arXiv:2304.09234v2 [cs.MA] 3 Dec 2024

异质旅客条件下高乘员收费车道系统的容量分配与定价

Haripriya Pulyassary*、Ruifan Yang*、Zhanhao Zhang*、Manxi Wu*

2024年12月4日

摘要

本文研究高乘员收费（HOT）车道的最优设计。在我们的设定中，交通管理部门决定HOT车道与普通车道之间的道路容量分配，以及向使用HOT车道但不符合高乘员资格标准的出行者收取的通行费。我们建立博弈论模型，分析具有异质时间价值和拼车效用损失的出行者所做的选择：支付通行费或拼车后使用HOT车道，或使用普通车道。出行者的收益取决于所选车道的拥堵成本、支付费用和拼车效用损失。我们全面刻画了任意容量分配和收费价格下出行者的均衡策略及相应出行时间。我们还利用加利福尼亚州880号州际公路的数据对模型进行校准，并计算最优容量分配和收费设计。

1 引言

高乘员收费（HOT）车道是指向满足最低乘员要求的车辆开放的交通车道或道路，同时也允许其他车辆付费通行。实际上，加利福尼亚州、得克萨斯州和华盛顿州的多条州际公路上已建成 HOT 车道。通过合理设计车道容量和收费价格，HOT 车道可以通过鼓励拼车和公共交通使用，有效缓解交通拥堵，同时还能通过收费为交通基础设施建设提供资金。

我们的研究旨在探讨HOT车道系统的最优设计及其对交通拥堵的影响。在我们的模型中，交通管理部门通过设计

*带 * 的作者贡献相同，且按字母顺序排列。所有作者均隶属于康奈尔大学运筹学与信息工程学院。电子邮箱： {hp297, ry298, zz564, mw843}@cornell.edu

HOT车道系统，选择HOT车道的道路容量和收费价格。在给定HOT车道设计的情况下，我们构建了一个博弈论模型，用于分析出行者所作出的策略性决策：出行者可以选择支付通行费或拼车以使用HOT车道，也可以使用普通车道。我们将出行者建模为由时间价值和拼车效用损失连续分布的非原子玩家群体。HOT车道和普通车道都会发生拥堵，即每条车道的出行时间都会随着出行者决策所诱导的总流量增加而增加。系统的结果，包括平均出行时间成本和收费收入，由出行者的均衡策略与交通管理部门的设计共同决定。

我们对该博弈中的 Wardrop 均衡进行了完整刻画。具体而言，我们识别出两种性质迥异的均衡状态，它们取决于交通管理部门对车道容量和收费价格的设计。在第一种均衡状态下，由于收费价格相对较高，所有选择 HOT车道的出行者都组成拼车，且无人支付通行费。在第二种均衡状态下，一部分拼车效用损失较高且时间价值较高的出行者支付通行费，选择 HOT车道；其余出行者则组成拼车或选择普通车道。在这两种状态下，出行者都分流至 HOT车道和普通车道。

均衡刻画为系统设计者提供了启示，说明 HOT车道 和普通车道的均衡流量及出行时间成本如何取决于系统参数，包括出行时间成本函数、容量分配和收费价格。此外，我们还对分配给 HOT车道 的容量比例变化时，均衡流量和成本如何变化进行了比较静态分析。

我们使用从加利福尼亚州880号州际公路快速车道收集的数据对模型进行校准。针对一组离散化的容量分配和收费价格设计参数，我们计算均衡策略组合。我们还计算了HOT车道设计的帕累托前沿，展示了系统管理部门在尽量减少道路拥堵与最大化总收费收入之间的权衡。

相关文献。我们的模型与分析建立在丰富的拥堵博弈文献之上，其中包括对网络中原子代理 [1, 2] 和非原子代理 [3] 所采用的路由策略进行均衡分析，以及对无政府代价 [4, 5, 6]的研究。拥堵博弈领域的大多数经典研究都聚焦于所有主体偏好相同的情形。文献 [7, 8] 将这些结果拓展到对玩家特定成本下的均衡存在性与效率的研究。

