Δ_0 和 Γ_0 互不相交，且 $\Pi_n(\Omega_n) = \Delta_0 \cup \Gamma_0$。对于 $[1: x: y] \in \Gamma_0$，定理 1.1 中的 (1.4) 意味着 $[1: x: y] \in \Omega_n$。

在下文中，我们假设 $[1: x: y] \in \Delta_0$。对于分别与 $[1: x: y]$ 和 $[1: b: c] = [1: xe^{it}e^{-i(n-m)s}: ye^{-ins}]$ 相关联的三项式 f 和 g，我们应用定理 1.1。由 (2.19) 可得 $|P_f - P_g| = \frac{n|t|}{2\pi}$，并且对于 $|t| < \frac{\pi}{(2\omega - n + 1)\, n}$，我们有

$$|P_f - P_g| < \frac{2\omega - (n-1)}{2}.$$

借助引理 2.6 的第（1）项，由前述不等式可推出三项式 $g \in \Omega_n$。必要性蕴含的证明至此完成。□

AP附录A. 奇偶性论证与到实数情形的投影

本节包含一些有用的性质，有助于使这份手稿更加流畅。

引理 A.1（特殊主元的奇偶性论证）。
对于开区间

$$I = (P - \omega, P + \omega)$$

满足 $P \in \mathbb{R}$ 和 $\omega > 0$ 时，以下陈述成立。

（i）若 $P \in \mathbb{Z}$，则 $\#I$ 是奇正整数。（ii）若 $P \in \{\ell/2 : \ \ell \text{ 是奇数}\}$，则 $\#I$ 是偶非负整数。

证明。我们首先证明条目（i）。注意到，对于某个$k \in \mathbb{N}$， $P + k \in (P, \ P + \omega)$成立，当且仅当对于某个 $k \in \mathbb{N}$， $P - k \in (P - \omega, \ P)$成立。结合假设 $P \in \mathbb{Z}$，由上述观察可得该陈述。条目（ii）的证明类似。□

注 A.2。在下面的引理中，为了证明方便，我们在 Δ_j, $j = 0,1$ 的定义中引入以下冗余不等式 $2\omega \leq n$，正如其证明过程中所见。

引理 A.3（到实数情形的投影）。
令 $\Pi_n : \Omega_n \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 定义为

$$\Pi_n([1 : b : c]) = [1 : |b| : (-1)^n |c|],$$

其中 Ω_n 由（1.7）给出。于是可得

$$\Pi_n(\Omega_n) = \begin{cases} \Delta_0 \cup \Gamma_0 & \textit{for } n \textit{ being an even number,} \\ \Delta_1 \cup \Gamma_1 & \textit{for } n \textit{ being an odd number,} \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ x + y < 1\}, \\ \Delta_0 &= \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 < x, \ 0 < y, \ 1 \leq x + y, \ n - 1 < 2\omega \leq n\}, \\ \Gamma_1 &= \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 \leq x, \ y \leq 0, \ x - y < 1\}, \\ \Delta_1 &= \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid 0 < x, \ y < 0, \ 1 \leq x - y, \ n - 1 < 2\omega \leq n\}, \end{aligned}$$

and

$$\omega := \frac{n \arccos\left(\frac{x^2+y^2-1}{2x|y|}\right) + m \arccos\left(\frac{1-x^2+y^2}{2|y|}\right)}{2\pi}.$$

证明。我们证明 n 为偶数的情形。n 为奇数的情形证明类似，故略去。

注意到 $\Pi_n([1 : b : c]) = [1 : |b| : |c|]$。[5] 中的命题 7.9给出

$$\Pi_n(\Omega_n) \subset \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : 0 \leq x, 0 \leq y\} \cap \Omega_n.$$

此外，由于将 Π_n 限制在集合 $\{[1 : \ x : \ y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : \ 0 \leq x, 0 \leq y\} \cap \Omega_n$ 上是恒等映射，因此我们有

$$\Pi_n(\Omega_n) = \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : 0 \leq x, 0 \leq y\} \cap \Omega_n.$$

现在，我们证明 $[1 : \ x : \ y] \in \Pi_n(\Omega_n)$ 和 1、x 以及 y 是某个三角形的边长（该三角形可能是退化的）当且仅当 $[1 : \ x : \ y] \in \Delta_0$。

