CALT-TH-2023-008

相干中微子-原子核散射的库仑修正

Ryan Plestid[1]

[1]*Walter Burke* *e* 加州理工学院理论物理研究所，帕萨迪纳，*CA 91125*

本文研究了相干弹性中微子-原子核散射（CEvNS）的次级 O（$Z^2\alpha^3$）修正。根据幂次计数，这些修正不可忽略，因为具有较大相干截面的原子核具有可观的原子核电荷，例如 $Z\alpha \sim 0.4$。我们发现，这些修正远小于 $Z\alpha$ 所预示的朴素幂次计数结果，而且库仑修正不会显著改变标准模型对CEvNS的预言。我们还讨论了与早期关于介子原子和μ子原子的文献之间的相似之处。

arXiv:2304.09241v1 [hep-ph] 18 Apr 2023

I. 引言

相干弹性中微子-原子核散射 [1–3](CEvNS)为研究弱中性流提供了一个清晰的探针。它是限制新物理中亲中微子模型的主要工具 [4–11], ，此外还能为了解原子核结构提供有价值的信息 [12–16]。最近，CEvNS首次得到测量 [17]，目前已有数十个实验合作组计划在不久的将来测量CEvNS信号[16]。尤其是，COHERENT合作组期望达到百分之一以下的精度（例如参见 [18]的图19）。对于采用低阈值探测器的反应堆中微子实验，也有人提出了类似的百分比级测量精度预期 [19]。

受近期对CEvNS截面精密测量的关注所推动， [20] 的作者在 $O(\alpha)$研究了CEvNS的辐射修正（另可参见沿此思路开展的早期工作 [21, 22] ）。计算是在低能有效场论（EFT）中进行的，其中所有较大的“重整化群对数”均已重求和并吸收到威尔逊系数中 [23]。考虑到强子、原子核及微扰不确定性， [20] 的作者得出结论：在标准模型（SM）中，CEvNS确实是一种精密可观测量。本文将考察传递与原子核之间光子交换的带电轻子圈的库仑修正；相关图示于图1。这是此前尚未考虑的唯一相关辐射修正；还存在其他修正，但由于它们受 α 的更高次幂抑制，且没有相干增强，因而影响较小。从形式上看，图1表示对 [20] 中计算结果的相对 $O(Z^2\alpha^2)$修正（而这些结果本身为$O(Z\alpha)$）。对于重原子核，这一相对修正可能相当显著。不过，正如下文将要讨论的，实际修正远小于朴素幂次计数所预示的大小，因此在实际应用中可以放心忽略。

本文其余部分安排如下：第二节讨论库仑修正如何影响 CEvNS，并回顾静电场中真空极化的已有研究。接着，在第三节中，我借鉴缪原子领域的既有研究，计算点状极限下轻子圈对 CEvNS 的库仑修正；结果发现，这种影响很小。第四节讨论有限尺寸修正和强子

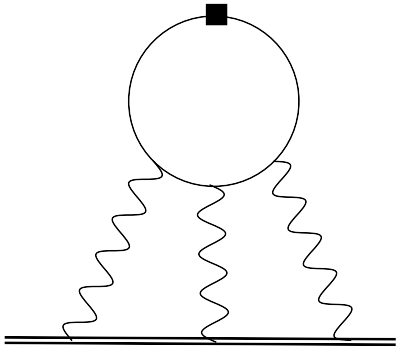

图1. 本文所考虑的对 CEvNS 有贡献的图。方框表示四费米接触算符（未绘出中微子），双线表示原子核。在无限大质量极限下，原子核表现为电荷为 Z 的静态势。环表示有效理论中的任意动力学带电粒子，例如 μ子、电子或 π介子。实际上，只有电子在现象学上具有相关性。

真空极化，并指出这些效应虽然在理论上颇有趣，但与百分比精度的截面测定无关。最后，我将在第五节总结全文、得出结论，并探讨 CEvNS 作为精密标准模型可观测量的地位。