既有文献研究了收费机制的最优设计问题，旨在静态和动态环境 [9, 10, 11, 12]下，最小化具有同质偏好的非原子代理的总出行时间成本。文献 [13, 14] 将最优收费设计拓展至纳入出行者异质时间价值的情形。此外，文献 [15, 16] 研究了由策略性运营者设定边上的通行费、并以最大化收费收入为目标时的收费机制及其所产生的均衡成本。

我们的论文将路由博弈和收费设计领域的研究扩展至

企业拼车，以及同时具有异质时间价值和异质拼车效用损失的出行者。此外，我们的研究也对先前关于纳入出行者选择模式 [17], 和异质拼车效用损失 [18] 的 HOT车道设计研究有所贡献。然而，这些研究的模型和分析并未同时纳入拥堵效应，以及具有异质时间价值和拼车效用损失的出行者的策略行为。

2 模型

考虑一个由普通车道和高乘员收费车道 组成的单个多车道高速公路路段模型。普通车道不收费，所有车辆均可通行。对于满足预先设定的最低乘员要求（记为 $A \geq 2$）的车辆，高乘员收费车道免费开放；其他车辆也可以付费使用该车道。交通管理部门决定收费价格 $\tau > 0$、最低乘员要求A，以及分配给 HOT车道的道路容量比例 $\rho \in [0,1]$ 。其余 $(1-\rho)$ 比例的总容量分配给普通车道。

我们将出行者集合建模为总需求为 $D > 0$ 的非原子代理群体。主体具有异质时间价值，记为 β，以及拼车效用损失，记为 γ；拼车效用损失是乘坐拼车出行时产生的一项固定成本。我们假设主体的偏好参数（β, γ）在集合 $\mathcal{P} := [0,\beta] \times [0,\gamma]$ 上均匀分布，其中 β, γ 是有限的非负数，分别表示最大时间价值和最大拼车效用损失。

每个参与者的行动集合包括:

- R_{toll}: 使用 HOT车道并支付通行费。- R_{pool}: 乘坐大小为 A 的拼车使用 HOT车道。- R_o: 使用普通车道。

每个参与者根据自己的偏好参数，在集合 $\{R_{toll}, R_{pool}, R_o\}$ 中选择一项行动。因此，该博弈的策略组合是一个映射s : $\mathcal{P} \to \{R_{toll}, R_{pool}, R_o\}$。给定 s，该博弈的诱导结果可表示为一个向量（σ_{toll}, σ_{pool}, σ_o），其中 σ_{toll} （分别为 σ_{pool}、σ_o）表示选择 R_{toll} （分别为 R_{pool}、 R_o）的人口比例。这里， σ 必须满足σ_{toll}, σ_{pool}, $\sigma_o \in [0,1]$ 以及 $\sigma_{toll} + \sigma_{pool} + \sigma_o = 1$。给定 $\sigma = (\sigma_{toll}, \sigma_{pool}, \sigma_o)$，我们可以将使用普通车道的车辆总流量（记为$x_o$）和使用 HOT车道的车辆总流量（记为 x_h）表示如下:

$$x_o = \sigma_o D, \quad x_h = \left(\sigma_{toll} + \frac{\sigma_{pool}}{A}\right) D.$$

给定容量分配 ρ 和总流量 $x = (x_o, x_h)$，HOT车道的延迟函数为 $C_h(x_h;\rho)$，而

普通车道的延迟函数分别为 $C_o(x_o;\ 1-\rho)$。我们对延迟函数作出如下假设：

(A1) 延迟函数 $C_o(x_o;\ 1-\rho)$（分别为 $C_h(x_h;\rho)$）关于 x_o（分别为 x_h）递增，关于 ρ递减（分别为递增）。

(A2) $C_o(0, 1-\rho) = C_h(0, \rho)$ for any $\rho \in [0, 1]$.

