arXiv:2304.09294v1 [math.CV] 18 Apr 2023

关于保持 q–Gevrey渐近展开的序列

S

Alberto Lastra[1] 和 S lawomir Michalik[2]

[1]阿尔卡拉大学，物理与数学系，阿尔卡拉-德埃纳雷斯，马德里，西班牙。 alberto.lastra@uah.es[2]数学与自然科学学院，理学院。华沙卡迪纳尔·斯特凡·维辛斯基大学，华沙，波兰。 s.michalik@uksw.edu.pl

摘要

本文分析形式幂级数系数的修改，以确保这种变化能够保持 q–Gevrey渐近性质，尤其是 q–Gevrey渐近展开。本文确定了这类序列的刻画，为实际应用提供了便捷工具。本文证明， q–阶乘序列能够保持 q–Gevrey渐近展开。

关键词：序列， q-Gevrey渐近性，形式幂级数，Borel算子。2020年数学学科分类：30E15、40A05、39A13、39A70、40G10

1 引言

本文研究保持 q–Gevrey渐近展开的正实数序列。在 [7], 中，作者注意到，某些 q–差分微分方程的形式解的可求和性特征，在 q–差分算子（$0 < q < 1$）简化后仍得以保持。这是因为序列 $([p]_q!)_{p\geq 0}$具有保持Gevrey渐近展开的性质。粗略地说，如果对每个形式幂级数 $f = \sum_{p\geq 0} f_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]$， $s > 0$ 以及 $d \in \mathbb{R}$，级数 f沿方向 $d \in \mathbb{R}$ s–可求和，当且仅当f（ $\mathcal{B}_m$）沿 d s–可求和，那么序列 $m =$ （m_p）$_{p\geq 0}$ 就保持ˆ Gevrey可求和性。换言之，相对于形式幂级数的Gevrey可求和性这一性质，序列 m 的增长可以忽略不计。这一概念与保持多重可求和性的概念一致。就此而言，本文是 [7]关于 q–Gevrey渐近展开研究的延续。

在 q–Gevrey 框架下发展平行渐近理论是较为近期的工作。关于这方面的研究，我们可参考 [3, 22, 23, 24, 26, 30, 31], 中的相关工作和作者及其中的参考文献；此外，还可参考 [4, 5, 28, 10, 12, 21, 27, 28], 等关于函数方程渐近解分析的应用。在针对现有 q–Gevrey渐近展开和可求和性的不同 q–类比方法中，我们采用 [31]所发展的方法。在 [30] 中，作者将其他方法与本文所考虑的方法（连续定义和离散定义）联系起来；关于以 q–指数函数为基础的另一种方法，另见 [26] 。

本文建立了若干类形式幂级数空间，这些空间自然地出现在与复域中函数方程相关的渐近结果中。

在 [5] $q-$ 中研究了差分微分方程。解析解和形式解可分解为两项之和，分别对应于不同阶的 q–Gevrey 渐近展开（见定义1）。例如，在 [19] 中可以看到唯一的 q–Gevrey 渐近阶的出现。在 [11], 中，当考察摄动参数的取值趋近于零时解析解的渐近行为，会在单个奇异摄动函数方程中出现两个不同的渐近阶，其中一个为 Gevrey 阶，另一个为 q–Gevrey 阶。最后， [20] 展示了混合情形下与一个 q–Gevrey 阶相关联的 $q-$差分–微分方程解析解的渐近行为，其中该阶控制着一个对其进行分层的 Gevrey 子阶。

鉴于可能出现的情况多种多样，可以观察到，与 $q-$差分方程相关的渐近展开，可能对应唯一的 q–Gevrey 阶，也可能存在不同 q–Gevrey 阶的共存；甚至在某些 $q-$差分方程族中，还可能存在由与一个解析解相关的 Gevrey 阶调制的 q–Gevrey 阶。另一方面，在 [13]中也观察到了不同 Gevrey 渐近阶的共存，或与更一般的渐近展开相关的情形。

本文第一部分分析若干形式幂级数空间，其中系数满足 q–Gevrey 界，并具有子尺度 Gevrey性质。我们证明，子尺度Gevrey与那些（原则上）更精细的尺度同样精确；这些尺度与满足渐近理论中自然出现的性质的序列相关。随后，我们分析保持形式幂级数级数 $q-$ Gevrey性质的正实数序列，并将这类序列刻画为零 q–Gevrey 阶的序列，即位于两个 Gevrey 阶之间的序列。

