arXiv:2304.09223v1 [cs.FL] 18 Apr 2023

稀疏自动集交集大小的定量估计

SEDA ALBAYRAK 和 JASON P. BELL

Abstract. Cobham 定理指出，如果 k 和 ℓ 是两个乘法独立的自然数，那么一个同时是 k-自动和 ℓ-自动的自然数子集最终是周期的。后来，Semenov 给出了这一结果的多维扩展。本文为 Cobham–Semenov 定理给出一个关于稀疏自动集的定量版本，证明一个稀疏的 k-自动子集 $\mathbb{N}^d$ 与一个稀疏的 ℓ-自动子集 $\mathbb{N}^d$ 的交集是有限集，并且其大小可以根据接受这些集合的自动机所提供的数据显式地界定。

1. Introduction

令 k 为一个大于或等于 2 的自然数。如果存在一个输入字母表为 $\Sigma_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 的确定性有限自动机，使得该自动机接受的字母表 Σ_k 上的词（从右向左读取）恰好是表示 S中元素的底数为 k 的展开，那么子集 S 属于$\mathbb{N}$ 便称为 k-自动。可以自然地将自动性的概念扩展到带有 $d \geq 1$的 $\mathbb{N}^d$ 的子集，此时输入字母表改为 $(\Sigma_k)^d$。于是，给定一个由自然数组成的 d元组 $(n_1, \ldots, n_d)$ ——必要时可在某些词的开头补上 0——我们可以找到等长的词$w_1, \ldots, w_d$，并且满足：对于 $i = 1, \ldots, d$， w_i是 n_i的底数为 k的展开（底数为 k 的展开除前导零的个数外是唯一的），且至少有一个 w_i 没有前导零。若存在一个输入字母表为 $(\Sigma_k)^d$的有限状态机，恰好接受与 S中自然数 d元组相对应的词 $(w_1, \ldots, w_d)$，那么 $\mathbb{N}^d$ 的子集便称为 k-自动。关于自动机和自动集的更多背景知识，请参阅 Allouche 和 Shallit 的著作 [4]；我们假设读者对确定性有限状态自动机已有一定了解。

例如，注意图 1 中输入字母表为 $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ 的确定性有限状态自动机接受的词集合，对应于 2-自动集合 $\{3 \cdot 2^n + 1$ 中元素的二进制展开：$n \geq 1\}$。这里采用通常的约定，以双圆圈状态表示有限状态自动机的接受状态。

Cobham的一项著名结果 [10] 表明，如果 k 和 ℓ 是两个大于一的乘法独立的自然数（即方程 $k^a = \ell^b$ 不存在非零整数 a 和 b作为解），且 $S \subseteq \mathbb{N}$ 是一个同时

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 68Q45；次要分类号 11B85。
Key words and phrases. 自动集、Cobham定理、稀疏集合、独立基。第一作者在卡尔加里大学的博士后职位部分由加拿大自然科学与工程研究委员会项目 RGPIN-2018-03770 和加拿大研究讲席计划二级研究津贴 950-231716 资助。第二作者获得加拿大自然科学与工程研究委员会项目 RGPIN-2022-02951 的资助。

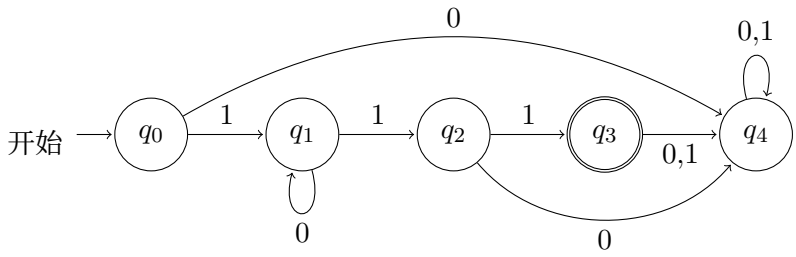


图 1。生成集合 $\{3\cdot 2^n+1\colon\ n\geq 1\}$ 的有限状态机。

k-进制且 ℓ-自动的，那么 S 实际上是最终周期的；也就是说，存在某个固定的正整数 c，使得对于充分大的 $n\in\mathbb{N}$，$n\in S$ 蕴含 $n+c\in S$。后来，Semenov给出了Cobham定理的多维版本 [30]（另见 [25]），他证明了 $\mathbb{N}^d$ 的一个同时 k-进制且 ℓ-自动的子集，若 k 且 ℓ 乘法独立，则该子集是半线性集（等价地说，它可用Presburger算术定义，或相对于所有正整数进制都是自动的）。

近年来，关于 Cobham定理在其他情形下的证明和推广不断涌现 [1, 2, 6, 12, 13, 20, 24, 28]（另见 Durand 和 Rigo 撰写的综述章节 [14]）。其中一个特别有趣的推广来自 Hieronymi 和 Schulz 的近期工作 [20], ：他们证明，如果在 Presburger算术中加入一个 k-自动谓词 X 和一个 ℓ-自动谓词 Y，且 k 和 ℓ 乘法独立，那么除非这两个集合之一已经是 Presburger可定义的，否则所得结构具有不可判定的一阶理论。令 X 等于 Y，即可立即推出 Cobham定理。鉴于这项工作，一个自然而然的问题是考察一个 k-自动集合与一个 ℓ-自动集合的交集，并探究这个交集在多大程度上可以被描述。

一般而言，这个问题难以解决，而许多超出当前数论方法所能处理范围的丢番图问题，都可以在这一框架下编码。例如，Erd˝os[15, p. 67] 曾提出一个著名猜想：2的幂集合（这是一个 2-自动集合）与由三进制展开中不含 2 的数构成的 3-自动集合，其交集是有限的。他说：“据我所知，我们目前没有方法可以攻克这个猜想。”

然而，在自动集理论中存在一个众所周知的二分法：若 S 是自然数的一个自动子集，那么要么存在某个自然数 d，使得 S 中大小不超过 n 的元素有 $O((\log n)^d)$ 个；要么存在一个正数 α，使得对所有充分大的 n，S 中大小不超过 n 的元素至少有 n^α 个（例如，参见 [18, §2.3] 或 [9, 命题 7.1]）。满足多对数界的自动集称为稀疏自动集，这一概念也自然地推广到多维情形。稀疏自动集自然地出现在许多彼此无关的背景中 [3, 8, 11, 22, 23, 27]，并构成更一般的自动集类中的一个重要子类。