II. 库仑修正

从辐射修正的角度来看，CEvNS 是一个尤为简单的系统，因为外线上没有带电粒子。然而，原子核带有宏观电荷，但它们与实光子的耦合受到质量抑制[1] ，且在 $1/M$ 的领先阶上，原子核唯一的影响是通过交换库仑光子产生的。短程辐射修正可以通过标准有效场论技术纳入考虑。因而唯一仍需考虑的贡献是轻粒子圈图。

[1]最容易通过使用重粒子拉格朗日量并在库仑规范下进行处理来说明这一点。

接下来我们讨论 $O(Z^n\alpha^{n+1})$ 处的辐射修正。这一限制使我们能够将振幅表示为

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \frac{\alpha}{\pi}\sum_n (Z\alpha)^{2n}\mathcal{M}_1^{(n)} \ , \tag{1}$$

根据Furry定理 [24]， $Z\alpha$ 的偶次幂才会出现。树级振幅 $\mathcal{M}_0$ 与弱核形状因子 $F_W(Q^2)$成正比，而 $\mathcal{M}_1^{(n)}$ 中的所有 $O(\alpha)$修正仅取决于电荷形状因子$F_{\rm ch}(Q^2)$。

在单圈阶，振幅会以一种简单的方式发生修正，而这种修正仅取决于QED真空极化 [20]

$$\mathcal{M}_1^{(0)} = \frac{\alpha}{\pi}F_{\rm ch}(Q^2)(\delta^{\nu_\ell} + \delta^{\rm QCD}) \ , \tag{2}$$

其中， δ^{ν_ℓ} 是各真空极化 $\Pi(Q^2, m_\ell)$之和，并按味依赖威尔逊系数加权。修正 $\delta^{\rm QCD}$ 同样与强子真空极化以及电荷同位旋关联函数 [20, 25, 26]有关。

核库仑场产生的第一个非平凡效应在三圈阶出现，如图1所示。下文将考虑点状极限，$F_{\rm ch}(Q^2) \to 1$，在该极限下已有解析结果 [27]

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = \frac{Z}{Q_w}\mathcal{M}_0 \sum c_V^{(f)} \Pi_{\rm WK}(Q^2, m_f) \ , \tag{3}$$

其中， Q_w 是弱核电荷， $c_V^{(f)}$ 是对 [20], 的式(2.4)和式(2.5)中出现的矢量威尔逊系数的简写，下标“WK”表示Wichmann-Kroll [27]。Wichmann-Kroll贡献通常在坐标空间中进行研究，并可表示为对类Yukawa贡献 [28]进行加权积分。通过傅里叶变换到动量空间，可以得到真空极化的类似表示

$$\Pi_{\rm WK}(Q^2, m_f) = \frac{1}{2}\int_0^\infty {\rm d}\zeta \frac{Q^2}{Q^2 + 4\zeta^2 m_f^2}\frac{1}{\zeta^4} \left[F(\zeta) - \frac{\pi^2}{12}\sqrt{\zeta^2-1}\Theta(\zeta-1)\right] . \tag{4}$$

$F(\zeta)$具有相对冗长的积分表示，可在文献中找到（例如参见 [28]第99–100页）。[2]

在无质量费米子的极限下，或者等价地，当$Q^2 \gg m_\ell^2$ 时，关于 $Z\alpha$ [29, 30]的结果已知到所有阶。对于 $QR \lesssim 1$ ，在此极限下的结构依赖修正也已得到研究 [31]。接下来，我们将这些广为人知的结果应用于CEvNS，并量化闭合轻子圈对这一过程产生的高阶库仑修正的大小。

[2] 值得注意的是，当 ζ 较小时， $F(\zeta) \sim O(\zeta^7)$，因此式（4）是一个定义良好的收敛积分。

表 I. 点状极限下 Q^2 =(1 兆电子伏特)^2, (10 兆电子伏特)^2, 和 Q^2 = (30 兆电子伏特)^2 的 CEvNS 味不对称性。结果在超过数兆电子伏特后基本与 Q无关。在所有情况下，库仑修正都非常小（即使 $Z\alpha$ 并非如此）。 $\mu-\tau$不对称性完全可以忽略。