在 [7], 中提出了保持可和性的序列这一概念。作者指出了该概念本身的研究价值。文中证明，在Balser矩可和性的意义下，所有0阶矩序列族 [1] 都保持可和性。事实上，这两个序列族是一致的。作者还给出了此类序列的一个刻画，在实践中更易于检验。本文在这一理论上向前推进了一步，定义了保持q-Gevrey渐近展开的序列。保持可和性的序列族包含这个新的序列族。目前尚不清楚这一包含关系是否为严格包含。在本文中，我们决定根据 q–Gevrey渐近展开的性质，采用前述概念的一个 q–类似定义。我们称一个正数序列 m 保持 q–Gevreyˆ渐近展开，是指对于每个 $s>0$，任意 $d\in\mathbb{R}$ 以及所有 f 系数取值于复Banach空间的形式幂级数 f ，其 $q-$阶 sBorel变换都在某个原点邻域内收敛，并且其定义可以沿方向 d 延拓为具有适当q–指数增长的函数，当且仅当对 f 的形式 m-Borelˆ变换也成立（见定义7）。事实上，由于 Nevanlinna定理（见 [18], 定理5.3.9），保持可和性的序列这一概念与本文采用的相应定义是等价的。该定理表明，一个级数对于某个正的Gevrey 阶 s 沿某个方向 d 可和，当且仅当其 s 阶形式Borel变换在某个原点邻域内收敛，并且该函数可以延拓到一个平分方向为 d的无穷扇形域上，且其指数增长至多为 s。在我们所采用的 q–Gevrey渐近框架下，这一定义并不等价于存在一个定义在某个平分方向为 d 且开口足够宽的扇形域上的唯一函数，该函数以初始形式幂级数作为其 q–阶 sGevrey渐近展开，因为唯一性并无保证。然而，定理1中描述的Laplace变换保证，这样的 $q-$ s 阶Laplace变换在一个平分方向为 d 且开口大于 2π的扇形域上，以初始形式幂级数作为其 q–阶s Gevrey渐近展开，即定义在对数的黎曼曲面上。

对于保持 q–Gevrey渐近展开的序列，我们以与 [7], 中分析的方式平行的方式建立了一个等价刻画，该刻画在实践中更易于处理（定理 2）。作为这一刻画的直接推论，根据推论1可以断言，保持q–Gevrey渐近展开的序列集合包含于保持可和性的序列集合中。最后，我们证明，q–阶乘序列（$([p]_{1/q}!)_{p\geq 0}$ （$q>1$）不仅如 [7] 中所证明的那样保持可和性，而且还保持 q–Gevrey渐近展开。

本文结构如下：首先回顾一些已知结果，以及作为本文研究工具所需的概念和定义，例如 q–演算和 q–Gevrey渐近展开的相关概念（第2节）；随后研究若干形式幂级数空间，其中系数分别由 q–Gevrey序列和Gevrey序列控制上界，并确定这些空间的相关性质（第3节）。第4节致力于研究具有 q–保持性质的序列空间。具体而言，我们比较Gevrey子阶与其他（原则上更精确的）子阶，并将保持 q–Gevrey 阶的序列刻画为 q–Gevrey 阶为0的序列，以及介于两个Gevrey 阶之间的序列。第一个主要结果（定理 2）给出一个正实数序列保持 q–Gevrey渐近展开的刻画，这种刻画在实际应用中更易处理。最后，我们证明 q–阶乘序列属于这一类（定理 4）；这一结论将应用于实际研究，以确定未来将要探讨的广泛函数方程族的渐近解的 q–Gevrey渐近性质。

记号:
我们用 $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ 表示正整数集合，并且 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。

在本文中， $\mathbb{E}$ 表示一个范数为 $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ 的复Banach空间。我们用 $\mathbb{E}[[t]]$ 表示系数取自 $\mathbb{E}$ 的形式幂级数向量空间，用 $\mathbb{E}\{t\}$ 表示定义在某个原点邻域上的收敛幂级数向量空间。

半径为正数 r 的开圆盘记作 D_r。给定一个开集 $U\subseteq\mathbb{C}$， $\mathcal{O}(U,\mathbb{E})$ 表示定义在 U 上且取值于 $\mathbb{E}$ 的全纯函数集合。如果 $\mathbb{E}=\mathbb{C}$，我们简写为 $\mathcal{O}(U)$。对于顶点位于原点的复域扇形域 S，若 T 是 S 的一个顶点位于原点的子扇形域，且对于某个 $\rho>0$ 有 $\overline{T}\setminus\{0\}\subseteq S\cap D_\rho$，则记作 $T\prec S$。

2 预备结果

2.1 So关于某些序列族和矩微分的札记

形式解的函数方程渐近理论，基于主要与 Gevrey 序列相关的渐近展开，即 $(p!^\alpha)_{p\geq 0}$，其中某个固定的 $\alpha>0$ （见 [1, 18]）。近年来，人们发展出一种更一般的渐近理论，涉及满足某些适当假设的序列，这些假设使相应的函数空间具备某些性质（见 [25, 8] 及其中的参考文献）。这些序列满足的一些性质如下:

(mg) 若正实数序列 $(M_p)_{p\geq 0}$ 满足：存在 $A>0$，使得对所有 $(n,m)\in\mathbb{N}_0^2$，都有 $M_{n+m}\leq A^{n+m}M_nM_m$，则称该序列具有中等增长。

(lc) 若正实数序列 $(M_p)_{p\geq 0}$ 满足对每个 $n\geq 1$ 都有 $M_n^2\leq M_{n-1}M_{n+1}$，则称该序列为对数凸。

我们假设该序列已通过 $M_0=1$ 标准化。

在本文中，我们证明，这类序列的普遍性会带来不同于 Gevrey 情形的结果。不过，所得形式幂级数空间与考虑 Gevrey 序列时的空间相同（命题 2 和命题 4）。