令 $[1 : x : y] \in \Pi_n(\Omega_n)$，并假设存在一个边长为 1、$x$、$y$的三角形，则

$$0 < x, \quad 0 < y \quad \text{and} \quad 1 \leq x + y.$$

定理 1.1 借助余弦定理可推出 $\#I = n$，其中 $I = (P-\omega,\ P+\omega)$，$P = \frac{n-m}{2}$ 且

$$\omega = \frac{n\arccos\left(\frac{x^2+y^2-1}{2xy}\right) + m\arccos\left(\frac{1-x^2+y^2}{2y}\right)}{2\pi}.$$

由引理 2.1 可知 $n-1 < 2\omega < n+1$。我们断言 $n-1 < 2\omega \le n$。否则，定理 1.1、引理 2.3 条目（iii）和引理 2.6 条目（3）意味着存在一个与 $[1$ 相关的次数为 n 的三项式方程：$xe^{it}:\ y]$，其中 $\frac{\pi}{n}(n+1-2\omega) < |t| \le \frac{\pi}{n}$，具有 $n+1$ 个根，这是荒谬的。因此，$[1:\ x:\ y] \in \Delta_0$。

反之，假设 $[1:\ x:\ y] \in \Delta_0$。根据注 1.6，存在一个边长分别等于 1、x 和 y 的三角形。因此，定理 1.1、附录 A 中引理 A.1 的条目（ii），以及引理 2.3 的条目（i）和条目（ii）意味着

$$[1:x:y] \in \Omega_n \cap \{[1:x:y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : 0 \le x, 0 \le y\}.$$

最后，应用定理 1.1 中的 (1.4) 的第三个不等式，我们有 $[1:x:\ y] \in \Pi_n(\Omega_n)$，从而可以推得，当且仅当 $[1:x:\ y] \in \Gamma_0$ 时，不存在边长为 1、x 和 y 的三角形。证明完毕。□

A.1. **推论 1.14 的证明。**
对于 $(n,\ m)$，其中 n 为正偶整数。由于 $\gcd(n,\ m) = 1$，我们有 m 是奇整数。由 (1.8) 可得 $x > 0$ 和 $y > 0$。我们注意到以下事实

(1) 对于任意 $[1:\ x:\ y] \in \Delta_0 \cup \Gamma_0$，选择 $t = 0$ 和 $s = \pi$ 可得

$$[1:-x:y] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

(2) 对于任意 $[1:x:\ y] \in \Gamma_0$，选择 $t = \pi/n$ 和 $s = k\pi/n$，其中 k 在 $0 < k < 2n$ 上为奇整数，使得 $e^{i\pi/n} = e^{i(n-m)k\pi/n}$，则有

$$[1:x:-y] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

这是由于最大公约数$(n-m,\ 2n) = 1$而存在的 k。

(3) 根据条目（2），我们知道，当 $[1:\ x:\ y] \in \Gamma_0$ 时，$[1:\ x:\ -y] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。注意，选择 $t = 0$ 和 $s = \pi$ 可得

$$[1:-x:-y] = [1 : xe^{it}e^{-i(n-m)s} : (-y)e^{-ins}] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

当 $[1:x:\ y] \in \Gamma_0$ 时。

(4) 现在注意，如果 $[1:\ x:\ y] \in \Delta_0$，则 $[1:\ x:\ -y] \notin \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。事实上，由于 $[1:\ x:\ y] \in \Delta_0$，我们知道存在一个边长为 1、$x = |x| > 0$ 和 $y = |y| > 0$ 的三角形（可能是退化的）。回顾一下，n 是一个偶数。根据 (1.10)，对于点 $[1:\ x:\ -y]$，相应的枢轴 P 是一个整数，因此附录 A 中引理 A.1 的条目（i）表明，以 P 为中心的任意非空开区间都包含奇数个整数。因此，$[1:\ x:\ -y] \notin \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。类似地，当 $[1:x:\ y] \in \Delta_0$ 时，我们可推出 $[1:\ -x:\ -y] \notin \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。

现在，考虑 n 为奇正整数。下文中，我们假设 m 为偶数，并回顾一下，$n,\ m$的最大公约数为 $= 1$。于是，$n-m$ 为奇整数。由（1.8）可得 $x > 0$ 和 $y < 0$。我们观察到：

