高维子图匹配

Amar Hadzihasanovic[1] 软件科学系 塔林理工大学[2]
Quantinuum，博蒙特街17号，
牛津 OX1 2NA，英国

Diana Kessler 软件科学系 塔林理工大学

arXiv:2304.09216v1 [math.CT] 18 Apr 2023

***Abstract*—Higher-dimensional rewriting is founded on a duality of rewrite systems and cell complexes, connecting computational mathematics to higher categories and homotopy theory: the two sides of a rewrite rule are two halves of the boundary of an $(n+1)$-cell, which are diagrams of n-cells. We study higher-dimensional diagram rewriting as a mechanism of computation, focussing on the matching problem for rewritable subdiagrams within the combinatorial framework of diagrammatic sets. We provide an algorithm for subdiagram matching in arbitrary dimensions, based on new results on layerings of diagrams, and derive upper bounds on its time complexity. We show that these superpolynomial bounds can be improved to polynomial bounds under certain acyclicity conditions, and that these conditions hold in general for diagrams up to dimension 3. We discuss the challenges that arise in dimension 4.**

引言

高维重写 [1], [2] 这一领域立足于这样一种观察：不同类型的改写系统，都是不同维数的有向胞腔复形的实例。而这些复形又可视为高阶范畴或幺半范畴及群胚的表示，从而将传统上与计算的句法和定量方面相关联的对象，与传统上与语义和逻辑方面相关联的对象置于同一个领域。

Informally, a directed cell complex is an object assembled from "directed n-cells", models of topological n-balls whose boundary, an $(n-1)$-sphere, is subdivided into an *input* and an *output* half, modelling the left and right-hand sides of a rewrite rule. A 1-dimensional directed cell complex is a directed graph, which is the same as an abstract rewrite system up to interpretive nuances. A 2-dimensional directed cell complex is the presentation with "oriented equations" of a category; when the category has a single object, it is the presentation of a *monoid*, also known as a string rewrite system. One dimension higher, we find presentations with oriented equations of monoidal categories, which subsume, *via* functorial semantics [3], term rewrite systems such as presentations of algebraic theories.

到目前为止，改写系统与高阶结构之间的对偶关系主要应用于高阶代数领域，例如研究代数的同伦相干表示 [4] ，或开发用于同伦论和高阶范畴论的证明助手 [5]。我们将婷婷五月

已被 LICS 2023 接收

我想指出，作为一种计算机制，高维重写也具有一些独特特征，这些特征可能对基础计算机科学具有重要意义，但至今仍未得到充分探究。

One of these is a kind of *uniformity of data and computations*. In most models, computations or executions are objects of different nature from the data that they manipulate: for example, sequences of configurations as opposed to terms or strings of characters. There is no *internal* way to manipulate computations as data, that does not require encoding in some external "reference" machine, to which the same consideration applies. In higher-dimensional rewriting, on the other hand, data is given in the form of a *diagram* (sometimes called a *pasting diagram*) of n-cells, and a computation is then embodied by *a diagram of* $(n+1)$*-cells*, which is naturally the data of a computation one dimension above. This suggests that higher-dimensional rewriting may, for example, be a natural framework for the formal study of simulations of machines by other machines.

另一个值得关注的方面是，高维重写系统不仅呈现可接受数据和计算，也呈现计算发生的空间。并行性的可能性，或者数据是以栈的形式还是按自由顺序访问，都会成为内部拓扑特征，而非外部施加的约束。这一点与量子模型尤其相关，因为拓扑特征本身会驱动计算 [6]。

本文旨在确立一些关于高维重写作为一种计算机制的基本事实。具体而言，我们试图回答以下问题：按照计算复杂性理论的标准，一台通过高维重写运行的机器是否是一台"合理"的机器？更准确地说：将每个重写步骤的成本设为常数的显然成本模型，是否是一个"合理"的成本模型？

The basic computational step of any such machine may be described as follows. The machine has a list $(r_i)_{i=1}^m$ of rewrite rules, which are $(n+1)$-cells, and whose input boundaries $(\partial^- r_i)_{i=1}^m$ and output boundaries $(\partial^+ r_i)_{i=1}^m$ are n-dimensional diagrams. Given an n-dimensional diagram t as input, the machine tries to match one of the input boundaries with a rewritable *subdiagram* of t. If it finds a match with $\partial^- r_i$ for some $i \in \{1, \dots, m\}$, it substitutes $\partial^+ r_i$ for the match in t; otherwise it stops.

Evidently, our question is answered in the affirmative for such a machine if and only if the *subdiagram matching problem* is feasible in dimension n, which we read as: *admits a (preferably low-degree) polynomial-time algorithm with respect to a reasonable size measure for diagrams*. Since a cognate problem such as subgraph matching is notoriously NP-complete, it is not at all obvious that this should be true.

With this in mind, in this article we study the higher-dimensional subdiagram matching problem. As a first step, we must fix a particular model of higher-dimensional diagrams. We adopt the *diagrammatic set* model defined by the first author [7] after a combinatorial approach to diagrams started by Steiner [8]. This model combines expressiveness with the property of *topological soundness*: diagrams admit a functorial interpretation as homotopies in CW complexes. Furthermore, it uses inductive data structures that are suitable for computation; we began a study of their algorithms and complexity in [9].

Our main contribution is an algorithm for subdiagram matching in arbitrary dimension, relying on new combinatorial results on *layerings* of diagrams (decompositions into layers containing each a single cell of highest dimension). Only one stage in this algorithm takes superpolynomial time in the worst case. We show that this can be avoided under certain acyclicity conditions on diagrams, which hold in general up to dimension 3. We derive that subdiagram matching is feasible up to dimension 3, which should cover most current applications of higher-dimensional rewriting. We then discuss the case of dimension 4 and higher, showing through a counterexample why there is no obvious patch to the algorithm. We leave the question of feasibility in higher dimensions open.

相关工作

严格意义上的高维重写的复杂度理论方面，Bonfante 和 Guiraud 在 [10]，中进行了探讨，但这项工作仅聚焦于某一类特定的二维重写系统。

其他研究聚焦于弦图重写。这与高维重写相关，因为两者的语义都存在于高维范畴和幺半范畴中，但其风格截然不同：弦图重写系统的模型通常是二维的，但带有额外结构，使图式呈现出“类图”的特征；在数据结构中反映这一点会很方便。这一方向的研究包括 Bonchi、Gadducci、Kissinger、Sobocinski 和 Zanasi 的系列论文 [11]，[12]，[13] ，其重点是重写理论问题；以及 Delpeuch 和 Vicary 的文章 [14], [15] ，其重点则更多在复杂度理论方面。

文章结构

第 I 节介绍组合框架以及用于表示图式的数据结构，同时为图示同构问题给出改进的复杂度上界。第 II 节定义可重写子图式及其匹配问题，该问题可以拆分为若干子问题。随后讨论第一个子问题，即在另一个图式中匹配某个图式的形状，irrespective of whether it is a subdiagram. Section III deals with the second subproblem, which is to recognise which matches are, in fact, rewritable subdiagrams. It presents a theory of *layerings* and *orderings* of diagrams as a way to an algorithm solving this problem in any dimension. This algorithm has only a superpolynomial upper bound, but it is shown that it can be improved to a polynomial bound under certain acyclicity conditions. Section IV shows that these acyclicity conditions hold automatically up to dimension 3, and the algorithms can be further simplified in low dimensions. It then discusses an example in dimension 4 which highlights why the strategies that work in low dimensions do not have obvious extensions to higher dimensions.

组合结果的证明附在附录中。完整的论述将在即将出版的技术专著 [16]中呈现。

I. 数据结构

1. 本节在很大程度上是对 [9] 的回顾。更多详情请参阅该文献。

2. 在图式集合的框架中，图表 t 由以下数据指定

1) its *shape* U,
2) a labelling $t\colon U \to \mathbb{V}$ in a set of variables.

图表的形状记录了其胞腔，以及哪些 $(n-1)$ 维胞腔位于 n 维胞腔边界的输入半部或输出半部这一信息。这与抽象多胞体或多胞体复形的数据类似，但还包含额外的定向数据。我们以定向分次偏序集的形式呈现这些数据。

3（覆盖关系）。设 P 是一个有限偏序集，其序关系为 $\leq$。给定元素 x、$y \in P$，如果 $x < y$ 且对于所有 $y' \in P$，若 $x < y' \leq y$ 则 $y' = y$，则称 y覆盖x。

4（哈斯图）。设 P 为有限偏序集。P 的哈斯图是有向无环图 $\mathscr{H}P$，其

- 顶点集是 P的底层集合，并且
- 对于所有顶点 x、y，从 y 到 x 存在一条边，当且仅当 y 在 P中覆盖 x。

5（分次偏序集）。设 P 为有限偏序集。我们称 P 是分次的，如果对于所有 $x \in P$，从 x 出发的 $\mathscr{H}P$ 中的所有极大路径长度都相同。

6（元素的维数）。设 P 为分次偏序集且$x \in P$。x的维数是从 x 出发的 $\mathscr{H}P$ 中的一条极大路径的长度 $\dim x$。对于每个 $U \subseteq P$和 $n \in \mathbb{N}$，我们记作 $U_n \coloneqq \{x \in U \mid \dim x = n\}$。

7 (Oriented graded poset). Let P be a finite poset. An *orientation* on P is an edge-labelling of $\mathscr{H}P$ with values in $\{+, -\}$. An *oriented graded poset* is a graded poset P together with an orientation on P.

8 (Faces and cofaces)**.** Let P be an oriented graded poset, $x \in P$, $\alpha \in \{+,-\}$. The set of *input* ($\alpha = -$) or *output* ($\alpha = +$) *faces* of x is

$$\Delta^\alpha x := \{y \in P \mid x \text{ covers } y \text{ with orientation } \alpha\}.$$

x 的输入（$\alpha = -$）或输出（$\alpha = +$）上余面集合是

$$\nabla^\alpha x := \{y \in P \mid y \text{ covers } x \text{ with orientation } \alpha\}.$$

我们令 $\Delta x := \Delta^- x \cup \Delta^+ x$ 和 $\nabla x := \nabla^- x \cup \nabla^+ x$。

9（定向哈斯图）。设 P 是一个定向分次偏序集。P 的定向哈斯图是有向图 $\mathscr{H}P$，其

- 顶点集合是 P的基础集合，并且
- 对于所有顶点 x、y，当且仅当 $y \in \Delta^- x$ 或 $x \in \Delta^+ y$ 时，存在一条从 y 到 x 的边。

10. 为表示定向分次偏序集 P，我们在每个维数 n 中对 P_n 进行线性排序，使得每个元素 $x \in P$ 都能由一对整数 (n,k) 唯一确定，其中$n := \dim x$，且 k 是 x 在P_n上的线性序中的位置。然后，我们将 P 表示为一对（面_数据、余面_数据）数组的数组；这些数组由整数集合的对组成，其中

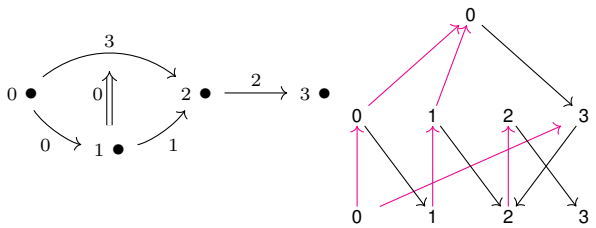
1) $j \in \mathsf{face_data}[n][k][i]$ iff $(n-1, j) \in \Delta^{\alpha(i)}(n,k)$,
2) $j \in$余面_数据$[n][k][i]$ 当且仅当 $(n+1, j)^{(i)} \in \nabla^\alpha(n,k)$;

此处使用索引 $i \in \{0,1\}$ 对成对元素进行编码，$\alpha(0) := -$ 和 $\alpha(1) := +$。整数集合可以实现为任何支持对数时间二分搜索的数据类型。请注意，这种表示是冗余的：面_数据和余面数据可以相互重建。_

这本质上是 $\mathscr{H}P$ 的邻接表表示，其中顶点按照其维数分开，输入边和输出边则按照其标签分开。它并不唯一：对各维度的线性序进行任意置换，都会产生等价的表示。

例 11。以下是同一个二维图形的表示：

- 粘贴图的典型绘制；
- 定向哈斯图，输入边为粉色，维数从下至上递增；
- 面_数据与余面_数据对（行是外层数组的索引，从上到下递增；列是内层数组的索引，从左到右递增）。



face_数据:

$(\{\},\{\})$	$(\{\},\{\})$	$(\{\},\{\})$	$(\{\},\{\})$
$(\{0\},\{1\})$	$(\{1\},\{2\})$	$(\{2\},\{3\})$	$(\{0\},\{2\})$
$(\{0,1\},\{3\})$			

余面数据:_

$(\{0,3\},\{\})$	$(\{1\},\{0\})$	$(\{2\},\{1,3\})$	$(\{\},\{2\})$
$(\{0\},\{\})$	$(\{0\},\{\})$	$(\{\},\{\})$	$(\{\},\{0\})$
$(\{\},\{\})$			

12（子集的闭包）。设 P 是一个偏序集，$U \subseteq P$。U 的闭包是子集 $\operatorname{cl} U := \{x \in P \mid \exists y \in U\, x \le y\}$。如果 $U = \operatorname{cl} U$，我们就称 U 是闭的。

13（子集的维数）。设 U 是分次偏序集的一个闭子集。U 的维数是整数

$$\dim U := \begin{cases} \max\{\dim x \mid x \in U\} & \text{if } U \text{ is inhabited,} \\ -1 & \text{if } U \text{ is empty.} \end{cases}$$

14（输入和输出边界）。设 U 是定向分次偏序集的一个闭子集。对于所有 $\alpha \in \{+,-\}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\Delta^\alpha_n U := \left\{x \in U_n \mid \nabla^{-\alpha} x \cap U = \varnothing\right\}.$$

注意，如果 $\mathscr{M}\mathsf{ax}\, U$ 是 U 的极大元集合，那么

$$\Delta^-_n U \cap \Delta^+_n U = (\mathscr{M}ax\, U)_n.$$

U 的输入（$\alpha = -$）和输出（$\alpha = +$）n-边界是闭子集

$$\partial^\alpha_n U := \operatorname{cl}(\Delta^\alpha_n U) \cup \bigcup_{k<n} \operatorname{cl}(\mathscr{M}ax\, U)_k.$$

当 $n = \dim U - 1$ 时，我们省略下标；对于$n \in \{-1,-2\}$，令 $\Delta^\alpha_n U = \partial^\alpha_n U := \varnothing$。

15. 我们使用以下记号，对于 x 有向分次偏序集中的一个元素、U 一个闭子集、$n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in \{+,-\}$：$\partial^\alpha_n x := \partial^\alpha_n$闭$\{x\}$、$\partial_n U := \partial^-_n U \cup \partial^+_n U$、$\Delta_n U := \Delta^-_n U \cup \Delta^+_n U$。

引理 16. 设 U 是定向分次偏序集的闭子集，$n \in \mathbb{N}$，以及 $\alpha \in \{+,-\}$。然后

1) $\partial^\alpha_n U \subseteq U$,
2) $\partial^\alpha_n U = U$ *if and only if* $n \ge \dim U$.

例 17。设 U 为例 11 中的定向分次偏序集。则 $\partial^-_2 U = \partial^+_2 U = U$，且

$$\partial^-_1 U = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2)\},$$
$$\partial^+_1 U = \{(0,0),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\},$$
$$\partial^-_0 U = \{(0,0)\}, \qquad \partial^+_0 U = \{(0,3)\}.$$

18（定向分次偏序集的映射）。令 P、Q 为定向分次偏序集。映射 $f\colon P \to Q$ 是其底层集合之间的函数，满足

$$f(\partial^\alpha_n x) = \partial^\alpha_n f(x)$$

对于所有 $x \in P$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in \{+,-\}$。存在一个范畴 ogPos，其对象是定向分次偏序集，态射是映射。

19（定向分次偏序集的包含）。包含是定向分次偏序集的单射映射。

引理 20。设 $\imath\colon P \hookrightarrow Q$ 是定向分次偏序集的包含。则

1) $\imath$ *is both order-preserving and order-reflecting, that is,* $\imath(x) \le \imath(y)$ *if and only if* $x \le y$;

2) ι preserves dimensions, that is, $\dim \iota(x) = \dim x$ for all $x \in P$;
3) ι preserves the covering relation and orientations, that is, if y covers x in P with orientation α, then $\iota(y)$ covers $\iota(x)$ in Q with orientation α;
4) for all closed $U \subseteq P$, $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \{+,-\}$, ι maps $\partial^\alpha_n U$ isomorphically onto $\partial^\alpha_n \iota(U)$.

注 21. 定向分次偏序集的每个闭子集都通过限制继承一个定向，而且它作为子集的包含是定向分次偏序集的包含。包含保持所有边界这一事实，使我们可以将定向分次偏序集与其在包含下的像视为相同；我们经常会隐式地这样做。

命题 22。范畴 ogPos 具有 1) 一个终端对象 1，2) 一个初始对象 $\varnothing$，3) 包含的推出。

23. 并非所有定向分次偏序集都能描述格式良好的图形形状。在我们的框架中，格式良好的形状构成一个归纳定义的子类，即正则分子，它们由以下构造生成。

24（粘合构造）。设 U、V 为定向分次偏序集，$k \in \mathbb{N}$，并设 $\varphi\colon \partial_k^+ U \xrightarrow{\sim} \partial_k^- V$ 为一个同构。沿着 φ 在 k 边界处将 U 与 V 粘合，得到的定向分次偏序集 $U \#_k^\varphi V$ 是 ogPos 中的推出。

$$\begin{array}{ccccc} \partial_k^+ U & \xrightarrow{\varphi} & \partial_k^- V & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ U & & \hookrightarrow & & U \#_k^\varphi V. \end{array}$$

25（重写构造）。设 U、V 是维数相同的定向分次偏序集 n，并设 $\varphi\colon \partial U \xrightarrow{\sim} \partial V$ 是一个同构，对每个 $\alpha \in \{+,-\}$ 限制为同构 $\varphi^\alpha\colon \partial^\alpha U \hookrightarrow \partial^\alpha V$。构造推出。

$$\begin{array}{ccccc} \partial U & \xrightarrow{\varphi} & \partial V & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ U & & \hookrightarrow & & \partial(U \Rightarrow^\varphi V) \end{array}$$

在 ogPos 中。沿着 φ 将 U 重写为 V，是通过向 $\partial(U \Rightarrow^\varphi V)$添加单个$(n+1)$维元素 $\top$ 而得到的定向分次偏序集 $U \Rightarrow^\varphi V$，其中$\Delta^- \top := U_n$ 且 $\Delta^+ \top := V_n$。

引理 26. 设 U、V 是定向分次偏序集，并假设 $U \Rightarrow^\varphi V$ 已定义。则 1) $\partial^-(U \Rightarrow^\varphi V)$ 与 U 同构，2) $\partial^+(U \Rightarrow^\varphi V)$ 与 V 同构。

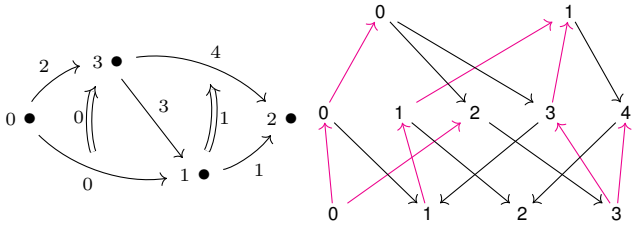
注 27. 重写构造中推出的记号 $\partial(U \Rightarrow^\varphi V)$ 事后得到了证明，即该推出确实构造出 $U \Rightarrow^\varphi V$ 的边界。

28（圆性）。设 U 是一个定向分次偏序集。若对于所有 $n < \dim U$, $\partial_n^- U \cap \partial_n^+ U = \partial_{n-1} U$，$U$ 都是圆的。

例 29. 直观而言，当粘贴图的形状如同相应维数的拓扑球时，其形状就是圆的。例如，例 11 中的定向分次偏序集不是圆的，因为

$$\begin{aligned} \partial_0 U &= \{(0,0),(0,3)\} \\ &\subsetneq \partial_1^+ U \cap \partial_1^- U = \{(0,0),(0,2),(1,2),(0,3)\}, \end{aligned}$$

并且，事实上，这个粘贴图的形状是一个 2-球（圆盘）与一个 1-球（区间）的楔和。不过，下面的粘贴图是圆的：



30（纯子集）。设 U 是分次偏序集n 的闭子集，$=$维数为 U。若 U 的所有极大元的维数均为 n，即 $\mathscr{M}\mathrm{ax}\, U = U_n$，则称 U 为纯的。

引理 31. 如果 U 是圆的，那么它是纯的。

32（正则分子）。正则分子类是定向分次偏序集的归纳子类，在同构下闭合，并由以下条款生成。

1) (*Point*). The terminal oriented graded poset 1 is a regular molecule.
2) (*Paste*). If U, V are regular molecules, $\varphi\colon \partial_k^+ U \xrightarrow{\sim} \partial_k^- V$ is an isomorphism with $k < \min\{\dim U, \dim V\}$, then $U \#_k^\varphi V$ is a regular molecule.
3) (*Atom*). If U, V are *round* regular molecules of the same dimension and $\varphi\colon \partial U \xrightarrow{\sim} \partial V$ is an isomorphism restricting to $\varphi^\alpha\colon \partial^\alpha U \xrightarrow{\sim} \partial^\alpha V$ for each $\alpha \in \{+,-\}$, then $U \Rightarrow^\varphi V$ is a regular molecule.