我们注意到， q–Gevrey渐近展开（$q^{s\frac{p(p-1)}{2}}$ ）$_{p\geq 0}$中涉及的序列（对于某个固定的 $s>0$ ）是一个序列 (lc)，而非 (mg)。对于这类序列，或注释 (a) 第 7 页中出现的序列，正如引言所述，已有多种不同的平行渐近理论，其中第 2.3 节所述的理论正是本文所研究的内容。

Giv给定一个正实数序列 $m=(m_p)_{p\geq 0}$，我们考虑形式算子 r

$$\partial_{m,z}\left(\sum_{p\geq 0}\frac{a_p}{m_p}z^p\right)=\sum_{p\geq 0}\frac{a_{p+1}}{m_p}z^p,$$

作用于 $\mathbb{E}[[z]]$。这些形式算子最初由 W. Balser 和 M. Yoshino 在 [2]，中描述，其定义可以自然地扩展到某点处的全纯函数。近期，已有证明表明，它可以扩展到形式幂级数的和与多重和，如 [14, 16, 17] 中所述。

2.2 关于 q-微积分的几点说明

关于以下经典定义和结果，我们参考 [6]；这些内容将在后文中用到。

令 $q>0$，使得 $q\neq 1$ 为实数。对于每个 $\lambda\in\mathbb{R}$， $q-$ 数由 $[\lambda]_q=\frac{q^\lambda-1}{q-1}$ 定义。因此，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，有 $[n]_q=\frac{q^n-1}{q-1}$。 $q-$ 阶乘定义为 $[0]_q!=1$，并且对于所有 $n\in\mathbb{N}$，定义 $[n]_q!=[1]_q[2]_q\cdots[n]_q$。众所周知， $q-$ 阶乘满足

$$[n]_q!=(1-q)^{-n}\prod_{p\geq 0}\frac{1-q^{p+1}}{1-q^{p+1+n}},\qquad q\in(0,1), \tag{1}$$

and

$$[n]_q!=\prod_{p\geq 0}\frac{1-q^{-1-p}}{1-q^{-n-1-p}}(q-1)^{-n}q^{\frac{(n+1)n}{2}},\qquad q>1.$$

因此，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_q!}{(1-q)^{-n}}=\prod_{p\geq 0}1-q^{p+1}<\infty,\qquad q\in(0,1), \tag{2}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_q!}{q^{\frac{(n+1)n}{2}}(q-1)^{-n}}=\prod_{p\geq 0}1-q^{-1-p}<\infty,\qquad q>1. \tag{3}$$

有

$$[p]_q!=[p]_{1/q}!q^{p(p-1)/2}\text{ for all }p\geq 0.$$

考虑 q–移位阶乘的记号将很有用： $q>1$ 对每个$n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$和 $a\in\mathbb{C}$定义为 $(a;\,1/q)_0=1$、$(a;\,1/q)_n=\prod_{p=0}^{n-1}(1-\frac{a}{q^p})$（当 $n\geq 1$时），以及 $(a;\,1/q)_\infty=\prod_{p=0}^{\infty}(1-\frac{a}{q^p})<\infty$。

2.3 q-Gevrey渐近展开简述

本节回顾某个正阶 s的 $q-$Gevrey渐近展开的主要事实。

定义1 设 S 是一个顶点位于原点的扇形域。若对每个 $T \prec S$，都存在 C、 $A > 0$，使得 $f \in \mathcal{O}(S, \mathbb{E})$以 $q-$Gevrey渐近展开 $= \sum_{p\geq 0} f_p z^p \in \mathbb{E}[[z]]$ ˆ$f(z)$为其 $s > 0$ 阶（在原点处）的渐近展开

$$\left\| f(z) - \sum_{p=0}^{N} f_p z^p \right\|_{\mathbb{E}} \leq C A^N q^{s\frac{N(N-1)}{2}} |z|^{N+1},$$

对所有 $N \in \mathbb{N}_0$ 和所有 $z \in T$均成立。

$q-$Gevrey阶数为 $s > 0$ 的形式 $q-$Borel变换定义如下。

ˆ定义2 设 $f(z) = \sum_{p\geq 0} a_p z^p \in \mathbb{E}[[z]]$。 f 的$s > 0$ 阶形式 $q-$Borel变换定义为

$$\mathcal{B}_{q;s}(\hat{f})(z) = \sum_{p\geq 0} \frac{a_p}{q^{s\frac{p(p-1)}{2}}} z^p.$$

为了为给定的形式幂级数赋予 $q-$和，我们现在介绍 k阶的 $q-$Laplace变换。这种对形式幂级数进行 $q-$求和的过程，最早在 [31]中针对 $s = 1$进行了研究，并已广泛应用于本工作引言中列举的 [9, 19], 等领域。关于这方面的其他算子，也可参见 [26, 30]。

Jacobi Theta函数是定义在 $\mathbb{C}^\star$ 上的全纯函数，给出为

$$\Theta(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{\frac{p(p-1)}{2}}} z^p,$$

