arXiv:2304.09267v1 [math.CA] 18 Apr 2023

雅各布天梯、哈代-李特尔伍德积分几乎线性增量的存在性及新型乘法定律

扬·莫泽

Abstract. 本文证明，哈代–李特尔伍德积分存在一个具有某种最小结构的增量连续统集合。该结果意味着哈代–李特尔伍德积分具有若干新性质。

1. Introduction

1.1. 本文将为经典哈代-李特尔伍德积分的某一类增量证明一些全新类型的新结果[1]

$$J(T)=\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

为此，我们采用在论文 [7]– [10]中引入的雅各布天梯理论。具体而言，以下结论成立：对于每个充分大的 $T>0$ 以及每个固定的 $k\in\mathbb{N}$，存在一个序列

$$\{\overset{r}{T}(T)\}_{r=1}^{k}:\ T<\overset{1}{T}(T)<\overset{2}{T}(T)<\cdots<\overset{k}{T}(T) \tag{1.2}$$

以下公式

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim(1-c)\overset{r-1}{T},\ T\to\infty \tag{1.3}$$

成立，其中 c 是欧拉常数。

由于（见（1.1））

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=J(\overset{r}{T})-J(\overset{r-1}{T})=\Delta J(\overset{r-1}{T},\overset{r}{T}),\ r=1,\dots,k \tag{1.4}$$

因此，（1.3）中的积分集合表示哈代-李特尔伍德积分（1.1）相应的增量集合。

注 1. 因此，我们构造了哈代–李特尔伍德积分的增量向量函数

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ r=1,\dots,k,\ T\in(T_0,\infty), \tag{1.5}$$

Key words and phrases. 黎曼ζ函数。[1]见 [3]。

其具有正且足够大的 T_0，并满足以下性质：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\overset{r-1}{T}}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=1-c,\ r=1,\dots,k. \tag{1.6}$$

1.2. 现在，我们将介绍黎曼ζ函数理论中的一些由（1.3）推出的奇特公式。

（A）以下类型的乘法公式：

$$\begin{aligned}&\int_{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}^{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\\&\frac{1}{(1-c)^{k-1}}\prod_{r=1}^{k}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty,\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中我们使用以下记号

$$[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1=\overset{\overset{1}{\frown}}{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}. \tag{1.8}$$

（B）以下类型的加法公式：

$$\int_{T+\overset{1}{T}+\cdots+\overset{k-1}{T}}^{[T+\overset{1}{T}+\cdots+\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\sum_{r=1}^{k}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty. \tag{1.9}$$

（C）以及混合公式，例如：

$$\begin{aligned}&\int_{T+\overset{1}{T}\overset{2}{T}}^{[T+\overset{1}{T}\overset{2}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\\&\int_{T}^{\overset{1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t+\\&\frac{1}{1-c}\int_{\overset{1}{T}}^{[\overset{1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\times\int_{\overset{2}{T}}^{[\overset{2}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty.\end{aligned} \tag{1.10}$$

备注 2。公式 (1.7) 可以改写为以下形式

$$\begin{aligned}&\int\int_{\square_k}\cdots\int\prod_{r=1}^{k}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(x_{r-1}+\overset{r-1}{T})\right)\right|^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{k-1}\sim\\&\int_{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}^{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty,\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中

$$\square_k:\ 0\le x_{r-1}\le\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T},\ r=1,\dots,k,\ \square_k\subset\mathbb{R}^k. \tag{1.12}$$

注 3. 我们的公式 (1.7) 确立了集合中每个积分的非线性渐近依赖

(1.13)
$$\left\{\int_{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}^{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ \int_T^{\overset{1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\dots,\int_{\overset{k-1}{T}}^{\overset{k}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\right\}$$

关于其余元素。另一方面，我们的公式 (1.9) 在集合中各积分之间建立了线性依赖关系

(1.14)
$$\left\{\int_{T+\overset{1}{T}+\cdots+\overset{k-1}{T}}^{[T+\overset{1}{T}+\cdots+\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ \int_T^{\overset{1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\dots,\int_{\overset{k-1}{T}}^{\overset{k}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\right\}.$$