Q	不对称性	$\mathcal{A}^{(0)}_{\ell\,\ell'}$,	$\mathcal{A}^{(1)}_{\ell\,\ell'}$,
1 兆电子伏特	$\ell = e \quad \ell' = \mu$	3.36	0.02
	$\ell = e \quad \ell' = \tau$	5.24	0.02
	$\ell = \mu \quad \ell' = \tau$	1.88	—
10 兆电子伏特	$\ell = e \quad \ell' = \mu$	2.12	0.03
	$\ell = e \quad \ell' = \tau$	4.00	0.03
	$\ell = \mu \quad \ell' = \tau$	1.88	—
30 兆电子伏特	$\ell = e \quad \ell' = \mu$	1.40	0.03
	$\ell = e \quad \ell' = \tau$	3.28	0.03
	$\ell = \mu \quad \ell' = \tau$	1.88	—

III. 点状极限下的结果

我们使用式（4）给出的积分表示，对Wichmann-Kroll真空极化进行了数值计算。结果表明，对CEvNS的修正很小。为简单起见，我们用 [20]中定义的轻子味不对称性来量化这一修正。将总真空极化定义为

$$\Pi = \Pi_1 + (Z\alpha)^2\Pi_{\rm WK} + \ldots , \tag{5}$$

加入 Π_1 领先阶α 贡献后，CEvNS中的味道不对称性可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\ell,\ell'} &= \frac{{\rm d}\sigma_{\nu_\ell} - {\rm d}\sigma_{\nu_{\ell'}}}{{\rm d}\sigma_{\nu_\ell}} \\ &= \frac{4\alpha}{\pi}\frac{Z}{Q_w}\left[\Pi(Q^2, m_\ell) - \Pi(Q^2, m_{\ell'})\right] .\end{aligned} \tag{6}$$

这一可观测量的优点是与方案无关，且不存在残余的尺度依赖性。Wichmann-Kroll贡献使 $\Pi(Q^2, \ m_\ell)$中的这一比值发生 $O(Z^2\alpha^2)$的偏移。我们将这种依赖关系表示为

$$\mathcal{A}_{\ell,\ell'} = \frac{4\alpha}{\pi}\frac{Z}{Q_w}\left(\mathcal{A}^{(0)}_{\ell,\ell'} + (Z\alpha)^2\mathcal{A}^{(1)}_{\ell,\ell'} + \ldots\right) \tag{7}$$

表 I 展示了这些效应在 Q^2 的三个不同取值下的数值大小。显然，三圈 $O(Z^2\alpha^3)$修正的系数远小于真空极化修正的系数。类似的结论也适用于总截面，事实上也适用于其他任何可观测量。

现在我们来讨论为什么重轻子的修正较小（μ 且 τ），相比之下，轻动力学粒子（电子）的修正则较大。所有涉及 3 个或更多光子与轻子圈相连的贡献

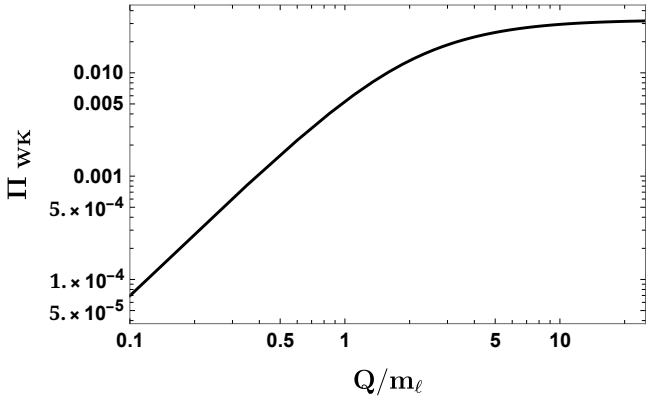

图 2。Wichmann-Kroll 真空极化随 Q/m_ℓ变化的数值计算结果。显然，库仑修正始终远小于对 $Z\alpha$ 进行朴素幂次计数所得的结果。

均为紫外收敛，[3] 并且在 $m_\ell \to \infty$ 的极限下，必须按 $1/m_\ell^2$ 解耦。这与真空极化形成对比，后者存在残余的对数依赖，对 α 的运行值进行修正。这就保证了修正受到参数因子（$Z\alpha$）$^2Q^2/m_\ell^2$ 的抑制。对于电子，$Q^2 \gg m_e^2$，因此这一论证并不适用；不过，Wichmann-Kroll 势的短距离系数很小，其值为

$$\lim_{Q\to\infty} \Pi_{\rm WK}(Q/m_\ell) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{7}{9}\right] \approx 0.03\ . \quad (8)$$