对任意 $z \in \mathbb{C}^\star$。对于所有 $s > 0$，我们将与 q^s 相关联的 Jacobi Theta函数记作 Θ_{q^s}，以代替 q，也就是说 $\Theta_{q^s}(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{1}{q^{s\frac{p(p-1)}{2}}} z^p$。根据分解

$$\Theta_{q^s}(z) = \prod_{p\geq 0} (1 - \frac{1}{q^{s(p+1)}})(1 + \frac{z}{q^{ps}})(1 + \frac{1}{zq^{s(p+1)}}), \qquad z \in \mathbb{C}^\star,$$

Θ_{q^s} 的零点集合为 $\{-q^{ps} : \ p \in \mathbb{Z}\}$。下面是对引理 4.1 [9] 的略微修改，它进一步给出了Jacobi Theta函数下界的信息。

引理 1（引理 **4.1, [9]**）设 $\delta > 0$。存在 $C > 0$ （其与 δ 无关），使得

$$|\Theta_{q^s}(z)| \geq C\delta \exp\left(\frac{\log^2 |z|}{2s \log(q)}\right) |z|^{1/2},$$

对每个满足 $|1 + z/q^{ks}| > \delta$ 的 $z \in \mathbb{C}^\star$，对每个 $k \in \mathbb{Z}$。

这一增长性质使得可以如下定义满足 $q-$在无穷远处具有 $1/s$ 阶指数增长的函数的 $1/s$ 阶Laplace变换 $q-$。

定义 3 设 $d \in \mathbb{R}$、$s > 0$，且设 S 为一个顶点位于原点、平分方向为 d 且具有正开口的无穷扇形域。给定 $f \in \mathcal{O}(S, \mathbb{E})$，如果存在 C、$h > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得 f 具有 $1/s$ 阶 $q-$指数增长，则称 f 为 $q-$指数增长的 $1/s$ 阶函数。

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C \exp\left(\frac{\log^2(|z|+h)}{2s\log(q)}\right)(|z|+h)^{\alpha}, \tag{4}$$

对于每个 $z \in S$。

定义 4 设 $d \in \mathbb{R}$、$s > 0$、$\rho > 0$，并设 S 是一个顶点位于原点、平分方向为 d 且具有正开口的无穷扇形域。记为 $S = S \cup D_{\rho}$。考虑 $q-$的 $f \in \mathcal{O}(S, \mathbb{E})$，其指数增长阶为 $1/s$，并假设对于 C、$h > 0$、$\alpha \in \mathbb{R}$ 和 ρ，式 (4) 成立。我们还假设 f 在 $\overline{D_{\rho}}$ 上连续。令 $\pi_{q^s} = \log(q)s$。沿着方向 γ，对于满足 $L_{\gamma} := \mathbb{R}_+ e^{i\gamma} \subseteq S$ 的 f，其阶为 $1/s$ 的 Laplace变换定义为

$$\mathcal{L}^{\gamma}_{q;s}(f)(z) = \frac{1}{\pi_{q^s}} \int_{L_{\gamma}} \frac{f(u)}{\Theta_{q^s}\left(\frac{u}{z}\right)} \frac{du}{u}.$$

对路径 L_{γ} 进行变形后，可以用包含在前述定义中的 S 内的任意其他射线来替代它。

引理 1 中给出的下界保证了 $q-$ 的阶为 $1/s$ 的 Laplace变换沿适当方向具有解析性，并且适用于指数增长阶为 $1/s$ 的 $q-$。

命题 1 设 $\delta > 0$ 如引理 1 所述。我们固定一个平分方向为 $d \in \mathbb{R}$、顶点位于原点的无穷扇形域 S。记 $S = S \cup D_{\rho}$，其中 ρ为某个正数。设 $f \in \mathcal{O}(S, \mathbb{E})$ 是一个具有 $q-$阶指数增长的函数，其中 $1/s$ 为某个 $s > 0$，且对于某些C、$h > 0$和 $\alpha \in \mathbb{R}$，式 (4) 成立。那么，定义 4 中给出的函数 $\mathcal{L}^{\gamma}_{q;s}(f)$ 是 $\mathcal{R}_{\gamma,\,\delta} \cap D_r$ 上的有界全纯函数，适用于任意 $0 < r \leq q^{-s(\alpha+1)}$，其中

$$\mathcal{R}_{\gamma,\delta} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\star} : \left| 1 + \frac{re^{i\gamma}}{z} \right| > \delta,\ for\ all\ r \geq 0 \right\}.$$

在 $s = 1$ 情形下，下一个结果见 [31],，其证明可推广至一般框架。为求完整起见，我们根据本文的设定调整了该结果的陈述，并仅给出证明的关键步骤。

定理1 设 $f \in \mathbb{E}[[z]]$ 满足：对于某个 $s > 0$，有 $g = \mathcal{B}_{q;s}(f) \in \mathbb{E}\{z\}$。假设函数 g 可解析延拓到一个平分方向为 $d \in \mathbb{R}$ 的无穷扇形域 S，且该延拓具有阶为 $1/s$ 的 $q-$ 指数增长。那么，对于每个满足 $L_{\gamma} = (0, \infty)e^{i\gamma} \subseteq S$ 的 $\gamma \in \mathbb{R}$，函数 $\mathcal{L}^{\gamma}_{q;s}(g)$ 在某个平分方向为 d、开角为 $> 2\pi$ 的有限扇区上，以 s 为阶的 $q-$Gevrey渐近展开为 f。