假设 **(A1)** 表明，每条车道的延迟随该车道上的总流量增加而增加，随车道容量增加而降低。[1] 假设 **(A2)** 表明两条车道具有相同的自由流行驶时间，其定义为流量为零时延迟函数的取值。

给定任意 σ，我们将偏好参数为 (β, γ) 的个体采取行动 $R_i \in \{R_{toll}, R_{pool}, R_o\}$ 时的成本记为 $c_\gamma^\beta(R_i;\ \sigma)$。于是，

$$
\begin{aligned}
c_\gamma^\beta(R_{toll}; \sigma) &= \beta \cdot C_h\left(\left(\sigma_{toll} + \frac{\sigma_{pool}}{A}\right) D; \rho\right) + \tau, \\
c_\gamma^\beta(R_{pool}; \sigma) &= \beta \cdot C_h\left(\left(\sigma_{toll} + \frac{\sigma_{pool}}{A}\right) D; \rho\right) + \gamma, \\
c_\gamma^\beta(R_o; \sigma) &= \beta \cdot C_o(\sigma_o D; 1-\rho).
\end{aligned}
$$

定义 1. 策略组合 $s^*:\ \mathcal{P} \to \{R_{toll}, R_{pool}, R_o\}$ 是 ***Wardrop*** 均衡，当且仅当

$$
s^*(\beta, \gamma) = R_i \ \Rightarrow\ c_\gamma^\beta(R_i; \sigma^*) = \min_{j \in \{toll, pool, o\}} c_\gamma^\beta(R_j; \sigma^*),
$$

其中

$$
D\sigma_i^* = \iint_{\{(\beta,\gamma): s^*(\beta,\gamma) = R_i\}} \frac{1}{\bar{\beta}\bar{\gamma}} d\beta d\gamma. \tag{1}
$$

3 均衡刻画

本节将刻画该博弈的Wardrop均衡。为便于表述，对于任意 σ，我们定义

$$
C_\delta(\sigma; \rho) := C_o(\sigma_o D; 1-\rho) - C_h((\sigma_{toll} + \frac{\sigma_{pool}}{A}) D; \rho),
$$

当 σ 的含义明确时，简写为 C_δ 。这表示原车道的延迟与给定σ时HOT车道延迟之间的差值。

在下一个引理中，我们刻画主体的最佳响应策略。

[1]这一假设得到了基于排队的模型 [19, 20] 和实证验证[21]的支持。

引理 1. 对于给定的 σ，定义 $\Lambda_i(\sigma) \subseteq \mathcal{P}$ 为对 σ 的最佳响应为 R_i 的主体所组成的子集，其中 $i \in \{toll, pool, o\}$。则，

$$\Lambda_{toll}(\sigma) = \{(\beta,\gamma) : \beta C_\delta(\sigma;\rho) \geq \tau,\ \gamma \geq \tau\}$$
$$\Lambda_{pool}(\sigma) = \{(\beta,\gamma) : \beta C_\delta(\sigma;\rho) \geq \gamma,\ \gamma \leq \tau\}$$
$$\Lambda_{o}(\sigma) = \{(\beta,\gamma) : \beta C_\delta(\sigma;\rho) \leq \min\{\tau,\gamma\}\}$$