(i) 对任意 $[1:\ x:\ y] \in \Delta_1 \cup \Gamma_1$，取 $t = 0$ 和 $s = \pi$ 可得

$$[1:-x:-y] \in \Omega_n \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

(ii) 对任意 $[1:x:y]\in\Gamma_1$，取 $t=\pi/n$ 和 $s=k\pi/n$，其中 k 是 $0<k<2n$ 上的奇整数，且满足 $e^{\mathrm{i}\pi/n}=e^{\mathrm{i}(n-m)k\pi/n}$，可推出

$$[1:x:-y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

由于 gcd$(n-m,\ 2n)=1$，这样的 k 存在。

(iii) 根据条目（ii），我们知道当 $[1:x:y]\in\Gamma_1$ 时，$[1:x:-y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。注意，取 $t=0$ 和 $s=\pi$ 可得

$$[1:-x:y]=[1:xe^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(n-m)s}:(-y)e^{-\mathrm{i}ns}]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

(iv) 现在注意，若 $[1:x:y]\in\Delta_1$，则 $[1:x:-y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。事实上，由于$[1:x:y]\in\Delta_1$，我们知道存在一个三角形（可能是退化的），其边长为 1、$x=|x|>0$ 和 $-y=|y|>0$。回想一下，n 是奇整数，m 是偶整数，而 $(n-m)/2$ 不是整数。由 (1.10) 可知，点 $[1:x:-y]$ 对应的枢轴 P 为 $(n-m)/2$，因此附录 A 中引理 A.1 的条目（ii）表明，以 P 为中心的任意非空开区间都包含偶数个整数。因此，$[1:x:-y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。类似地，我们可推得，当 $[1:x:y]\in\Delta_1$ 时，$[1:-x:y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。

最后，我们考虑 n 为奇正整数。下文中，我们假设 m 是奇数，并回顾一下 gcd$(n,m)=1$。于是，我们有 $n-m$ 是偶整数。由 (1.8) 可知，$x>0$ 且 $y<0$。我们观察到:

(a) 对任意 $[1:x:y]\in\Delta_1\cup\Gamma_1$，取 $t=0$ 和 $s=\pi$ 可得

$$[1:x:-y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

(b) 根据 $t=0$ 和 $s=\pi$ 的取值，我们注意到 $[1:-x:y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 当且仅当$[1:-x:-y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。(c) 对任意 $[1:x:y]\in\Gamma_1$，取 $t=\pi/n$ 和 $s=k\pi/n$，其中 k 是 $0<k<n$ 上的一个整数，且满足 $-e^{\mathrm{i}\pi/n}=e^{\mathrm{i}(n+1)\pi/n}=e^{\mathrm{i}(n-m)k\pi/n}$，则有

$$[1:-x:(-1)^k y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

这样的 k 存在，这是因为 gcd$(n-m、\ n)=1$。由条目（b）可得

$$[1:-x:\pm y]\in\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

(d) 现在注意，若 $[1:x:y]\in\Delta_1$，则 $[1:-x:y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。事实上，由于$[1:x:y]\in\Delta_1$，我们知道存在一个边长为 1、$x=|x|>0$ 和 $-y=|y|>0$的三角形（它可能是退化的）。回顾一下，n 和 m 是奇整数，而 $n-m$是偶整数。由 (1.10) 可知，点 $[1:-x:y]$ 对应的枢轴 P 为 $n/2$，于是附录 A 中引理 A.1 的条目（ii）表明，以 P 为中心的任意非空开区间都包含偶数个整数。因此，$[1:-x:y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。类似地，当 $[1:x:y]\in\Delta_1$时，我们可推出 $[1:-x:-y]\notin\Omega_n\cap\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$。

附录B. **Bohl定理**

在本节中，我们强调指出，在假设 n 和 m 是互质数的条件下，定理 1.1 与 Bohl定理 [7], 的原始表述是等价的。为使论述完整，下面我们使用其原始记号陈述该定理。