33. 我们总结正则分子的基本性质。命题 34 的第二点允许我们在后者有定义且 U、V 是正则分子时，使用$U \#_k V$和 $U \Rightarrow V$，而不使用$U \#_k^\varphi V$和 $U \Rightarrow^\varphi V$。

命题 34. 设 U、V 为正则分子，$k \in \mathbb{N}$。则

1) if U and V are isomorphic, they are isomorphic in a unique way;
2) if $U \#_k^\varphi V$ or $U \Rightarrow^\varphi V$ is defined, it is defined for a unique φ;
3) for all $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{+,-\}$, $\partial_n^\alpha U$ is a regular molecule;
4) U is globular, that is, for all $k, n \in \mathbb{N}$ and $\alpha, \beta \in \{+,-\}$, if $k < n$ then $\partial_k^\alpha(\partial_n^\beta U) = \partial_k^\alpha U$;
5) if U is round, for all $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{+,-\}$, $\partial_n^\alpha U$ is round.

例 35. 设

$$\begin{aligned}\mathsf{arrow} &:= 1 \Rightarrow 1,\\ \mathsf{binary} &:= (\mathsf{arrow} \#_0 \mathsf{arrow}) \Rightarrow \mathsf{arrow},\\ \mathsf{cobinary} &:= \mathsf{arrow} \Rightarrow (\mathsf{arrow} \#_0 \mathsf{arrow}).\end{aligned}$$

Then the shape of Example 11 is a regular molecule constructed as $\mathsf{binary} \#_0 \mathsf{arrow}$, while the shape of Example 29 is a regular molecule constructed as

$$(\mathsf{cobinary} \#_0 \mathsf{arrow}) \#_1 (\mathsf{arrow} \#_0 \mathsf{binary}).$$

36. 以下结果共同表明，正则分子的粘合满足严格 ω-范畴的方程，且在唯一同构意义下成立。特别地，结合性结果使我们能够在同一维数中书写多个粘合而无需加括号。

命题 37. 设 U、V、W 为正则分子，并设 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $U \#_k V$ 和 $V \#_k W$ 都有定义。则 $(U \#_k V) \#_k W$ 和 $U \#_k (V \#_k W)$ 都有定义且唯一同构。

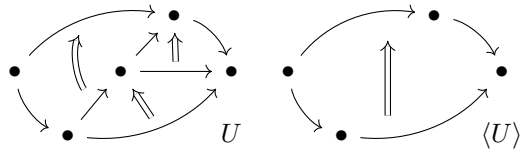
命题 38. 设 U 为正则分子且 $k \in \mathbb{N}$。那么 $U \#_k \partial_k^+ U$ 和 $\partial_k^- U \#_k U$ 均有定义，且都与 U 唯一同构。

Proposition 39. *Let U, U', V, V' be regular molecules and $k < n \in \mathbb{N}$ such that $(U \#_n U') \#_k (V \#_n V')$ is defined. Then $(U \#_k V) \#_n (U' \#_k V')$ is defined and uniquely isomorphic to $(U \#_n U') \#_k (V \#_n V')$.*

40（原子）。原子是具有最大元的正则分子。

41（圆正则分子的合并）。设 U 是维数为 > 0 的圆正则分子。U 的合并是原子 $\langle U \rangle := \partial^- U \Rightarrow \partial^+ U$。

例 42。下面这对粘贴图描绘了圆正则分子 U 及其合并结果 $\langle U \rangle$（一个原子）。



命题 43。设 U 是一个正则分子。那么

1） U 是原子，当且仅当它由（点）或（原子）生成；2）对于所有 $x \in U$，$\mathsf{cl}\,\{x\}$ 是原子；3）如果 U 是原子，则 U 是圆的；如果 $\dim U > 0$，则 U 与 $\langle U \rangle$ 同构。

44。对我们而言，胞腔是形状为原子的图表。

45（图示同构问题）。图示同构问题是如下判定问题：给定图式t：$U \to \mathbb{V}$和 t'：$U' \to \mathbb{V}$，是否存在一个同构φ：$U \xrightarrow{\sim} U'$，使得它们的形状满足 $t = \varphi$；t'?

根据命题 34，如果 φ 存在，则它是唯一的；如果找到 φ，则可以在线性时间内比较标记 t 和 φ；t'，因此该问题可归约为正则分子的同构问题。 [9] 的主要结果之一是利用正则分子的确定性遍历算法，在多项式时间内解决这一问题：

1) 正则分子的所有元素都可以在多项式时间内遍历，且遍历顺序在同构下保持不变；2) 因此，U 与 U' 同构，当且仅当它们按遍历顺序逐维表示后完全相同。

遍历顺序也为正则分子提供了一种规范表示。正则分子的构造器可以采用这样的实现方式：每一步之后都按照遍历顺序重新排列元素，从而可以通过检查正则分子是否相等，而非是否同构，来进行判定。

[9, 定理2.19] 给出的复杂度上界实际上是过度计数的结果。我们将描述遍历算法，其正确性在 [9, 定理 2. 17],中证明，并给出一个改进后的上界。

46（遍历算法）。该过程以正则分子 U 作为输入，并返回一个列表，其中包含按标记顺序排列的其所有元素。它使用一个辅助栈来存放正则分子 $V \subseteq U$。

开始时，栈中只有 U，所有元素均未标记。我们迭代主循环，直到栈为空，此时过程终止。

在每次迭代中，假设 V 位于栈顶。如果 V 中的所有元素都已标记，则将 V 从栈中弹出并继续迭代。否则，如果 $\partial^- V$ 中的任意元素未被标记，则将$\partial^- V$ 压入栈顶并继续迭代。否则，如果对于某个 $x \in U$，$V = \mathsf{cl}\,\{x\}$，则

1) 标记 x 并从栈中弹出 V，2) 如果 $\partial^+ V$ 中有任何元素未被标记，我们将 $\partial^+ V$ 压入栈顶，然后 3) 进行迭代。

否则，我们令 y 为满足 $\dim y = \dim V - 1$ 且存在未标记 $x \in \nabla^- y \cap V$ 的最早标记元素。这样的 y 总是存在，然后 $\nabla^- y \cap V = \{x\}$。我们将 $\mathsf{cl}\,\{x\}$ 推入栈顶并继续迭代。

47. 对于正则分子 U 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，我们令

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_k U &:= \coprod_{x \in U_k} \Delta x = \coprod_{y \in U_{k-1}} \nabla y,\\ |U_\vee| &:= \max\{|U_i|\}_{i \in \mathbb{N}},\\ |\mathscr{E}_\vee U| &:= \max(\{|\mathscr{E}_i U|\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{1\}).\end{aligned}$$

Note that $\mathscr{E}_k U$ is the set of edges between k and $(k-1)$-dimensional elements in $\mathscr{H}U$. We have $|U_k| \le |\mathscr{E}_k U|$ for all $k > 0$, while $|\mathscr{E}_0 U| = 0$. Since the maximum of the $|\mathscr{E}_k U|$ is 0 only when U is 0-dimensional, in which case $|U_k| = 1$, with our definition we always have $|U_\vee| \le |\mathscr{E}_\vee U|$.

Theorem 48. *The traversal algorithm admits an implementation running in time* $O(|U|\ |\mathscr{E}_\vee U|\ \log|\mathscr{E}_\vee U|)$.

证明。每次循环迭代的 $O(|\mathscr{E}_\vee U|\log|\mathscr{E}_\vee U|)$ 上界按照 [9, 定理 2.19], 推导，并由我们对 $|\mathscr{E}_\vee U|$ 的修改定义进行了简化，因此我们只需证明存在 $O(|U|)$ 次循环迭代。

令 $k \le \dim U$，并统计子集 V 位于栈顶时的循环迭代次数，其中 k 表示维数。这种情况可能以两种方式发生：

- V 是某个 W 的 U 或 $\partial^\alpha W$，其中维数为 $W > k$，而 W 之前位于（现在可能仍位于）栈上，
- $V$is cl $\{x\}$，对于某个 $x \in W$，其中 $\dim W = k$，且 W在栈中位于 V之下。

Let $(V^{(i)})_{i=1}^m$ be the sequence of all k-dimensional subsets appearing on the stack *in the first way* during the run, in the order in which they appear. For all $j < i \in \{1,\dots,m\}$, by [9, Lemma 2.14] $V^{(j)}$ must be fully marked before $V^{(i)}$ can appear on the stack. Moreover, $V^{(i)}$ can be on top at most

1) 一次，将 $\partial^- V^{(i)}$ 推到顶部；2) 对于未标记的 $x \in (V^{(i)})_k$，每次将 cl $\{x\}$ 推到顶部时一次；3) 一次，从栈中弹出 $V^{(i)}$。

以第二种方式出现的任意 k 维 cl $\{x\}$，都会在栈上存在唯一的 $V^{(i)}$ 时出现，且至多

1）一次将 $\partial^- x$ 压到顶部，2）一次标记 x 并将 cl $\{x\}$ 从栈中弹出。

Let $U_k^{(i)} := (V^{(i)})_k \setminus \bigcup_{j<i}(V^{(j)})_k$. Then $U_k^{(i)}$ is precisely the set of unmarked k-dimensional elements of $V^{(i)}$ when $V^{(i)}$ first appears on the stack. It follows that the number of loop iterations with a k-dimensional subset on top of the stack *while* $V^{(i)}$ *is on the stack* is at most $2 + 3\left|U_k^{(i)}\right|$.

由于在该过程结束时，U的所有 k维元素都已被标记，因此 $(U_k^{(i)})_{i=1}^m$ 构成 U_k的一个划分。因此，当栈顶为一个 k维子集时，循环迭代的总次数至多为

$$\sum_{i=1}^{m}\left(2+3\left|U_k^{(i)}\right|\right) = 2m + 3\sum_{i=1}^{m}\left|U_k^{(i)}\right| = 2m + 3\,|U_k|\,,$$

其上界为 $5\,|U_k|$。对所有维度求和，我们得到 $5\,|U|$ 次迭代的上界。■

II. 子图匹配问题

49（子分子包含）。子分子包含类是正则分子包含的最小子类，使得

1) 所有同构都是子分子包含，2) 对所有正则分子 U、V 以及满足 $U \#_k V$ 有定义的所有 $k \in \mathbb{N}$，$U \hookrightarrow (U \#_k V)$ 和 $V \hookrightarrow (U \#_k V)$ 都是子分子包含，3) 两个子分子包含的复合是子分子包含。

若闭子集 $V \subseteq U$ 在 U 中的包含是子分子包含，则它是一个子分子。在这种情况下，我们记作 $V \sqsubseteq U$。

50. 我们也让 $\varnothing \sqsubseteq \varnothing$ 来处理一些特殊情况。

引理 51. 设 U 是一个正则分子。那么 1) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in \{+,-\}$，$\partial_n^\alpha U \sqsubseteq U$；2) 对所有 $x \in U$，闭的 $\{x\} \sqsubseteq U$。

52（替换）。设 U、V、W 是正则分子，且 $\dim U = \dim V = \dim W$，$\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个包含，并假设 $V \Rightarrow W$ 已定义。考虑推出

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & V \Rightarrow W \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & U \cup (V \Rightarrow W) \end{array} \tag{1}$$

在 ogPos 中。用 $\imath$ 替换 W：$V \hookrightarrow U$ 是定向分次偏序集 $U[W/\imath(V)] := \partial^+(U \cup (V \Rightarrow W))$。当 $\imath$ 是一个闭子集的包含时，我们简写为 $U[W/V]$。

命题 53. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是正则分子的包含，满足 $\dim V = \dim U$，且 V 是圆的。以下各项等价：

(a) $\imath$ 是子分子包含；(b) 对于所有满足 $V \Rightarrow W$ 有定义的正则分子 W，(1) 中的 $U \cup (V \Rightarrow W)$ 是正则分子；(c) 对于所有满足 $V \Rightarrow W$ 有定义的正则分子 W，$U[W/\imath(V)]$ 是正则分子；(d) $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ 是正则分子。

54（可重写子分子）。若 $\dim V = \dim U$ 且 V是圆的，则子分子 $V \sqsubseteq U$ 可重写。

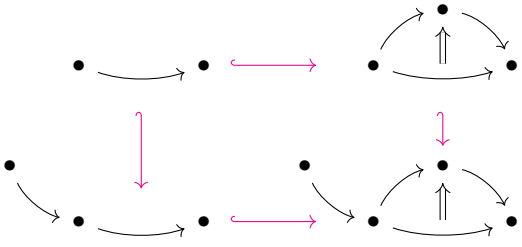
55（可重写子图）。设 $t\colon U \to \mathbb{V}$ 是一个图表。t 的可重写子图是将 t 限制到可重写子分子 $V \sqsubseteq U$所得的结果。

56. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in \{+,-\}$，我们将边界运算扩展到图表 $t\colon U \to \mathbb{V}$，定义为 $\partial_n^\alpha t := t|_{\partial_n^\alpha U}$。

57. 设 t 是形状为 U 的 n 维图表，且 r 是一条重写规则，其形式为形状为 $V \Rightarrow W$ 的 $(n+1)$ 维胞腔。若存在包含 $\imath\colon V \hookrightarrow U$，使得 $\partial^- r = \imath; t$，则将重写 r 应用于 t 可由形状为 $U \cup (V \Rightarrow W)$ 的 $(n+1)$ 维图表 $t \cup r$ 建模，如 (1) 所示。

根据命题53，$\partial^+(t \cup r)$ 对应于在 t 中以 $\partial^+ r$ 替换 $\partial^- r$；当且仅当 $\imath$ 是子分子包含时，它才保证是一个 n 维图表，也就是说，$\partial^- r$ 与 t 的一个可重写子图同构。

Example 58. The following is a depiction of diagram (1) when $V \Rightarrow W :=$ cobinary, $U :=$ arrow $\#_0$ arrow, and $\imath$ is the inclusion of the second arrow into the pasting.



The result of the substitution is the output boundary of the bottom right diagram, isomorphic to arrow $\#_0$ arrow $\#_0$ arrow.

59（子图匹配问题）。子图匹配问题是以下搜索问题：给定图式t：$U \to \mathbb{V}$和 s：$V \to \mathbb{V}$，使得 $\dim U = \dim V$ 且 V是圆的，寻找（如果存在）满足 $s = \imath$；t的子分子包含 $\imath$：$V \hookrightarrow U$。这可以分为三个子问题。

1）（分子匹配问题）。寻找（如果存在）包含$\imath$：$V \hookrightarrow U$。2）（可改写子分子问题）。判断 $\imath(V) \sqsubseteq U$ 是否成立。3）判断 $s = \imath$；t是否成立。

本节将重点讨论分子匹配问题，下一节将讨论可改写子分子问题。第三个问题是平凡的。

引理 60。设 U为一个正则分子，$n :=$ 维 U，$x \in U_{n-1}$，且 $\alpha \in \{+,-\}$。则

1) $x \in \mathscr{M}ax\, U$ *if and only if* $|\nabla x| = 0$,
2) $x \in \Delta^{\alpha} U \setminus \Delta^{-\alpha} U$ *if and only if* $|\nabla^{\alpha} x| = 1$ *and* $|\nabla^{-\alpha} x| = 0$,
3) $x \notin \Delta U$ *if and only if* $|\nabla^{+} x| = |\nabla^{-} x| = 1$.