注 4. 积分区间段在 (1.7) 中的主要距离为：

(1.15)
$$\begin{aligned}&\rho_k\{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T},[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1];[\overset{k-1}{T},\overset{k}{T}]\}=\\&T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}-\overset{k}{T}>T^k-(1+\epsilon)T>0.9\times T^k.\end{aligned}$$

将 $0<\epsilon$ 取为充分小的值，与 (3.3) 比较。因此，当 k 很大时，它们也很大。例如

(1.16)
$$\rho_{257}>0.9\times T^{257}.$$

1.3. 此外，我们还得到一个非线性公式，该公式通过增量 (1.3) 和 (1.4) 生成相应的哈代–李特尔伍德积分。具体而言，以下等式成立：

(1.17)
$$\begin{aligned}&\int_0^{\overset{r-1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\\&\frac{1}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\times\ln\left\{\frac{e^{\Lambda_1}}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\right\},\\&r=1,\dots,k,\ T\to\infty,\end{aligned}$$

其中

(1.18)
$$\Lambda_1=2c-1-\ln 2\pi.$$

注 5. 我们的公式 (1.17) 表达了以下性质：较小的积分会生成较大的积分。

注 6. 因此，我们的结果 (1.3) 及其标记为 (1.7) – (1.11) 和 (1.17) 的推论[2] 揭示了与距离上的哈代–李特尔伍德积分 (1.1) 相关的一种新现象

$$(1-c)\pi(T),$$

其中，通常情况下，符号 $\pi(T)$ 表示素数计数函数。

[2]此外还有其他一些现象，我们将在后文介绍。

2. Brief history of the Hardy - Littlewood integral (1918)

2.1. 哈代–李特尔伍德积分源于渐近公式

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \sim T\ln T,\ T\to\infty, \tag{2.1}$$

参见 [3], 第 122、151–156 页。李特尔伍德公式 [5] （$0<\delta$ 足够小）：

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = T\ln T-(1+\ln 2\pi)T+\mathcal{O}(T^{\frac{3}{4}+\delta}) \tag{2.2}$$

这是下一步。最后，英厄姆证明了以下公式 [6]:

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = T\ln T-(1+\ln 2\pi-2c)T+\mathcal{O}(T^{\frac{1}{2}}\ln T), \tag{2.3}$$

其中包含完整的主项集合。

注 7. 我们看到，英厄姆对公式 (2.3) 的首项贡献，是加入了前一个李特尔伍德公式 (2.2) 中所缺少的项 $-2cT$ 。英厄姆的第二项贡献是对李特尔伍德公式中误差项的一项相当重要的改进，改进幅度为 33.3%。

备注 8。我们还要提醒一下误差项的其他一些重要改进

$$\mathcal{O}(T^{\frac{5}{12}+\delta}),\ 16.6\%;\ \mathcal{O}(T^{\frac{1}{3}+\delta}),\ 20\% \tag{2.4}$$

在式 (2.3) 中，这些改进分别归功于 Titschmarsh [11] 和巴拉苏布拉马尼安 [1], 。

我们可以将先前的结果纳入以下表述。

公式1。

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = T\ln T-(1+\ln 2\pi-2c)T+R(T). \tag{2.5}$$

我们将把式 (2.5) 称为带有误差项$R(T)$的哈代–李特尔伍德–英厄姆公式。

2.2. 此外，让我们提醒一下基本的 Good 的 Ω 定理， [2]:

$$R(T)=\Omega(T^{\frac{1}{4}}),\ T\to\infty. \tag{2.6}$$

备注9. 可以写出

$$R(T)=\mathcal{O}(T^{a+\delta}),\ \frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{3}, \tag{2.7}$$

作为误差项。在这种形式下， a 表示估计式 (2.7) 成立时的最小有效指数， $a=\frac{1}{4}$ 表示 Good 的 Ω 定理，而 $a=\frac{1}{3}$ 表示主要的 Balasubramanian 指数。