例如，图 1 中构造的集合是一个稀疏的 2-自动集合，因为其大小小于 $O(n)$ 的元素数量为 2^n。有关稀疏集合的更多背景信息，请参阅 §2 。

在本文中，我们将重点放在描述 $\mathbb{N}^d$ 的两个关于乘法独立基自动的稀疏自动子集之交集这一问题上。尽管这一设定比研究两个自动集的交集可能采取的形式这一一般设定更为严格

，它仍然涵盖了许多有趣的数论问题。值得注意的是，Catalan猜想（现已成为Mih˘ailescu [26]定理）断言，稀疏的2-自动集合 $\{2^n+1:\ \ n\geq 0\}$ 与稀疏的3-自动集合 $\{3^m:\ \ m\in\mathbb{N}\}$ 的交集仅由数字3和9组成。我们给出以下一般有限性结果。

定理 1.1. 设 k 和 ℓ 是大于或等于 2 的乘法独立的自然数，且 d 是一个正整数。如果 X 是 k-自动的稀疏子集，$\mathbb{N}^d$ 且 Y是 ℓ-自动的稀疏集合，$\mathbb{N}^d$则 $X\cap Y$是有限的，并且交集大小存在一个可有效计算的上界，该上界取决于d、k、ℓ以及接受这些集合的最小自动机中的数据。

如同 Hieronymi和Schulz [20], 的工作一样，如果我们取 $X=Y$，则可以看到，相对于两个乘法独立的基，一个稀疏自动集合的 $\mathbb{N}^d$ 子集必然是有限的。因此，从这个意义上说，可以将我们的主要结果视为 Cobham-Semenov 定理稀疏情形的定量推广。

对于定理 1.1，实际上我们给出了仅用 d、k、ℓ以及接受 X 和 Y的最小自动机中的状态数表示的上界闭式（有关明确的上界，请参见定理 4.1 ；需要指出的是，我们的上界并未经过优化，而是采用了简洁的形式）。人们可能会问，是否能够判定交集为空，甚至是否能够有效地确定该交集。这两个问题显然都非常困难，并且与高度非平凡的丢番图问题有关，而这些问题目前尚不知道是否可判定。

本文的结构安排如下。在§2中，我们简要概述稀疏语言和稀疏集合。在§3中，我们简要概述 S-单位理论，并陈述我们在证明主要定理时将用到的关键结果。在§4 中，我们证明定理1.1的一个精确版本。最后，我们在 k§5中，提出一个一般猜想，探讨稀疏 k-自动集与零密度 ℓ-自动集的交集形式。

1.1. 记号。本文中，给定一个字母表 Σ，我们用 Σ^* 表示由字母表 Σ 上所有有限词构成的自由幺半群。当 $\Sigma=\{u\}$ 是单元素集时，对于 Σ^*，我们写作 u^* ，而不写作 $\{u\}^*$ 。对于整数 $k\geq 2$，我们取 $\Sigma_k=\{0,\dots,k-1\}$，并令

$$[\cdot]_k:\left(\Sigma_k^d\right)^*\to\mathbb{N}^d$$

表示这样一个映射：它将一个由 d 个词组成的元组（此处 d 的取值取决于上下文，本文大部分情况下取 $d=1$）映射为由这些词的 k 进制展开构成的 d 元自然数元组。例如，$[(2110,0020)]_3=(66,6)$。一般来说，我们假设该 d 元组中至少有一个词没有前导零，这样 d 元自然数元组的 k 进制展开便是唯一的。

本文还将通篇使用确定有限自动机（DFA）。我们使用一个五元组（Q,Σ,δ,q_0,F）表示一个DFA，其中 Q 是一个非空的有限状态集，Σ 是一个有限输入字母表，$\delta\colon Q\times\Sigma\to Q$ 是转移函数，$q_0\in Q$是初始状态，而 $F\subseteq Q$ 是接受状态集。注意，通过规定对于所有 $w\in\Sigma^*$ 和 $x\in\Sigma$，$\delta(q,xw)=\delta(\delta(q,x)\ w)$，可以将 δ 归纳地扩展为从 $Q\times\Sigma^*\to Q$ 到的映射。

2. Sparse automatic sets

本节将简要概述稀疏语言和稀疏集合。许多作者研究了稀疏自动集及相关概念（例如，参见 [18] 及其中的参考文献）。

给定有限字母表 Σ 以及其上的语言 $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$，我们有一个相关的计数函数

$$f_{\mathcal{L}}(n) := |\{w \in \mathcal{L} : \text{length}(w) \leq n\}|.$$

若存在某个自然数 d，使得 $f_{\mathcal{L}}(n) = O(n^d)$，则正则语言 $\mathcal{L}$ 是稀疏的。

关于稀疏正规语言有一个精确刻画，该刻画由多位作者得出，并记载于 [9,命题 7.1] 中。

命题 2.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个正则语言。以下各项等价：

(1) $\mathcal{L}$是稀疏的。(2) $\mathcal{L}$ 是形如 $v_1 w_1^* v_2 w_2^* \dots v_s w_s^* v_{s+1}$ 的语言的有限并，其中 $s \geq 0$，v_i 可以是平凡词，而 w_i 是字母表 $\{0, 1, \dots, k-1\}$ 上的非平凡词。(3) 若 $\Gamma = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 是一个接受 $\mathcal{L}$ 的最小有限自动机，则 Γ满足以下性质。(∗) 若 q 是一个状态，且对某个词 v 有 $\delta(q, v) \in F$，则至多存在一个非平凡词 w，使得 $\delta(q, w) = q$，并且对 w 的每个非平凡真前缀 w'，都有$\delta(q, w') \neq q$。

一个 k-自动子集 $S \subseteq \mathbb{N}^d$ 则称为稀疏的，如果（Σ_k^d）*中对应于元素的基于k进制展开的子语言 S 是一个稀疏的正则语言。将命题 2.1 转换到自动集的框架中，我们看到，一个k-自动子集 $S \subseteq \mathbb{N}^d$ 是稀疏的，当且仅当

$$\pi_S(x) = |\{(n_1, \dots, n_d) \in S : n_1 + n_2 + \cdots + n_d \leq x\}| = O((\log x)^d) \qquad (1)$$

当 x 趋于无穷大时。我们注意到，如果 S 不是稀疏的，那么存在某个 $\alpha > 0$，使得对于充分大的 x，$\pi_S(x) > x^\alpha$（参见 [18, §2.3]），因此 $\mathbb{N}^d$的稀疏自动子集与非稀疏自动子集之间存在一个自然的间隔。