定理 B.1 (Bohl定理 [7])。

其模严格小于正数 $r(1,2)$ 的所有数，均可通过取数 ζ 的 τ 倍得到，其中 $\tau = gcd(n, m)$ 和 ζ 可按以下方式确定：

I.如果量 $|a|r^n$、 $|b|r^m$、 $|c|$ 中任意一个严格小于另外两个量之和，那么它们构成一个三角形，其边长与前述各量成比例。令 ω_1 和 ω_2 分别表示与 $|a|r^n$ 和 $|b|r^m$ 相对的两个角。那么， ζ 等于介于以下两者之间的整数个数

$$\frac{n(\beta-\gamma+\pi)-m(\alpha-\gamma+\pi)}{2\tau\pi}-\frac{n\omega_1+m\omega_2}{2\tau\pi} \tag{B.1}$$

and

$$\frac{n(\beta-\gamma+\pi)-m(\alpha-\gamma+\pi)}{2\tau\pi}+\frac{n\omega_1+m\omega_2}{2\tau\pi}, \tag{B.2}$$

其中 α、 β、 γ 分别是 a、 b、 c的辐角。

II. 三个量 $|a|r^n$、 $|b|r^m$ 、 $|c|$ 中有一个大于或等于另外两个量之和。排除下文提到的例外情形 *(a)* 和 *(b)* 后，我们有

II.1 若 $|c| \geq |a|r^n + |b|r^m$，则 $\zeta = 0$；II.2 若 $|b|r^m \geq |a|r^n + |c|$，则 $\zeta = \frac{m}{\tau}$；II.3 若 $|a|r^n \geq |b|r^m + |c|$，则 $\zeta = \frac{n}{\tau}$。下面列出以下例外情形：

(a) 若 $|b|r^m = |a|r^n + |c|$ 和 $r^{n-m} \leq \frac{m|b|}{n|a|}$ 成立，并且

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{n(\beta-\gamma)-m(\alpha-\gamma)}{\pi}+n\right) \quad \textit{is an even integer}, \tag{B.3}$$

则 $\zeta = \frac{m}{\tau} - 1$。

(b) 若 $|a|r^n = |b|r^m + |c|$ 成立，并且

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{n(\beta-\gamma)-m(\alpha-\gamma)}{\pi}-m\right) \quad \textit{is an even integer}, \tag{B.4}$$

则 $\zeta = \frac{n}{\tau} - 1$.

下文特别强调，定理 1.1 中给出的计数过程已经考虑了定理 B.1 中所述的例外情形 (a) 和 (b)。

我们首先注意到，由于假设 $\tau = \gcd(n, m) = 1$，在 (1.3) 中定义的数 $P - \omega(r)$ 和 $P + \omega(r)$ 分别等于 (B.1) 和 (B.2)。

现在，我们讨论例外情形 (a)。根据笛卡尔符号法则，方程 $|b|x^m = |a|x^n + |c|$ 至多有两个不同的正实根。我们将这些根记为 r_1 和 r_2 ，不妨设 $0 < r_1 \leq r_2$。此外，$r_1^{n-m} \leq \frac{m|b|}{n|a|} \leq r_2^{n-m}$，参见 [7]，第 560–561 页。

假设 $r_1^{n-m} \leq \frac{m|b|}{n|a|}$。由于 $|b|r_1^m = |a|r_1^n + |c|$，存在一个边长为 $|a|r_1^n$、 $|b|r_1^m$、 $|c|$ 的退化三角形，且与 $|a|r_1^n$ 和 $|b|r_1^m$ 相对的角分别为

$\omega_1 = 0$ 和 $\omega_2 = \pi$。因此，$\omega(r_1) = \frac{m}{2}$，区间 $(P - \omega(r_1), P + \omega(r_1))$ 的长度等于 $2\omega(r_1) = m$。根据 (B.3)，可得

$$P + \omega(r_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(\beta-\gamma) - m(\alpha-\gamma)}{\pi} + n\right) \quad \text{is an integer,}$$

这与 $2\omega(r_1) = m$ 共同意味着 $P - \omega(r_1)$ 也是一个整数。因此，区间 $(P - \omega(r_1), P + \omega(r_1))$ 内所含的整数个数等于 $m - 1$。由此，当 $r_1^{n-m} \leq \frac{m|b|}{n|a|}$ 时，定理 1.1 中给出的计数过程与条 (a) 的结论一致。

现在我们指出，当 $\frac{m|b|}{n|a|} < r_2^{n-m}$ 且 $P + \omega(r_2)$ 是一个整数时，定理 1.1 和定理 B.1 表明 $\zeta = m$。