注释 10。使用指数 $_1\ _3$ 就完全足够，尽管还有等于 $_{27}\ _{82}$的第二个 Balasubramanian 指数，这提高了 1.18%，见 [1]。

3. Main result as the next step in the evolution of the Hardy - Littlewood formula (1918)

3.1. 我们采用以下出自我们论文 [7] – [10] 的概念:

(a) 雅各布天梯 $\varphi_1(T)$, (b) 雅各布天梯
的正向迭代:

$$\varphi_1^0(T)=T,\ \varphi_1^1(T)=\varphi_1(T),\ \varphi_1^2(T)=\varphi_1(\varphi_1(T)),\ \dots,$$
$$\varphi_1^r(T)=\varphi_1(\varphi_1^{r-1}(T)),\ r=1,\dots,k,$$

(c) 雅各布天梯的反向迭代（借助反函数 $\varphi_1^{-1}(T)$）：

$$\begin{aligned}&\varphi_1^{-1}(T)=\overset{1}{T},\ \varphi_1^{-2}(T)=\varphi_1^{-1}(\overset{1}{T})=\overset{2}{T},\dots,\\&\varphi_1^{-r}(T)=\varphi_1^{-1}(\overset{r-1}{T})=\overset{r}{T},\ r=1,\dots,k,\end{aligned}\tag{3.1}$$

也就是说，例如,

$$\varphi_1(\overset{r}{T})=\overset{r-1}{T}\tag{3.2}$$

对于每个固定的 $k\in\mathbb{N}$ 以及每个充分大的 $T>0$。

接下来，我们还使用以下性质：[3]

$$\begin{aligned}&\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}\sim(1-c)\pi(\overset{r}{T}),\ \pi(\overset{r}{T})\sim\frac{\overset{r}{T}}{\ln\overset{r}{T}},\ r=1,\dots,k,\\&\overset{0}{T}=T<\overset{1}{T}(T)<\overset{2}{T}(T)<\dots<\overset{k}{T}(T),\\&T\sim\overset{1}{T}\sim\overset{2}{T}\sim\dots\sim\overset{k}{T},\ T\to\infty.\end{aligned}\tag{3.3}$$

备注 11。这些点的渐近行为

$$\{T,\overset{1}{T},\dots,\overset{k}{T}\}$$

如下：当 $T\to\infty$ 时，这些点彼此无限远离，并且整体都趋于无穷远。因此，在 $T\to\infty$ 处，这些点的集合表现为一维弗里德曼-哈勃膨胀宇宙。

3.2. 这里我们表述主要结果。

定理 1。对于每个固定的 $k\in\mathbb{N}$ 以及每个充分大的 $T>0$，我们有:

$$\begin{aligned}&\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=(1-c)\overset{r-1}{T}+\mathcal{O}(T^{a+\delta}),\\&1-c\approx0.42,\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中，根据（3.1）：

$$\overset{r}{T}=\overset{r}{T}(T)=\varphi_1^{-r}(T).\tag{3.5}$$

[3]请参阅 [9]

备注12。（3.4）中存在线性主项，且其关于变量（3.2）呈线性，这是黎曼 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$-函数理论中的一种新现象。例如，以下结论成立[4]:

$$\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=(1-c)\frac{r-1}{T}+\mathcal{O}(T^{\frac{1}{3}+\delta}),\ T\to\infty. \tag{3.6}$$

备注13。需要明确指出的是，我们的公式(3.4)从HLI公式(2.5)继承了其误差项的每一个真实估计。[5]

4. The first class of consequences of (3.4)

4.1。首先，由(3.4)得到以下结论。

推论1。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\frac{r-1}{T}}\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=1-c+\mathcal{O}(T^{-1+a+\delta}),\\&r=1,\dots,k,\ T\to\infty,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中（见备注9）

$$\mathcal{O}(T^{-1+a+\delta})=\mathcal{O}(T^{-\frac{2}{3}+\delta}). \tag{4.2}$$

备注14。公式(4.1)表达了某种控制黎曼$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$函数混沌振荡的渐近守恒律。