我们将需要以下对特殊类型稀疏集合的描述，所有自然数的稀疏自动子集都可以通过取有限并由此构造出来。

命题 2.2。设 $k \geq 2$ 为一个自然数，s 为一个非负整数，并设 v_0、v_1、...、v_s、w_0、...、w_s为 Σ_k^*中的词。如果

$$S = \{[v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s]_k\}$$

那么存在 $c_0, \dots, c_s \in \mathbb{Q}$ 和正整数 $\delta_1, \dots, \delta_s$，使得

$$S = \left\{ c_0 + c_1 k^{\delta_s n_s} + c_2 k^{\delta_s n_s + \delta_{s-1} n_{s-1}} + \cdots + c_s k^{\delta_s n_s + \cdots + \delta_1 n_1} : n_1, \dots, n_s \geq 0 \right\}.$$

证明。这个结果归功于 Ginsburg 和 Spanier [19]（另见 [3,引理 3.4] 的证明）。□

3. Background on S-unit equations

本节概述 S单位方程的理论。具体而言，我们需要Evertse、Schlickewei和Schmidt的一项结果的定量版本

（见 [17, 定理 1。1] 以及 [16, 定理 6.1。3]）。我们回顾一下，对于域 $z_1,\dots,z_n$ 中的 K，方程 $z_1+\cdots+z_n=1$ 被称为非退化，如果左端没有任何非平凡子和等于零；也就是说，只要 I 是 $\{1,\dots,n\}$的非空子集，就有 $\sum_{i\in I} z_i \neq 0$。

S-单位定理（见 [16, 定理 6.1.3]）是丢番图逼近中的一项极其重要的成果，现为方便读者将其表述如下。

定理 3.1. 设 K 是一个特征零的域，设 a_1、...、a_n 是 K 中的非零元素，并设 $H \subset (K^*)^n$ 是一个有限生成乘法子群。那么，方程中只有有限多个非退化解（x_1、...、x_n）$\in H$

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1. \tag{2}$$

我们将使用 S-单位定理的一个定量版本。定量版本有若干种（例如参见 [5, 16, 17, 29]），但我们认为，Amoroso 和 Viada [5, 定理 6.2]，给出的以下版本最适合我们的目的。需要指出的是，Amoroso 和 Viada 始终假设其域是代数闭的；但是，对于下面给出的表述，这一假设并非必要，因为我们可以将一个域嵌入其代数闭包中。我们回顾一下，有限生成阿贝尔群同构于一个有限群与某个同构于 $\mathbb{Z}^r$ 的群的直和，其中 $r\geq 0$；数量 r 由该群唯一确定，称为该群的秩。

定理 3.2。设 K 是特征零的域，$a_1,\dots,a_n$ 是 K 的非零元素，且 Γ 是 $(K^*)^n$ 的秩为 $r<\infty$ 的有限生成乘法子群。那么，至多有

$$(8n)^{4n^4(n+r+1)}$$

个非退化解满足方程

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1$$

其中 $(x_1,\dots,x_n)\in\Gamma$。

我们注意到，除了 $n\leq 2$ 的情形外，S-单位定理的所有版本都是无效的。

4. 定理 1.1 的证明

本节中，我们证明以下版本的定理 1.1。

定理 4.1. 设 k 和 ℓ 为乘法独立的正整数，设$d\geq 2$，且设 $\Gamma=(Q,\Sigma_k^d,\delta,q_0,F)$ 和 $\Gamma'=(Q',\Sigma_\ell^d,\delta',q_0',F')$ 为接受稀疏正规语言 $\mathcal{L}\subseteq(\Sigma_k^d)^*$ 和 $\mathcal{L}'\subseteq(\Sigma_\ell^d)^*$ 的确定性有限状态自动机。若 $X\subseteq\mathbb{N}^d$ 是其基-k 展开属于 $\mathcal{L}$ 的 d元自然数元组集合，且 $Y\subseteq\mathbb{N}^d$ 是其基-ℓ展开属于 $\mathcal{L}'$的 d元自然数元组集合，则

$$|X\cap Y|\leq k^{d|Q|}\cdot\ell^{d|Q'|}\cdot\big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10d(|Q|+|Q'|)^5}. \tag{3}$$

我们注意到，并未试图优化上界，因为这样做会导致表达式难以处理。尽管如此，使用我们的方法所得到的界限无法得到显著改进。我们从一个基本估计开始。

命题 4.2. 设 $N \geq 2$，令 Σ 为大小为 N的有限字母表，并令 Γ =$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$为一个接受稀疏语言 $\mathcal{L}$的确定性有限自动机。那么， $\mathcal{L}$ 是至多由以下数量的集合组成的有限（可能为空）并集

$$(|Q|-1)!(N^{|Q|-1}+N^{|Q|-2}+\cdots+1)$$

形如

$$\{v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 w_1,... , w_s, v_1,... , v_s 是 Σ^* 中的词，其中 w_i 非空，但 v_i 可以为空，并且具有 $|w_1|+\cdots+|w_s| \leq |Q|-1$ 和 $|v_0|+\cdots+|v_s| \leq N$（$|Q|-1$）。

证明。反设结论不成立，并取一个 DFA（$Q, \Sigma, \delta, q_0, F$），使得命题中的结论对 $|Q|$ 不成立，且 $|Q|$ 最小。注意，当 $|Q|=1$ 时结论成立，因为在输入字母表大小至少为二的单状态自动机所接受的稀疏集合中，唯一的集合是空集。因此不妨设 $|Q|>1$。

我们通过规定：对于 $q, q' \in Q$，若存在一个词 $w \in \Sigma^*$ 使得 δ（q, w） $= q'$，则 $q \preceq q'$，从而在 Q 上定义一个传递二元关系 $\preceq$。接着规定，若 $q \preceq q'$ 且 $q' \preceq q$，则两个状态 q, q' 等价。由构造可知，该关系具有自反性，因为 δ（q, ϵ） $= q$，其中 ϵ 是空字；并且它具有对称性和传递性。令 $[q]$ 表示 q 的等价类。于是 $\preceq$ 在这些等价类上诱导出一个偏序。令 r 表示等价类 $[q_0]$的大小。由于 $\mathcal{L}$ 非空，从 q_0 到某个接受状态至少存在一条路径。特别地，根据命题 2.1（3），以 q_0 为基点的环至多有一个；又由于该环经过 $[q_0]$ 中的所有状态，所以如果该环存在，它就是一个长度为 r 的词 w_1。注意，如果 $r \geq 2$，则以 q_0 为基点必定存在一个环；但如果 $r=1$，则可能有 δ（q_0, w） $= q_0$，当且仅当 w 是空字。现在我们考虑对应于这两种可能性的两种情形。较简单的情形是 δ（q_0, w） $= q_0$，当且仅当 w 是空字。在这种情况下，$[q_0] = q_0$；对于每个 $x \in \Sigma$，令 $\mathcal{L}_x$ 表示所有满足 $w \in \mathcal{L}$ 且首字母为 x 的词 $w \in \Sigma^*$ 的集合。于是，对每个 $u_x \in \mathcal{L}_x$，都有 δ（q_0, u_x） $\in Q \setminus \{q_0\}$。由于 q_0 只与自身等价，我们得到 $\mathcal{L}_x = x\mathcal{E}_x$，其中 $\mathcal{E}_x$ 是由自动机 Γ_x 所接受的正则语言：$=$（$Q \setminus \{q_0\}, \Sigma, \delta, \delta$（$q_0, x$） $F \setminus \{q_0\}$）。