61（流图）。设 U 是一个正则分子 $k \geq -1$。U 的 k-流图是有向图 $\mathscr{F}_k U$，其

- 的顶点集为 $\bigcup_{i>k} U_i$，并且

对于所有顶点 x、y，从 x 到 y 存在一条边，当且仅当 $\Delta_k^+ x \cap \Delta_k^- y$ 非空。

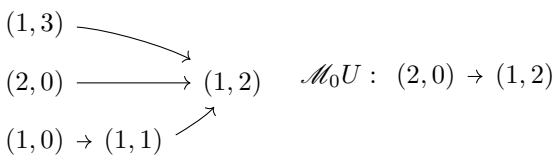
62（诱导子图）。设 $\mathscr{G}$ 是一个有向图，W 是其顶点集的子集。$\mathscr{G}$ 在 W 上的诱导子图是有向图 $\mathscr{G}|_W$，其顶点集为 W；对于 $\mathscr{G}$ 中从 x 到 y 的每条边，都存在一条从 x 到 y 的边。

63（极大流图）。设 U 是一个正则分子，$k \geq -1$。U 的极大 k-流图是 $\mathscr{F}_k U$ 在顶点集 上的诱导子图 $\mathscr{M}_k U$

$$\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, U)_i \subseteq \bigcup_{i>k} U_i.$$

注意，若 $k =$ 的维数为 $U - 1$，则 $\mathscr{F}_k U = \mathscr{M}_k U$。

例 64. 如果 U 是例 11 中的正则分子，



$$\mathscr{F}_1 U = \mathscr{M}_1 U : \ (2,0)$$

如果 U 是例 29 中的圆正则分子，

$$\mathscr{F}_1 U = \mathscr{M}_1 U : \ (2,0) \to (2,1)$$

引理 65. 设 $\imath$: $V \hookrightarrow U$ 是一个正规分子包含，$k \geq -1$。那么 $\mathscr{F}_k V$ 同构于 $\mathscr{F}_k U$ 在 $\imath$的像中的顶点所诱导的子图。

命题 66. 设 U是一个正则分子，$n :=$ 维 U。如果U 是圆的，那么 $\mathscr{F}_{n-1} U$ 是连通的。

67. 我们描述一种用于分子匹配问题的算法。其主要思路如下：如果我们成功地将 V 中的一个最高维原子与 U 中的一个最高维原子进行匹配，那么 V中的所有其他最高维原子与U中原子的匹配方式就只有一种可能。这是因为，根据命题 66，我们可以按照这样的顺序尝试匹配 V 中的最高维元素：下一个待匹配元素通过 $\mathscr{F}_{n-1} V$ 中的一条边与此前已匹配的元素连通；也就是说，它与此前已匹配的元素共享一个面 z。特别地，z 已经完成匹配。根据引理 60，为了继续进行匹配，z 在 U中必须恰好有两个上余面，其中一个是此前已匹配的最高维元素。因此，另一个上余面必然就是下一个匹配对象。

68（分子匹配算法）。该过程以两个正则分子 U、V作为输入，其中 $\dim U = \dim V$ 且 V是圆的，并返回所有包含 $V \hookrightarrow U$。

设 $n :=$ 维 U。首先，我们任意选取 U_n 中元素的一个排序 $(x^{(i)})_{i=1}^m$，例如遍历顺序。此外，我们选取 V_n 中元素的一个排序 $(y^{(j)})_{j=1}^p$，使得对于所有 $k \in \{1,\dots,p\}$，$\mathscr{F}_{n-1} V$ 在 $(y^{(j)})_{j=1}^k$ 上的诱导子图都是连通的。根据命题 66，这总是可行的，因为 $\mathscr{F}_{n-1} V$ 是连通的。对于每个 $k \in \{1,\dots,p\}$，令 $V_{(k)} := \bigcup_{j \leq k} \mathrm{cl}\left\{y^{(j)}\right\}$。当 $i \leq j$ 时，我们有 $V_{(i)} \subseteq V_{(j)}$；并且 $V_{(p)} = V$，因为根据引理 31，V 是纯的。

For each $i \in \{1,\dots,m\}$, we attempt to construct a sequence of inclusions $(\imath^{(i,j)} \colon V^{(j)} \hookrightarrow U)_{j=1}^p$ such that the restriction of $\imath^{(i,j')}$ to $V^{(j)}$ is equal to $\imath^{(i,j)}$ when $j \leq j'$, iterating on $k \in \{1,\dots,p\}$. When $k = 1$, if $V^{(1)} = \mathrm{cl}\left\{y^{(1)}\right\}$ is isomorphic to $\mathrm{cl}\left\{x^{(i)}\right\}$, we let $\imath^{(i,1)}$ be the unique isomorphism $V^{(1)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cl}\left\{x^{(i)}\right\}$ followed by the inclusion $\mathrm{cl}\left\{x^{(i)}\right\} \subseteq U$, and iterate on k. Else, we iterate on i.

When $k > 1$, we let j be the least value such that there exists an edge between $y^{(j)}$ and $y^{(k)}$ in $\mathscr{F}_{n-1} V$. Then $j < k$ because of our connectedness assumption, and there exists $z \in \Delta^{\alpha} y^{(j)} \cap \Delta^{-\alpha} y^{(k)}$ for some $\alpha \in \{+,-\}$. We pick the least such z with respect to some ordering of V_{n-1}, for example the traversal order. By Lemma 20, $\imath^{(i,k-1)}(y^{(j)})$ is one coface of $\imath^{(i,k-1)}(z)$ in U. If $\imath^{(i,k-1)}(z)$ has no other cofaces, then we iterate on i. Else, by Lemma 60, $\imath^{(i,k-1)}(z)$ has exactly one other coface, call it x; note that x cannot be in the image of $\imath^{(i,k-1)}$, since $y^{(j)}$ and $y^{(k)}$ are the only cofaces of z in V. If $\mathrm{cl}\left\{y^{(k)}\right\}$ is isomorphic to $\mathrm{cl}\{x\}$, and the unique isomorphism $\mathrm{cl}\left\{y^{(k)}\right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cl}\{x\}$ followed by the inclusion $\mathrm{cl}\{x\} \subseteq U$ matches $\imath^{(i,k-1)}$ on $\mathrm{cl}\left\{y^{(k)}\right\} \cap V^{(k-1)}$, then we let $\imath^{(i,k)}$ be the unique extension of $\imath^{(i,k-1)}$ that restricts to $\mathrm{cl}\left\{y^{(k)}\right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cl}\{x\} \subseteq U$. Else, we iterate on i.

如果我们成功构造出 $\imath^{(i,p)}$，就将其添加到包含关系列表 $V \hookrightarrow U$中，然后对 i进行迭代。

Theorem 69. *The molecule matching problem in dimension* n

可在时间内解决

$$O(|U_n|\ |V_n|\ |V|\ |\mathscr{E}_\vee V|\ \log|\mathscr{E}_\vee V|).$$

Proof. We suppose $n > 0$ since the case $n = 0$ is trivial. First of all, with our choice of data structures both U_n and V_{n-1} already come with a linear order when one is needed. Moreover, we can both construct $\mathscr{F}_{n-1}V$ and order its vertices in the desired way by traversing the "slice" of $\mathscr{H}V$ on the elements of dimension n and $(n-1)$. Since $\max\{|V_n|, |V_{n-1}|\} \leq |\mathscr{E}_n V|$, this can be done in time $O(|\mathscr{E}_n V|)$ with a standard traversal algorithm.

在算法的主要部分中，我们恰好有 $|U_n|$次迭代。每次迭代中，我们至多需要解决 $|V_n|$个关于 V的子分子的同构问题。每个问题的时间复杂度可由关于 V的同构问题的时间复杂度作为上界，即根据定理48，为$O(|V|\ |\mathscr{E}_\vee V|\ \log|\mathscr{E}_\vee V|)$。很容易验证，所有其他操作（例如检查同构在交集上是否匹配，或寻找下一个匹配）所需的复杂度都更低。由于 $|\mathscr{E}_n V| \leq |\mathscr{E}_\vee V|$，我们可以忽略 $O(|\mathscr{E}_n V|)$这一项，从而得出结论。■

III. 可改写子分子问题

70. 我们对可改写子分子问题的解决方案要求我们得出关于图式分层及其相关次序的新结果。

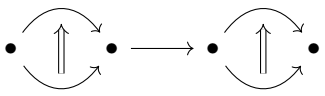
71（正则分子的分层）。设 U 为一个正则分子，$-1 \leq k <$ 维 U，且

$$m \coloneqq \left|\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right|.$$

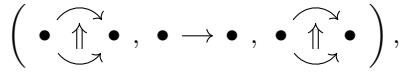
U 的 k 分层是正则分子序列 $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$，满足 U 同构于 $U^{(1)} \#_k \cdots \#_k U^{(m)}$，并且对所有 $i \in \{1,\dots,m\}$ 都有 $\dim U^{(i)} > k$。

对于 $k = -1$，这意味着 $m = 1$，且 U 是一个原子。我们通常将 U 的分层中的正则分子与其在 U 中的同构像相对应；这些同构像是子分子。

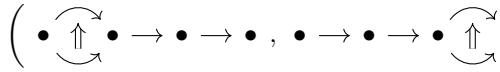
例 72。粘贴图的形状

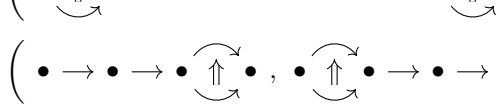


不允许 (-1)-分层，但允许一个 0-分层



以及两个一分层：





引理 73. 设 U 是一个正则分子，$k <$ 维 U，并假设 U 具有一个 k-分层 $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$。则

1）对于所有 $i \in \{1,\dots,m\}$，$U^{(i)}$ 都包含一个维数为 $> k$ 的单一极大元素；2）对于所有 $k \leq \ell <$，维数为 U 的 U 都允许一个 ℓ 分层。

74. 正则分子通常并不对每个 $k <$ dim U 都存在 k 分层；然而，根据引理 73，当它存在 k 分层时，它在高于 k 的维数上也存在分层。下一个结果表明，每个正则分子都存在某个 k 分层，并且这样的最小 k 落在一个特定范围内。

75（分层维数）。设 U 是一个正则分子。U 的分层维数是整数

$$\operatorname{lydim} U \coloneqq \min\left\{k \geq -1 \mid \left|\bigcup_{i>k+1} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| \leq 1\right\}.$$

76（框架维数）。设 U 是一个正则分子。U 的框架维数是整数。

$$\operatorname{frdim} U \coloneqq \dim \bigcup \{\operatorname{cl}\{x\} \cap \operatorname{cl}\{y\} \mid x, y \in \mathscr{M}ax\, U, x \neq y\}.$$

定理 77. 设 U 是一个正则分子。那么存在$k <$ dim U，使得 U 具有一个 k-分层。此外，

$$\operatorname{frdim} U \leq \min\{k \mid U \textit{ admits a } k\textit{-layering}\} \leq \operatorname{lydim} U.$$

推论 78. 设 U 是一个正则分子，$n \coloneqq$ 维 U。那么 U 具有一个 $(n-1)$-分层。

79（正则分子的排序）。设 U 是一个正则分子，$k \geq -1$，并假设 $\mathscr{M}_k U$ 无环。U 的 k-排序是 $\mathscr{M}_k U$ 的一个拓扑排序。

命题 80。设 U 是一个正则分子，$k \geq -1$。若 U 允许一个 k-分层，则 $\mathscr{M}_k U$ 无环，因此 U 允许一个 k-排序。

推论 81。设 U 是一个正则分子，$n \coloneqq$ 维 U。则 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 无环。

证明。由推论 78 和命题 80，并结合 $\mathscr{F}_{n-1}U = \mathscr{M}_{n-1}U$ 这一事实即可得出。■

82。设 U 是一个正则分子，$k \geq -1$。我们令

$$\mathscr{L}ay_k U \coloneqq \left\{k\text{-layerings } (U^{(i)})_{i=1}^{m} \text{ of } U\right\},$$
$$\mathscr{O}rd_k U \coloneqq \left\{k\text{-orderings } (x^{(i)})_{i=1}^{m} \text{ of } U\right\},$$

其中分层视为在逐层同构下等价。

命题 83. 设 U 为一个正则分子，$k \geq -1$。对于 U的每个 k-分层 $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$ 以及每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，令$x^{(i)}$ 为 $\bigcup_{j>k} (\mathscr{M}\mathrm{ax}\ U)_j$ 中$U^{(i)}$的像内唯一的元素。那么映射

$$\mathsf{m}_{k,U} \colon (U^{(i)})_{i=1}^{m} \mapsto (x^{(i)})_{i=1}^{m} \tag{2}$$

确定了一个单射函数 $\mathscr{L}\mathrm{ay}_k U \hookrightarrow \mathscr{O}\mathrm{rd}_k U$。

84. In general, the function $\mathsf{m}_{k,U}$ is not surjective, that is, not every k-ordering is induced by a k-layering. The following

is a criterion for deciding when a k-ordering comes from a k-layering.

命题 85. 设 U 是一个正则分子， $k \geq -1$，并设 $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$ 是 U 的一个 k-序。令

$$U^{(0)} \coloneqq \partial_k^- U,$$
$$U^{(i)} \coloneqq \partial_k^+ U^{(i-1)} \cup \mathrm{cl}\left\{x^{(i)}\right\} \quad \textit{for } i \in \{1,\dots,m\}.$$

以下各项等价：

(a) $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$ 是 U 的 k 层分层；

(b) 对所有 $i \in \{1,\dots,m\}$、 $\partial_k^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial_k^- U^{(i)}$。

此外，对于所有 $i \in \{1,\dots,m-1\}$，如果 $\partial_k^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial_k^- U^{(i)}$，那么 $U_{(i)}$和 $\partial_k^+ U_{(i)} = \partial_k^- U_{(i+1)}$都是正则分子。

86（路径诱导子图）。设 $\mathscr{G}$ 为一个有向图，W 为其顶点集的一个子集。我们称 $\mathscr{G}|_W$ 为路径诱导的，如果对于所有 x、$y \in W$，从 x 到 y 的每条路径都包含在 $\mathscr{G}$ 中。

87. 路径诱导子图也称为凸子图，例如在 [12] 中。

88（连通子图的收缩）。设 $\mathscr{G}$ 是一个有向图， W 是其顶点集的一个子集，且 $\mathscr{G}|_W$ 是连通的。$\mathscr{G}|_W$ 在 $\mathscr{G}$ 中的收缩是通过收缩 $\mathscr{G}|_W$ 中的每条边而得到的图小 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$。

引理 89。设 $\mathscr{G}$ 是一个有向无环图， W 是其顶点集的一个子集，且 $\mathscr{G}|_W$ 是连通的。以下各项等价：

（a） $\mathscr{G}|_W$ 是路径诱导的；（b） $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$是无环的；（c）存在 $\mathscr{G}$ 的一种拓扑排序，使得 W 的顶点彼此连续。

此外，在上述任一等价条件成立时，以下两者之间存在一个双射：

- 中使 W 的顶点彼此连续的 $\mathscr{G}$ 种拓扑排序，
- 对 $\mathscr{G}|_W$ 的拓扑排序和 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$的拓扑排序。

引理 90. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是正则分子的包含，满足 $n \coloneqq \dim U = \dim V$，且 V 是圆的。那么 $\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ 同构于 $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$。

命题 91. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是正则分子的包含，满足 $n \coloneqq$ 维 $U =$ 维 V，且 V 是圆的。若$\imath$ 是子分子包含，则 $\mathscr{F}_{n-1}V$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 的路径诱导子图。

Proof. By Proposition 53, if $\imath$ is a submolecule inclusion then $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ is a regular molecule. By Corollary 81 $\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ is acyclic, and by Lemma 90 it is isomorphic to $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$. It follows from Lemma 89 that $\mathscr{F}_{n-1}V$ is a path-induced subgraph of $\mathscr{F}_{n-1}U$. ∎

92. 给定正则分子的一个包含 $\imath\colon V \hookrightarrow U$，使得 $n \coloneqq \dim U = \dim V$且 V是圆的，$\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$ 的顶点要么是

- $x \in U_n \setminus \imath(V_n)$，要么是
- x_V，通过收缩 $\imath(V_n)$ 中的所有顶点获得。

以下结果将为我们用于可重写子分子问题的算法提供依据。

引理 93. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是正则分子的包含，使得 $n \coloneqq \dim U = \dim V$，且 V 是圆的，并设 $(y^{(i)})_{i=1}^{p}$ 是由 V 的 $(n-1)$- 分层所诱导的 $(n-1)$- 排序。以下各项等价：

(a) $\imath$ 是子分子包含；(b) 存在由 U的一个 $(n-1)$-分层 $(U_{(i)})_{i=1}^{m}$所诱导的 $(n-1)$-排序 $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$，以及 $q \in \{1,\dots,m\}$，使得 1. $(x^{(i)})_{i=q}^{p+q-1} = (\imath(y^{(i)}))_{i=1}^{p}$，2 $\imath\ \partial^- V$. ( ) $\sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$.

定理 94. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是正则分子的包含，使得 $n \coloneqq \dim U = \dim V$ 且 V 是圆的，$m \coloneqq |U_n|$， $p \coloneqq |V_n|$。以下条件等价：

(a) $\imath$ 是子分子包含；(b) $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$ 存在一个拓扑排序 $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$，使得令

$$U^{(0)} \coloneqq \partial^- U,$$
$$U^{(q)} \coloneqq \partial_{n-1}^+ U^{(q-1)} \cup \imath(V),$$
$$U^{(i)} \coloneqq \partial_{n-1}^+ U^{(i-1)} \cup \mathrm{cl}\left\{x^{(i)}\right\} \quad \textit{for } i \neq q,$$

我们有 $\imath(\partial^- V) \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$和 $\partial^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial^- U_{(i)}$对所有 $i \neq q$。

Sketch of proof. By Proposition 53, if $\imath$ is a submolecule inclusion then $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ is a regular molecule, so by Corollary 78 it admits an $(n-1)$-layering inducing an $(n-1)$-ordering. By Lemma 90 this can be identified with a topological sort of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$. The properties of the $U^{(i)}$ follow from the properties of the layering of $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$, as established by Proposition 85, after we "reverse" the substitution of $\langle V\rangle$ for $\imath(V)$, producing a regular molecule isomorphic to U.

Conversely, if $(y^{(i)})_{i=1}^{p}$ is an $(n-1)$-ordering induced by an $(n-1)$-layering of V, then $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, (y^{(i)})_{i=1}^{p}, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$ is an $(n-1)$-ordering of U, which by the criterion of Proposition 85 is induced by an $(n-1)$-layering. We conclude by Lemma 93. ∎

95（可重写子分子判定算法）。该过程以包含 $V \subseteq U$ 正则分子为输入，其中 $n \coloneqq$ 维 $U =$ 维 V 且 V 是圆的，并返回 $V \sqsubseteq U$ 是否成立。我们令 $m \coloneqq |U_n|$ 且 $p \coloneqq |V_n|$。

We construct the graph $\mathscr{G} \coloneqq \mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$. Then we start a loop. At each iteration, we search for a new topological sort of $\mathscr{G}$. If we cannot find one, we return *false*. Else, let $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$ be the new topological sort, and let $(U^{(i)})_{i=1}^{m-p+1}$ be as in Theorem 94.

For each $i \in \{1,\dots,m-p+1\}$, we start a recursive call to the algorithm to decide whether $\partial^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial^- U^{(i)}$ if $i \neq q$, and $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$ if $i = q$. If this returns *false*, we break

对 i 进行迭代并迭代主循环。如果这返回 true，我们对 i进行迭代。在对 i的迭代结束时，我们返回 true。

定理 96. 可重写子分子判定算法是正确的：它总会终止，并且当且仅当 $V \sqsubseteq U$ 时返回 true。

证明。我们按 U 和 V 的维数 n 进行归纳。如果 $n = 0$，则结论显然成立，因此设 $n > 0$。

The number of iterations of the main loop is bounded by the number of topological sorts of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$, which is finite. Consider one such iteration, producing a topological sort $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$. Let us write $V^{(q)} := V$ and $V^{(i)} := \mathrm{cl}\{x^{(i)}\}$ for $i \neq q$. For all $i \in \{1, \ldots, m-p+1\}$, we have a call to the decision algorithm with input $\partial^- V^{(i)} \subseteq \partial^- U^{(i)}$, assuming that the calls for $j < i$ all returned *true*.