关于黎曼ζ函数在临界线上的混沌振荡，我们提醒如下:

(A) 黎曼-西格尔公式的谱形式[6]

$$\begin{aligned}&Z(t)=\sum_{n\le\tau(x)}\frac{2}{\sqrt{n}}\cos\{t\omega_n(x)+\psi(x)\}+Q(x),\\&\tau(x)=\sqrt{\frac{x}{2\pi}},\ Q(x)=\mathcal{O}(x^{-\frac{1}{4}}),\ t\in[x,x+V],\\&V=(0,x^{\frac{1}{4}}],x\in[T,\overset{k}{T}],\\&|Z(t)|=\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|,\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中的函数

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\cos\{t\omega_n(x)+\psi(x)\}$$

是黎曼振子，满足:

（a）振幅

$$\frac{2}{\sqrt{n}},$$

[4]备注9，$a=\frac{1}{3}$。[5]参见（2.7）和备注8。[6]参见 [10],第1.4小节。

（b）非相干局部相位常数

$$\psi(x) = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8},$$

(c) 非同步局部时间

$$t \in [x, x + V],$$

(d) 循环频率的局部谱

$$\{\omega_n(x)\}_{n \le \tau(x)},\ \omega_n(x) = \ln \frac{\tau(x)}{n}.$$

(B) 函数 $|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)|$ 变换后的图像

$$Z(t) \to |Z(t)| = \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|,$$

在 $Z(t)$ 的第一对 Lehmer零点对附近，例如参见 [4], 第 296、297 页。

4.2. 接下来，让我们回顾一下欧拉 c常数的定义

$$c = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\} \approx 0.5772157$$

以及，例如，同一常数的狄利克雷公式

$$c = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right\} \mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

现在我们得到这一方向上的以下结果。

推论2。

$$c = 1 - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\frac{r-1}{T}} \int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \mathrm{d}t, \tag{4.5}$$

or

$$\bar{c} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\frac{r-1}{T}} \int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \tag{4.6}$$

对于互补的欧拉常数 $\bar{c} = 1 - c$。

注15。我们的公式 (4.5) 给出了欧拉 c 的新表达式，而这一表达式由黎曼 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ 函数与雅各布天梯的反向迭代共同生成，见 (3.1)。

4.3. 由于

$$\frac{1}{\frac{r}{T} - \frac{r-1}{T}} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln T}{T}\right), \tag{4.7}$$

见 (3.3)，于是我们得到如下结果。

推论3。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=\\&(1-c)\frac{\overset{r-1}{T}}{\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}}+\mathcal{O}(T^{-1+a+\delta}\ln T),\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty.\end{aligned}\tag{4.8}$$

注16. 这里陈述另一种新现象，即存在关于变量 (3.2) 的平均值主要项的有理表达式。

4.4. 由于，见 (3.3)

$$\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T}\geq(1-o(1))(1-c)\frac{T}{\ln T},\ T\to\infty,\tag{4.9}$$

以及（见 (3.4) 和 (3.6)）

$$T^{a+\delta}<T^{\frac{1}{3}+\delta},\tag{4.10}$$

因此我们得到以下渐近公式。

推论4。

$$\begin{aligned}&\int_{\overset{r}{T}}^{\overset{r+1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t-\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=\\&(1-c)(\overset{r}{T}-\overset{r-1}{T})+\mathcal{O}(T^{a+\delta}),\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty.\end{aligned}\tag{4.11}$$

5. The second class of consequences of (3.4)

5.1. 由于（见（3.3）和（3.6））

$$\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=(1-c)\overset{r-1}{T}\left\{1+\mathcal{O}(T^{-\frac{2}{3}+\delta})\right\},\tag{5.1}$$

then

$$\prod_{r=1}^{k}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=\left\{1+\mathcal{O}(T^{-\frac{2}{3}+\delta}\right\}\times\prod_{r=1}^{k}(1-c)\overset{r-1}{T}.\tag{5.2}$$