接下来，我们分析例外情形 (b)。与情形 (a) 类似，方程 $|a|x^n = |b|x^m + |c|$ 有唯一的正根，我们将此根记为 r_0。因此，存在一个边长为 $|a|r_0^n$、$|b|r_0^m$、$|c|$ 的退化三角形，且与 $|a|r_0^n$ 和 $|b|r_0^m$ 相对的角分别为 $\omega_1 = \pi$ 和 $\omega_2 = 0$。因此，$\omega(r_0) = \frac{n}{2}$，区间 $(P - \omega(r_0), P + \omega(r_0))$ 的长度等于 $2\omega(r_0) = n$。由 (B.4) 可得

$$P - \omega(r_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(\beta-\gamma) - m(\alpha-\gamma)}{\pi} - m\right) \quad \text{is an integer,}$$

由此可得，$P + \omega(r_0)$ 是一个整数。因此，区间 $(P - \omega(r_0), P + \omega(r_0))$ 中所包含的整数数量等于 $n - 1$。总之，定理 B.1 条目（b）的表述与定理 1.1 中的计数一致。

声明

致谢。 G. Barrera 谨向赫尔辛基大学数学与统计学系表示感谢，感谢该系为本项工作的开展提供了所有必要的设施。他感谢 UADY 数学学院和墨西哥方面在 2022年 研究访问期间提供的热情接待，本论文的部分工作即在此期间完成。他还要感谢巴西纯粹与应用数学研究所（IMPA）在 2023年 博士后暑期项目期间提供的支持与热情接待，本论文的部分工作也在此期间完成。全体作者感谢受邀参加班夫 BIRS-CMO 在线科学活动“实多项式：计数与稳定性”（2021年）；该活动促成了本文的撰写。作者感谢 Jonas M. Tölle 教授（数学与系统分析学系、阿尔托大学，埃斯波，芬兰）在 [7] 翻译方面提供的支持。作者感谢审稿人对本文进行细致审阅，这使论文得到了显著改进。图 1 和图2 使用开源软件 GeoGebra 创建。

伦理审批。不适用。
利益冲突。作者声明不存在利益冲突 st.
作者贡献。所有作者对本文的贡献均等。
经费资助。 G. Barrera 的研究得到了芬兰科学院的支持，资助来源包括物质与材料 Profi4大学画像行动、科学院项目（项目编号：339228）以及芬兰随机性与结构卓越中心（项目编号：346306）。W. Barrera 和 J. P. Navarrete 的研究得到了 CONACYT“前沿科学项目”2019–21100 的支持，项目依托于墨西哥 UADY 数学学院。