现在，$\partial^- V_{\ (i)}$ 根据命题 34 和命题 43 是圆的。此外，$\partial^- U^{(1)} = \partial^- U$，它是一个正则分子。对于$i > 1$，假设 $\partial^- V_{\ (i-1)} \sqsubseteq \partial^- U^{(i-1)}$，我们可以应用命题 53，推出 $U_{\ (i-1)}$ 和 $\partial^+ U_{\ (i-1)} = \partial^- U^{(i)}$是正则分子。因此

1）第一次调用的输入格式正确，

2）对于 $i > 1$，假设第（$i-1$）次调用正确返回 true，则第 i 次调用的输入格式正确。

由于所有这些对象的维数都是（$n-1$），根据归纳假设，每次调用都会终止并返回正确答案。根据定理 94，这证明了维数 n下的正确性和终止性。■

定理 97。维度为 n 的可改写子分子问题可以在时间内求解

$$O\left(\prod_{k \leq n} |U_k|! \, |U_k|\right).$$

证明。对于 $n = 0$，这是显然的，因此设 $n > 0$。主循环的迭代次数至多为 $\mathscr{G} := \mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$ 的拓扑排序数。当 $\mathscr{G}$ 是离散图时，该数达到最大值，此时该数为 $(|U_n| - |V_n| + 1)!$，并且紧密地有上界 $|U_n|!$。

在主循环的每次迭代中，我们至多对包含于 U 中的维数为 $n-1$ 的正则分子调用 $|U_n| - |V_n| + 1$ 次算法。根据归纳假设，这些调用所需时间为 $O\left(\prod_{k \leq n-1} |U_k|! \, |U_k|\right)$。

所有其他操作的复杂度都较低：查找拓扑排序和计算 $U^{(i)}$ 的边界都需要在线性时间内完成，但这可以由 $|U_n| \, |U_{n-1}|$ 给出上界，因此我们得出结论。■

98. 可重写子分子问题的超多项式上界并未明确说明子图表匹配在任意维数下是否存在多项式时间算法。尽管如此，我们至少能够证明该问题属于 NP。

命题 99. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，n 维子图匹配问题属于 NP。

证明。只需对 n 作归纳，证明 n 维的可改写子分子问题属于 NP。当 $n = 0$ 时，该问题是平凡的。在 $n > 0$ 维中，证明 $V \sqsubseteq U$ 的多项式大小证书为

1) a topological sort $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$ of the graph $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$, and
2) polynomial-size certificates that $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$ and $\partial^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial^- U^{(i)}$ for all $i \neq q$,

使用定理 94 的记号。根据归纳假设，该对象存在，并且可以在多项式时间内验证。■

100. 我们通过考虑基于无环性属性的子图表匹配算法的一些改进来结束本节。

101（框架无环分子）。设 U 为正则分子。如果对于所有子分子 $V \sqsubseteq U$，当 $r := \text{fr维数} V$ 时，$\mathscr{M}_r V$ 是无环的，则称 U 为框架无环。

定理 102。设 U 是一个正则分子。以下各项等价：

(a) U 是框架无环的；(b) 对于所有 $V \sqsubseteq U$以及所有 fr 维数 $V \leq k <$维V，V都存在一种 k分层；(c) 对于所有 $V \sqsubseteq U$以及所有 fr维数 $V \leq k <$维V，集合$\mathscr{L}\mathrm{ay}_k V$和 $\mathscr{O}\mathrm{rd}_k V$均非空且基数相等。

103（稳定框架无环分子）。设 U 为一个正则分子。若对于所有子分子 $V \sqsubseteq U$ 以及所有可重写子分子 $W \sqsubseteq V$，正则分子 $V[\langle W \rangle / W]$ 都是框架无环的，则称 U 是稳定框架无环的。

104. 每个稳定框架无环的正则分子都是框架无环的：如果我们将 $V \sqsubseteq U$ 取为一个原子，则替换$U[\langle V \rangle / V]$ 是平凡的。此外，(稳定)框架无环正则分子的每个子分子都是(稳定)框架无环的。

我们不知道有任何正则分子是稳定框架无环的、但不是框架无环的例子（正如我们将在下一节看到的，任何此类例子至少是 4 维的），因此我们无法排除这两个类别相同的可能性，但同样也不清楚它们确实相同。

105. 一般而言，框架无环性似乎很难检验。然而，更强的无环条件可以推出框架无环性，而这些条件更容易检验。我们不知道有哪些易于验证的稳定框架无环性的充分条件。

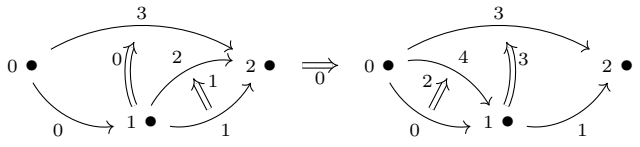
106（无环分子）。设 U 是一个正则分子。我们称 $^\circ U$ 为无环的，当且仅当 $\mathscr{H}U$ 是无环的。

107（逐维无环分子）。设 U 是一个正则分子。我们称 U 为逐维无环的，当对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathscr{F}_k U$ 都是无环的。

引理 108。设 U 是一个正则分子。则

1) 如果 U 是无环的，则它是逐维无环的；2) 如果 U 是逐维无环的，则它是框架无环的。

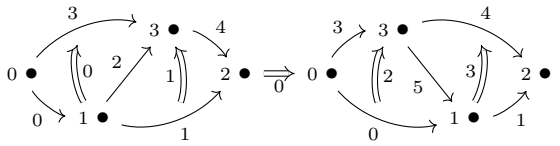
例 109. 两个蕴含都是真蕴含。3 维原子



（基于 [8, 图 2]）不是无环的，因为其定向哈斯图包含有向环

$$(0,1) \to (1,1) \to (2,1) \to (3,0) \to (2,2) \to (1,4) \to (0,1),$$

但它在各维上都是无环的。三维原子



（基于 [8, 图 4]）并非逐维无环，因为其 0-流图包含有向环 (1,2) → (1,5) → (1,2)，但根据定理 121，它是框架无环的。

命题 110. 如果 U 保证是框架无环的，则维数为 n 的可改写子分子问题可以在时间内求解。

$$O\left(\prod_{k\le n} |U_k|!\right).$$

Proof. Given a topological sort $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$ of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$, by Lemma 89, substituting any $(n-1)$-ordering of V for x_V produces an $(n-1)$-ordering of U in which the elements of V are consecutive. By Theorem 102, this is induced by an $(n-1)$-layering of U. By Lemma 93, it suffices to check that $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$ to conclude that $V \sqsubseteq U$, so we have a single recursive call instead of $O(|U_n|)$ many. Since $\partial^- U^{(q)} \sqsubseteq U^{(q)} \sqsubseteq U$, it is frame-acyclic, and we can proceed inductively. ■

命题 111. 如果保证 U 稳定框架无环，则可在线性于 $\mathscr{H}U$ 大小的时间内解决可重写子分子问题。

Proof. If $V \sqsubseteq U$, by assumption $U[\langle V\rangle/V]$ is frame-acyclic. By Theorem 102, *all* its $(n-1)$-orderings are induced by $(n-1)$-layerings, and by Lemma 90 they are in bijection with topological sorts of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$. It follows that, if any topological sort of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$ fails to satisfy the conditions of Theorem 94, then V is not a submolecule of U, so in the decision algorithm we can stop after the first iteration of the main loop.

This involves finding a single topological sort and computing $\partial^- U^{(q)}$, both of which take time $O(|\mathscr{E}_n U|)$; then, as in Proposition 110, we make a single call to the decision algorithm for $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$. Since $\partial^- U^{(q)} \sqsubseteq U^{(q)} \sqsubseteq U$, it is stably frame-acyclic, and we can proceed inductively. ■

推论 112. 将子图匹配问题限制在形状为稳定框架无环的图式上，该问题属于 P类。

113. 命题 111 引出了一个问题：为什么不直接围绕形状为稳定框架无环的图表发展高维重写理论？原因在于，一般而言，无环性是图式的全局性质，而高维重写理论所必需的局部替换并不能保持这些性质。事实上，正则分子的归纳定义使其成为一类形状的“极小”对象；这类形状在粘合以及圆图的重写下是闭的，而圆性似乎是确保拓扑健全性和替换具有良好组合描述的自然条件。任何进一步的限制，从重写理论的角度来看，几乎肯定都不切实际。

不过，下一节将展示，在不超过3维的情况下完全没有任何限制：所有正规分子都是稳定框架无环的，事实上，我们还可以进一步简化算法。

IV. 在低维中

114. 本节中的一些结果来自 [17, 第 3] 节。

引理 115. 设 U 是一个 1 维正则分子，$m := |U_1|$。则 $\mathscr{H}U$ 是一个具有 $(2m+1)$ 个顶点的线性图，并且 $\mathscr{F}_0 U$ 是一个具有 m 个顶点的线性图。

命题 116。设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个正则分子包含，$\dim V = \dim U = 1$。则 $\imath$ 是子分子包含。

证明。由引理 65 $\mathscr{F}_0 V$ 是 $\mathscr{F}_0 U$的诱导子图。由引理 115，二者都是线性图，而线性图的诱导子图是线性图，当且仅当其顶点在母图中连续。引理 93 的所有其他条件显然都满足。■

命题117。设 U 是一个正则分子，维数为$U \le 2$。那么 U 是无环的。

引理 118. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个正规分子包含，$\dim U \le 2$。那么 $\mathscr{F}_1 V$ 是 $\mathscr{F}_1 U$ 的路径诱导子图。

定理 119. 设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个正则分子包含，满足 $\dim U = \dim V = 2$，且 V 是圆的。那么 $\imath$ 是一个子分子包含。

证明。由引理 118 结合引理 89，可知存在 U 的 1序 $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$，其中 $\imath(V)$ 的元素是连续的，也就是说，当且仅当 $p \le i \le q$ 时，$x^{(i)} \in \imath(V)$ 对某些 $p, q \in \{1, \dots, m\}$ 成立。

By Proposition 117 U is acyclic, so by Lemma 108 it is frame-acyclic, and by Theorem 102 the 1-ordering comes from a 1-layering $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$ such that $\imath(\partial^- V) \subseteq \partial^- U^{(p)}$. Since both are 1-dimensional regular molecules, by Proposition 116 $\imath(\partial^- V) \sqsubseteq \partial^- U^{(p)}$, and Lemma 93 allows us to conclude. ■

推论 120. 维数为 ≤ 2 的可改写子分子问题有一个平凡的常数时间解。

定理 121. 设 U 是一个正则分子，$\dim U \le 3$。那么 U 是稳定框架无环的。

定理 122。设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个正规分子包含，满足 $\dim U = \dim V = 3$ 且 V 是圆的。以下条件等价：

(a) $\imath$ 是子分子包含；(b) $\mathscr{F}_2 V$ 是 $\mathscr{F}_2 U$的路径诱导子图。

Proof. One implication is Proposition 91, so we only need to prove the converse. By Lemma 89, if $\mathscr{F}_2 V$ is path-induced, then there exists a 2-ordering $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$ of U in which the elements of $\imath(V)$ are consecutive, that is, $x^{(i)} \in \imath(V)$ if and only if $p \le i \le q$ for some $p, q \in \{1, \dots, m\}$. By Theorem 121, U is frame-acyclic, so by Theorem 102 the 2-ordering comes from a 2-layering $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$ such that $\imath(\partial^- V) \subseteq \partial^- U^{(p)}$. Since both are 2-dimensional regular molecules and $\partial^- V$ is round, by Theorem 119 $\imath(\partial^- V) \sqsubseteq \partial^- U^{(p)}$, and we conclude by Lemma 93. ∎

定理 123. 3 维中的可改写子分子问题可在 $O(|\mathscr{E}_3 U|)$ 时间内求解。

证明。根据定理 122 和引理 89，只需构造 $\mathscr{F}_2 U / \mathscr{F}_2 V$ 并检查其是否无环。遍历 $U_3 \cup U_2$上的 $\mathscr{H} U$诱导子图即可完成前者，耗时为 $O(|\mathscr{E}_3 U|)$。 $\mathscr{F}_2 U / \mathscr{F}_2 V$ 的顶点数和边数也都是$O(|\mathscr{E}_3 U|)$，因此得证。∎

124. 要在 3维 中匹配图表 $s\colon V \to \mathbb{V}\mathrm{in}\ t\colon U \to \mathbb{V}$，根据我们的结果，我们需要

- $O(|U_3|\ |V_3|\ |V|\ |\mathscr{E}_\vee V| \log |\mathscr{E}_\vee V|)$ 时间内找到所有包含关系 $V \hookrightarrow U$，其数量为 $O(|U_3|)$，
- $O(|\mathscr{E}_3 U|)$ 是检查其中每个对象是否为子分子包含所需的时间，
- $O(|V|)$ 是比较每个对象上的标记所需的时间，假设标记可以在常数时间内进行比较，

从而得到总体的

$$O(|U_3|\,(|\mathscr{E}_3 U| + |V_3|\ |V|\ |\mathscr{E}_\vee V| \log |\mathscr{E}_\vee V|))$$

上界。这里我们使用了一般维数下分子匹配的界；通过采用针对3维的策略，这一界可能还可以改进，因为在维数为 ≤ 2时确实如此。

如果我们考虑一台通过重写3维图式运行的机器，该机器具有固定的有限重写规则列表，那么与 V 相关联的变量可以视为该机器的常数参数。我们的结果表明，这样的机器可以在标准计算模型中以 $O(|U_3|\ |\mathscr{E}_3 U|)$的开销进行模拟。

125. 我们将4维或更高维数中的子图表匹配是否存在多项式算法留作一个开放问题。需要克服的主要障碍是对拓扑排序进行代价高昂的迭代，其动机在于：从4维开始，并非所有拓扑排序都源于分层。或许可以认为，这是由于流图“遗漏”了某些关系；因此，有望以某种方式为其补充额外信息，从而恢复分层与拓扑

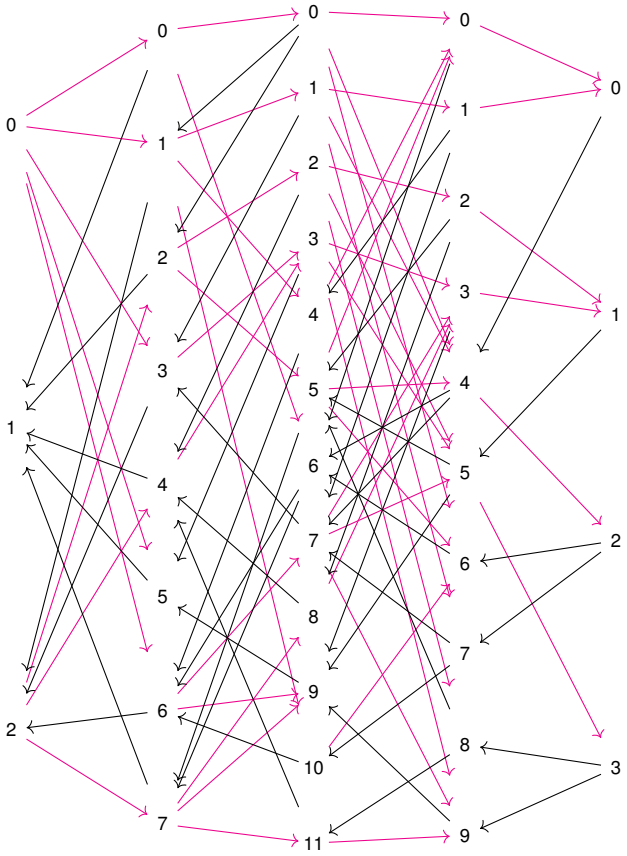


图1. 例126的定向哈斯图。

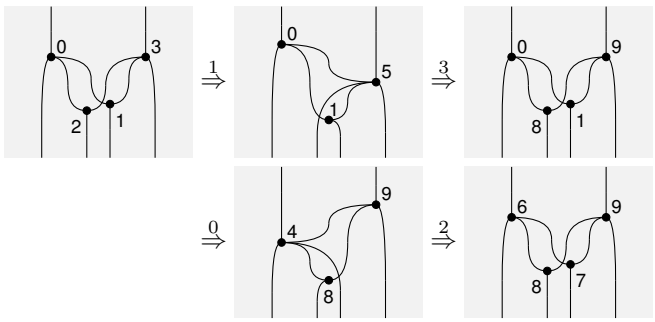
排序之间的双射对应关系。遗憾的是，以下反例表明，一般情况下不可能如此。

例126。这个例子是一个四维正则分子 U，它不是框架无环的。其哈斯图如图1所示，维数从左向右递增。

为理解这个例子，我们可以把 U 的四维元素想象成三维图式平面投影的重写，并将其描绘为弦图。于是U 具有一个三分层，它导出三序

$$((4,1),(4,3),(4,0),(4,2))$$

对应重写步骤序列



其中节点表示三维元素，输入线和输出线表示其输入面和输出面。它还有另一个三分层，从而诱导出三序

$$((4,0),(4,2),(4,1),(4,3)).$$

这两种是 U 的仅有的三分层。事实上，重写 (4, 1) 的应用会在 (4, 0) 的输入边界中产生“非凸性”，其形式为 $\mathscr{F}_2U$ 中的路径 (3, 1) → (3, 5) → (3, 0)，在第二个弦图中也可以看作向上的路径 $1 \to 5 \to 0$。在应用 (4, 0) 之前，需要通过应用 (4, 3) 来解决这一问题，后者会消除非凸性。类似地，如果先应用 (4, 0)，它会在 (4, 1) 的输入边界中产生非凸性，即 $\mathscr{F}_2U$ 中的路径 (3, 2) → (3, 4) → (3, 3)，需要通过应用 (4, 2) 来解决。现在，我们已经有了以下所有内容的例子。

1）一个非由三分层诱导的三序。图 $\mathscr{F}_3U$ 仅仅是

$$(4,0) \longrightarrow (4,2)$$

$$(4,1) \longrightarrow (4,3)$$

因此，U 还允许另外四种不确定三分层的三序；例如，((4,0),(4,1),(4,2),(4,3))。此外，$\mathscr{F}_3U$不存在扩展；更一般地说，不存在顶点集为 U_4的图，使其拓扑排序与 U的三分层相对应。

2）一个并非框架无环的正则分子。
根据定理102，我们可以推断 U 并非框架无环。更直接地，$V := \mathrm{cl}\,\{(4,0),(4,3)\}$ 是 U 的一个子分子，且fr维数为$V = 2$，但 $\mathscr{M}_2V$包含有向环(4,3) → (4,0) → (4,3)，因为

$$(2,5) \in \Delta_2^+(4,3) \cap \Delta_2^-(4,0),$$
$$(2,7) \in \Delta_2^+(4,0) \cap \Delta_2^-(4,3).$$

3) 一个不属于子分子包含的圆正则分子包含。

We have that $\partial^-(4,0) = \mathrm{cl}\,\{(3,0),(3,1)\}$ is a round 3-dimensional regular molecule, included in the 3-dimensional regular molecule $W := \mathrm{cl}\,\{(3,0),(3,1),(3,5)\}$. However, it is *not* a submolecule of W, due to the presence of the path $(3,1) \to (3,5) \to (3,0)$ in $\mathscr{M}_2W$.

结论与展望

我们已迈出研究基于各维数高维重写的机器的第一步。我们介绍了可在标准计算模型中对其进行模拟的算法，并证明这只需在维数 ≤ 3 下付出低次多项式时间开销。

维数为 > 3 时的可行性是最显而易见的开放问题。我们希望，深入理解例126这类情况后，能够改进算法，或证明其为 NP 完全。四维改写以一种非局部的方式给“互不相交”的重写引入障碍，这或许暗示后一种可能性更大。无论如何，我们正在积极研究这个问题。

Beyond the more immediate questions, we hope to have laid the groundwork for an approach to complexity theory based on higher-dimensional rewriting, that leverages its unique characteristics as described in the introduction. For instance, we believe that the coexistence of higher algebraic structures and rewrite systems within the same category, as made possible by the theory of diagrammatic sets or their variants, may lead to a unified and compositional understanding of interpretations of rewrite systems, such as polynomial and matrix interpretations, which are one of the key techniques in implicit computational complexity. We plan to develop various aspects of this programme in future work.