接下来，根据（5.1），有 $r=1$

$$\int_{T}^{\overset{1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=(1-c)T\left\{1+\mathcal{O}(T^{-\frac{2}{3}+\delta})\right\}\tag{5.3}$$

并在此处提出以下内容[7]

$$\begin{aligned}&T\to T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}\sim(T)^k,\\&\overset{1}{T}\to[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1,\end{aligned}\tag{5.4}$$

[7]见（3.3）。

结果是

$$\int_{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}^{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t= \tag{5.5}$$
$$\left\{1+\mathcal{O}(T^{-\frac{2}{3}+\delta})\right\}\frac{1}{(1-c)^{k-1}}\prod_{r=1}^{k}(1-c)\overset{r-1}{T}.$$

因此，见（5.2）和（5.5），我们得到如下结果。

推论5。

(5.6)

$$\int_{T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}}^{[T\times\overset{1}{T}\times\cdots\times\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\frac{1}{(1-c)^{k-1}}\prod_{r=1}^{k}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t,\ T\to\infty.$$

注释17。我们还可以得到以下公式:

$$\int_{(T)^k}^{[(T)^k]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\sim\frac{1}{(1-c)^{k-1}}\left\{\int_{T}^{\overset{1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\right\}^k,\ T\to\infty, \tag{5.7}$$

[1]当然，其中 $T=[T]^1$。由于

$$T<\overset{1}{T}<\cdots<\overset{k-1}{T}$$

公式 (5.7) 并不能直接由 (5.6) 得出。

注释18。由于[8]

$$\int_{T+\cdots+\overset{k-1}{T}}^{[T+\cdots+\overset{k-1}{T}]^1}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=\sum_{r=1}^{k}(1-c)\overset{r-1}{T}+\mathcal{O}(T^{a+\delta}), \tag{5.8}$$

于是 (1.9) 可直接得出。将 (1.7) 和 (1.9) 中相应类型的公式结合起来，可以得到 (1.10) 类型的混合公式。

6. Nonlinear phenomena in which Hardy - Littlewood integral is generated by the increment (1.4)

哈代–李特尔伍德积分的增量当然定义为积分之差，见 (1.4)。现在，我们可以反向给出一个非线性公式，通过增量生成哈代–李特尔伍德积分。

6.1.

定理 2。以下公式

$$\int_{0}^{\overset{r-1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t= \tag{6.1}$$
$$\frac{1}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\times\left\{\frac{e^{\Lambda_1}}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t\right\}+$$
$$\mathcal{O}(T^{a+\delta}\ln T),\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty$$

[8]见 (3.4)，其中 $r=1$。

成立，其中

$$\Lambda_1 = 2c - 1 - \ln 2\pi. \tag{6.2}$$

$r-1$ r注记19. 增量（对于线段 $[\,T\,,T]$）到r相应哈代-李特尔伍德积分（在相邻线段 $[0,T]$上）的非线性变换

$$\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \xrightarrow{\mathcal{T}_1} \int_0^{\frac{r-1}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t,\ r=1,\dots,k \tag{6.3}$$

由公式（6.1）定义。

6.2.

定理3. 以下公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \\ &\frac{1}{1-c}\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \times \left\{\frac{e^{\Lambda_2}}{1-c}\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right\} + \\ &\mathcal{O}(T^{a+\delta}\ln T),\ r=1,\dots,k,\ T\to\infty\end{aligned} \tag{6.4}$$

成立，其中

$$\Lambda_2 = c - \ln 2\pi. \tag{6.5}$$

$r-1$ r注记20. 增量（对于线段 $[\,T\,,T]$）到r相应哈代-李特尔伍德积分（在相邻线段 $[0,T]$上）的非线性变换

$$\int_{\frac{r-1}{T}}^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \int_0^{\frac{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t,\ r=1,\dots,k \tag{6.6}$$