由 $|Q|$的极小性可知， $\mathcal{E}_x$ 是至多

$$(|Q|-2)!(N^{|Q|-2}+\cdots+1)$$

个如下形式的集合之并

$$\{v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 w_1、...、w_s、v_0、...、v_s 是 Σ^* 中的词，其中 w_i 非空，而 v_i 可以为空，并且满足 $|w_1|+\cdots+|w_s| \leq |Q|-2$ 和 $|v_0|+\cdots+|v_s| \leq N$（$|Q|-2$）。于是， $\mathcal{L}_x$ 是至多（$|Q|-2$）！（$N^{|Q|-2}+\cdots+1$）个如下形式的集合之并

$$\{(xv_0) w_1^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 Σ^* 中有 $w_1, \ldots, w_s, v_0, \ldots, v_s$ 个词， w_i 非空，而 v_i 可以为空，并且有 $|w_1|+\cdots+|w_s| \leq |Q|-1$ 和 $|xv_0|+\cdots+|v_s| \leq N(|Q|-1)$，因为 $N \geq 1$。又因为 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}_x$（$x \in \Sigma$）的并集，我们看到 $\mathcal{L}$ 是至多由 $(|Q|-2)!(N^{|Q|-1}+N^{|Q|-2}+\cdots+N)$ 个如下形式的集合组成的并集

$$\{v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 Σ^* 中有 $w_1, \ldots, w_s, v_0, \ldots, v_s$ 个词， w_i 非空，而 v_i 可以为空，并且有 $|w_1|+\cdots+|w_s| \le |Q|-1$ 和 $|v_0|+\cdots+|v_s| \le N(|Q|-1)$。因此，我们在这种情形下得到了所需结果。

接下来考虑存在唯一一个长度为 $r \ge 1$ 、基于 q_0 的环 w_1 的情形。特别地， $[q_0]$ 的大小为 r。此时，我们可以写成 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$，其中 $\mathcal{L}_0$ 是 $\mathcal{L}$ 中满足 $\delta(q_0, w) \in [q_0]$ 的词 w 的集合，而 $\mathcal{L}_1$ 是满足 $\delta(q_0, w) \notin [q_0]$ 的词 $w \in \mathcal{L}$ 的集合。根据构造， $\mathcal{L}_0$ 中的每个词都具有如下形式： $w_1^* v$ ，其中 v 是 w_1 的一个真前缀。特别地， $\mathcal{L}_0$ 是至多 r 个所需形式的集合的并。接下来考虑 $\mathcal{L}_1$。若 $w \in \mathcal{L}_1$ ，则 w 可以写成 uxv，其中 u、 $v \in \Sigma^*$、 $x \in \Sigma$ 满足 $\delta(q_0, u) \in [q_0]$ ，但 $\delta(q_0, ux) \notin [q_0]$。于是，我们可以将 $\mathcal{L}_1$ 写成 $|Q|-r$ 个子语言 $\mathcal{L}_{1,\ q}$ 的并，每个 $q \in Q \setminus [q_0]$ 对应一个，其中 $\mathcal{L}_1$ 是 $\mathcal{L}$ 中形如 uxv 、且满足 $\delta(q_0, u) \in [q_0]$、 $\delta(q_0, ux) = q$ 的词的集合。

于是，每个 $\mathcal{L}_{1,\ q}$ 都是形如 $w_1^* z x \mathcal{E}_q$ 的语言的有限并，其中 z 是 w_1 的真前缀， $x \in \Sigma$ ，并且 $\delta(q_0,\ zx) = q$ ，而 $\mathcal{E}_q$ 是由状态集为 $Q \setminus [q_0]$ 的自动机所接受的稀疏语言。特别地，由于 $|Q|$ 的极小性，每个$\mathcal{E}_q$都是至多由 $(|Q|-r-1)!\ (N^{|Q|-r-1}+\cdots+1)$ 个形如以下形式的集合的有限并

$$\{v_1 w_2^* v_2 w_3^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 $|w_2|+\cdots+|w_s| \le |Q|-r-1$ 且 $|v_1|+\cdots+|v_s| \le N\ (|Q|-r-1)$ 。由于 w 至多有 r 个真前缀，并且 x 至多有 N 种选择，因此我们看到，$\mathcal{L}_{1,\ q}$是至多由 $(rN)\ (|Q|-r-1)!\ (N^{|Q|-r-1}+\cdots+N+1)$ 个形如以下形式的集合所组成的并

$$\{w_1^*(zxv_1) w_2^* v_2 w_3^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s\}$$

其中 $|w_1|+\cdots+|w_s| \le |Q|-1$ 和 $|zxv_1|+\cdots+|v_s| \le N(|Q|-r-1)+r \le N(|Q|-1)$。因此，$\mathcal{L}$ 是至多 $(|Q|-r)rN(|Q|-r-1)!(N^{|Q|-r-1}+\cdots+N+1)$ 个 $+r$集合的并，且这些集合具有所需形式。其中， r 的贡献来自考察我们对 $\mathcal{L}_0$ 的分解，而 $|Q|-r$ 因子则来自考察语言$\mathcal{L}_{1,\ q}$，其中 $q \in Q \setminus [q_0]$。最后，由于 $N \ge 2$，我们有 $r \le N^{r-1}$，因此

$$\begin{aligned}
&(|Q|-r)rN(|Q|-r-1)!(N^{|Q|-r-1}+\cdots+N+1)+r \\
&\le (|Q|-r)N^{r-1}\cdot N(|Q|-r-1)!(N^{|Q|-r-1}+\cdots+N+1)+N^{r-1} \\
&= (|Q|-r)!(N^{|Q|-1}+\cdots+N^r)+N^{r-1} \\
&\le (|Q|-1)!(N^{|Q|-1}+\cdots+1).
\end{aligned}$$