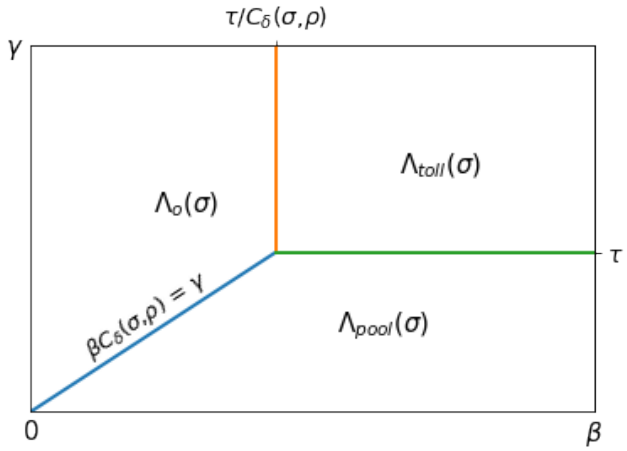


图1：最佳响应策略的刻画

图1展示了结果 σ下的 $\Lambda_{toll}(\sigma)$ $\Lambda_{pool}(\sigma)$ $\Lambda_o(\sigma)$。当且仅当主体的类型（β, γ）位于图1中的区域 Λ_i 时，该主体$j \in \Lambda_i(\sigma)$。请注意，如果主体的时间价值和拼车效用损失都相对较高，则该主体更偏好HOT车道而非普通车道（因为其时间价值较高），并且更偏好支付通行费 τ 而非拼车（因为其拼车效用损失较高）——因此，其最佳响应是选择 R_{toll}。类似地，如果主体的时间价值较高，但拼车效用损失至多为 τ，则其最佳响应是通过拼车使用HOT车道（即选择 R_{pool}）。如果主体的时间价值相对较低，则没有动机支付 τ 来使用HOT车道；如果其拼车效用损失较低，则选择 R_{pool}，否则选择普通车道（即选择 R_o）。最后，由于主体的偏好参数服从均匀分布，σ^*_{toll}，σ^*_{pool}、σ^*_o分别等于 Λ_{toll}，Λ_{pool}，和 Λ_o的大小。

由于延迟函数 C_o 和 C_h 满足假设 (A1) 和 (A2)，在均衡状态下两条车道都会被使用，且部分（如果不是全部）高乘员收费车道使用者会拼车。

引理 2. $\sigma^*_{pool} > 0$，$\sigma^*_o > 0$。

证明。 我们证明，所有出行者都只使用同一条车道的策略组合并非均衡。如果所有交通流都只被分配到普通车道，那么拼车效用损失较低的主体（例如 $\gamma = 0$）就有动机转向 HOT车道，因为根据 (A1) 和 (A2)，后者的延迟严格更低（即 $\beta C_o(1;\, 1-\rho) > \beta C_o(0;\, 1-\rho) = \beta C_h(0;\rho)$）。交通流只被分配到HOT车道的情形与此对称；由于普通车道的延迟严格更低（$\beta C_h(1;\rho) + \gamma > C_h(0;\, \rho) = \beta C_o(0;\, 1-\rho)$），任何主体都有动机转向普通车道。因此，均衡必然会将交通流分配到两条车道上，即 $\sigma_o^* > 0$ 和 $\sigma_{toll}^* + \sigma_{pool}^* > 0$。

还需证明 $\sigma_{pool}^* > 0$。为导出矛盾，假设 $\sigma_{pool}^* = 0$。对于任何拼车效用损失小于 τ 的参与者， R_{toll} 被 R_{pool} 严格支配，因此每个此类参与者都必须选择 R_o。然而，要使 R_o 成为最佳响应，对于所有 $\gamma \in (0,\ \tau)$，必须有 $\beta C_0(\sigma_o^*;\, 1-\rho) \le \beta C_h(\sigma_{toll}^*;\, \rho) + \gamma$。因此，必定存在某个 $\gamma^\dagger$，使得对于所有 $\beta \in [0, \bar{\beta}]$, $\beta C_0(\sigma_o^*;\, 1-\rho) < \beta C_h(\sigma_{toll}^*;\, \rho) + \gamma^\dagger \le \beta C_h(\sigma_{toll}^*;\, \rho) + \tau$；也就是说，任何选择 R_{toll} 的参与者都有动机转而选择 R_o。因此， $\sigma_{toll}^* = 0$。这与上述断言 $\sigma_{toll}^* + \sigma_{pool}^* > 0$ 相矛盾。 □

引理2保证，在均衡状态下，两条车道都会被使用，并且满足以下条件之一：（A）所有高乘员收费车道使用者都满足最低乘员要求；或（B）部分（但并非全部）高占用收费车道使用者支付通行费 τ。这表明存在以下两种性质截然不同的均衡状态。

1. 情形*A*：收费价格 τ 相对较高。所有选择使用HOT车道的主体都会拼车。

$$\left\{(\rho,\tau) : \tau > \min\left\{\bar{\gamma},\ \bar{\beta} C_\delta\left(0, \frac{\tau}{2\bar{\gamma}}, 1 - \frac{\tau}{2\bar{\gamma}}, \rho\right)\right\}\right\}.$$

2. 情形 B：收费价格 τ 相对较低。部分主体支付 τ 以使用HOT车道。

$$\left\{(\rho,\tau) : \tau < \min\left\{\bar{\gamma},\ \bar{\beta} C_\delta\left(0, \frac{\tau}{2\bar{\gamma}}, 1 - \frac{\tau}{2\bar{\gamma}}, \rho\right)\right\}\right\}.$$