由公式（6.4）定义。变换 $\mathcal{T}_2$ 随后成为相应增量r向整个线段 $[0,T]$上的延拓。

7. Next steps in the evolution of the Hardy - Littlewood formula and proofs of Theorems

7.1. 提醒一下，我们在雅各布天梯中引入了

$$\varphi_1(T) = \frac{1}{2}\varphi(T)$$

在我们的论文 [7] 中（另见 [8]），其中函数 $\varphi(T)$是非线性积分方程的任意解（该方程也在 [7]中引入）

$$\int_0^{\mu[x(T)]} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\frac{2}{x(T)}t}\mathrm{d}t = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t,$$

其中每个可容许函数 $\mu(y)$都会生成一个解

$$y = \varphi(T;\mu) = \varphi(T);\ \mu(y) \geq 7y\ln y.$$

我们将函数 $\varphi_1(T)$ 称为雅各布天梯，因为它类似于《摩西五经》中《创世记》28:12 所记载的雅各的梦。

7.2. 接下来，在 HLI公式 (2.5) 提出 83 年后，我们证明了以下新结果，见 [7]。

公式2。除先前已知的在 $T \to \infty$处具有无界误差项的哈代-李特尔伍德积分表达式外，哈代-李特尔伍德积分还具有以下无穷多个几乎精确的表示式

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \varphi_1(T)\ln\{\varphi_1(T)\}+ (c-\ln 2\pi)\varphi_1(T)+c_0+\mathcal{O}\left(\frac{\ln T}{T}\right), \tag{7.1}$$

其中， c_0 是蒂奇马什-科伯-阿特金森公式中的一个常数。

7.3. 此外，我们还得到了以下结果，见 [7], (6.2)。

公式3。

$$T-\varphi_1(T)\sim(1-c)\pi(T);\ \pi(T)\sim\frac{T}{\ln T},\ T\to\infty, \tag{7.2}$$

其中，雅各布天梯可以从以下意义上看作函数 $(1-c)\pi(T)$ 的互补函数

$$\varphi_1(T)+(1-c)\pi(T)\sim T,\ T\to\infty. \tag{7.3}$$

注 21。我们采用了如下变换

$$\frac{T}{\ln T}\to\pi(T),\ T\to\infty \tag{7.4}$$

在第一个渐近公式 (7.2) 中，另见 [7], (6.2)。然而，根据素数定理，在渐近区域内这完全正确。同时，我们也可以为变换 (7.4) 提供一种解释。即，按照[9]

$$\zeta(s)=\exp\left\{s\int_2^\infty\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)\mathrm{d}x}\right\},\ \mathrm{Re}(s)>1$$

我们可以得到，函数 $\pi(x)$ 是生成函数 $\zeta(s)$ 的五个函数之一。

注 22。我们的公式 (7.1) 代表了超越超越的黎曼函数$|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)|^2$的哈代–李特尔伍德积分（1918年）演变过程中的又一步。

7.4。现在，我们可以向定理 1 的证明迈出最后一步。

证明。利用代换

$$T\to\overset{r-1}{T}$$

代入（2.5）中，
以及

$$T\to\overset{r}{T}$$

在（7.1）中[10] 我们得到以下两个公式。

$$\int_0^{\overset{r-1}{T}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\mathrm{d}t=\overset{r-1}{T}\ln\overset{r-1}{T}-(1+\ln 2\pi-2c)\overset{r-1}{T}+\mathcal{O}(T^{a+\delta}), \tag{7.5}$$

[9]比较 [12],第 2 页。
[10]另见（3.2）。

$$\int_0^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \overset{r-1}{T}\ln\overset{r-1}{T} - (c-\ln 2\pi)\overset{r-1}{T} + c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln T}{T}\right), \tag{7.6}$$

$r=1$、.....、k、 $T\to\infty$，依次对应。如果我们用（7.6）减去（7.5），便可立即得到（3.4）。□

注 23. 我们的公式 (3.4) 表示了雅各布天梯通过性质[11]所生成的 (7.5) 与 (7.6) 之间的一种相互作用

$$\overset{r}{T} = \varphi_1^{-r}(T),\ T\to\infty.$$

注 24. 事实上，我们在论文 [7] 中首次使用了 HLI公式与我们的公式 (7.1) 之间的相互作用。也就是说，公式 (7.2) 表示了这种相互作用的结果，见 [7], (6.2)。这个最后的公式生成了雅各布天梯的迭代集的所有必要性质，见 [9]。