结论得证。 □

现在我们利用定理 3.2 中的估计。

引理 4.3. 设 k 和 ℓ是乘法独立整数， m 和 n 是正整数，且 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 是非零有理数。那么至多有

$$(8(n+m-1))^{10(n+m)^5-4(n+m-1)^4}$$

对于方程

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m = 0$$

其中每个 X_i 都是 k 的幂，每个 Y_i 都是 ℓ 的幂，并且左侧的任何真非平凡子和都不为零。

证明。我们考虑 $n \le m$ 的情形； $m < n$ 的情形可类似处理。令 $H_1 := \{k^a \ell^b : a, b \in \mathbb{Z}\} \cong (\mathbb{Z}, +)^2$, , 这是一个秩为 2 的阿贝尔群；再令 $H_2 := \{\ell^b : b \in \mathbb{Z}\} \cong (\mathbb{Z}, +)$, 其秩为 1。

方程的一个解

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m = 0$$

具有所需性质的方程的一个解给出方程的一个解

$$\sum_{i=1}^{n} (-a_i/b_m) Z_1 + \sum_{j=1}^{m-1} (-b_j/b_m) Z_{n+j} = 1 \tag{4}$$

满足 $Z_i = X_i/Y_m \in H_1$ 对于 $1 \le i \le n$以及 $Z_i = Y_{i-n}/Y_m \in H_2$ 对于 $n+1 \le i < n+m$，且方程（4）是非退化的。于是（Z_1，……，Z_{n+m-1}）$\in \Gamma \subseteq$（$\mathbb{Q}^*$）$^{n+m-1}$，其中 $\Gamma = H_1^n \times H_2^{m-1}$ 是一个秩为 $2n + m - 1$的群。因此，在定理 3.2中取$r = 2n + m - 1$，可得方程（4）至多有

$$(8(n + m - 1))^{4(n+m-1)^4(3n+2m-1)} \tag{5}$$

个非退化解。由于 $n \le m$，我们有 $3n + 2m \le 5$（$n + m$）$/2$，因此 4（$n + m - 1$）^{4}（$3n + 2m - 1$）≤ 10（$n + m$）$^5 - 4$（$n + m - 1$）^{4}。因此，方程（5）中的量的上界为

$$(8(n + m - 1))^{10(n+m)^5 - 4(n+m-1)^4}.$$

最后，我们可以从 $Z_1, \ldots, Z_{m+n-1}$ 唯一地还原原来的 X_i 和 Y_i。为此，注意到对于 $i = 1, \ldots, n$，必有 $Z_i = k^a/\ell^b$，其中 a 和 b 是某些整数。由于 k 和 ℓ 乘法独立， a 和 b 便唯一确定。因此，我们可以从 $Z_1, \ldots, Z_n$ 还原 $X_1, \ldots, X_n$ 和 Y_m。随后，我们便可从剩余的 Z_j 还原 $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$。结论得证。

□

现在，我们利用前面的引理，在允许某些退化的情况下给出估计。

引理 4.4. 设 k 和 ℓ 是乘法独立整数， m、$n \ge 1$ 是整数，且 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 是非零有理数。那么至多有

$$2^{-(n+m)} \cdot (8(n + m - 1))^{10(n+m)^5 - (n+m)}$$

方程的解

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m = 0$$

其中每个 X_i 都是 k的幂，每个 Y_i 都是 ℓ的幂，并且 $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$或 $b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m$的任何非平凡子和都不为零。

证明。对于每个满足以下条件的解

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m = 0$$

使得 $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$或 $b_1 Y_1 + \cdots + b_m Y_m$的任何子和都不为零，我们可以将集合 π的集合 $V :=\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$ 划分为互不相交的非空子集 U_1， …， U_r 使得与每个 U_i 中的变量对应的子和都为零，且没有真子和为零。令 $c_i := |U_i|$。那么 U_i 与 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 和 $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ 都非平凡相交，因此由引理 4.3,

对于 $i = 1$、…、r，子和方程至多有 $(8(c_i-1))^{10c_i^5-4_{(c_i-1)^4}}$ 个非退化解

$$\sum_{X_j \in U_i} a_j X_j + \sum_{Y_j \in U_i} b_j Y_j = 0$$

其中每个 X_j 都是 k 的幂，每个 Y_j 都是 ℓ 的幂。因此，对于集合划分 π，至多有

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{r} (8(c_i-1))^{10c_i^5-4(c_i-1)^4} &\le (8(n+m-1))^{\sum_{i=1}^{r}(10c_i^5-4(c_i-1)^4)} \\
&\le (8(n+m-1))^{10\left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right)^5-4\sum_{i=1}^{r}(c_i-1)} \\
&= (8(n+m-1))^{10(n+m)^5-4(n+m-r)} \\
&\le (8(n+m-1))^{10(n+m)^5-2(n+m)}
\end{aligned}$$

个解，其中最后一步是由以下事实得出的：

$$r \le (n+m)/2, \tag{6}$$

这是以下事实的推论：每个 U_i 都与 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 和 $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ 有非平凡交集。

最后，注意到，将一个有限集 W 划分为恰好 e 个部分的集合划分族，可以嵌入从 W 到 $\{1, \ldots, e\}$ 的满射族：首先给构成集合划分的各个集合依次标上 1，…，e，然后关联一个映射，将 $w \in W$ 映射到它所属集合的标签。由于我们的集合划分中的部分数至多为 $(n+m)/2$，因此我们需要考虑的可能集合划分数至多为 $((n+m)/2)^{n+m}$，因为该集合划分族嵌入了从 V 到 $\{1, \ldots, \lfloor (n+m)/2 \rfloor\}$ 的映射族。由于至多有

$$(8(n+m-1))^{10(n+m)^5-2(n+m)}$$

对应于 V 的每个相关集合划分的所需形式的解，并且由于可能出现的集合划分至多有 $((n+m)/2)^{n+m}$ 个，因此我们得到一个上界

$$\begin{aligned}
&((n+m)/2)^{n+m} \cdot (8(n+m-1))^{10(n+m)^5-2(n+m)} \\
&\le 2^{-(n+m)} \cdot (8(n+m-1))^{n+m} (8(n+m-1))^{10(n+m)^5-2(n+m)} \\
&= 2^{-(n+m)} \cdot (8(n+m-1))^{10(n+m)^5-(n+m)}.
\end{aligned}$$