致谢

本研究得到欧洲科学基金会资助的爱沙尼亚信息技术学院研究项目（project2014-2020.4.05.19-0001）以及爱沙尼亚研究委员会项目 PSG764 的支持。我们感谢匿名审稿人对早期稿件提出的宝贵意见。

参考文献

[1] A. Burroni, “Higher-dimensional word problems with applications to equational logic,” *Theoretical Computer Science*, vol. 115, no. 1, pp. 43–62, 1993.
[2] Y. Guiraud, “*Rewriting methods in higher algebra*,” Thèse d’habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7, 2019.
[3] F. Lawvere, “Functorial semantics of algebraic theories,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 50, no. 5, p. 869, 1963.
[4] S. Gaussent, Y. Guiraud, and P. Malbos, “Coherent presentations of Artin monoids,” *Compositio Mathematica*, vol. 151, no. 5, pp. 957–998, 2015.
[5] D. Reutter and J. Vicary, “High-level methods for homotopy construction in associative n-categories,” in *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, 2019, pp. 1–13.
[6] M. Freedman, A. Kitaev, M. Larsen, and Z. Wang, “Topological quantum computation,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 40, no. 1, pp. 31–38, 2003.
[7] A. Hadzihasanovic, “Diagrammatic sets and rewriting in weak higher categories,” *arXiv preprint arXiv:2007.14505*, 2020.
[8] R. Steiner, “The algebra of directed complexes,” *Applied Categorical Structures*, vol. 1, no. 3, pp. 247–284, 1993.
[9] A. Hadzihasanovic and D. Kessler, “Data structures for topologically sound higher-dimensional diagram rewriting,” in *Proceedings Fifth International Conference on Applied Category Theory (ACT2022)*, 2022.
[10] G. Bonfante and Y. Guiraud, “Polygraphic programs and polynomial-time functions,” *Logical Methods in Computer Science*, vol. 5, no. 2: 14, pp. 1–37, 2009.
[11] F. Bonchi, F. Gadducci, A. Kissinger, P. Sobocinski, and F. Zanasi, “String diagram rewrite theory I: Rewriting with Frobenius structure,” *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 69, no. 2, pp. 1–58, 2022.
[12] ——, “String diagram rewrite theory II: Rewriting with symmetric monoidal structure,” *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 32, no. 4, pp. 511–541, 2022.
[13] ——, “String diagram rewrite theory III: Confluence with and without Frobenius,” *arXiv preprint arXiv:2109.06049*, 2021.
[14] A. Delpeuch and J. Vicary, “The word problem for braided monoidal categories is unknot-hard,” *arXiv preprint arXiv:2105.04237*, 2021.
[15] J. Vicary and A. Delpeuch, “Normalization for planar string diagrams and a quadratic equivalence algorithm,” *Logical Methods in Computer Science*, vol. 18, 2022.
[16] A. Hadzihasanovic, “Higher-categorical pasting diagrams,” to appear.
[17] ——, “The smash product of monoidal theories,” in *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, 2021.

A. 第 I 节的证明

127. 大多数证明取自一部即将出版的关于粘贴图组合学的专著 [16]。为避免使本附录变得比现在更长，我们尽可能引用 [8], [7], [17] 的结果，尽管其中使用了略有不同的定义；所有使用的结果都已被独立重新证明。

引理 20 的证明。这是 [7, 引理 1.9 和引理 1.11]的组合。■

命题 22 的证明。由 [7, 引理 1.9],可知，存在一个从 ogPos 到偏序集及保序映射范畴 Pos 的遗忘函子 U。所有这些极限和余极限在 Pos 中都存在，因此只需证明它们可以提升到 ogPos。

终偏序集是仅含一个元素的偏序集，而始偏序集是空偏序集。它们都具有唯一的定向。令 P 为一个定向分次偏序集。从 UP 到终偏序集的唯一映射，以及从始偏序集出发的唯一映射，都平凡地保持边界，因此它们提升为定向分次偏序集的映射。

设 $\imath_1\colon Q \hookrightarrow P_1$ 和 $\imath_2\colon Q \hookrightarrow P_2$ 是定向分次偏序集的包含。在 Pos 中计算它们的推出，可确定两个保序映射。

$$j_1\colon \mathsf{U}P_1 \to \mathsf{U}P_1 \cup \mathsf{U}P_2, \qquad j_2\colon \mathsf{U}P_2 \to \mathsf{U}P_1 \cup \mathsf{U}P_2.$$

Since $\mathsf{U}\imath_1$ and $\mathsf{U}\imath_2$ are closed embeddings, it is an exercise to show that j_1 and j_2 are also closed embeddings, and deduce that $\mathsf{U}P_1 \cup \mathsf{U}P_2$ is a graded poset. Since j_1 and j_2 preserve the covering relation and are jointly surjective, we can put a unique orientation on $\mathsf{U}P_1 \cup \mathsf{U}P_2$ in such a way that j_1 and j_2 both preserve orientations; overlaps are resolved by the fact that $(\mathsf{U}\imath_1); j_1 = (\mathsf{U}\imath_2); j_2$ and $\imath_1$ and $\imath_2$ preserve orientations. This choice of orientation determines a unique lift of the pushout to **ogPos**. ■

引理 128. 设 U 是定向分次偏序集 $n \in \mathbb{N}$ 的闭子集，并且 $\alpha \in \{+,-\}$。则

1) $(\partial_n^\alpha U)_n = \Delta_n^\alpha U$,
2) $(\mathscr{M}ax\,(\partial_n^\alpha U))_k = (\mathscr{M}ax\, U)_k$ *for all* $k < n$.

证明。令 $x \in \partial_n^\alpha U$。根据定义，存在 y使得 $x \le y$，并且 $y \in \Delta_n^\alpha U$ 或 $y \in$（$\mathscr{M}$轴 U）$_k$，其中某个$k < n$。如果 x 是极大的，则必然有 $x = y$，从而得到一个包含。反向包含显然成立。■

引理 129. 设 U 是一个定向分次偏序集中的闭子集， $n \in \mathbb{N}$, 且 $\alpha \in \{+,-\}$。则

1) $(\mathscr{M}ax\, U)_n = \Delta_n^+ U \cap \Delta_n^- U$,
2) if $n = \dim U$ *then* $(\mathscr{M}ax\, U)_n = \Delta_n^\alpha U = U_n$.

证明。设 $x \in U$，维数为 $x = n$。则 x是极大的，当且仅当它在 U 中没有上余面；当且仅当$\nabla^{-\alpha} x \cap U = \nabla^\alpha x \cap U = \varnothing$；当且仅当 $x \in \Delta_n^+ U \cap \Delta_n^- U$。如果 $n =$维数为 U，那么 U_n中的每个元素在 U 中都是极大的，因此

$$U_n = (\mathscr{M}ax\, U)_n \subseteq \Delta_n^\alpha U \subseteq U_n$$

利用证明的第一部分，我们得出它们全部相等。■

引理 130. 设 U、V 是定向分次偏序集 $n \in \mathbb{N}$ 的闭子集，且 $\alpha \in \{+,-\}$。那么

1) $\mathscr{M}ax\,(U \cup V) = (\mathscr{M}ax\, U \cap \mathscr{M}ax\, V) + (\mathscr{M}ax\, U \setminus V) + (\mathscr{M}ax\, V \setminus U)$,
2) $\Delta_n^\alpha(U \cup V) = (\Delta_n^\alpha U \cap \Delta_n^\alpha V) + (\Delta_n^\alpha U \setminus V) + (\Delta_n^\alpha V \setminus U)$.

证明。由定义并利用分解 $U \cup V = (U \cap V) + (U \setminus V) + (V \setminus U)$ 可直接得出。■

引理 26 的证明。将 U 和 V 识别为它们的同构像，我们将证明 $\partial^-(U \Rightarrow^\varphi V) = U$ 和 $\partial^+(U \Rightarrow^\varphi V) = V$。令 $n \coloneqq$ 维 $U =$ 维 V。根据构造，我们有 $\Delta_n^-(U \Rightarrow^\varphi V) = U_n$ 和 $\Delta_n^+(U \Rightarrow^\varphi V) = V_n$。

对于所有 $k < n$，集合 $(\mathscr{M}\mathrm{ax}\,(U \Rightarrow^\varphi V))_k$ 等于 $(\mathscr{M}\mathrm{ax}\,(U \cup V))_k$。我们声称，这等于 $(\mathscr{M}\mathrm{ax}\, U)_k$ 和 $(\mathscr{M}\mathrm{ax}\, V)_k$。对于 $k < n-1$,

$$(\mathscr{M}ax\, U)_k = (\mathscr{M}ax\, \partial^\alpha U)_k = (\mathscr{M}ax\, \partial^\alpha V)_k = (\mathscr{M}ax\, V)_k$$

根据引理 128。对于 $k = n-1$，根据引理 129

$$(\mathscr{M}ax\, U)_{n-1} = \Delta^- U \cap \Delta^+ U = \Delta^- V \cap \Delta^+ V = (\mathscr{M}ax\, V)_{n-1}.$$

然后由引理 130 得出结论。■

引理 31 的证明。我们将证明逆否命题。假设 U 不是纯的。那么 U 中存在一个极大元素 x，满足 $k \coloneqq \dim x < \dim U$。

由于 $(\mathscr{M}\mathrm{ax}\, U)_k = \Delta_k^- U \cap \Delta_k^+ U$，我们有 $x \in \partial_k^- U \cap \partial_k^+ U$。那么 $\partial_k^- U \cap \partial_k^+ U$ 是 k 维的，不可能等于 $\partial_{k-1} U$，后者是 $(k-1)$ 维的。因此 U 不是圆的。■

命题 34 的证明。第一点由 [7, 命题 1.38],得出；第三点和第四点由 [7, 命题 1.23]得出。对于粘合构造，第二点由第一点和第三点得出；对于重写构造，则由 [7, 引理 2.2] 得出。第五点是圆性的定义与球面性结合后的直接推论。■

命题 37、38、39 的证明。这些结论都由 [7,命题 123]以及正则分子同构的唯一性共同推出。■

命题 43 的证明。我们通过归纳法证明第一点。如果 U 由（点）生成，那么 U 是终端定向分次偏序集，它显然具有最大元。如果U由（粘合）生成，那么 U可分解为并集 $V \cup W$，其中 $V \cap W = \partial_k^+ V = \partial_k^- W$和 $k <$最大 {维数 V, 维数 W}。于是存在元素 $x_1 \in V$和 $x_2 \in W$，使得

1） x_1 在 V中是极大的，且 x_2 在 W中是极大的，
2）维数 $x_1 > k$ 和维数 $x_2 > k$。

We have $\dim(V \cap W) \le k$, so neither x_1 nor x_2 are contained in $V \cap W$. It follows that x_1 and x_2 are distinct maximal elements of U, so U does not have a greatest element. If U was produced by (*Atom*), then U splits into $(U_- \cup U_+) + \{\top\}$, where U_- and U_+ are round regular molecules of dimension n, and $\Delta^\alpha \top = (U_\alpha)_n$ for each $\alpha \in \{+,-\}$. By Lemma 31,

we have $U_\alpha =$闭包$(U_\alpha)_n$, so $U_\alpha = \partial^\alpha\top \subseteq$闭包 $\{\top\}$. It follows that all elements of U are in the closure of x, that is, x is the 最大元 of U.

We prove the second point also by induction. If U was produced by (*Point*), then x must be the unique element of U whose closure is U itself. If U was produced by (*Paste*), it splits into $V \cup W$, and $x \in V$ or $x \in W$; the inductive hypothesis applies. If U was produced by (*Atom*), it is equal to $(V \cup W) + \{\top\}$, and either $x \in V$ or $x \in W$, in which case the inductive hypothesis applies, or $x = \top$, and $\mathrm{cl}\,\{x\} = U$ is an atom by definition.

For the third point, if U was produced by (*Point*), it is trivially round. If it was produced by (*Atom*), it is of the form $V \Rightarrow W$ where $\partial^- U$ is isomorphic to V and $\partial^+ U$ to W, and by definition of the rewrite construction their intersection is uniquely isomorphic to ∂V and ∂W; we conclude by globularity. If $\dim U > 0$, then U was produced by (*Atom*), so it is of the form $V \Rightarrow W$, with $\partial^- U$ isomorphic to V and $\partial^+ U$ to W. By uniqueness of these isomorphisms, U is isomorphic to $\partial^- U \Rightarrow \partial^+ U$. ∎

B. 第二节的证明

Proof of Lemma 51. For the first point, $\partial^\alpha_n U$ is a regular molecule by Proposition 34. By Proposition 38, the pastings $U \#_n \partial^+_n U$ and $\partial^-_n U \#_n U$ are both defined and uniquely isomorphic to U. The inclusion of $\partial^-_n U$ into U factors as the inclusion $\partial^-_n U \hookrightarrow (\partial^-_n U \#_n U)$ followed by an isomorphism, and the inclusion of $\partial^+_n U$ factors as the inclusion $\partial^+_n U \hookrightarrow (U \#_n \partial^+_n U)$ followed by an isomorphism.

For the second point, $\mathrm{cl}\,\{x\}$ is an atom by Proposition 43. We proceed by induction on the construction of U. If U was produced by (*Point*), then x must be the unique element of U, so $\mathrm{cl}\,\{x\} = U$. If U was produced by (*Paste*), it splits into $V \cup W$ with $V, W \sqsubseteq U$, and $x \in V$ or $x \in W$. By the inductive hypothesis, $\mathrm{cl}\,\{x\} \sqsubseteq V$ or $\mathrm{cl}\,\{x\} \sqsubseteq W$. If U was produced by (*Atom*), it splits into $(V \cup W) + \{\top\}$ with $V, W \sqsubseteq U$, and either $x \in V$ or $x \in W$, in which case the inductive hypothesis applies since $V, W \sqsubseteq U$ by Lemma 51, or $x = \top$, and $\mathrm{cl}\,\{x\} = U$. ∎

引理131. 设 V为正则分子， $n <$维V,$\alpha \in \{+,-\}$。考虑如下形式的推出图表。

$$\begin{array}{ccc} \partial^\alpha_n V & \hookrightarrow & V \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow{\scriptstyle j_V} \\ U & \xhookrightarrow{j_U} & V \cup U \end{array}$$

在 ogPos 中。如果 $\dim U = n$ 和 $\imath$ 是子分子包含，那么

1) $V \cup U$ 是正则分子，2) j_U将 U映射到 $\partial^\alpha_n(V \cup U)$上，3) $j_V(V) \sqsubseteq V \cup U$ 以及 $j_V(\partial^{-\alpha}_n V) \sqsubseteq \partial^{-\alpha}_n($ $V \cup U)$。

证明。对 $\imath$的构造进行归纳。若 $\imath$ 是同构，则 j_V 也是同构，所有陈述都显然成立。

设 U 的形式为 $\partial^\alpha_n V \#_k W$，其中 $k \in \mathbb{N}$，且 $\imath$ 是将 $\partial^\alpha_n V$ 包含到粘合中的包含。由于 $\dim U = n$，必然有 $\dim W \le n$，因此 $\partial^\alpha_n W = W$。若 $k \ge n$，则同样有 $k \ge \dim W$，在这种情况下，$\imath$ 和 j_V 又是同构。设 $k < n$。将 V 通过 j_V 与其像等同，$V \cup U$ 分裂为 $V \cup W$，其中

$$V \cap W = \partial^\alpha_n V \cap W = \partial^-_k W = \partial^+_k(\partial^\alpha_n V) = \partial^+_k V$$

where the final equation uses globularity of V. This exhibits $V \cup U$ as $V \#_k W$, with j_V the inclusion of V into the pasting, and j_U maps $\partial^\alpha_n V \#_k W$ onto $\partial^\alpha_n(V \#_k W)$ by [7, Proposition 1.23] and the axioms of strict ω-categories. Similarly, $\partial^{-\alpha}_n V \sqsubseteq \partial^{-\alpha}_n(V \#_k W)$. The case where U is of the form $W \#_k \partial^\alpha_n V$ is dual.

根据推出方块的粘合律，如果该命题对两个子分子包含成立，那么对它们的复合也成立。∎

引理132. 设 U 为定向分次偏序集， V、W 为圆正则分子，且 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 为包含，使得$U[W/\imath(V)]$有定义。设 $\varphi\colon \partial V \xhookrightarrow{\sim} \partial W$ 为构造 $V \Rightarrow W$ 时使用的同构。则 $U[W/\imath(V)]$可构造为推出。

$$\begin{array}{ccccc} \partial V & \xhookrightarrow{\varphi} & \partial W & \hookrightarrow & W \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ U \setminus (\imath(V) \setminus \imath(\partial V)) & & \xhookrightarrow{\qquad\qquad} & & U[W/\imath(V)]. \end{array} \tag{3}$$

证明。我们可以放心地将 V 与其通过 $\imath$ 的像等同起来，并将其视为 U 的闭子集。首先，注意到$U \setminus (V \setminus \partial V)$ 是一个闭子集在一个闭子集中的补集的补集，因此它在 U 中是闭的，并且作为定向分次偏序集是良定义的。

令 $n :=$维 U，使得 $\dim(U \cup (V \Rightarrow W))$ 和 $\dim(V \Rightarrow W)$ 都等于 $n+1$。于是

$$\Delta^+_n(V \Rightarrow W) = W_n, \qquad \Delta^+_n U = U_n$$

并且由于 $U \cap (V \Rightarrow W) = V$，根据引理 130

$$\Delta^+_n(U \cup (V \Rightarrow W)) = W_n + (U_n \setminus V_n) = W_n + (U \setminus (V \setminus \partial V))_n,$$

而对于所有 $k < n$

$$(\mathscr{M}ax\,(U \cup (V \Rightarrow W)))_k = (\mathscr{M}ax\,U)_k = \\ = (\mathscr{M}ax\,(U \setminus (V \setminus \partial V)))_k$$

因为 V 和 $V \Rightarrow W$ 都是圆的，因此是纯的，并且不包含任何维数为 k 的极大元。

由此可得，$\partial^+(U \cup (V \Rightarrow W))$ 是 W 和 $(U \setminus (V \setminus \partial V))$ 的并集，二者的交为 $\partial W = \partial V$。∎

引理133。设 U 是一个定向分次偏序集， V、W 是圆正则分子，且 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个包含，使得$U[W/\imath(V)]$有定义。设 $j\colon W \hookrightarrow U[W/\imath(V)]$ 是 (3) 的右侧。则 $(U[W/\imath(V)])[V/j(W)]$ 有定义，且与 U 同构。

证明。由于在 $V \Rightarrow W$ 有定义时 $W \Rightarrow V$ 也有定义，因此可知 $(U[W/\imath(V)])[V/j(W)]$ 有定义。

与 U 闭子集代数的同构使用引理132两次即可直接得到。■

命题 53 的证明。如果 $\imath$ 是一个子分子包含，根据引理 131 $U \cup (V \Rightarrow W)$ 及其输出边界 $U[W/\imath(V),]$ 是正则分子，并且将 W 包含到 $U[W/\imath(V)]$ 中是一个子分子包含。

如果 V 是一个圆的正规分子，那么 $\langle V\rangle$ 是一个原子，根据命题 43，它是圆的，并且根据引理 26，其边界与 V 的边界同构。于是 $V \Rightarrow \langle V\rangle$ 被定义，因此第四个条件是第三个条件的特殊情况。

最后，假设 $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ 是一个正则分子。由引理 51，由于 $\langle V\rangle$ 是一个原子，它到 $U[\langle V\rangle/\imath(V)]$ 中的包含 j 是一个子分子包含。

Using Lemma 131 as in the first part, we deduce that $(U[\langle V\rangle/\imath(V)])[V/j(\langle V\rangle)]$ is a regular molecule, and the inclusion of V into it is a submolecule inclusion. By Lemma 133, $(U[\langle V\rangle/\imath(V)])[V/j(\langle V\rangle)]$ is isomorphic to U, and $\imath$ factors as this submolecule inclusion followed by an isomorphism. ■

Proof of Lemma 60. This is [7, Lemma 1.16]. ■

引理 65 的证明。由引理 20 可知，对于所有 $x \in V$ 和 $\alpha \in \{+,-\}$，集合 $\Delta^\alpha_k x$ 与 $\Delta^\alpha_k \imath(x)$ 同构。由此可知，对于所有 x、$y \in \bigcup_{i>k} V_i$，$\mathscr{F}_k V$ 中的 x 和 y 之间存在一条边，当且仅当 $\mathscr{F}_k U$ 中的 $\imath(x)$ 和 $\imath(y)$ 之间存在一条边。■

134. 以下证明使用了后续各节中证明的结果；这些结果的证明都没有用到本证明，因此不存在循环论证。

命题 66 的证明。首先，如果 U 是圆的，那么它就是纯的，因此 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 的顶点是 U_n的元素。如果U 是一个原子，那么 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 由单个顶点且没有边组成，因此它显然是连通的。特别地，当 $n = 0$ 时这一点成立，因为此时 U 是该点，所以我们可以对 n进行归纳。

Suppose $n > 0$ and $|U_n| > 1$, which by Lemma 136 implies $\operatorname{lydim} U = n-1$. Assume by way of contradiction that $\mathscr{F}_{n-1}U$ is not connected. Then there is a bipartition $U_n = A + B$ such that there are no edges in $\mathscr{F}_{n-1}U$ between vertices in A and vertices in B. By Lemma 60, no element of U_{n-1} can be covered by two elements with the same orientation, so this implies that $\dim(\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B) < n-1$. Let

$$A' \coloneqq \left\{x \in \Delta^- U \mid \nabla^- x \subseteq A\right\},$$
$$B' \coloneqq \left\{x \in \Delta^- U \mid \nabla^- x \subseteq B\right\}.$$

Then $A' + B'$ is a bipartition of $\Delta^- U$. By Proposition 34, $\partial^- U$ is round, so by the inductive hypothesis $\mathscr{F}_{n-2}(\partial^- U)$ is connected. It follows that there exist $\alpha \in \{+,-\}$, $x \in A'$, $y \in B'$, and $z \in U_{n-2}$ such that $z \in \Delta^\alpha x \cap \Delta^{-\alpha} y$. Then z has two distinct cofaces in $\partial^- U$, so by Lemma 60 $z \notin \partial(\partial^- U) = \partial_{n-2}U$. We claim that $z \in \partial^+ U$, contradicting the roundness of U.