对于层级关系 $m_e \ll Q \ll 1/R$，这种抑制已被证明在 $Z\alpha$ 的所有阶数中持续存在，其中 R 为核半径；我们将在下一节讨论有限尺寸效应。对公式 (4)进行粗略考察，并注意到 $0 \le Q^2/(Q^2 + 4m_\ell^2\zeta^2) \le 1$，即可保证 $\Pi_{\rm WK}(Q^2)$ 是Q^2的单调递增函数；图 2 对此进行了明确展示。因此，既然在 $Q^2 \gg m_e^2$ 的极限下修正很小，那么对于 Q^2的所有取值，修正都很小。

IV. 额外修正

在上一节中，我们给出了点状极限下真空极化高阶修正的结果。我们重点考察了轻子贡献，但在完整的CEvNS截面中，强子圈也会产生贡献。人们可能会问，真空极化中的强子贡献和有限尺寸修正会如何改变我们的结果。在本节中，我们将论证这些效应从来都不会很大，原子核电荷分布导致的有限尺寸修正也同样如此。

从量纲分析来看，强子贡献始终很小。出于重轻子退耦的同样原因，强子也必然退耦。由于最轻的强子是 m_π，强子圈的效应始终会受到同一因子 Q^2/m_π^2的抑制。对于 CEvNS 运动学条件，该比值通常小于 0.1。π介子圈产生的库仑修正可能大于轻子贡献，但无论如何都不会“大”，因为（$Z\alpha$）$^2Q^2/m_\pi^2 \ll 1$。

迄今为止，我们的讨论都集中在点状极限。此前，人们在介子原子和μ子原子的背景下研究过有限尺寸效应，并推导出一种坐标空间中的势表示[31], ，该表示对 α（$Z\alpha$）$^{2n+1}$ 的所有阶都有效，适用于 $r \gg R$；正如预期的那样，有限尺寸效应很小。对于高于约30 兆电子伏特的中微子能量，CEvNS截面中相当大的一部分来自 $QR \sim 1$ 的区域，这是由于大-Q区域的相空间增强所致。严格来说，这些相空间区域并不适用于上文给出的点状计算，但这些计算应能为辐射修正提供合理估计。由于修正极小，我们不尝试计算三圈积分，也不尝试为扩展核电荷分布构造修正后的格林函数。除了预计修正绝不会大于点状极限下的修正之外，我们还注意到，在 $QR \sim 1$ 的区域，树级核形状因子的不确定性主导误差预算，带来几个百分点量级的不确定度（见 [20]中的表 2）。

最后，人们或许会想知道，公式（8）中的抵消是否只是偶然现象，以至于高阶项可能十分重要。 [30]的分析表明并非如此；所有高阶修正同样受到约为 $1/100$ 的因子抑制。

V. 结论与展望

在这项工作中，我们在点状原子核极限下，计算了 CEvNS 的主导库仑修正，这些修正与 Wichmann-Kroll 势直接相关。结果发现，这些修正很小。我们估算了有限尺寸修正、混合强子关联函数以及其他未明确计算的标准模型效应的影响；它们不会以实验相关的程度影响 CEvNS 截面（即其影响低于千分之一）。

从更广泛的角度来看，本研究表明，库仑修正是可控的，这是推进精密CEvNS计划的必要条件。这也补充了近期文献中的其他成果，例如对截面中非弹性不可见贡献的估算 [34], ，以及对中微子通量的百分比级精度测定 [35, 36]。通过 [20], 中讨论的混合关联函数 $\Pi_{3\gamma}$ 研究强子贡献，并降低原子核内部中子和质子分布的不确定性，进一步研究将为实现低于百分之一的CEvNS截面预测铺平道路。