结论得证。 □

现在我们利用这些估计来获得 $\mathbb{N}$ 的稀疏子集交集大小的上界。

命题 4.5. 设 k 和 ℓ 是乘法独立的正整数，设$s \ge 1$、$t \ge 1$，以及 v_0、…、v_s、w_1、…、$w_s \in \Sigma_k^*$和 u_0、…、u_t、y_1、…、$y_t \in \Sigma_\ell^*$。若

$$X = \{[v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s]_k\}$$

and

$$Y = \{[u_0 y_1^* u_1 y_2^* \cdots u_{t-1} y_t^* u_t]_\ell\},$$

then

$$|X \cap Y| \le (8(s+t+1))^{10(s+t+2)^5-(s+t+2)}.$$

证明。 根据命题 2.2 我们有 X 的形式为

$$\left\{c_0 + c_1 k^{\delta_s n_s} + c_2 k^{\delta_s n_s + \delta_{s-1} n_{s-1}} + \cdots + c_s k^{\delta_s n_s + \cdots + \delta_1 n_1} : n_1, \ldots, n_s \geq 0\right\},$$

其中 $c_0, \ldots, c_s$ 是有理数。类似地， Y 的形式为

$$\left\{d_0 + d_1 \ell^{\delta'_t m_t} + d_2 \ell^{\delta'_t m_s + \delta'_{t-1} m_{t-1}} + \cdots + d_t \ell^{\delta'_t m_t + \cdots + \delta'_1 m_1} : m_1, \ldots, m_t \geq 0\right\},$$

其中 $d_0, \ldots, d_t$ 是有理数。

那么， $X \cap Y$ 中的一个元素对应于方程的一个解

$$d_0 X_0 + \cdots + d_t X_t - c_0 Y_0 - \cdots - c_s Y_s = 0,$$

其中

$$X_0 = 1, X_1 = \ell^{\delta'_t m_t}, \ldots, X_t = \ell^{\delta'_t m_t + \cdots + \delta'_1 m_1}$$

and

$$Y_0 = 1, \ldots, Y_s = k^{\delta_s n_s + \cdots + \delta_1 n_1},$$

交集中对应的元素为

$$A := d_0 X_0 + \cdots + d_t X_t = c_0 Y_0 + \cdots + c_s Y_s.$$

由于确定 $X \cap Y$ 时我们只关心量 A，因此去掉一个极大消失子和 [1] 后，可以假设涉及 ℓ 的幂的项不存在非平凡子和为零，且这类项至多有 $t+1$ 个。类似地，我们可以从 $X_{t+1} + \cdots + X_{t+s+1}$ 中去掉一个极大消失子和。

根据引理4.4，令 n <style id='8}>为第一 个和中的项数，我们有$n \leq t+1$; 类似地，我们可以令 m 为第二个子和中的项数，并且有 $m \leq s+1$。利用至多存在 $2^{s+1} \cdot 2^{t+1}$个我们可以移除的极大消失子和对，以及函数

$$F(a,b) = 2^{-a-b-2} \left(8(a+b+1)\right)^{10(a+b+2)^5 - (a+b+2)}$$

对于 a、 $b \geq 0$，关于 a 和 b 均为递增函数，由此可见至多有

$$2^{s+t+2} \cdot 2^{-(s+t+2)} \left(8(s+t+1)\right)^{10(s+t+2)^5 - (s+t+2)}$$

$X \cap Y$中的元素。结论得证。

□

现在我们准备证明定理4.1。

定理4.1的证明。根据命题4.2 X 是形如 W_1、.....、 W_{A_1} 的集合之并

$$\{[v_0 w_1^* v_1 w_2^* \cdots v_{s-1} w_s^* v_s]_k\} \tag{7}$$

其中 w_1、.....、 w_s、 v_0、.....、 v_s 中的词 $(\Sigma_k^d)^*$，其中 w_i 非空，但 v_i可以为空，并且 $|w_1| + \cdots + |w_s| \leq |Q| - 1$和 $|v_0| + \cdots + |v_s| \leq k^d \left(|Q| - 1\right)$。此外，由于我们的输入字母表大小为 k^d，命题 4.2 还表明，我们可以取

$$A_1 \leq (|Q|-1)!(k^{d(|Q|-1)} + k^{d(|Q|-2)} + \cdots + 1).$$

[1] 对于非零的 A，这必然是一个真子集，但当 $A = 0$ 时，这将是整个集合。我们给出的估计考虑到了这种可能性。

类似地， Y是集合 Z_1、……、 Z_{A_2}的并集，其中

$$A_2 \leq (|Q'|-1)!(\ell^{d(|Q'|-1)} + \ell^{d(|Q'|-2)} + \cdots + 1)$$

且每个 Z_j 均具有如下形式

$$\{[u_0 y_1^* u_1 y_2^* \cdots u_{t-1} y_t^* u_{t+1}]_\ell\} \tag{8}$$

其中 u_0、……、 u_{t+1}、 y_1、……、 y_t是 $(\Sigma_\ell^d)^*$中的词，其中 y_i非空，而 u_i可以为空，并且 $|y_1|+\cdots+|y_t| \leq |Q'|-1$和 $|u_0|+\cdots+|u_t| \leq \ell(|Q'|-1)$。特别地，对每个此类集合都有 $t \leq |Q'|-1$。

现在，对于 $(p,q) \in \{1,\ldots,A_1\} \times \{1,\ldots,A_2\}$以及每个 $i=1$、……、 d，我们分别令 $W_{p,i} \subseteq \mathbb{N}$和 $Z_{q,i} \subseteq \mathbb{N}$ 为 W_p 和 Z_q 在从 $\mathbb{N}^d$到其第 i个坐标的投影映射下的像。对于 $i \in \{1,\ldots,d\}$，我们有

$$\mathrm{proj}_i(v_1 w_1^* v_2 w_2^* \cdots v_s w_s^* v_{s+1}) = \mathrm{proj}_i(v_1)\,\mathrm{proj}_i(w_1)^* \cdots \mathrm{proj}_i(w_s)^*\,\mathrm{proj}_i(v_{s+1}),$$

其中，proj_i 是投影映射 $(\Sigma_k^d)^* \to \Sigma_k^*$ 通过取第 i个坐标得到。由此可知，每个$W_{p,\,i}$都是式（7所给形式的集合，但现在我们使用以 Σ_k 为字母的词，而不再使用 $(\Sigma_k)^d$。类似地，每个$Z_{q,\,i}$都是式（8所给形式的集合，但现在我们改用以 Σ_ℓ 为字母的词。

由命题4.5可知，每个 $W_{p,\,i} \cap Z_{q,\,i}$ 的基数至多为

$$(8(s+t+1))^{10(s+t+2)^5-(s+t+2)}$$

在交集中。特别地，由于 $s \leq |Q|-1$ 和 $t \leq |Q'|-1$，我们有

$$|W_{p,i} \cap Z_{q,i}| \leq \big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10(|Q|+|Q'|)^5-(|Q|+|Q'|)}.$$