根据定理 77，存在一个 $n-1$ 层化 $U^{(i)m}_{i=1}U$；我们将 $U^{(i)}$ 与其同构像对应起来，置于 U 中。令 $V_0 \coloneqq \partial^- U$，且对每个 $i \in \{1,\dots,m\}$ 令 $V_i \coloneqq \partial^+ U^{(i)}$。我们将证明，对于所有 $i \in \{0,\dots,m\}$，1） $z \in V_i$，2）存在元素 $x_i \in \operatorname{cl} A$和 $y_i \in \operatorname{cl} B$，使得$\nabla^\alpha z \cap V_i = \{x_i\}$ 和 $\nabla^{-\alpha} z \cap V_i = \{y_i\}$。

对于 $i = 0$，我们已经通过 $x_0 \coloneqq x$,$y_0 \coloneqq y$ 得到了这一结论。令 $i \geq 0$，并假设这对 $i-1$ 成立。根据引理 73，$U^{(i)}$ 中存在一个唯一的 n 维元素 $x^{(i)}$，根据引理 144

$$V_i = \partial^- U^{(i)}[\partial^+ x^{(i)}/\partial^- x^{(i)}] = V_{i-1}[\partial^+ x^{(i)}/\partial^- x^{(i)}].$$

Suppose $x^{(i)} \in A$. Then $y_{i-1} \notin \operatorname{cl}\left\{x^{(i)}\right\}$, so $y_{i-1} \in V_i$, and we let $y_i \coloneqq y_{i-1}$. If $x_{i-1} \notin \operatorname{cl}\left\{x^{(i)}\right\}$ then also $x_{i-1} \in V_i$, and we let $x_i \coloneqq x_{i-1}$. Otherwise, x_{i-1} is the only coface of z in $\partial^- x^{(i)}$, so by Lemma 60 we have $z \in \partial^\alpha(\partial^- x^{(i)}) = \partial^\alpha(\partial^+ x^{(i)})$. It follows that $z \in V_i$ and there exists a unique x_i such that $\nabla^\alpha z \cap \partial^+ x^{(i)} = \{x_i\}$. The case $x^{(i)} \in B$ is analogous.

由于 $V_m = \partial^+ U$，我们已证明 $z \in \partial^+ U$，这与矛盾相矛盾。■

C. 第 III 节的证明

引理135. 设 U 是一个正则分子，$-1 \leq k <$ 维 U，且 $(U_{(i)})^m_{i=1}$ 是 U 的 k-分层。对于所有 $i < j \in \{1,\dots,m\}$，

$$U^{(i)} \cap U^{(j)} = \partial^+_k U^{(i)} \cap \partial^-_k U^{(j)}.$$

证明。令 $i < j \in \{1,\dots,m\}$，以及

$$V \coloneqq U^{(1)} \#_k \dots \#_k U^{(i)},$$
$$W \coloneqq \partial^+_k U^{(i)} \#_k U^{(i+1)} \#_k \dots \#_k U^{(j-1)},$$
$$Z \coloneqq U^{(j)} \#_k \dots \#_k U^{(m)}.$$

然后 U沿着 k-边界分裂为 $V \cup (W \#_k Z)$，因此

$$\partial^+_k U^{(i)} = \partial^+_k V = \partial^-_k (W \#_k Z) = V \cap (W \#_k Z).$$

由于 $U_{(i)} \subseteq V$且 $U^{(j)} \subseteq (W \#_k Z)$，由此可得 $U^{(i)} \cap U^{(j)} \subseteq \partial^+_k U^{(i)}$。对偶地，根据 U沿 k-边界分裂为 $(V \#_k W) \cup Z$这一事实，我们推导出$U^{(i)} \cap U^{(j)} \subseteq \partial^-_k U^{(j)}$。■

引理 73 的证明。对于第一点，由于 $\dim U^{(i)} > k$每个 $U^{(i)}$ 都至少包含一个维数为$> k$的极大元，并且

$$\dim(U^{(i)} \cap U^{(j)}) = \dim(\partial^+_k U^{(i)} \cap \partial^-_k U^{(j)}) \leq k$$

根据引理135，这样的极大元不会同时包含在两个这样的对象中。由于维数为 $> k$的极大元恰好有 m 个，因此每个 $U^{(i)}$ 恰好包含其中一个。

对于第二点，对所有 $i \in \{1,\dots,m\}$，令

$$V^{(i)} \coloneqq \partial^+_\ell U^{(1)} \#_k \dots \#_k \partial^+_\ell U^{(i-1)} \#_k \#_k U^{(i)} \#_k \partial^-_\ell U^{(i+1)} \#_k \dots \#_k \partial^-_\ell U^{(m)}.$$

通过反复应用命题 39，随后应用命题 38，U 是同构的

$$V^{(1)} \#_\ell \dots \#_\ell V^{(m)}.$$

限制到 $(V^{(i)})_{i=1}^{m}$ 的子序列，其中 i 满足 $\dim V^{(i)} > \ell$；根据命题 38，这不会改变结果，于是我们得到 U 的 ℓ 分层。■

引理136. 设 U是一个正则分子， $n \coloneqq$维 U。则

1) $\operatorname{lydim} U \leq n-1$,
2) $\operatorname{lydim} U = n-1$ *if and only if* $|U_n| > 1$.

证明。我们有

$$\left|\bigcup_{i>n} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| = |\varnothing| = 0,$$

因此 $\operatorname{lydim} U \leq n-1$，当且仅当

$$\left|\bigcup_{i>n-1} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| = |(\mathscr{M}ax\, U)_n| = |U_n| > 1,$$

其中使用了引理 129。 ■

引理 137. 设 U 是一个正则分子。则 $\operatorname{lydim} U$ 是-1，当且仅当 U 是一个原子。

证明。设 $\operatorname{lydim} U = -1$。如果 $\left|\bigcup_{i>0}(\mathscr{M}\mathrm{ax}\ U)_i\right| = 0$，则 $\dim U = 0$，且 U 是该点。

Otherwise, $1 = \left|\bigcup_{i>0}(\mathscr{M}ax\, U)_i\right| = |\mathscr{M}ax\, U|$ because a regular molecule which is not 0-dimensional cannot have a 0-dimensional maximal element. In either case, U has a greatest element. Conversely, if U has a greatest element, $\left|\bigcup_{i>0}(\mathscr{M}ax\, U)_i\right| \leq |\mathscr{M}ax\, U| = 1$. ■

引理 138. 设 U、V 为正则分子，并假设对于某个 $k < \min\{\dim U、\dim V\}$，$U \#_k V$ 有定义。然后

$$\operatorname{lydim}(U \#_k V) \geq \max\{\operatorname{lydim} U, \operatorname{lydim} V, k\}.$$

证明。将 U 和 V 视为它们的同构像，$U \#_k V$ 可分解为 $U \cup V$，其中 $\dim(U \cap V) = \dim \partial_k^+ U = k$。根据引理 130，对于所有 $i > k$,

$$(\mathscr{M}ax\,(U \#_k V))_i = (\mathscr{M}ax\, U)_i + (\mathscr{M}ax\, V)_i,$$

并且由于 $k <$ min {维数U，维数V}， U和 V都至少有一个维数严格大于 k 的极大元素。因此可得

$$\left|\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\,(U \#_k V))_i\right| = \\ = \left|\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| + \left|\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, V)_i\right| \geq 2,$$

因此 $k-1 <$lydim $(U \#_k V)$，也就是说， $k \leq$lydim $(U \#_k V)$。此外，令 $n \coloneqq$ lydim $(U \#_k V)$，由于 $n+1 > k$,

$$\left|\bigcup_{i>n+1} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| + \left|\bigcup_{i>n+1} (\mathscr{M}ax\, V)_i\right| = \\ = \left|\bigcup_{i>n+1} (\mathscr{M}ax\,(U \#_k V))_i\right| \leq 1,$$

这意味着

$$\left|\bigcup_{i>n+1} (\mathscr{M}ax\, U)_i\right| \leq 1, \left|\bigcup_{i>n+1} (\mathscr{M}ax\, V)_i\right| \leq 1.$$

则 max $\{$lydim U， lydim $V\} \leq$lydim $(U \#_k V)$。 ■

引理139. 设 U为正则分子， $k \coloneqq$lydim U。假设 $k \geq 0$，并令$(U^{(i)})_{i=1}^{m}$为 U的 k-层化。则

1) $m > 1$， 2) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$， lydim $U^{(i)} < k$， 3) 至多一个 $U^{(i)}$ 包含维数为$> k+1$的元素。

Proof. By definition of $\operatorname{lydim} U$, if $k \geq 0$ and a k-layering exists, then $m > 1$, for otherwise $k-1 \leq \operatorname{lydim} U$, a contradiction. Moreover, U contains at most one element of dimension $> k+1$, which can be contained at most in one of the $U^{(i)}$. Finally, by Lemma 73, we have $\left|\bigcup_{j>k}(\mathscr{M}ax\, U^{(i)})_j\right| = 1$, so $\operatorname{lydim} U^{(i)} \leq k-1 < k$. ■

定理 77 的证明。令 $k \coloneqq$lydim U。若 $k = -1$， 则 U是一个原子，并具有平凡分层 $U = U^{(1)}$。若 $k \geq 0$，根据引理 137 U 不是原子，因此我们可以假设 U是由（粘合）得到的。于是，对于某些正则分子 V、W，且 $\ell <$min {dim V、dim W}， U等于 $V \#_\ell W$。根据归纳假设，我们有分层

$$V^{(1)} \#_{k_V} \ldots \#_{k_V} V^{(m_V)}, \quad W^{(1)} \#_{k_W} \ldots \#_{k_W} W^{(m_W)}$$

V和 W，其中 $k_V \coloneqq$lydim V，且 $k_W \coloneqq$lydim W。此外，根据引理 138， $k \geq$max $\{k_V, k_W, \ell\}$。令

$$n_V \coloneqq \begin{cases} m_V & \text{if } k_V = k, \\ 1 & \text{if } k_V < k \text{ and } \dim V > k, \\ 0 & \text{if } k_V < \dim V < k, \end{cases}$$

$$n_W \coloneqq \begin{cases} m_W & \text{if } k_W = k, \\ 1 & \text{if } k_W < k \text{ and } \dim W > k, \\ 0 & \text{if } k_W < \dim W < k. \end{cases}$$

注意， $n_V = n_W = 0$绝不可能成立。我们声称可以将 V分解为

$$\tilde{V}^{(1)} \#_k \ldots \#_k \tilde{V}^{(n_V)} \#_k \underbrace{\partial_k^+ V \#_k \ldots \#_k \partial_k^+ V}_{n_W \text{ times}}, \qquad (4)$$

其中每个 $\tilde{V}^{(i)}$ 都是一个正则分子，且恰好包含一个维数为 $> k$ 的极大元素。若 $k_V = k$，我们令 $\tilde{V}^{(i)} \coloneqq V_{(i)}$，对所有 $i \in \{1, \ldots, m_V\}$ 均如此。若 $k_V < k$，则 V至多包含一个维数为 $> k_V+1$ 的极大元素，因此至多包含一个维数为 $> k$的极大元素。若 $\dim V > k$，它恰好包含一个，因此我们令 $\tilde{V}_{(1)} \coloneqq V$。若 $\dim V < k$，则 $V = \partial_k^+ V$。根据命题 38，粘合 $\partial_k^+ V$ 的副本不会改变结果（在唯一同构意义下）。同理，我们可以将 W 分解为

$$\underbrace{\partial_k^- W \#_k \ldots \#_k \partial_k^- W}_{n_V \text{ times}} \#_k \tilde{W}^{(1)} \#_k \ldots \#_k \tilde{W}^{(n_W)} \qquad (5)$$

其中每个 $\tilde{W}^{(i)}$ 恰好包含一个维数为 $>k$ 的极大元素。

若 $\ell = k$，由于 $\ell < \min\{\dim V, \dim W\}$，我们有$0 < \min\{n_V, n_W\}$。然后

$$\tilde{V}^{(1)} \#_k \dots \#_k \tilde{V}^{(n_V)} \#_k \tilde{W}^{(1)} \#_k \dots \#_k \tilde{W}^{(n_W)}$$

是 U 的 k 分层。如果 $\ell < k$，令

$$U^{(i)} := \begin{cases} \tilde{V}^{(i)} \#_\ell \partial_k^- W & \text{if } i \le n_V, \\ \partial_k^+ V \#_\ell \tilde{W}^{(i-n_V)} & \text{if } n_V < i \le n_V + n_W. \end{cases}$$

由于 $\dim \partial_k^- V = \dim \partial_k^+ W = k$，每个 $U^{(i)}$ 仍恰好包含一个维数为 $>k$ 的极大元素。将 (4) 和 (5) 代入 $V \#_\ell W$，并反复使用命题 39，我们推得 $V \#_\ell W$ 同构于

$$U^{(1)} \#_k \dots \#_k U^{(n_V+n_W)},$$

其具有所需的性质。必然地，$n_V + n_W = m$。

这证明了 U 具有 k分层。还需证明 fr维数 $U \le k$。令 x、y为 U 的不同极大元。若 $\min\{\dim x, \dim y\} \le k$, 则 $\dim(\mathrm{cl}\,\{x\} \cap \mathrm{cl}\,\{y\}) < k$。

Suppose that $k < \min\{\dim x, \dim y\}$, and let $(U^{(i)})_{i=1}^m$ be a k-layering of U. By Lemma 73 there exist $i \neq j$ such that $x \in U^{(i)}$ and $y \in U^{(j)}$. By Lemma 135, there exists $\alpha \in \{+,-\}$ such that $U^{(i)} \cap U^{(j)} = \partial_k^\alpha U^{(i)} \cap \partial_k^{-\alpha} U^{(j)}$. Then $\mathrm{cl}\,\{x\} \cap \mathrm{cl}\,\{y\} \subseteq \partial_k^\alpha U^{(i)} \cap \partial_k^{-\alpha} U^{(j)}$, which is at most k-dimensional. ■

推论 78 的证明。由定理 77 和引理136 得出。■

引理140. 设 U、V 是正则分子，并假设对于某个 $k < \min\{\dim U, \dim V\}$，$U \#_k V$有定义。若 $\mathscr{M}_k U$和 $\mathscr{M}_k V$无环，则 $\mathscr{M}_k(U \#_k V)$无环。

证明。假设 $\mathscr{M}_k U$ 和 $\mathscr{M}_k V$ 无环。我们可以将 U和 V与它们在 $U \#_k V$中的像等同。根据引理 130，由于 $\dim(U \cap V) = k$,

$$\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\,(U \#_k V))_i = \bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, U)_i + \bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, V)_i,$$

so $\mathscr{M}_k U$ and $\mathscr{M}_k V$ are isomorphic to the induced subgraphs of $\mathscr{M}_k(U \#_k V)$ on the vertices in U and V, respectively. It follows that a cycle in $\mathscr{M}_k(U \#_k V)$ cannot remain in U or V, but has to visit vertices in both. In particular, such a cycle has to go through an edge from $x \in V$ to $y \in U$, induced by the existence of $z \in \Delta_k^+ x \cap \Delta_k^- y$. But then $z \notin \partial_k^- V$ and $z \notin \partial_k^+ U$, yet $z \in U \cap V$, a contradiction. ■

命题80的证明。设 $(U_{(i)})_{i=1}^m$是 U 的 k 层。对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，根据引理 73，图 $\mathscr{M}_k U^{(i)}$ 显然是无环的。反复应用引理140即可得出结论。■

命题83的证明。根据引理 73，函数 $(U^{(i)})_{i=1}^m \mapsto (x^{(i)})_{i=1}^m$是良定义的。令 $i, j \in \{1, \dots, m\}$，并假设在 $\mathscr{M}_k U$ 中存在一条从 $x^{(i)}$ 到 $x^{(j)}$ 的边，即存在 $z \in \Delta_k^+ x^{(i)} \cap \Delta_k^- x^{(j)}$。根据命题 80，$\mathscr{M}_k U$ 是无环的，因此必然有 $i \neq j$。如果 $j < i$，那么 $U^{(j)} \cap U^{(i)} \subseteq \partial_k^+ U^{(j)} \cap \partial_k^- U^{(i)}$根据引理135，这与 z的存在相矛盾。由此可知，$i < j$，因此 $(x^{(i)})_{i=1}^m$是 U的k-排序。

设 $(V^{(i)})_{i=1}^m$ 是另一个 k-分层，并假设它确定了与 $(U^{(i)})_{i=1}^m$相同的 k-排序。那么 both$U^{(1)}$ and $V_{(1)}$ 在 U 中的像是

$$\mathrm{cl}\left\{x^{(1)}\right\} \cup \partial^- U,$$

因此 $U^{(1)}$ 与 V同构$_{(1)}$。若 $m = 1$ 则证明完毕。否则，$(U^{(i)})_{i=2}^m$ 和 $(V_{(i)})_{i=2}^m$ 是 k分层，它们在其像上诱导相同的 k 排序。根据递归，我们得出它们逐层同构。■

引理141。设 U、V、W 为正则分子，$k <$ 维 U、$\alpha \in \{+,-\}$，并设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$ 是一个子分子包含，使得 $U[W/\imath(V)]$ 有定义。则 $\partial_k^\alpha U$ 同构于 $\partial_k^\alpha(U[W/\imath(V)])$。

证明。由引理131，$U \cup (V \Rightarrow W)$ 是一个正则分子，且 U 与其输入边界同构。由球面性，$\partial_k^\alpha U$ 同构于

$$\partial_k^\alpha(\partial^+(U \cup (V \Rightarrow W))) = \partial_k^\alpha(U[W/\imath(V)]).$$ ■

引理142. 设 U、V、W、U'、U''为正则分子，设$k <$维数为U，且设 $\imath\colon V \hookrightarrow U$为子分子包含，使得

$$U \#_k U', U'' \#_k U, U[W/\imath(V)]$$

已定义。然后

1) $U[W/\imath(V)] \#_k U'$ *and* $U'' \#_k U[W/\imath(V)]$ *are defined,*
2) *if* $\dim U' \le \dim U$, *then* $(U \#_k U')[W/\imath_U(\imath(V))]$ *is defined and isomorphic to* $U[W/\imath(V)] \#_k U'$,
3) *if* $\dim U'' \le \dim U$, *then* $(U'' \#_k U)[W/\imath_U(\imath(V))]$ *is defined and isomorphic to* $U'' \#_k U[W/\imath(V)]$.