定理1. 每种制度下的*Wardrop*均衡都是唯一的，可写为：制度 A： $\sigma_{toll}^* = 0$。

---

1. 若 $\bar{\gamma} > \bar{\beta} C_\delta(0, \frac{\tau}{2\bar{\gamma}}, 1 - \frac{\tau}{2\bar{\gamma}};\, \rho)$，则 σ_{pool}^* 的解为

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}} C_\delta(0, \sigma_{pool}^*, 1 - \sigma_{pool}^*; \rho) = \sigma_{pool}^*, \tag{2}$$

以及 $\sigma_o^* = 1 - \sigma_{pool}^*$。

2. 如果 $\gamma < \beta C_\delta(0, \frac{\tau}{2\gamma}, 1-\frac{\tau}{2\gamma}; \rho)$，则 σ_o^* 的解为

$$\frac{1}{2}\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\beta}}\frac{1}{C_\delta(0, 1-\sigma_o^*, \sigma_o^*; \rho)} = \sigma_o^*, \tag{3}$$

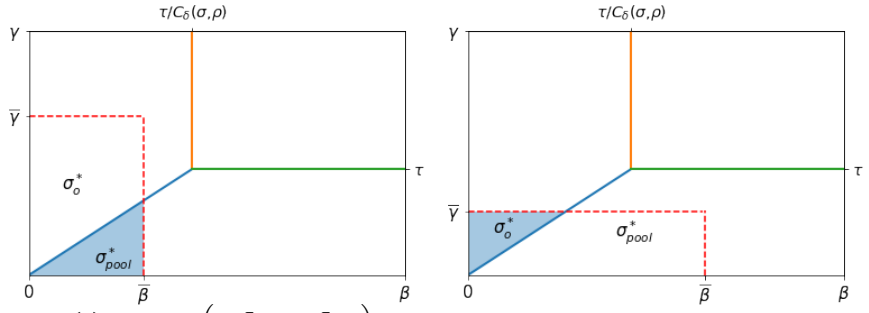
以及 $\sigma_{pool}^* = 1 - \sigma_o^*$。

情形 B：通过求解 σ_{toll}^*

$$\left(1 - \frac{\tau}{\overline{\beta} C_\delta\left(\sigma_{toll}^*, \sigma_{pool}^*, \sigma_o^*; \rho\right)}\right) \cdot \left(\frac{\overline{\gamma} - \tau}{\overline{\gamma}}\right) = \sigma_{toll}^*, \tag{4}$$

and

$$\sigma_{pool}^* = \frac{\tau}{2}\left(\frac{1}{\overline{\gamma} - \tau}\sigma_{toll}^* + \frac{1}{\overline{\gamma}}\right), \qquad \sigma_o^* = 1 - (\sigma_{toll}^* + \sigma_{pool}^*).$$



(a) $\tau > \underline{\beta} C_\delta\left(0, \frac{\tau}{2\overline{\gamma}}, 1 - \frac{\tau}{2\overline{\gamma}}, \rho\right)$　　(b) $\tau > \overline{\gamma}$

图2：情形A下的均衡结果

在情形 A中，HOT车道上没有单人乘坐车辆，即所有主体都选择 R_{pool} 或 R_o。在该制度下，要么 β 足够小，使得对任何主体而言，拼车的成本都低于支付HOT价格的成本（如图2a所示的A1情形）；要么 γ 足够小，使得对任何主体而言，普通车道的成本都低于支付HOT价格的成本（如图2b所示的A2情形）。

在 $A1$的情况下， σ_{pool}^* 由(2)求得，因为 σ_{pool}^* 必须等于图2a中阴影三角形面积与整体面积的比值；阴影三角形代表在整体主体集合（由点状矩形表示）中选择拼车的主体集合。其余主体选择普通车道。同样，在 $A2$的情况下， σ_o^* 由(3)求得，因为 σ_o^* 必须等于图2b中阴影三角形面积与整个点状矩形面积的比值；阴影三角形代表选择普通车道的主体集合。其余主体选择拼车。