证明 给定 $f \in \mathbb{E}[[z]]$，我们构造 $g = \mathcal{B}_{q;s}(f)$。根据定义 4 和命题 1，通过将定义解析延拓到方向 γ（这些方向始终接近 d），函数 $\mathcal{L}^{\gamma}_{q;s}(g)$ 是定义在一个有限扇区上的有界全纯函数，该扇区的平分方向为 d，开角为 $> 2\pi$。

考虑到

$$\frac{1}{\pi_{q^s}} \int_{L_{\gamma}} \frac{u^p}{\Theta_{q^s}\left(\frac{u}{z}\right)} \frac{du}{u} = z^p q^{s\frac{p(p-1)}{2}},$$

对于每个 $z \in \mathcal{R}_{\gamma,\,\delta}$ 和 $p \in \mathbb{N}_0$（参见引理 3 [20] 的证明），可以稍作调整，沿用经典 Gevrey渐近展开证明中的方法，使其适用于这一框架（例如参见定理 5.3.9 [18]），从而得出 $\mathcal{L}^{\gamma}_{q;s}(g)$ 的预期渐近行为。□

3 形式幂级数空间

定义 5 令 $q>0$ 满足 $q\neq 1$，并固定 $s\in\mathbb{R}$。我们定义集合 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s}$，它由所有形式幂级数 $\hat{}u(t)=\sum_{p\geq 0}a_pt^p\in\mathbb{E}[[t]]$ 构成，且存在 A、$B>0$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|a_p\|_{\mathbb{E}}\leq AB^p p!^{\alpha}q^{s\frac{p(p-1)}{2}},\qquad p\in\mathbb{N}_0.$$

备注:

（a）术语 $q^{s^{p\ (p-1)\ 2}}$可以替换为 $q^{s\frac{p^2}{2}}$。鉴于陈述（3），不难直接验证，该术语也可以替换为 $[p]_q!^{\ s}$ 但仅在 $q>1$ 的情况下成立，这是由于相对于（3）而言，（2）中不存在对称性。

（b）注意到，当 $0<q<1$ 中 s 和 $-s$ 的作用互换时，之前的定义可以相应地简化为 $q>1$。

选择子阶 Gevrey 是出于实际考虑，因为它们广泛出现在函数方程的形式解的可求和性研究中。这一特殊选择在以下意义下并不限制该集合。令我们定义 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s,\ \star}$ 为形式幂级数 $\hat{}u(t)=\sum_{p\geq 0}a_pt^p\in\mathbb{E}[[t]]$，使得存在 A、$B>0$ 以及一个序列 $\mathbb{M}=(M_p)_{p\geq 0}$ 满足 (mg) 和 (lc) 性质，其中

$$\|a_p\|_{\mathbb{E}}\leq AB^pM_pq^{s\frac{p(p-1)}{2}},\qquad p\in\mathbb{N}_0,$$

于是有如下结果。

命题 2 设 $q>0$ 满足 $q\neq 1$，并固定 $s\in\mathbb{R}$。那么，$\mathbb{E}[[t]]_{q,s}\equiv\mathbb{E}[[t]]_{q,s,\star}$

证明 注意到，对于 $\alpha>0$，序列 $(p!^{\alpha})_{p\geq 0}$ 是满足 (mg) 和 (lc) 条件的具体序列，因此显然有 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s}\subseteq\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s,\ \star}$。另一方面，给定任意满足 (mg) 和 (lc) 性质的序列 $(M_p)_{p\geq 0}$，存在 $a_2,\delta>0$，使得对于所有 $p\in\mathbb{N}$ 都有 $M_p\leq a_2^p p!^{\delta}$（例如参见引理1.3.2. [29], ）。这意味着 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s,\ \star}\subseteq\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s}$ 成立。□

与命题 2 相比，存在一些形式幂级数，其系数与某种 q–Gevrey 增长 s 相关，而其增长率超过 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s}$ 中每个元素的增长率，如下面的例子所示。

例1 设 $q>1$ 和 $s>0$。形式幂级数 $\hat{}u(t)=\sum_{p\geq 0}e^{p\ 对数^2(p+1)}q^{s\frac{p(p-1)}{2}}t^p$ 不属于 $\mathbb{E}[[t]]_{q,s}$。注意，系数的主要增长与q–阶数为 s 的 Gevrey 序列有关。然而，对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $A>0$，都有

$$\lim_{p\to\infty}\frac{e^{p\log^2(p+1)}q^{s\frac{p(p-1)}{2}}}{A^p p!^{\alpha}q^{s\frac{p(p-1)}{2}}}=+\infty.$$