数据和材料的可用性。不适用。

参考文献

1. Aguirre-Hernández, B., Frías-Armenta, M.E. & Muciño-Raymundo, J.：《一元多项式的舒尔-科恩稳定性算法的零点几何与动力学》。《数学、控制与信号系统》31，第4期（2019年），545–587。https://doi.org/10.1007/s00498-019-00245-8 MR 4026622 2. Ahn, Y.J. & Kim, S.H.：《某些三项式方程的零点》。《数学不等式及其应用》9，第2期（2006年），225–232。https:/doi.org/10.7153/mia-09-23 MR 2225009 3. Aziz, A. & Rather, N.：《三项式与四项式零点的位置》。《数学不等式及其应用》17，第3期（2014年），823–829。https:/doi.org/10.7153/mia-17-60 MR 3224837 4. Barrera, W., Cano, A., García, R. & Navarrete, J.P.：《球面 $\mathbb{S}^3$ 中纽结补空间的链同伦》。《巴西数学会通报》（新辑）50，第4期（2019年），971–997。https://doi.org/10. 1007/s00574-019-00136-1 MR 4029189 5. Barrera, W., Magaña, J.C. & Navarrete, J.P.：《三项式、环面纽结与链》。《美国数学会汇刊》376，第4期（2023年）。https://doi.org/10.1090/tran/8834 MR 4557887 6. Belkić, D.：《由兰伯特级数、贝尔多项式和Fox-Wright函数求出所有三项式根及其幂与对数：基因组多重性在受辐照细胞存活中的示例》。《数学化学杂志》57，第1期（2019年），59–106。https://doi.org/10.1007/s10910-018-0985-3 MR 3903813 7. Bohl, P.：《关于三项式方程理论》。《数学年刊》65，第4期（1908年），556–566。https: //doi.org/10.1007/BF01451170 MR 1511483 8. Borwein, P. & Erdélyi, T.：《多项式与多项式不等式》。数学研究生教材161。施普林格出版社，纽约，（1995年）。https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0793-1 MR 1367960 9. Botta, V. & da Silva, J.：《三项式方程根的变化规律》。《匈牙利数学学报》157，第1期（2019年），54–62。https://doi.org/10.1007/s10474-018-0896-6 MR 3911159 10. Brilleslyper, M. & Schaubroeck, L.：《三项式内部根的计数》。《数学杂志》91，第2期（2018年），142–150。https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1420332 MR 3777918 11. Brilleslyper, M. & Schaubroeck, L.：《模为一的根的位置》。《大学数学杂志》45，第3期（2014年），162–168。https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.3.162 MR 3207562 12. Čermák, J.：《线性延迟差分方程的稳定性条件：综述与展望》。《塔特拉山数学出版物》63（2015年），1–29。https://doi.org/10.1515/tmmp-2015-0017 MR 3411432 13. Čermák, J., Fedorková, L. & Kureš, M.：《三项式零点按其模分布的完整分类方案》。《德布勒森数学出版物》101，第1–2期（2022年），119–146。https://doi.org/10.5486/pmd.2022.9209 MR 4475510 14. Čermák, J. & Fedorková, L.：《论P. Bohl一项几近被遗忘的多项式结果》。《美国数学月刊》130，第2期（2022年），176–181。https://doi.org/10.1080/00029890.2022.2144090 MR 4538958 15. Čermák, J. & Jánský, J.：《线性三项式延迟差分方程的显式稳定性条件》。《数学快报》43（2015年），56–60。https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.11.014 MR 3305629 16. Čermák, J. & Jánský, J.：《线性延迟差分方程中的稳定性切换》。《应用数学与计算》243（2014年），755–766。https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.065 MR 3244523 17. Čermák, J., Jánský, J. & Matsunaga, H.：《若干离散动力系统的稳定性与稳定化》。《数学方法与应用科学》41，第10期（2018年），3684–3695。https://doi.org/10.1002/mma. 4855 MR 3820177 18. Čermák, J., Jánský, J. & Nechvátal, L.：《线性延迟微分方程的精确稳定区域与离散化稳定区域》。《应用数学与计算》347（2019年），712–722。https://doi.org/10.1016/j. amc.2018.11.026 MR 3881712 19. Cheng, S. & Huang, S.：《具有两个延迟的差分方程稳定区域的另一种推导》。《应用数学电子札记》9（2009年），225–253。http://www.math.nthu.edu.tw/~amen/ MR 2550493 20. Clark, C.：《种群动力学的延迟补充模型及其在须鲸种群中的应用》。《数学生物学杂志》3，第3–4期（1976年），381–391。https://doi.org/10.1007/BF00275067 MR 0429174