7.5. 现在我们给出定理 2 的证明。

证明. 由 (7.5) 结合 (3.3) 和 (6.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\overset{r-1}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \overset{r-1}{T}\ln\left\{e^{\Lambda_1}\overset{r-1}{T}\right\} + \mathcal{O}(T^{a+\delta}) = \\ \overset{r-1}{T}\ln\left\{e^{\Lambda_1}\overset{r-1}{T}\right\}\left\{1+\mathcal{O}\left(\frac{T^{-1+a+\delta}}{\ln T}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

接下来，见 (3.4),

$$\begin{aligned}\overset{r-1}{T} = \frac{1}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t + \mathcal{O}(T^{a+\delta}) = \\ \frac{1}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \times \left\{1+\mathcal{O}(T^{-1+a+\delta})\right\},\end{aligned} \tag{7.8}$$

并由 (7.8)

$$\begin{aligned}\ln(e^{\Lambda_1}\overset{r-1}{T}) = \ln\left\{\frac{e^{\Lambda_1}}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right\} + \mathcal{O}(T^{-1+a+\delta}) = \\ \ln\left\{\frac{e^{\Lambda_1}}{1-c}\int_{\overset{r-1}{T}}^{\overset{r}{T}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right\} \times \left\{1+\mathcal{O}\left(\frac{T^{-1+a+\delta}}{\ln T}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

现在，由 (7.7)、(7.8) 和 (7.9) 可得 (6.1)。 □

注 25. 我们可以用类似的方法得到 (6.4)。

我要感谢 Michal Demetrian 在我研究雅各布天梯期间给予我的精神支持。

[11]参见 (3.2)。

References

[1] R. Balasubramanian, 《关于改进 Titschmarsh 的一个关于 $|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)|^2$ 均方的定理》, 《伦敦数学会会刊》3，540 – 576（1978）。[2] A. Good, 《黎曼ζ函数在临界线上的平方均值的一个 Ω 结果》, 《数学发明》41（3），233 – 251（1977）。[3] G.H. Hardy，J.E. Littlewood, 《对黎曼 ζ函数理论及素数分布理论的贡献》, 《数学学报》41（1），119 – 196（1918）。[4] D.H. Lehmer, 《关于黎曼ζ函数的零点》, 《数学学报》95，291 – 298（1956）。[5] J.E. Littlewood, 《黎曼 ς函数理论研究》, 《伦敦数学会会刊》（2）20（1922）。[6] A.E. Ingham, 《黎曼ζ函数理论中的均值定理》, 《伦敦数学会会刊》（2）27，273 – 300（1926）。[7] J. Moser, 《雅各布天梯与哈代-李特尔伍德积分的几乎精确渐近表示》, 《数学札记》88（2010），414-422，arXiv：0901.3937。[8] J. Moser, 《雅各布天梯、哈代-李特尔伍德积分的结构及一些新类的非线性积分方程》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》276（2011），208-221，arXiv：1103.0359。[9] J. Moser, 《雅各布天梯、反向迭代以及由黎曼$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$函数生成的新的无限集 L_2-正交系统》，arXiv：1402.2098v1。[10] J. Moser, 《雅各布天梯、 ς振荡系统之间的相互作用及初等三角恒等式的 ς类似形式》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》299，189 – 204（2017）。[11] E.C. Titschmarsh, 《关于范德科普特方法与黎曼 ζ函数》, 《数学季刊》5，195 – 210（1934）。[12] E.C. Titschmarsh, 《*The theory of the Riemann zeta-function*》，克拉伦登出版社，牛津，1951。

Department of Mathematical Analysis and Numerical Mathematics, Comenius University, Mlynska Dolina M105, 842 48 Bratislava, SLOVAKIA
Email address: jan.mozer@fmph.uniba.sk