现在，由于

$$W_p \cap Z_q \subseteq (W_{p,1} \cap Z_{q,1}) \times \cdots \times (W_{p,d} \cap Z_{q,d}),$$

于是可知，每个交集 $W_p \cap Z_q$ 的大小至多为

$$\big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10d(|Q|+|Q'|)^5-d(|Q|+|Q'|)}.$$

最后，由于

$$X \cap Y = \bigcup_{p \leq A_1} \bigcup_{q \leq A_2} (W_p \cap Z_q),$$

我们看到

$$|X \cap Y| \leq A_1 \cdot A_2 \cdot \big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10d(|Q|+|Q'|)^5-d(|Q|+|Q'|)}.$$

最后，注意到 $A_1 \leq |Q|^{|Q|} \cdot k^{d|Q|}$ 和 $A_2 \leq |Q'|^{|Q'|} \cdot \ell^{d|Q'|}$，因此得到

$$|X \cap Y| \leq k^{d|Q|} \cdot \ell^{d|Q'|} \cdot |Q|^{|Q|} \cdot |Q'|^{|Q'|} \cdot \big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10d(|Q|+|Q'|)^5-d(|Q|+|Q'|)},$$

容易看出其小于

$$k^{d|Q|} \cdot \ell^{d|Q'|} \cdot \big(8(|Q|+|Q'|-1)\big)^{10d(|Q|+|Q'|)^5}.$$

结论随之得出。 □

注 4.6。 我们注意到，4.1定理的证明所采用的策略，包括描述我们的自动机所接受的 $(\Sigma_k^d)^*$ 和 $(\Sigma_\ell^d)^*$ 的子语言的复杂度，然后利用这一点来界定其投影的复杂度，最后利用 S-单位理论来获得投影大小的界。另一种方法是先找出接受这些语言投影的自动机，再利用相应的界。一个具有 n 个状态的自动机所接受的正则语言的投影，可以由一个

具有 2^n 个状态的自动机接受。[2] 如果采用这种方法，得到的另一个界通常会差得多。

5. A general intersection question

现在我们来考察一个一般性问题：稀疏自动集与零密度自动集合的交集可能是什么样子。回顾一下，对于 $\mathbb{N}$ 的子集 S， S 的密度就是以下极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_S(n)}{n}, \tag{9}$$

如果该极限存在的话。一般而言，自然数集总是有下密度和上密度，分别定义为

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\pi_S(n)}{n} \text{ and } \limsup_{n\to\infty} \frac{\pi_S(n)}{n}, \tag{10}$$

因此，当且仅当这两个值相等时，密度才存在。

我们指出，由于稀疏自动集是多对数有界的，它们必然具有零密度。

以下结果出自第二位作者 [7, 命题 2.1]。

命题 5.1. 设 $k \geq 2$ 为一个自然数，设 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 为一个 k-自动序列，且 $s(n) = \sum_{j<n} h(j)$。则存在 $\beta \in (0, k)$、 $C > 0$、 $a \geq 1$以及对于 $j \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ 的非负有理数 c_j，使得

$$|s(k^{an+j}) - c_j k^{an+j}| < C\beta^{an}$$

对每个 $n \geq 0$均成立。此外， a 以及有理数 c_0、...、 c_{a-1} 均为递归可计算的，并且 β 可以被有效确定。

由此可证明，一个 k-自动集合 S 要么具有正下密度（即 $\liminf \pi_S(x)/x > 0$），要么存在某个正的 $\epsilon > 0$，使得$\pi_S(x) = O(x^{1-\epsilon})$。

命题 5.2. 设 $k \geq 2$ 为一个自然数，且 S 为自然数的一个 k-自动子集。则 S 要么具有正下密度，要么存在某个$\epsilon > 0$，使得 $\pi_S(x) = O(x^{1-\epsilon})$。

证明。 取 h： $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ 为 S 的特征函数，然后应用命题 5.1，我们看到，要么 S 具有正下密度，要么 $\pi_S(k^n) = O(\beta^n)$ 对某个 $\beta \in (0, k)$ 成立。以下我们假设处于第二种情形。那么存在某个 $\epsilon > 0$ 使得

$$\pi_S(k^n) = O(k^{(1-\epsilon)n}).$$

于是，对于给定的 $x > 1$，我们有 $k^n \leq x < k^{n+1}$ 对于某个 n，因此

$$\pi_S(x) \leq \pi_S(k^{n+1}) = O((k^{n+1})^{1-\epsilon}).$$

由于 $kx \geq k^{n+1}$，我们于是看到

$$\pi_S(x) = O(x^{1-\epsilon}),$$

因此我们得到了所需结果。 □

[2]这个界还可以改进（例如，参见 [21] 及其中的参考文献），但一般而言，接受投影语言所需的状态数，是接受原语言的最小自动机状态数的指数级。

一般而言，如果 k 和 ℓ 乘法独立，那么一个稀疏 k-自动集与一个 ℓ-自动集的交集可以是无限的；但在X 是稀疏 k-自动集、而 Y 是零密度的 ℓ-自动集时，我们预期 $X \cap Y$ 是有限的。直观地说，可以通过以下方式理解原因。由于 Y 的密度为零，我们已经证明存在某个 $\epsilon > 0$，使得 $\pi_Y(x) = O(x^{1-\epsilon})$；又由于 X 是稀疏的，因此存在正数常量 c 和 d，使得对充分大的 x，有 $\pi_X(x) \leq c(\log x)^d$。于是存在某个 $C > 0$，使得当x 充分大时，如果我们从 $[0, x]$中取一个自然数，它属于 Y 的概率至多为 $Cx^{-\epsilon}$。特别地，若 $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ 是我们的稀疏 k-自动集 S中元素的一个枚举，那么由于基数 k 和 ℓ 乘法独立，我们预期 i_j 属于 Y 的概率至多为 $Ci_j^{-\epsilon}$，因此 $X \cap Y$中元素的期望数量应当受以下总和的大小所界定

$$\sum_{j \geq 1} \frac{C}{i_j^{\epsilon}}.$$

注意到，当 X 稀疏时，上述级数收敛。为说明这一点，回忆$\pi_X(x) \leq c(\log x)^d$，其中某个 $c, d > 0$，且当 x充分大时成立。由于 $\pi_X(i_N) = N$，于是当 N 充分大时，我们有 $N \leq c(\log i_N)^d$，这给出当 N 充分大时 $i_N \geq \exp((N/c)^{1/d})$。特别地， i_N 的增长速度快于 N 中的任何多项式，因此对于每个$\epsilon > 0$，都有$\sum 1/i_j^{\epsilon}$ 收敛。