21. Cohn, A.：《关于代数方程在圆内的根数》。（德文）。《数学杂志》14，第1期（1922年），110–148。https://doi.org/10.1007/BF01215894 MR 1544543 22. Dannan, F.：《 $x(n+k) + ax(n) + bx(n-\ell) = 0$ 的渐近稳定性》。《差分方程及其应用》10，第6期（2004年），589–599。https://doi.org/10.1080/10236190410001685058 MR 2060414 23. Dannan, F. & Elaydi, S.：《超前型线性差分方程的渐近稳定性》。《计算与应用数学杂志》6，第2期（2004年），173–187。https://digitalcommons.trinity.edu/cgi/ viewcontent.cgi?article=1061&context=math_faculty MR 2223295 24. Darling, H.：《三项五次方程》。《伦敦数学会会报》2，第23期（1924年），383–395。https: //doi.org/10.1112/plms/s2-23.1.383 MR 1575199 25. da Silva, A. & Sri Ranga, A.：《由三项递推关系生成的多项式：复零点的界》。《线性代数及其应用》397（2005年），299–324。https://doi.org/10.1016/j.laa. 2004.11.005 MR 2116465 26. Dilcher, K., Nulton, J. & Stolarsky, K.：《某一类三项式的零点》。《格拉斯哥数学杂志》34，第1期（1992年），55–74。https://doi.org/10.1017/S0017089500008545 MR 1145632 27. Eagle, A.：《三项式方程所有根的级数表示》。《美国数学月刊》46，第7期（1939年），422–425。https://doi.org/10.1080/00029890.1939.11998893 MR 0000005 28. Egerváry, J.：《关于三项式方程》。《数学与物理学报》37（1930年），36–57，（匈牙利文）。http://real-j.mtak.hu/7306/1/MTA_MatematikaiEsPhysikaiLapok_37.pdf 29. Elaydi, S.：《差分方程导论》。第三版。数学本科教材。施普林格，纽约，（2005年）。https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5 MR 2128146 30. Fell, H.：《三项式方程零点的几何》。《巴勒莫数学环报》29，第2期（1980年），303–336。https://doi.org/10.1007/BF02849349 MR 0636077 31. Ferrer, J., García, D., Maestre, M., Muñoz, G., Rodríguez, D. & Seoane, J.：《多项式空间中单位球面的几何》。《施普林格数学简明丛书》。施普林格·Cham，（2023年）。https://doi. org/10.1007/978-3-031-23676-1 32. Geleta, H.L. & Alemu, O.A.：《某些复值调和多项式零点的位置》。《数学杂志》2022年，第4886522期，5页，（2022年）。https://doi.org/10.1155/2022/4886522 MR 4470446 33. Guo, S., Tang, X. & Huang, L.：《具有延迟的两个神经元离散系统中的稳定性与分岔》。《非线性分析：真实世界应用》9，第4期，2008年，1323–1335。https://doi.org/10.1016/j. nonrwa.2007.03.002 MR 2422546 34. Hall, N.：《用迭代法以无穷级数求解三项式方程》。《全国数学杂志》15，第5期（1941年），219–220 https://doi.org/10.2307/3028721 MR 0008336 35. Hanov, B.：《三项式方程的运动学解》。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》20（1947年），131–133 MR 0024685 36. Hernane, M.O. & Nicolas, J.L.：《三项式族的零点定位》。《图卢兹数学科学学院年刊》6，第8卷，第3期（1999年），471–490。http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_3_471_0MR 1751173 37. Howell, R. & Kyle, D.：《三项式零点定位》。《Involve》11，第4期（2018年），711–720。https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.711 MR 3778921 38. Jain, V.：《三项式方程根的一项结果的推广》。《罗马尼亚数学科学会通报》（新辑）46(94)，第3–4期（2003年），143–147。https://www.jstor.org/stable/43678929 MR 2094182 39. Jerri, A.：《利用离散变换方法求解线性差分方程》。《数学及其应用》363，施普林格科学与商业媒体公司，多德雷赫特，（1996年）。https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5657-9 MR 1385463 40. Jiménez-Rodríguez, P., Muñoz-Fernández, G. & Rodríguez-Vidanes, D.：《on $\mathbb{R}^2$ 上齐次三项式空间的几何》。《巴拿赫数学分析杂志》15，第4期（2021年），22页。https://doi.org/10. 1007/s43037-021-00144-8 MR 4292847 41. Kaslik, E. & Balint, St.：《二维时滞离散时间霍普菲尔德神经网络的分岔分析》。《混沌、孤子与分形》34，第4期（2007年），1245–1253。https://doi.org/10.1016/ j.chaos.2006.03.107 MR 2331279 42. Kasten, V.：《近凸三项式》。《巴塞尔数学档案》44，第1期（1985年），65–72。https: //doi.org/10.1007/BF01193782 MR 0778993 43. Kennedy, E.：《三项式方程根的界》。《美国数学月刊》47，第7期（1940年），468–470。https://doi.org/10.1080/00029890.1940.11991003 MR 0002812