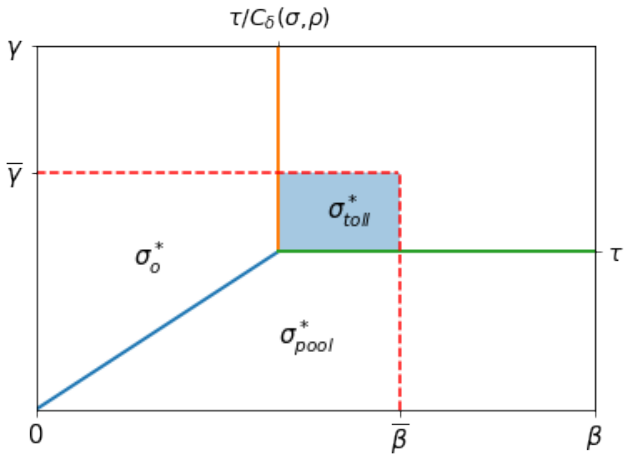


图3：B区间中的均衡结果

在B区间，参与者选择全部三种行动。如图3所示，整体集合（红色点状区域）与全部三个最佳响应区域均有重叠。公式（4）表示阴影矩形区域大小与整体集合大小之比，即支付通行费以使用HOT车道的主体比例，也就是 σ_{toll}的值。阴影正方形的底边为$\beta - \tau/C_\delta(\sigma^*;\ \rho)$，高为 $\gamma - \tau$。

接下来，我们分析随着分配给HOT车道 ρ的容量比例变化，Wardrop均衡和各区间的大小如何变化。

定理2。 考虑设计参数为(ρ, τ)的*Wardrop*均衡。设$(\sigma^*_{toll}, \sigma^*_{pool}, \sigma^*_o)$ 为均衡时对应于各策略的需求量。对于任意固定的 τ，随着 ρ增加，

1. 普通车道与*HOT*车道$C_\delta(\sigma^*, \rho)$ 之间的延迟差增大。 *2.* 情形*A*的大小不增，*B*区间的大小不减。 *3.* σ^*_{toll} 不减， σ^*_{pool} 减小，且 σ^*_o 增大。

定理2符合直觉——随着我们提高HOT车道容量，更多人会受到激励而使用HOT车道，受到激励而使用原车道的人则会减少。因此，两条车道的延误时间差会缩小。

4 加利福尼亚州 I-880 上 HOT 的最优设计

我们使用从880号州际公路（I-880）北向路段（图4）Dixon Landing路至Lewelling大道之间收集的数据，对均衡分析进行校准。该路段的一部分最低乘员要求为2，其余部分的最低乘员要求为3。在本案例研究中，我们取 $A = 2.5$。

我们采用公共道路局（BPR）函数来刻画每位驾驶员的平均出行成本（自由流行程时间加拥堵时间） [22]。给定高承载车辆容量 ρ 和一个结果 $\sigma = (\sigma_{toll}, \sigma_{pool}, \sigma_o)$，延迟函数由 BPR函数给出如下：

$$C_o(\sigma_o, \rho) = T_f \cdot \left[1 + \left(a \cdot \frac{D \cdot \sigma_o}{V \cdot (1-\rho)}\right)^b\right]$$

$$C_h(\sigma_{toll}, \sigma_{pool}, \rho) = T_f \cdot \left[1 + \left(a \cdot \frac{D \cdot (\sigma_{toll} + \sigma_{pool}/A)}{V \cdot \rho}\right)^b\right]$$

其中，a 和 b 是 BPR系数，T_f 是自由流行程时间，V 是容量。我们根据 [23, 21] 将 $a = 0.15$ 和 $b = 4.0$ 设定为相应数值。根据加利福尼亚州交通运输部收集的交通流量数据[2]，平均交通需求为每分钟 $D = 115$ 辆车。由于该高速公路路段有四条车道，我们根据 [22] 将容量估计为每分钟 $V = 140$ 辆车。我们使用谷歌地图将自由流行驶时间估计为 $T_f = 22$ 分钟。

我们将最大拼车效用损失设定为 $\gamma =$ \$8。这一数值通过计算 Uber 单人乘车的平均行程价格与拼车行程平均价格之间的差值得出。根据 [24] 中基于收入的湾区时间价值校准分析，我们将最大时间价值估计为 $\beta =$\$1.5/ 分钟。