结论由此得出。

以类似的方式，我们定义系数属于 $\mathbb{E}$、具有固定 q–Gevrey 阶以及固定 Gevrey 子阶的形式幂级数集合如下。

定义 6 令 $q>0$ 满足 $q\neq 1$，并固定 s_1、$s_2\in\mathbb{R}$。我们定义集合 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s_1}^{s_2}$，它由所有形式幂级数 $\hat{u}(t)=\sum_{p\geq 0}a_pt^p\in\mathbb{E}[[t]]$ 构成，且满足存在 A、$B>0$ 使得

$$\|a_p\|_{\mathbb{E}}\leq AB^p p!^{s_2}q^{s_1\frac{p(p-1)}{2}},\qquad p\in\mathbb{N}_0.$$

关于前述形式幂级数集合，以下性质成立。它们可以直接由定义 5 和定义 6 中对这些集合的定义得到。

命题 3 令 $q>0$ 满足 $q\neq 1$，并固定 s、s_1、$s_2\in\mathbb{R}$。则有：

(i) $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ 0}^{s}=\mathbb{E}[[t]]_s$，由阶为 $s\in\mathbb{R}$ 的 Gevrey 序列组成。
特别地，$\mathbb{E}[[t]]_{q,\ 0}^{0}=\mathbb{E}\{t\}$。

(ii)
$$\bigcup_{h\in\mathbb{R}}\mathbb{E}[[t]]_{q,s_1}^{h}=\mathbb{E}[[t]]_{q,s_1}$$

(iii) $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s_2}$（分别为 $\mathbb{E}[[t]]_{q}^{s_1},\ s_2$）是一个向量空间，并且在形式微分下封闭。在 $\mathbb{E}$ 是巴拿赫代数且 $s_2\geq 0$ 的情况下，则 $\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s_2}$（分别为 $\mathbb{E}[[t]]_{q}^{s_1},\ s_2$）是一个微分代数。

证明 所有性质都源于对形式幂级数集合的定义。对于 (iii) 的证明，可以利用经典估计 $1\leq k!(p-k)!\leq p!$（对每个整数 $0\leq k\leq p$ 均成立），以及以下事实：

$$k(k+1)+(p-k)(p-k+1)=p(p-1)+k^2+(2-k)p,\qquad 0\leq k\leq p,$$

以及 $s_2\geq 0$。 □

4 保持 q 性质的序列空间

本节中，我们考察定义某些正实数序列空间的新性质。其结构与 [7], 中的研究类似，作者在其中描述并刻画了保持 Gevrey 阶和可求和性的序列。在我们的框架下，我们扩展了先前的序列族，使其不仅能保持与 Gevrey 序列相关的性质，还能保持这些性质的 $q-$ 类比性质。$q-$ Gevrey 序列的不同性质导致了与先前方法之间的关键差异。

鉴于第 7 页备注中的第二个陈述，作出这一先前假设并不失一般性，因为对 $q\in$ (0,1) 的情形也可采用相同处理。因此，从现在起，我们假设 $q>1$ 是一个固定实数。

此外，我们始终假设序列 m 是归一化的，也就是说，$m_0=1$。

我们回顾形式矩 Borel 算子的定义，如第 [1], Section 5.2 节所述。尽管在下一个定义中，m 可以是任意正实数序列，但我们仍保留“矩”一词，因为实际上该序列通常是与某个测度相关联的矩序列。

定义 7 设 $m=(m_p)_{p\geq 0}$ 为正实数序列。形式 m-Borel 算子$\mathcal{B}_{m,\ t}:\mathbb{E}[[t]]\to\mathbb{E}[[t]]$ 定义为

$$\mathcal{B}_{m,t}\left(\sum_{p\geq 0}a_pt^p\right)=\sum_{p\geq 0}\frac{a_p}{m_p}t^p.$$

若正实数序列 $m=(m_p)_{p\geq 0}$ 对每个 $s\in\mathbb{R}$ 和所有 $\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]$ 都满足以下陈述等价，则称其保持 $q-$Gevrey 阶：

(i) $\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_{q,s}$

(ii) $\mathcal{B}_{m,t}\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_{q,s}$.

In a 类似地，可以定义保持 $q-$Gevrey 阶和 Gevrey 阶的序列。

若正实数序列 $m=(m_p)_{p\geq 0}$ 对每个 s_1、$s_2\in\mathbb{R}$ 和所有 $\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]$ 都满足以下陈述等价，则称其保持 $q-$Gevrey 阶和 Gevrey 阶：

(i) $\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s_1}^{s_2}$

(ii) $\mathcal{B}_{m,\ t}\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_{q,\ s_1}^{s_2}$。

注意，根据命题 3 的 (i)，定义 9 中的序列集合严格包含于保持 Gevrey 阶的序列集合中，后者如 [7], 定义 10 所述，其中 $s_1=0$。

还值得一提的是，任何同时保持 q-Gevrey 阶和 Gevrey 阶的序列，也保持 $q-$Gevrey 阶。

例 2 设 $s\in\mathbb{R}$。序列 $(p!^s)_{p\geq 0}$ 保持 $q-$Gevrey 阶，但不保持$q-$Gevrey 阶和 Gevrey 阶。对于任意固定的 $s>0$，序列 $(\Gamma(1+sp))_{p\geq 0}$ 也具有同样的性质。