[3] 这一点从表面的幂次计数中并不显而易见，但规范不变性保证了这一点 [30, 32, 33]。

可为实现低于百分之一的CEvNS截面预测铺平道路。

致谢

我谨向 Oleksandr Tomalak、Richard Hill，尤其是 Robert Szafron 致谢，感谢他们进行的有益讨论；并感谢 Robert Szafron 和 Oleksandr Tomalak 在本文完成前审阅稿件。

本文的研究工作始于美因茨理论物理研究所，感谢他们的盛情款待。本研究由中微子理论网络计划资助（项目编号 DEAC02-07CHI11359）和美国能源部（项目编号 DE-SC0020250）资助。本研究还部分获得美国能源部科学办公室高能物理办公室（项目编号 DE-SC0011632）以及沃尔特·伯克理论物理研究所的支持。

[1] Leo Stodolsky，《将原子核相干性质应用于基本粒子反应》，《物理评论》144，1145–1153（1966）。[2] Daniel Z. Freedman，《作为弱中性流探针的相干中微子-原子核散射》，《物理评论D》9，1389–1392（1974）。[3] V.B. Kopeliovich 和 L.L. Frankfurt，《中性流的同位旋与手征结构》，《JETP快报》19，145–147（1974）。[4] Patrick deNiverville、Maxim Pospelov 和 Adam Ritz，《相干中微子-原子核散射实验中的轻新物理》，《物理评论D》92，095005（2015），arXiv:1505.07805 [hep-ph]。[5] D. K. Papoulias、T. S. Kosmas 和 Y. Kuno，《利用原子核探测标准与非标准中微子物理的最新进展》，《物理学前沿》7，191（2019），arXiv:1911.00916 [hep-ph]。[6] Julien Billard、Joseph Johnston 和 Bradley J. Kavanagh，《探索新物理在相干弹性中微子-原子核散射中的前景》，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11，016（2018），arXiv:1805.01798 [hep-ph]。[7] Wolfgang Altmannshofer、Michele Tammaro 和 Jure Zupan，《非标准中微子相互作用与低能实验》，《高能物理学杂志》09，083（2019），[勘误：《高能物理学杂志》11，113（2021）], arXiv:1812.02778 [hep-ph]。[8] Mohammad Abdullah、James B. Dent、Bhaskar Dutta、Gordon L. Kane、Shu Liao 和 Louis E. Strigari，《作为通过动能混合与质量混合效应探测 Z' 的探针的相干弹性中微子-原子核散射》，《物理评论D》98，015005（2018），arXiv:1803.01224 [hep-ph]。[9] Carlos Blanco、Dan Hooper 和 Pedro Machado，《利用相干中微子散射实验约束惰性中微子对 LSND 和 MiniBooNE 异常的解释》，《物理评论D》101，075051（2020），arXiv:1901.08094 [hep-ph]。[10] Yasaman Farzan、Manfred Lindner、Werner Rodejohann 和 Xun-Jie Xu，《利用相干中微子散射探测中微子与轻标量的耦合》，《高能物理学杂志》05，066（2018），arXiv:1802.05171 [hep-ph]。[11] O. G. Miranda、D. K. Papoulias、O. Sanders、M. Tórtola 和 J. W. F. Valle，《作为轻子幺正性和轻惰性中微子探针的未来 CEvNS 实验》，《物理评论D》102，113014（2020），arXiv:2008.02759 [hep- ph]。[12] Philip S. Amanik 和 Gail C. McLaughlin，《来自中微子-原子核相干弹性散射的中子形状因子》，（2007），arXiv:0707.4191 [hep-ph]。[13]Xu-Run Huang 和 Lie-Wen Chen，《碘化铯中的中子皮与低能有效弱混合角，来自 COHERENT 数据，”《物理评论D》100, 071301 (2019), arXiv:1902.07625 [hep-ph]。[14] Pilar Coloma、Ivan Esteban、M. C. Gonzalez-Garcia 和 Javier Menendez，“通过相干弹性中微子-原子核散射确定原子核中子分布：当前结果与未来展望”，《高能物理学杂志》08, 030 2020 2006 ( ), arXiv: .08624 [hep-ph]。[15] N. Van Dessel、V. Pandey、H. Ray 和 N. Jachowicz，“相干弹性中微子-原子核散射中的核结构物理学”，(2020)，arXiv:2007.03658 [nucl-th]。[16] M. Abdullah 等，“相干弹性中微子-原子核散射：陆地与天体物理应用”，(2022)，arXiv:2203.07361 [hep-ph]。[17] D. Akimov 等（COHERENT），“相干弹性中微子-原子核散射的观测”，《科学》357, 1123 1126 2017 1708 – ( )，arXiv: .01294 [nucl-ex]。[18] D. Akimov 等，“COHERENT 实验计划”，载于 Snowmass 2021 (2022)，arXiv:2204.04575 [hep- ex]。[19] Guillermo Fernandez-Moroni、Pedro A. N. Machado、Ivan Martinez-Soler、Yuber F. Perez-Gonzalez、Dario Rodrigues 和 Salvador Rosauro-Alcaraz，“配备 Skipper 电荷耦合器件的反应堆中微子实验的物理潜力：测量弱混合角”，《高能物理学杂志》03, 186 (2021)，arXiv:2009.10741 [hep-ph].[20]Oleksandr Tomalak、Pedro Machado、Vishvas Pandey 和 Ryan Plestid，“相干弹性中微子-原子核散射中的味依赖辐射修正”，《高能物理学杂志》02, 097 (2021)，arXiv:2011.05960 [hep-ph]。[21] L. M. Sehgal，“ ν_e、 ν_μ 和 ν_τ的相干相互作用差异”，Phys. Lett. B 162, 370–372 (1985)。[22] F. J. Botella、C. S. Lim 和 W. J. Marciano，“中微子折射率的辐射修正”，《物理评论D》35, 896 (1987)。[23] Richard J. Hill 和 Oleksandr Tomalak，“中微子-电子和中微子-夸克相互作用的有效理论”，Phys. Lett. B 805, 135466 (2020)，arXiv:1911.01493 [hep-ph]。[24] W. H. Furry，“正电子理论中的对称性定理”，《物理评论》51, 125–129 (1937)。[25] F. Jegerlehner，“电弱参数偏移中的强子贡献：详细分析”，《物理学杂志C》32, 195 1986( )。[26] Oleksandr Tomalak 和 Richard J. Hill，“弹性中微子-电子散射理论”，《物理评论D》101, 033006 2020 1907 ( )，arXiv: .03379 [hep-ph]。[27] Eyvind H. Wichmann 和 Norman M. Kroll，“强库仑场中的真空极化”，《物理评论》101, 843 859 1956– ( )。