证明。由引理141可知，$U[W/\imath(V)] \#_k U'$和$U'' \#_k U[W/\imath(V)]$ 均有定义。

随后，替换$(U \#_k U')[W/\imath_U(\imath(V))]$有定义，当且仅当 $\dim(U \#_k U') = \dim U$；等价地，当且仅当 $\dim U' \le \dim U$。类似地，$(U'' \#_k U)[W/\imath_U(\imath(V))]$有定义，当且仅当 $\dim U'' \le \dim U$。这些同构可直接由定义以及推出方格的粘合法则得到。■

143. 定理 77结合引理139和引理137，使我们能够通过对正则分子的分层维数进行归纳来证明正则分子的性质。也就是说，要证明某个性质对所有正则分子 U都成立，只需

- 证明当 $\mathrm{lydim}\, U = -1$ 时成立，即当 U是一个原子时成立，
- 证明当 $k := \mathrm{lydim}\, U \ge 0$ 时成立，假设它对 k 的一个 U 层化中的所有 $(U_{(i)})_{i=1}^m$ 都成立。

引理 144. 设 U 是一个正则分子，$k \in \mathbb{N}$，并假设

$$\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}ax\, U)_i = \{x\}.$$

那么，对于所有 $\alpha \in \{+,-\}$,

1) $\partial_k^\alpha x \sqsubseteq \partial_k^\alpha U$，2) $\partial_k^\alpha U$同构于 $\partial_k^{-\alpha} U[\partial_k^\alpha x / \partial_k^{-\alpha} x]$。

证明。我们对 lydim U 进行归纳。

如果 lydim $U = -1$，那么 U 是一个原子，并且等于 cl $\{x\}$。由此可得 $\partial_k^\alpha x = \partial_k^\alpha U$，它显然是一个子分子，并且与 $\partial_k^{-\alpha} U[\partial_k^\alpha x / \partial_k^{-\alpha} x]$ 同构。

假设 $\ell := \text{lydim } U \geq 0$，并令 $(U^{(i)})_{i=1}^m$ 为 ℓ 层的 U。那么 $\ell \leq k-1 < k$因为 $\left|\bigcup_{i>k} (\mathscr{M}\text{ax } U)_i\right| = 1$。根据 [7, 命题 1.23] 以及严格 ω-范畴的公理，$\partial_k^\alpha U$ 同构于

$$\partial_k^\alpha U^{(1)} \#_\ell \ldots \#_\ell \partial_k^\alpha U^{(m)}.$$

Now x is contained in a single $U^{(i)}$. By the inductive hypothesis, $\partial_k^\alpha x \sqsubseteq \partial_k^\alpha U^{(i)}$, and the latter is isomorphic to $\partial_k^{-\alpha} U^{(i)}[\partial_k^\alpha x / \partial_k^{-\alpha} x]$. We conclude by Lemma 142. ∎

Proof of Proposition 85. Suppose $(U^{(i)})_{i=1}^m$ is a k-layering. Then, for all $i \in \{1, \ldots, m\}$, $U^{(i)}$ is a regular molecule, and by Proposition 73 $x^{(i)}$ is the only element of dimension $> k$ in $U^{(i)}$. By Lemma 144, $\partial_k^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial_k^- U^{(i)}$.

Conversely, it follows from Lemma 131 that for all i, if $\partial_k^- U^{(i)}$ is a regular molecule and $\partial_k^- x^{(i)}$ is its submolecule, then $U^{(i)}$ is a regular molecule, hence $\partial_k^+ U^{(i)}$ is a regular molecule. Moreover, since $(x^{(i)})_{i=1}^m$ is a k-ordering, it is straightforward to prove that $U^{(i)} \cap U^{(i+1)} = \partial_k^+ U^{(i)} = \partial_k^- U^{(i+1)}$ for all $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Since $\partial^- U^{(1)} = \partial^- U$ is a regular molecule, it follows by induction, assuming condition (b), that $U^{(i)}$ is a regular molecule for all $i \in \{1, \ldots, m\}$. This proves that $(U^{(i)})_{i=1}^m$ is a k-layering of U. ∎

145. 在下文中，我们使用 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 的以下显式构造。其顶点集为 $(V_\mathscr{G} \setminus W) + \{x_W\}$，并且对于所有顶点对 x、y，

- 若 x、$y \neq x_W$，则对于 $\mathscr{G}$ 中 x 与 y 之间的每一条边，x 与 y 之间都有一条边。
- 如果 $x = x_W$ 和 $y \neq x_W$，则对于$\mathscr{G}$中的每一对顶点 $z \in W$ 和从 x 到 y 的边，都存在一条从 x 到 y 的边，
- 如果 $x \neq x_W$ 且 $y = x_W$，则对于$\mathscr{G}$中的每一对顶点 $z \in W$ 和从 x 到 z 的边，都存在一条从 x 到 y 的边。
- 不存在从 x_W 到 x_W的边。

Proof of Lemma 89. We prove the contrapositive of the implication from (a) to (b). Suppose $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ has a cycle. If the cycle does not pass through x_W, then it lifts to a cycle in $\mathscr{G}$, contradicting the assumption that $\mathscr{G}$ is acyclic. It follows that the cycle contains a segment of the form $x_W \to x_1 \to \ldots \to x_m \to x_W$, where $m > 0$ and $x_i \neq x_W$ for all $i \in \{1, \ldots, m\}$. Then there exist $y, z \in W$ and a path $y \to x_1 \to \ldots \to x_m \to z$ in $\mathscr{G}$, so $\mathscr{G}|_W$ is not path-induced.

接下来，假设 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 是无环的。那么图 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 和 $\mathscr{G}|_W$ 都是无环的，因此它们分别存在拓扑排序 $(x^{(i)})_{i=1}^m$ 和 $(y^{(j)})_{j=1}^p$。对于恰好一个 $q \in \{1, \ldots, m\}$，$x^{(i)} = x_W$。我们声称

$$((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, (y^{(j)})_{j=1}^p, (x^{(i)})_{i=q+1}^m)$$

是 $\mathscr{G}$ 的拓扑排序。事实上，对于 $\mathscr{G}$ 中从 x 到 x' 的所有边，

- 若 $x, x' \notin W$，则 $x = x_{(i)}$，$x' = x_{(i')}$ 对于某些$i, i' \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{q\}$，且在 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 中存在一条从 x到 x'的边，因此 $i < i'$；
- 若 $x, x' \in W$，则 $x = y_{(j)}$，$x' = y_{(j')}$ 对于某些$j, j' \in \{1, \ldots, p\}$，且在 $\mathscr{G}|_W$ 中存在一条从 x到 x'的边，因此 $j < j'$；
- 若 $x \in W$, $x' \notin W$，则 $x = y_{(j)}$，$x' = x_{(i)}$ 对于某些 $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{q\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$，且在 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 中存在一条从 x_W到 x'的边，因此 $q < i$;
- 如果 $x \notin W$，$x' \in W$，那么 $x = x_{(i)}$，$x' = y_{(j)}$ 对于某些 $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{q\}$、$j \in \{1, \ldots, p\}$，并且在 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$中存在一条从 x到 x_W的边，因此 $i < q$。

这证明了从 (b) 到 (c) 的蕴含关系。此外，它定义了一个单射，将由 $\mathscr{G}|_W$ 的一个拓扑排序和 $\mathscr{G}/(\mathscr{G}|_W)$ 的一个拓扑排序组成的数对，映射到 $\mathscr{G}$ 的拓扑排序中，其中 W 的顶点彼此相邻。一旦我们证明了反向蕴含关系，这就会成为一个双射。

Finally, we prove the contrapositive of the implication from (c) to (a). Suppose $\mathscr{G}|_W$ is not path-induced, that is, there is a path $x \to x_1 \to \ldots \to x_m \to y$ in $\mathscr{G}$ such that $m > 0$, $x, y \in W$, and $x_i \notin W$ for all $i \in \{1, \ldots, m\}$. It follows that the x_i must come between x and y in every topological sort of $\mathscr{G}$, so the vertices of W can never be consecutive. ∎

引理 90 的证明。由引理 65 结合命题 66，$\mathscr{F}_{n-1}V$是$\mathscr{F}_{n-1}U$的一个连通诱导子图，因此其收缩是良定义的。现在，图 $\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\iota(V)]$ 的顶点或者是

- $x \in U_n \setminus V_n$，或者是
- x_V，使得 $\langle V\rangle$ 在 $U[\langle V\rangle/\iota(V)]$ 中的像为 cl $\{x_V\}$。

设 x、y 是 $\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\iota(V)]$的两个顶点。

- 若 x、$y \in U_n \setminus V_n$，则 $\Delta^+ x \cap \Delta^- y$ 在 $U[\langle V\rangle/\iota(V)]$ 中与在 U 中相同，因此在 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 中存在一条从 x 到 y 的边，当且仅当在 $\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\iota(V)]$ 中存在一条边。
- If $x = x_V$ then $\Delta^+ x_V \cap \Delta^- y$ is in bijection with $\Delta^+ V \cap \Delta^- y$ in U. For all $z \in \Delta^+ V$, since V is pure and n-dimensional, there exists $w \in \nabla^+ z$. If $\Delta^+ x_V \cap \Delta^- y$ is non-empty, it follows that $\Delta^+ z \cap \Delta^- y$ is non-empty in U for some $z \in \iota(V)_n$. Thus there exist $z \in \iota(V)_n$ and an edge from z to y in $\mathscr{F}_{n-1}U$.
- 对偶地，如果 $y = x_V$，则当且仅当存在 $z \in \iota(V)_n$，并且在 $\mathscr{F}_{n-1}U$ 中存在一条从 x 到 z 的边时，$\mathscr{F}_{n-1}U[\langle V\rangle/\iota(V)]$ 中才存在一条从 x 到 y 的边。
- 最后，$\Delta^+ V \cap \Delta^- V = \varnothing$ 由于 V 是纯的，因此 $\Delta^+ x_V \cap \Delta^- x_V$，并且不存在从 x_V到 x_V的边。

因此，很容易根据对 $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$ 的明确描述建立同构。∎

引理 93 的证明。通过 ι 将 V 与其同构像对应起来，并设 ι 是一个子分子包含。那么$U := U[\langle V\rangle/V]$ 由命题 53 可知是一个正则分子，并且根据定理 77，存在一个 $(n-1)$-分层 $(\tilde{U}^{(i)})_{i=1}^{m-p+1}$。令 cl $\{x\}$ 为 $\langle V\rangle$ 在 $\tilde{U}$ 中的像；则 $x \in \tilde{U}_{(q)}$恰好为

一个 $q \in \{1,\dots,m-p+1\}$。那么 $W \coloneqq \tilde{U}_{(q)}[V/\mathrm{cl}\,\{x\}]$ 有定义，并且由引理 142 与引理 133 可知， U 同构于

$$\tilde{U}^{(1)} \#_{n-1} \cdots \#_{n-1} \tilde{U}^{(q-1)} \#_{n-1} \\ \#_{n-1} W \#_{n-1} \tilde{U}^{(q+1)} \#_{n-1} \cdots \#_{n-1} \tilde{U}^{(m-p+1)}.$$

By Lemma 144, $\partial^- x \sqsubseteq \partial^- \tilde{U}^{(q)}$, so by Lemma 141 $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- W$. We can apply the criterion of Proposition 85 to deduce that $(y^{(i)})_{i=1}^p$ is an $(n-1)$-ordering of W induced by an $(n-1)$-layering $(W^{(i)})_{i=1}^p$. Letting

$$(U^{(i)})_{i=1}^m \coloneqq ((\tilde{U}^{(i)})_{i=1}^{q-1}, (W^{(i)})_{i=1}^p, (\tilde{U}^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1}),$$

生成一个 $(n-1)$ 分层，从而得到一个 $(n-1)$ 排序 $(x^{(i)})_{i=1}^m$ U，其性质为 $(x^{(i)})_{i=q}^{p+q-1} = (y^{(i)})_{i=1}^p$。

反过来，设 $(U^{(i)})_{i=1}^m$ 是 U 的一个 $(n-1)$-分层，满足命题中的性质，并设 $W \sqsubseteq U$ 是 $U^{(q)} \#_{n-1} \cdots \#_{n-1} U^{(p+q-1)}$ 在 U 中的像。那么$W_n = V_n$，所以

$$W = V \cup \partial^- W.$$

因为 $\partial^- V \sqsubseteq \partial^- U^{(q)}$ 等于 $\partial^- W$，由引理131 $V \sqsubseteq W \sqsubseteq U$。 ■

Full proof of Theorem 94. Identify V with its isomorphic image through $\imath$, and suppose that $\imath$ is a submolecule inclusion. Then $\tilde{U} \coloneqq U[\langle V\rangle/V]$ is a regular molecule by Proposition 53, so it admits an $(n-1)$-layering $(\tilde{U}^{(i)})_{i=1}^{m-p+1}$, which induces an $(n-1)$-ordering. By Lemma 90, this $(n-1)$-ordering can be identified with a topological sort $((x^{(i)})_{i=1}^{q-1}, x_V, (x^{(i)})_{i=q+1}^{m-p+1})$ of $\mathscr{F}_{n-1}U/\mathscr{F}_{n-1}V$. By Lemma 144, we have $\partial^- x_V \sqsubseteq \partial^- \tilde{U}^{(q)}$ and $\partial^- x^{(i)} \sqsubseteq \partial^- \tilde{U}^{(i)}$ for $i \neq q$. By Lemma 142 combined with Lemma 133, letting $W \coloneqq \tilde{U}^{(q)}[V/\mathrm{cl}\,\{x_V\}]$, U is isomorphic to

$$\tilde{U}^{(1)} \#_{n-1} \cdots \#_{n-1} \tilde{U}^{(q-1)} \#_{n-1} \\ \#_{n-1} W \#_{n-1} \tilde{U}^{(q+1)} \#_{n-1} \cdots \#_{n-1} \tilde{U}^{(m-p+1)}.$$

并且 W与 $U_{(q)}$同构，而对所有 $i \neq q$， $\tilde{U}_{(i)}$与 $U^{(i)}$同构。由引理141可得结论。

逆向蕴含已经得到完整证明。 ■

引理 146. 设 U 是一个正则分子， $\ell \geq -1$。若U 具有一个 ℓ-分层，则对所有 $k > \ell$ ，函数 $\mathsf{m}_{k,U}\colon \mathscr{L}\mathsf{ay}_k U \hookrightarrow \mathscr{O}\mathsf{rd}_k U$ 是一个双射。

证明。设 $(U^{(i)})_{i=1}^m$ 是 U的一个 ℓ-分层，且设 $(x^{(i)})_{i=1}^m$是其在 $\mathsf{m}_{\ell,U}$ 下的像。对于 $k > \ell$，设 $(y^{(i)})_{i=1}^p$ 是 U 的一个 k-序。于是存在唯一的单射 $\mathsf{j}\colon \{1,\dots,p\} \hookrightarrow \{1,\dots,m\}$，使得对所有$i \in \{1,\dots,p\}$， $y^{(i)} = x^{(\mathsf{j}(i))}$。令

$$V^{(i)} \coloneqq \partial_k^{\alpha(i,1)} U^{(1)} \#_\ell \cdots \#_\ell U^{(\mathsf{j}(i))} \#_\ell \cdots \#_\ell \partial_k^{\alpha(i,m)} U^{(m)},$$

$$\alpha(i,j) \coloneqq \begin{cases} + & \text{if } j = \mathsf{j}(i') \text{ for some } i' < i, \\ - & \text{otherwise.} \end{cases}$$

反复应用命题 38 和命题 39，我们发现 $(V^{(i)})_{i=1}^p$ 是 k的分层，而 $(y^{(i)})_{i=1}^p$ 是它的通过 $\mathsf{m}_{k,\,U}$得到的像。这证明 $\mathsf{m}_{k,\,U}$ 是满射，结论由命题 83 得出。 ■

引理 147. 设 U 是一个正则分子。假设对于所有子分子 $V \sqsubseteq U$，如果 $r \coloneqq \mathsf{fr}$维数 V，那么 V 具有一个 r-分层。那么对于所有 $k \geq \mathsf{fr}$维数U ，函数 $\mathsf{m}_{k,U}\colon \mathscr{L}\mathsf{ay}_k U \hookrightarrow \mathscr{O}\mathsf{rd}_k U$ 是一个双射。

证明。设 $r \coloneqq \mathsf{fr}$维数 U。根据假设，存在 r 分层的 U，因此由引理 146 可知，只需证明 $\mathsf{m}_{r,U}$ 是一个双射。

Given two r-orderings $(x^{(i)})_{i=1}^m$ and $(y^{(i)})_{i=1}^m$, there exists a unique permutation σ such that $x^{(i)} = y^{(\sigma(i))}$ for all $i \in \{1,\dots,m\}$. Let $d((x^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m)$ be the number of pairs (j,j') such that $j < j'$ but $\sigma(j') < \sigma(j)$. Under the assumption that $(x^{(i)})_{i=1}^m$ is in the image of $\mathsf{m}_{r,U}$, we will prove that $(y^{(i)})_{i=1}^m$ is also in the image of $\mathsf{m}_{r,U}$ by induction on $d((x^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m)$. Since the image of $\mathsf{m}_{r,U}$ is not empty, this will suffice to prove that $\mathsf{m}_{r,U}$ is surjective, hence bijective by Proposition 83.