设 $s\in\mathbb{R}$。序列 $([p]_{1/q}!^s)_{p\geq 0}$ 保持 $q-$Gevrey 阶和 Gevrey 阶。这直接源于以下事实：对于每个 $p\in\mathbb{N}_0$，都有 $1\leq[p]_{1/q}!\ \leq\left(\frac{q}{q-1}\right)^p$。

定义 10 若存在 a、$A>0$ 以及 α、$\beta\in\mathbb{R}$，使得序列 $m=(m_p)_{p\geq 0}$ 属于 $q-$Gevrey 阶 $s\in\mathbb{R}$，则称其为 $q-$Gevrey 阶 $s\in\mathbb{R}$ 的序列

$$a^pp!^\alpha q^{s\frac{p(p-1)}{2}}\leq m_p\leq A^pp!^\beta q^{s\frac{p(p-1)}{2}},$$

对每个 $p\geq 0$。

与之前一样，原则上可以定义一个更广泛的序列类：其上界和下界由一个更一般的序列 $\mathbb{M}=(M_p)_{p\geq 0}$ 所确定的子阶界定，该序列满足 (mg) 和 (lc) 性质。更确切地说，可以给出如下替代定义。

定义 11 若存在 a、$A>0$ 以及一个满足 (mg) 和 (lc) 性质的正实数序列 $\mathbb{M}=(M_p)_{p\geq 0}$，使得，则称序列 $m=(m_p)_{p\geq 0}$ 具有（广义） $q-$Gevrey 阶 $s\in\mathbb{R}$，

$$a^p\frac{1}{M_p}q^{s\frac{p(p-1)}{2}}\leq m_p\leq A^pM_pq^{s\frac{p(p-1)}{2}},$$

对于所有的 $p\geq 0$。

然而，鉴于下面的结果，这种表面上的一般性实际上并未真正实现。

命题 4 序列 m 是 q–Gevrey 阶 $s \in \mathbb{R}$ 当且仅当它是（广义）q–Gevrey 阶 s。

证明 可以采用与命题 2 的证明类似的推理。 d. □

此时，可以给出保持 q–Gevrey 阶的序列的刻画。

命题 5 序列 $m = (m_p)_{p\geq 0}$ 保持 q–Gevrey 阶，当且仅当 m 是 q–Gevrey 阶 0 的序列，即当且仅当 m 介于两个 Gevrey 序列之间。

证明 首先假设 m 保持 q–Gevrey 阶，并考虑 $s \in \mathbb{R}$ 以及形式幂级数 $\hat{u}(t) = \sum_{p\geq 0} p!^s m_p t^p$。我们注意到 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{q,0}$。这意味着 $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{q,0}$。因此，存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $A, B > 0$，使得

$$m_p \leq AB^p p!^{\alpha - s}, \qquad p \in \mathbb{N}_0.$$

由于 m 是一个归一化序列，因此很容易验证，对于每个 $p \geq 0$，都有 $m_p \leq C^p p!^{\alpha-s}$，其中某个 $C > 0$。另一方面，形式幂级数 $\hat{v}(t) = \sum_{p\geq 0} p!^s t^p \in \mathbb{C}[[t]]_{q,0}$ 这根据假设保证了 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{v} \in \mathbb{C}[[t]]_{q,0}$。换言之，存在 A、$B > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，使得

$$\frac{p!^s}{m_p} \leq AB^p p!^{\beta}, \qquad p \in \mathbb{N}_0,$$

或者等价地，对于所有 $p \in \mathbb{N}_0$，都有 $m_p \geq DE^p p!^{s-\beta}$，其中某些 D、$E > 0$。由于序列 m 是归一化的，因此可以取 $D = 1$，其中某个 $E > 0$ 足够大。对于所有 $p \in \mathbb{N}_0$，关于 m_p 的前述上下界保证了 m 是 0 阶 Gevrey 序列。

为证明另一个蕴含，假设 $m = (m_p)_{p\geq 0}$ 是一个 0 阶 q–Gevrey 序列，并选取 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\hat{u}(t) = \sum_{p\geq 0} a_p t^p \in \mathbb{E}[[t]]$。首先，假设 $\hat{u} \in \mathbb{E}_{q,s}[[t]]$。我们将证明 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_{q,s}$。根据假设，对于所有 $p \in \mathbb{N}_0$，都有 $\|a_p\|_{\mathbb{E}} \leq A_1 B_1^p p!^{\alpha} q^{s^p_{(p-1)_2}}$，其中某些 A_1、$B_1 > 0$ 以及某个 $\alpha \in \mathbb{R}$。由于 m 是一个 0 阶 q–Gevrey 序列，因此有

$$a^p p!^{\beta_1} \leq m_p \leq A^p p!^{\beta_2}, \qquad p \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

对于某些 a、$A > 0$ 和 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$。注意，对于所有 $p \geq 0$，都有

$$\frac{\|a_p\|_{\mathbb{E}}}{m_p} \leq A_1 \left(\frac{B_1}{a}\right)^p p!^{\alpha-\beta_1} q^{s\frac{p(p-1)}{2}}.$$