我们通过所有出行者的平均出行时间来衡量总拥堵：

$$T(\tau, \rho) := (\sigma_{toll} + \sigma_{pool}) \cdot C_h(\sigma_{toll}, \sigma_{pool}, \rho) + \sigma_o \cdot C_o(\sigma_o, \rho).$$

此外，我们可以计算总收费收入：

$$R(\tau, \rho) := D \cdot \sigma_{toll} \cdot \tau.$$

我们对收费价格 τ 和容量比例ρ的可行区域进行离散化。具体而言，由于高速公路有四条车道，我们选择集合 $\rho \in \{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$。此外，我们将收费价格设定在 0.5 至 10 美元之间，并按 0.5 美元的间隔离散化。

对于每一组（τ，ρ），我们计算均衡策略、平均驾驶时间 $T(\tau, \rho)$ 和总收费收入 $R(\tau, \rho)$。在图5中，我们绘制了（T，R）元组的帕累托前沿（以黑色虚线标示），展示了拥堵最小化与收费收入之间的权衡。

[2] https://pems.dot.ca.gov/



图4：880号州际公路（I-880）高速公路（红色圈出）

当局所面临的。此外，对于每个可行的容量分配 ρ，我们绘制了 $(T,\ R)$ 的帕累托前沿。我们可以看到，随着高乘载率车辆车道数量的增加，通行费收入也随之增加，但代价是所有驾驶员的平均出行时间增加。

5 结论

本文研究了一个博弈论模型，用于分析配备HOT车道的高速公路上具有异质时间价值和拼车负效用的出行者的车道选择。我们刻画了均衡策略，并确定了两种性质不同的均衡状态，其取决于高乘载收费车道容量和收费价格。我们利用加利福尼亚州880号州际公路的数据对模型进行了校准，并确定了最优容量分配和收费设计。未来的研究方向包括将分析扩展到偏好参数的非均匀分布，并纳入具有多个起点和终点的交通流。