如果 $d((x^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m) = 0$，那么 $x^{(i)} = y^{(i)}$ 对所有$i \in \{1,\dots,m\}$均成立，且没有其他需要证明的内容。

假设 $d((x^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m) > 0$。那么存在$j < m$ 使得 $\sigma(j+1) < \sigma(j)$。假设 $(x^{(i)})_{i=1}^m$ 是 r-分层 $(U^{(i)})_{i=1}^m$ 的像。令 $V \sqsubseteq U$ 为 $U^{(j)} \#_r U^{(j+1)}$ 在 U 中的像，并令

$$z_1 \coloneqq x^{(j)} = y^{(\sigma(j))}, \quad z_2 \coloneqq x^{(j+1)} = y^{(\sigma(j+1))}.$$

因为在一种 r 排序中， z_1 位于 z_2 之前，但在另一种排序中位于其之后，所以 $\mathscr{M}_r U$ 中不可能存在连接它们的边，因而

$$\dim(\mathrm{cl}\,\{z_1\} \cap \mathrm{cl}\,\{z_2\}) < r.$$

由于 V 中 $> r$ 维的极大元只有 z_1、z_2，我们推得 $\ell \coloneqq \mathsf{fr}$维数 $V < r$。根据假设，存在 V 的 ℓ-分层。特别地，存在正则分子 $V_{(1)}V_{(2)}$，使得

1) 对所有 $i \in \{1,2\}$， z_i 都在 $V_{(i)}$ 的像中，且 2) V 与 $V_{(1)} \#_\ell V_{(2)}$ 同构，或与 $V_{(2)} \#_\ell V_{(1)}$ 同构。

不失一般性，假设 V 同构于$V_{(1)} \#_\ell V_{(2)}$。根据命题 38 和命题 39，令

$$\tilde{U}^{(j)} \coloneqq \partial_r^- V^{(1)} \#_\ell V^{(2)},$$
$$\tilde{U}^{(j+1)} \coloneqq V^{(1)} \#_\ell \partial_r^+ V^{(2)},$$

我们有 V同构于 $\tilde{U}^{(j)} \#_r \tilde{U}^{(j+1)}$。令$\tilde{U}^{(i)} \coloneqq U^{(i)}$对于 $i \notin \{j, j+1\}$，我们有 $(\tilde{U}_{(i)})_{i=1}^m$是 r层的 U，并且

$$\mathsf{m}_{r,U}\colon (\tilde{U}^{(i)})_{i=1}^m \mapsto (\tilde{x}^{(i)})_{i=1}^m = \\ = (x^{(1)}, \dots, x^{(j+1)}, x^{(j)}, \dots, x^{(m)}).$$

然后 $d((\tilde{x}^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m) < d((x^{(i)})_{i=1}^m, (y^{(i)})_{i=1}^m)$，且 $(\tilde{x}^{(i)})_{i=1}^m$ 在 m_r中的像U中。根据归纳假设，我们得出结论。 ■

引理 148. 设 U 是一个正则分子， $r \coloneqq \mathsf{fr}$维数 U。如果U 是框架无环的，那么 U 具有一个 r 分层。

证明。由于框架无环正则分子的子分子也是框架无环的，我们可以对子分子进行归纳。对于所有 $x \in U_0$，我们有 fr维数$\{x\} = -1$，且$\{x\}$ 具有一个平凡的（-1）分层，从而证明基例。

我们构造一个由U的子分子组成的有序树 $U^{(j_1,\dots,j_p)}$，如下所示：

- the root is $U^{()} \coloneqq U$;
- if $\operatorname{lydim} U^{(j_1,\dots,j_p)} \le r$, then we let $\operatorname{lydim} U^{(j_1,\dots,j_p)}$ be a leaf;
- if $k \coloneqq \operatorname{lydim} U^{(j_1,\dots,j_p)} > r$, then we pick a k-layering $(V^{(i)})_{i=1}^{q}$ of $U^{(j_1,\dots,j_p)}$, which is possible by Theorem 77, and for each $i \in \{1,\dots,q\}$, we let the image of $V^{(i)}$ be a child $U^{(j_1,\dots,j_p,i)}$ of $U^{(j_1,\dots,j_p)}$.

由引理139可知，节点子节点的分层维数严格小于该节点的分层维数，因此该过程会终止。

固定 r-排序 $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$ of U；这是可行的，因为 $\mathscr{M}_r U$ 是无环的。令 $V \coloneqq U^{(j_1,\dots,j_p)}$ 为树的一个节点。我们有

$$\begin{aligned}\bigcup_{j>r} (\mathscr{M}ax\, V)_j &= \sum_{i=1}^{m} \bigcup_{j>r} \left((\mathscr{M}ax\, V)_j \cap \operatorname{cl}\left\{x^{(i)}\right\}\right)\\ &=: \sum_{i=1}^{m} M^{(i)};\end{aligned}$$

这些 $M^{(i)}$ 构成一个划分，因为 fr维数 $U = r$，所以每个维数为 $> r$ 的元素都在唯一$i \in \{1,\dots,m\}$的闭包中。我们声称，V 同构于

$$V^{(1)} \#_r \dots \#_r V^{(m)}$$

对于某些正则分子（$V_{(i)}$）$_{i=1}^{m}$，满足以下性质：对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，将 $V_{(i)}$ 与其在 V 中的像等同，我们有

$$\bigcup_{j>r} (\mathscr{M}ax\, V^{(i)})_j = M^{(i)}.$$

我们将通过对树 $_{U^{(j_1,\dots,j_p)}}$进行反向归纳来证明这一点。

Suppose V is a leaf, so $\operatorname{lydim} V \le r$. Then V admits an r-layering. For each $i \in \{1,\dots,m\}$, fix a topological sort $(y^{(i,j)})_{j=1}^{p_i}$ of the induced subgraph $\mathscr{M}_r V|_{M^{(i)}}$. We claim that $((y^{(i,j)})_{j=1}^{p_i})_{i=1}^{m}$ is an r-ordering of V.

Suppose there is an edge from x to x' in $\mathscr{M}_r V$. Then $x \in M^{(i)}$, $x' \in M^{(i')}$ for a unique pair $i, i' \in \{1,\dots,m\}$. If $i = i'$, then $x = y^{(i,j)}$ and $x' = y^{(i,j')}$ for some $j, j' \in \{1,\dots,p_i\}$, and $j < j'$ because $(y^{(i,j)})_{j=1}^{p_i}$ is a topological sort of $\mathscr{M}_r V|_{M^{(i)}}$. If $i \ne i'$, then there exists

$$z \in \Delta_r^+ x \cap \Delta_r^- x' \subseteq \operatorname{cl}\left\{x^{(i)}\right\} \cap \operatorname{cl}\left\{x^{(i')}\right\}.$$

由于对于所有$\alpha \in \{+,-\}$，$\partial_r^\alpha x^{(i)}$ 和 $\partial_r^\alpha x^{(i')}$ 都是纯的且维数为 r，根据 [8, 命题 6.4]

$$z \in (\Delta_r^+ x^{(i)} \cap \Delta_r^- x^{(i')}) \cup (\Delta_r^- x^{(i)} \cap \Delta_r^+ x^{(i')}),$$

且 $\Delta_r^- x^{(i)} \cap \operatorname{cl}\{x\} \subseteq \Delta_r^- x$ 与 $\Delta_r^+ x$不相交，因此 $z \in \Delta_r^+ x^{(i)} \cap \Delta_r^- x^{(i')}$。由此可知存在一条边从 $x^{(i)}$ 到 $x^{(i')}$ 位于 $\mathscr{M}_r U$ 中，因此 $i < i'$，因为 $(x^{(i)})_{i=1}^{m}$ 是 $\mathscr{M}_r U$ 的拓扑排序。这证明了 $((y^{(i,j)})_{j=1}^{p_i})_{i=1}^{m}$ 是 V 的一个 r-排序。

设 $W \sqsubseteq V$、$\ell \coloneqq$ fr维数 W。若 $V \ne U$或 $W \ne U$，则根据对 U的真子分子的归纳假设，W 具有一个 ℓ-分层。若 $W = V = U$，则 $\ell = r$，并且根据定理 77，W 具有一个 ℓ-分层。在这两种情况下，V 都满足引理 147 的条件，并且由于 $r \ge \operatorname{lydim} V \ge$ fr维数V，V的每个 r-排序都来自 V的一个 r-分层。

由此可知，$((y^{(i,j)})_{j=1}^{p_i})_{i=1}^{m}$ 来自一个 r 分层 $((W^{(i,j)})_{j=1}^{p_i})_{i=1}^{m}$，因此我们可以定义

$$V^{(i)} \coloneqq W^{(i,1)} \#_r \dots \#_r W^{(i,p_i)}$$

对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，满足所需条件。

现在，假设 V不是叶，因此 $k \coloneqq \operatorname{lydim} V > r$，且$V$有子节点 $(W^{(j)})_{j=1}^{q}$，它们构成了 V的 k分层。根据归纳假设，每个 $W^{(j)}$ 都有一个分解。

$$W^{(j,1)} \#_r \dots \#_r W^{(j,m)}$$

使得 $W^{(j,i)}$ 的像中维数为 $> r$ 的极大元包含在 $\operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$ 中。然后，对于每个$i \in \{1,\dots,m\}$和 j，$j' \in \{1,\dots,q\}$，

$$W^{(j,i)} \cap W^{(j')} \subseteq W^{(j',i)},$$

因此定义了 $V_{(i)} \coloneqq W^{(1,i)} \#_k \dots \#_k W^{(q,i)}$。反复使用命题 39，我们得出 V 同构于$V_{(1)} \#_r \cdots \#_r V_{(m)}$。

这就完成了对 $U^{(j_1,\dots,j_p)}$ 的归纳。特别地，对于根 $U_{()} = U$，分解$U^{(1)} \#_r \cdots \#_r U_{(m)}$满足

$$\bigcup_{j>r} (\mathscr{M}ax\, U^{(i)})_j = \left\{x^{(i)}\right\},$$

即，$(U^{(i)})_{i=1}^{m}$ 是 U 的 r 层化。 ∎

定理 102 的证明。(a) 推出 (b) 是引理 148 与引理 73 的推论。(b) 推出 (c) 即为引理 147。最后，(c) 推出 (a) 由命题 80 得出。∎

引理 108 的证明。假设 U 是无环的。令 $k \in \mathbb{N}$，并假设在 $\mathscr{F}_k U$ 中存在一个有向环 $x_0 \to x_1 \to \dots \to x_m = x_0$。根据定义，对于所有 $i \in \{1,\dots,m\}$，存在$y_i \in \Delta_k^+ x_{i-1} \cap \Delta_k^- x_i$。根据 [7, 引理 1。37], 存在从 x_{i-1} 到 y_i 的路径$^\circ$，然后在 $\mathscr{H}U$ 中从 y_i 到 x_i。连接$^\circ$所有这些路径，我们在 $\mathscr{H}U$ 中得到一个有向环。

设 U 按维数无环，并设 $V \sqsubseteq U$ 是一个子分子包含，$r \coloneqq$ fr维数V。则 $\mathscr{F}_r U$ 无环，因此其诱导子图 $\mathscr{F}_r V$ 和 $\mathscr{M}_r V$ 也无环。∎

D. 第 IV 节的证明

引理 115 的证明。我们将证明 U 同构于

$$\underbrace{\mathsf{arrow} \#_0 \dots \#_0 \mathsf{arrow}}_{m \text{ times}}.$$

由引理136，或者 $\operatorname{lydim} U = -1$，或者 $\operatorname{lydim} U = 0$。在第一种情况下，由引理137可知，$U$ 是一个原子。因为该点是

在同构意义下唯一的0维分子，所以该箭头是唯一的1维原子，因此 U 与箭头同构。在第二种情况下，由定理 77，U 具有一个0分层 $(U^{(i)})_{i=1}^{m}$；并且根据引理139，对每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，必然有lydim $U^{(i)} = -1$。由第一部分可知，$U^{(i)}$ 与箭头同构。■

命题117的证明。这是 [17, 命题 5]。 ■

149（水平序与垂直序）。设 U 是一个正则分子，维数为 $U \le 2$。在 U 的1维元素集合 U_1 上，水平序 $\preceq_0$ 和垂直序 $\preceq_2$ 定义如下。

- $x \preceq_0 y$ 当且仅当在 $\mathscr{H}U$ 中存在一条从 x 到 y 的路径，且该路径仅经过维数为 0 和 1 的元素时，。
- $x \preceq_2 y$ 当且仅当在 $\mathscr{H}U$ 中存在一条从 x 到 y 的路径，且该路径仅经过维数为 1 和 2 的元素。

引理 150. 设 U 是一个正则分子，$\dim U \le 2$。那么 1） $\preceq_0$ 和 $\preceq_2$ 的并集是 U_1上的线性序，2） $\preceq_0$ 和 $\preceq_2$ 的交集是U_1上的恒等关系。

Proof. If $\dim U < 2$, then $\preceq_2$ is trivially the identity relation, and $\preceq_0$ is a linear order by 115. If U is a 2-dimensional atom, then $U_1 = \Delta^- U + \Delta^+ U$, and that $\preceq_0$ is a linear order on $\Delta^\alpha U$ for each $\alpha \in \{+,-\}$ separately, so we have $x \preceq_2 y$ for all $x \in \Delta^- U$ and $y \in \Delta^+ U$, and no other relations exist.

Otherwise, we proceed exactly as in the proof of Proposition 117, defining a 1-ordering $(x^{(i)})_{i=1}^m$ and a sequence $(V^{(i)})_{i=1}^m$ of increasing submolecules of U. We let $\preceq_0^{(i)}$ and $\preceq_2^{(i)}$ be the orders determined by paths in $\mathring{\mathscr{H}} V^{(i)}$, which are increasing in i, and proceed by induction. Since $\dim V^{(0)} = 1$, we have already proved the base case.

Let $i > 0$, assume that the statement holds of the orders $\preceq_0^{(i-1)}$ and $\preceq_2^{(i-1)}$ on $(V^{(i-1)})_1$. Let $x, y \in (V^{(i)})_1$; we will show that x and y are comparable via $\preceq_0^{(i)}$ or $\preceq_2^{(i)}$. If $x, y \in V^{(i-1)}$ or $x, y \in \operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$, we can apply the inductive hypothesis or the atom case, so it suffices to consider the case

$$x \in V^{(i-1)} \setminus \Delta^- x^{(i)}, \quad y \in \Delta^+ x^{(i)}.$$

Let $(z^{(j)})_{j=1}^p$ be the unique linear 0-ordering on $\partial^- x^{(i)}$, so $z^{(j)} \preceq_0 z^{(j')}$ if $j \le j'$. For all $j \in \{1,\dots,p\}$, we have $x \ne z^{(j)}$, and by the inductive hypothesis x and $z^{(j)}$ are comparable via $\preceq_0^{(i-1)}$ or they are comparable via $\preceq_2^{(i-1)}$.

- Suppose there exists j such that x and $z^{(j)}$ are comparable via $\preceq_2^{(i-1)}$. Then necessarily $x \preceq_2^{(i-1)} z^{(j)}$, because $\Delta^- x^{(i)} \subseteq \Delta^+ V^{(i-1)}$. Since $z^{(j)} \preceq_2^{(i)} y$, we have $x \preceq_2^{(i)} y$.
- Otherwise, x and $z^{(j)}$ are comparable via $\preceq_0^{(i-1)}$ for all $j \in \{1,\dots,p\}$. Suppose that $x \preceq_0^{(i-1)} z^{(1)}$, in which case $x \preceq_0^{(i-1)} z^{(j)}$ for all $j \in \{1,\dots,p\}$. Then the path from x to $z^{(1)}$ through elements of dimension 0 and 1 must enter $z^{(1)}$ from $\partial^- z^{(1)} = \partial_0^- x^{(i)}$. Since there is a path in $\mathring{\mathscr{H}} V_i$ from $\partial_0^- x^{(i)}$ to y, we have $x \preceq_0^{(i)} y$.
- Otherwise, there is a greatest j such that $z^{(j)} \preceq_0^{(i-1)} x$. If $j < p$, then $z^{(j)} \preceq_0^{(i-1)} x \preceq_0^{(i-1)} z^{(j+1)}$. Because all three are distinct, letting $\partial^+ z^{(j)} = \partial^- z^{(j+1)} = \{w\}$, there is a non-trivial cycle in $\mathring{\mathscr{H}} V^{(i-1)}$ from w to x and back to w, a contradiction to Proposition 117. It follows that $z^{(p)} \preceq_0^{(i-1)} x$, and the path between the two must leave $z^{(p)}$ through $\partial_0^+ x^{(i)}$, so $y \preceq_0^{(i)} x$.

这证明了 $\preceq_0^{(i)}$ 和 $\preceq_2^{(i)}$ 的并集是 $(V^{(i)})_1$上的线性序。

Suppose that $x \preceq_0^{(i)} y$ and $x \preceq_2^{(i)} y$; we will prove that $x = y$. If $x \in \operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$, then $x \preceq_2^{(i)} y$ implies that $y \in \operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$, and any path from x to y in $\mathring{\mathscr{H}} V^{(i)}$ is entirely contained in $\operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$, so we can apply the atom case. Suppose that $x \notin \operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$.

若 $y \in \Delta^+ x^{(i)}$，则从 x 到 y 经过维数为 1 和 2 的元素的任何路径，都由一条包含在 $V^{(i-1)}$ 中、通向某个 $z \in \Delta^- x^{(i)}$ 的路径，接着路径 $z \to x^{(i)} \to y$ 组成；而任何经过维数为 0 和 1 的元素的路径，都由一条包含在 $V^{(i-1)}$ 中、通向 $\partial_0^- x^{(i)}$ 的路径，接着一条包含在 $\partial^+ x^{(i)}$ 中的路径组成。由于在 $V^{(i-1)}$ 中，存在一条从 $\partial_0^- x^{(i)}$ 到任意 $z \in \Delta^- x^{(i)}$、经过维数为 0 和 1 的元素的路径，因此我们有 $x \preceq_0^{(i-1)} z$ 和 $x \preceq_2^{(i-1)} z$，其中某个 $z \in \Delta^- x^{(i)}$。根据归纳假设，$x = z$，这与 $z \in \operatorname{cl}\{x^{(i)}\}$ 矛盾。

It follows that $y \in V^{(i-1)}$. Then any path from x to y through elements of dimension 1 and 2 is entirely contained in $V^{(i-1)}$, so $x \preceq_2^{(i-1)} y$; while a path through elements of dimension 0 and 1 is either contained in $V^{(i-1)}$, or it enters $\partial^+ x^{(i)}$ through $\partial_0^- x^{(i)}$, traverses it in its entirety, and leaves from $\partial_0^+ x^{(i)}$. Such a path segment can be replaced with the one that traverses $\partial^- x^{(i)}$ in its entirety, so in either case $x \preceq_0^{(i-1)} y$, and we conclude that $x = y$ by the inductive hypothesis. This concludes the proof of the statement for $V^{(i)}$. Since $V^{(m)} = U$, we conclude. ■

引理 118 的证明。U 和 $\imath(V)$ 都是维数为 ≤ 2 的正则分子。设 U 上的水平序与垂直序分别为 $\preceq_0$、$\preceq_2$，$\imath(V)$ 上的水平序与垂直序分别为 $\preceq_0^V$、$\preceq_2^V$，它们是 U 上相应序的子集。

Suppose by way of contradiction that $\mathscr{F}_1 V$ is not path-induced. Then there exists a path $x_0 \to \dots \to x_m$ in $\mathscr{F}_1 U$ such that $m > 1$, $x_0, x_m \in \imath(V)$, and $x_i \notin \imath(V)$ for all $i \in \{1,\dots,m-1\}$. By definition, there exist 1-dimensional elements $y_i \in \Delta^+ x_{i-1} \cap \Delta^- x_i$ for all $i \in \{1,\dots,m\}$. Then $y_1 \preceq_2 y_m$ and $y_1 \ne y_m$. By Lemma 60, x_{i-1} and x_i are the only cofaces of y_i for all $i \in \{1,\dots,m\}$. Necessarily, then, $y_1 \in \Delta^+ \imath(V)$ and $y_m \in \Delta^- \imath(V)$, so it is not possible that $y_1 \preceq_2^V y_m$. Then by Lemma 150 applied to $\imath(V)$, one of $y_1 \preceq_0^V y_m$, $y_m \preceq_0^V y_1$, or $y_m \preceq_2^V y_1$ must hold. Combined with $y_1 \preceq_2 y_m$, each one of these implies $y_1 = y_m$ by Lemma 150 applied to U, a contradiction. ■

定理 121 的证明。由 [17, 定理 1] U 是框架无环的。由于对于所有 $V \sqsubseteq U$ 以及所有可重写的 $W \sqsubseteq V$，$V[\langle W\rangle / W]$ 仍然是一个维数为 ≤ 3 的正则分子，因此它是框架无环的。因此，U 是稳定框架无环的。■