44. Kipnis, M. 与 Malygina, V.：矩阵延迟差分方程的稳定锥。《国际数学与数学科学杂志》，文章编号 860326，（2011年），1710–1723。https://doi.org/10.1155/2011/860326 MR 2794895 45. Kipnis, M. 与 Nigmatullin R.：具有两个延迟的三项式线性差分方程的稳定性。《自动化与远程控制》65，第11期，（2004年），1710–1723。https://doi.org/10. 1023/B:AURC.0000047886.46498.79 MR 2114854 46. Kuruklis, S.：$x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$的渐近稳定性。《数学分析及其应用杂志》188，第3期，（1994），719–731。https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1457 MR 1305480 47. Levin, S. 与 May, R.：关于差分延迟方程的注记。《理论人口生物学》9，第2期，（1976年），178–187。https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5 MR 0504043 48. Marden, M.：多项式几何。《美国数学会数学调查与专著》第3卷，（1949），1–243。MR 0225972 49. Marques, D. 与 Trojovský, P.：关于（p，q）距离斐波那契数列的特征多项式的根的位置。《巴西数学会通报》（新系列）53，第4期，（2022年），1231–1244。https: //doi.org/10.1007/s00574-022-00301-z MR 4502829 50. Matsunaga, H. 与 Hajiri, C.：具有对角延迟的线性差分系统的精确稳定集。《数学分析及其应用杂志》369，第2期，（2010），616–622。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.062 MR 2651707 51. Melman, A.：多项式几何。《太平洋数学杂志》259，第1期，（2012），141–159。https://doi. org/10.2140/pjm.2012.259.141 MR 2988487 52. Mickens, R.：差分方程——理论、应用与高级专题。第三版。《数学专著、研究与讲义》。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，（2018年）。MR 3967089 53. Muñoz-Fernández, G. 与 Seoane-Sepúlveda, J.：三项式巴拿赫空间的几何。《数学分析及其应用杂志》340，第2期，（2008年），1069–1087。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.010 MR 2390911 54. Nekrassoff, P.：关于三项式方程。《数学年刊》29，（1887），第3期，413–430。https: //doi.org/10.1007/BF01447732 MR 1510423 55. Nulton, J. 与 Stolarsky, K.：某些三项式的零点。《加拿大科学院数学报告》6，第5期，（1984），243–248。https://mathreports.ca/article/page/52/?wpv_view_count=259 MR 0764097 56. Otto, C. 与 Günter, L.：幂级数与三项式方程的零点。《方程数学》43，第1期，（1992年），94–102。https://doi.org/10.1007/BF01840478 MR 1144592 57. Pan, V.：求解多项式方程：一些历史与近期进展。《SIAM评论》39，第2期，（1997），187–220。https://doi.org/10.1137/S0036144595288554 MR 1453318 58. Papanicolaou, V.：一类线性差分方程的渐近稳定性。《数学杂志》69，第1期，（1996年），34–43。https://doi.org/10.1080/0025570X.1996.11996377 MR 1381584 59. Prasolov, V.：多项式的根。载于：《多项式》。数学算法与计算丛书第11卷。施普林格出版社，柏林，（2004年）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5_1MR 2082772 60. Privault, N.：理解马尔可夫链：示例与应用。第二版。施普林格大学数学丛书。施普林格，新加坡，（2018年）。https://doi.org/10.1007/978-981-13-0659-4 MR 3823257 61. Ren, H.：二阶延迟差分方程的稳定性分析。《泛函方程》50，第3期，（2007年），405–419。https://doi.org/10.1619/fesi.50.405 MR 2381324 62. Scoupas, J.：关于三项式方程的朗道定理。《巴尔干数学》3，（1973），449–452。MR 0379804 63. Szabó, P.：关于三项式方程的根。《中欧运筹学杂志》18，第1期，（2010），97–104。https://doi.org/10.1007/s10100-009-0130-2 MR 2593126 64. Theobald, T. 与 de Wolff, T.：三项式根的范数。《数学年刊》366，第1-2期，（2016），219–247。https://doi.org/10.1007/s00208-015-1323-8 MR 3552238 65. Uahabi, K. 与 Zaoui, M.：三项式方程的求解。《魁北克数学科学年刊》28，第1-2期，（2004年），189–197。MR 2183106 66. Vassilev, P.：关于一个三项式方程及其解。《当代数学高级研究》（庆尚）20，第4期，（2010），489–497。http://uci.kci.go.kr/resolution/result.do?res_cd=G704-002235. 2010.20.4.005&res

-svc-cd= MR 2984756

67. Wang, F.: 欧拉三项式方程级数解的证明。*ACM*计算机代数通讯 **50**，第4期，（2016），136–144。https://doi.org/10.1145/3055282.3055284 MR 3622847