[28] J. Blomqvist，“奇异原子中的真空极化”，Nucl. Phys. B **48**, 95–103 (1972)。[29] Lowell S. Brown、Robert N. Cahn 和 Larry D. McLerran，“真空极化中核尺寸效应的 Z-alpha 全阶解析计算”，Phys. Rev. Lett. **32**, 562 (1974)。[30] Lowell S. Brown、Robert N. Cahn 和 Larry D. McLerran，“短距离处真空极化的 Z alpha 全阶解析计算”，Phys. Rev. Lett. **33**, 1591 (1974)。[31] Lowell S. Brown、Robert N. Cahn 和 Larry D. McLerran，“强库仑场中的真空极化。3. 核尺寸效应”，Phys. Rev. D **12**, 609 (1975)。

[32] Robert Karplus 和 Maurice Neuman，《光的光散射》，《物理评论D》**83**，776–784（1951）。[33] Yi Liang 和 Andrzej Czarnecki，《光子-光子散射：教程》，Can. J. Phys. **90**，11–26（2012），arXiv:1111.6126 [hep-ph]。[34] Bhaskar Dutta、Wei-Chih Huang、Jayden L. Newstead 和 Vishvas Pandey，《中微子和暗物质的非弹性核散射》，《物理评论D》**106**，113006（2022），arXiv:2206.08590 [hep-ph]。[35]Rebecca Rapp（COHERENT），《SNS中微子通量》，第二靶站基础物理学研讨会（2019），链接。[36] Oleksandr Tomalak，《μ子、π介子和K介子衰变产生的辐射（反）中微子能谱》，Phys. Lett. B **829**，137108（2022），arXiv:2112.12395 [hep-ph]。