参考文献

[1] Dov Monderer 和 LloydSShapley。《势博弈》。《博弈与经济行为》，14(1):124–143，1996年。

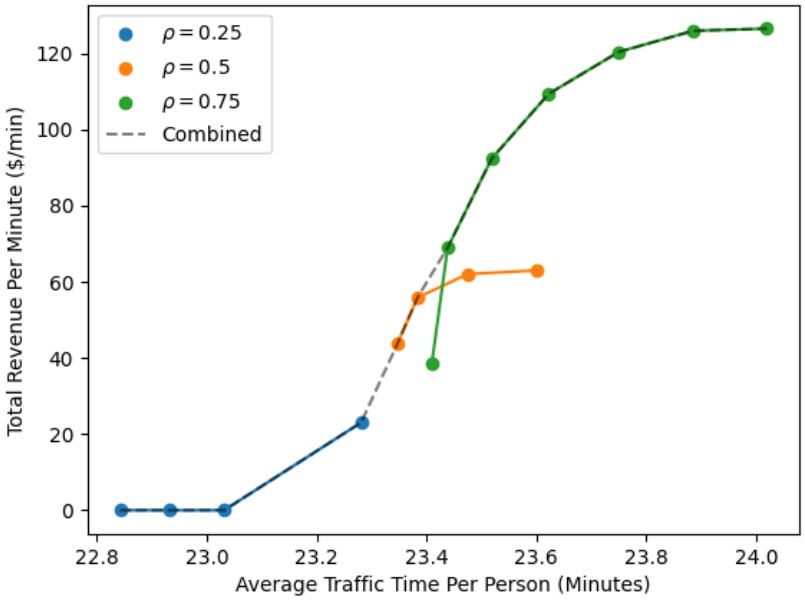


图5： $T(\tau,\ \rho)$ 和 $R(\tau,\ \rho)$ 的帕累托前沿。

[2] Robert W Rosenthal。《具有纯策略纳什均衡的一类博弈》。《国际博弈论杂志》，2:65–67，1973年。[3] William H Sandholm。连续玩家集上的势博弈。《经济理论杂志》，97(1):81–108，2001年。[4] Tim Roughgarden 和 ´Eva Tardos。非原子拥堵博弈中均衡无效率的界。《博弈与经济行为》，47(2):389–403，2004年。[5] Jos´e R Correa、Andreas S Schulz 和 Nicol´as E Stier-Moses。容量受限网络中的自私路由。《运筹学数学》，29(4):961–976，2004年。[6] Tim Roughgarden。《自私路由与无政府代价》。麻省理工学院出版社，2005年。[7] Igal Milchtaich。具有玩家特定收益函数的拥堵博弈。《博弈与经济行为》，13(1):111–124，1996年。[8] Marios Mavronicolas、Igal Milchtaich、Burkhard Monien 和 Karsten Tie-mann。具有玩家特定常数的拥堵博弈。载于《*2007*年计算机科学数学基础：第*32*届国际研讨会，*MFCS 2007*，捷克共和国捷斯基`克鲁姆洛夫，*2007*年*8*月*26*日至*31*日，会议论文集*32*，第633–644页。施普林格，2007年。[9] Giacomo Como 和 Rosario Maggistro。多尺度交通网络的分布式动态定价。*IEEE*自动控制汇刊，67(4):1625–1638，2021年。[10] Jorge I Poveda、Philip N Brown、Jason R Marden 和 Andrew R Teel。信息有限的社会系统中的一类分布式自适应定价机制。载于*2017*年*IEEE*第*56*届决策与控制年会（*CDC*），第1490–1495页。IEEE，2017年。[11] Dario Paccagnan、Rahul Chandan、Bryce L Ferguson 和 Jason R Marden。激励共享基础设施的高效使用：拥堵博弈中的最优收费。*arXiv*预印本 *arXiv:1911.09806*，2019年。[12] Chinmay Maheshwari、Kshitij Kulkarni、Manxi Wu 和 S Shankar Sastry。通过动态收费诱导社会最优交通流量。载于*2022*年美国控制会议（*ACC*），第4601–4607页。IEEE，2022年。[13] Lisa Fleischer、Kamal Jain 和 Mohammad Mahdian。多商品网络和广义拥堵博弈中异质自私用户的收费。载于第*45*届*IEEE*计算机科学基础年会，第277–285页。IEEE，2004年。[14] Richard Cole、Yevgeniy Dodis 和 Tim Roughgarden。针对异质自私用户的网络边定价。载于第三十五届*ACM*计算理论研讨会会议论文集，第521–530页，2003年。

[15] Daron Acemoglu 和 Asuman Ozdaglar。从服务提供商视角看流量控制、路由与性能。*LIDS*报告，74，2004年。[16] Jos´e Correa、Crist´obal Guzm´an、Thanasis Lianeas、Evdokia Nikolova 和 Marc Schr¨oder。网络定价：如何在战略性链路运营商下诱导最优流量。载于*2018*年*ACM*经济学与计算会议论文集，第375–392页，2018年。[17] Hai Yang 和 Hai-Jun Huang。具有高乘载率车辆车道的多车道公路中的拼车与拥堵定价。《交通研究*A*辑：政策与实践》，33(2):139–155，1999年。[18] Hideo Konishi 和 Se-il Mun。拼车与拥堵定价：HOV车道和HOT车道。《区域科学与城市经济学》，40(4):173–186，2010年。[19] Jing Lu 和 Carolina Osorio。一种适用于大规模网络分析的概率交通理论网络加载模型。《交通科学》，52(6):1509–1530，2018年。[20] Jing Lu 和 Carolina Osorio。关于交通网络中跨节点流量传输的分析性概率建模。《交通研究记录》，2676(12):209–225，2022年。[21]美国国家研究委员会（美国）。公路研究委员会。公路通行能力委员会。《公路通行能力手册：研究成果的实际应用》。美国商务部、公共道路局，1950年。[22] Serdar C¸olak、Antonio Lima 和 Marta C Gonz´alez。理解城市地区的拥堵出行。《自然-通信》，7(1):10793，2016年。[23] USBoP Roads。《适用于大型高速计算机的交通分配手册》。美国商务部、公共道路局、规划办公室、城市规划处，1964年。[24] Chinmay Maheshwari、Druv Pai、Kshitij Kulkarni、Jiarui Yang、Manxi Wu 和 Shankar Sastry。重新设计拥堵定价以提高效率和公平性：旧金山湾区的实证研究。2023年。