以这一启发式方法为指导，我们提出以下猜想，尽管这个问题似乎远远超出了当前数论方法所能处理的范围。

猜想 5.3。设 k, ℓ 是乘法独立的正整数。如果 X 是 $\mathbb{N}$ 的一个稀疏 k-自动子集，且 Y 是 $\mathbb{N}$的一个零密度 ℓ-自动子集，那么 $X \cap Y$ 是有限集。

我们注意到，如果取 $k = 2$、$\ell = 3$和 $X = \{2^i : \ i \geq 0\}$ 以及 Y为三进制展开中不含数字 2 的数的集合，那么 Y 具有零密度，而 X 是稀疏的，因此埃尔德″什 [15, 在引言中提到的猜想是猜想5.3的一个特例。

References

[1] B. Adamczewski 和 J. P. Bell，《正特征函数域：展开与 Cobham定理》。 *J. Algebra* **319** (2008)，第 6 期，2337–2350 页。[2] B. Adamczewski 和 J. P. Bell，《关于 Mahler 函数的一个问题》。 *Ann. Sc. Norm. Super.* ( ) ( ), *Pisa Cl. Sci.* 5 **17** 2017 4, 1301 1355 第 – 期。[3] S. Albayrak 和 J. P. Bell，《代数幂级数的 Christol 定理的一个细化》。 *Math.* ( )，第 – *Z.* **300** 2022 3, 2265 2288 期。[4] J.-P. Allouche 和 J. Shallit， *Automatic Sequences. Theory, applications, generalizations.* 剑桥大学出版社，剑桥，2003 年。[5] F. Amoroso 和 E. Viada，《环面子簇上的小点》。 *Duke Math. J.* **150** (2009)，第 3 期，407–442 页。[6] J. P. Bell，《Cobham定理关于正则序列的推广》。 *Sém. Lothar. Combin.* A (/), 54 2005 07 54 15 第 B 条，Ap. pp. [7] J. P. Bell，《自动数集的上密度是有理数》。 *J. Théor. Nombres Bordeaux* **32** (2020)，第 2 期，585–604 页。[8] J. P. Bell、D. Ghioca 和 R. Moosa， *Effective isotrivial Mordell-Lang in positive characteristic*。预印本见 arXiv:2010.08579。[9] J. P. Bell 和 R. Moosa， *F*-集与有限自动机。 *J. Théor. Nombres Bordeaux* **31** (2019)，第 1 期，101–130 页。

[10] A. Cobham, 《有限自动机可识别数集的基数依赖性》。

Math. ( ), –。

Systems Theory **3** 1969 186 192

[11] H. Derksen, 《正特征中的 Skolem-Mahler-Lech 定理与有限自动机》。*Invent. Math.* **168** (2007), 第 1 期，175–224 页。[12] F. Durand, 《Cobham定理的一个推广》。 *Theory Comput. Syst.* **31** (1998 2, 169 185), 第 – 期。[13] F. Durand, 《替换的 Cobham定理》。

J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **13** (2011), 第 6 期，1799–1814 页。[14] F. Durand 和 M. Rigo, 《关于 Cobham定理》。

Handbook of automata theory. Vol. II. Au- , –

tomata in mathematics and selected applications 947 986, 2021

EMS Press，柏林，。[15] P. Erd˝os, 《数论中的一些非常规问题》。 *Math. Mag.* **52**, 第 2 期（1979），67–70 页。[16] J.-H. Evertse 和 K. Gy˝ory, *Unit equations in Diophantine number theory.* 剑桥高等数学研究丛书，第 146 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015 年。[17] J.-H. Evertse、H. P. Schlickewei 和 W. M. Schmidt, 《乘法群中元素所满足的线性方程》。 *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), 第 3 期，807–836 页。[18] P. Gawrychowski、D. Krieger、N. Rampersad 和 J. Shallit, 《在多项式时间内求正则语言或上下文无关语言的增长率》。 *Internat. J. Found. Comput. Sci.* **21** (2010), 第 4 期，597–618 页。[19] S. Ginsburg 和 E. Spanier, 《有界正规集》。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 1043–1049 页。[20] P. Hieronymi 和 C. Schulz, 《Cobham定理的一个强版本》。 *STOC '22—Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, 1172–1179 页，ACM，纽约，2022 年。[21] G. Jir´askov´a 和 T. Masopust, 《投影语言的状态复杂度》。形式系统的描述复杂度，198–211 页， *Lecture Notes in Comput. Sci.*，第 6808 卷，Springer，海德堡，2011 年。[22] K. S. Kedlaya, 《有限自动机与函数域的代数扩张》。

J. Théor. Nombres ( )，第 –

Bordeaux **18** 2006 2, 379 420

期。[23] K. S. Kedlaya, 《广义幂级数的代数性》。 *Beitr. Algebra Geom.* **58** (2017), 第 3 期，499–527 页。[24] T. J. P. Krebs, 《Cobham定理的一种更合理的证明》。

Internat. J. Found. Comput. ( )，第 . –

Sci. **32** 2021 2 203 207

期。[25] C. Michaux 和 R. Villemaire, 《Presburger算术与自动机对自然数集的可识别性：Cobham定理和 Semenov定理的新证明》,

Ann. Pure Appl. ( )，第 –

Logic **77** 1996 3, 251 277

期。[26] P. Mih

˘ *J. Reine Angew.* ailescu,

Math. **572** 2004 167 195

《本原圆分单位与 Catalan猜想的证明》。 ( )，–。[27] R. Moosa 和 T. Scanlon, F-结构与有限域上半阿贝尔簇的整点。 *Amer. J. Math.* **126** (2004), 第 3 期，473–522 页。[28] R. Sch¨afke 和 M. Singer, 《线性微分方程与差分方程的一致系统》。*J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21** (2019), 第 9 期，2751–2792 页。[29] H. P. Schlickewei, S-数域上的单位方程。 *Invent. Math.* **102** (1990), 第 1 期，95–107 页。[30] A. L. Semenov, 《在两个数制中均为正则的谓词的 Presburger性质》, *Sibirsk. Mat. Ž.* **18** (1977), 第 2 期，403–418，479。

Department of Mathematics and Statistics

, University of Calgary, Calgary, AB Canada T2N 1N4

Email address: gulizar.albayrak@ucalgary.ca

Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, ON Canada N2L 3G1

Email address: jpbell@uwaterloo.ca