因此，$\mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_{q,s}$。另一方面，假设 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_{q,s}$。我们来证明 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_{q,s}$。根据假设，存在 A_2、$B_2 > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，使得 $\frac{\|a_p\|_{\mathbb{E}}}{m_p} \leq A_2 B_2^p p!^{\beta} q^{s^p_{(p-1)_2}}$ 对每个 $p \in \mathbb{N}_0$ 都成立。结合（5），我们得出

$$\|a_p\|_{\mathbb{E}} = \frac{\|a_p\|_{\mathbb{E}}}{m_p} m_p \leq A_2 (AB_2)^p p!^{\beta+\beta_2} q^{s\frac{p(p-1)}{2}}$$

由此得出结论。 □

事实上，保持 q–Gevrey 阶及 Gevrey 阶的序列集合，与零 Gevrey 阶序列集合相同。也就是说，序列 $m = (m_p)_{p\geq 0}$ 满足$a^p \leq m_p \leq A^p$ 对于某个 a， $A > 0$ 对于所有 $p \geq 0$，按照定义 2 [7]中的术语。这一证明从略。

命题 6 设 $m =(m_p)_{p\geq 0}$ 为一个正数序列。以下陈述等价：

(i) 序列 m保持 q–Gevrey 阶及 Gevrey 阶

(ii) m 是一个零 Gevrey 阶序列。

注意，若序列 $m = (m_p)_{p\geq 0}$ 保持 q–Gevrey 阶及 Gevrey 阶，则它按定义 10 [7], 的意义保持 Gevrey 阶，即对于每个 $s \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$，等价关系 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]^s_{q,0}$ 当且仅当 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]^s_{q,0}$ 成立。

对 q–Gevrey渐近展开的研究比经典 Borel 求和更为复杂。我们考虑这一方向上若干彼此不等价的定义。在此，我们将范围限定为正阶的 q–Gevrey渐近展开： $s = 0$的情形见 [7], ，而情形 $s < 0$ 涉及整函数。

定义 12 若一个序列 m 对 q–Gevrey渐近展开具有保性，则对任意$s > 0$、 $d \in \mathbb{R}$ 和 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ ，以下陈述等价：

(i) $\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}) \in \mathbb{E}\{t\}$，且该函数可延拓至一个以$d$ 为平分方向的无穷扇形域，并在该扇形域上具有阶为 $1/s$ 的 q–指数增长。

(ii) $\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m,\ t}(\hat{u}) \in \mathbb{E}\{t\}$，且该函数可延拓至一个以 d 为平分方向的无穷扇形域，并在该扇形域上具有阶为 $1/s$ 的 q–指数增长。

此时，可以给出保持 q–Gevrey渐近展开的序列的一个刻画。

注意，为使给定的$\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ 满足 $\mathcal{B}_{q;s}\hat{u}$ 在原点的某个邻域内收敛，必须有$\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]^0_{q,\ s}$。

定理 2 序列 $m = (m_p)_{p\geq 0}$ 保持 q–Gevrey渐近展开，当且仅当对每个 $s > 0$ 以及每个模 2π的 $\theta \neq 0$， $\mathcal{B}_{m,\ t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right)$ 和$\mathcal{B}_{m^{-1},\ t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right)$ 都属于 $\mathbb{C}\{t\}$，且它们都可以延拓到平分方向为 θ 的无穷扇形域，并具有 q–阶为 $1/s$的指数增长。

证明 假设 m 保持 q–Gevrey渐近展开，并取 $s > 0$ 和 $\theta \neq 0$模 2π。考虑形式幂级数 $\hat{u}(t) = \sum_{p\geq 0} q^{s^p\ (p-1)\ 2}\ t^p$。我们注意到， $\mathcal{B}_{q;s}\hat{u}(t) = \frac{1}{1-t} \in \mathbb{C}\{t\}$，且可沿每个方向 $\theta \neq 0$ 模 2π 延拓，并具有阶为 $1/s$的指数增长。根据假设，有 $\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}) \in \mathbb{C}\{t\}$ ，且它可在平分方向为 d 的无穷扇形域上延拓，并在该扇形域上具有阶为 $1/s$ 的指数增长。根据所作假设，对于 $\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m,\ t}(\hat{u})$ 也同样成立，它与

$$\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m,t}(\hat{u}) = \mathcal{B}_{m,t}\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}) = \mathcal{B}_{m,t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right).$$

另一方面，由于所作假设，$\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m^{-1},\ t}(\hat{u}) \in \mathbb{C}\{t\}$ 也成立，且该函数可在平分方向为 d 的无穷扇形域上延拓，并在该扇形域上具有阶为 $1/s$ 的指数增长。由于

$$\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m^{-1},t}(\hat{u}) = \mathcal{B}_{m^{-1},t}\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}) = \mathcal{B}_{m^{-1},t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right),$$

可以得出证明的第一部分。

对于证明的第二部分，我们从 $\hat{u}(t) = \sum_{p\geq 0} u_p t^p \in \mathbb{E}[[t]]$ 出发，并假设对于任意 $s > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$，都有 $\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}) \in \mathbb{E}\{t\}$，且该函数可以解析延拓到一个平分方向为 d 、在那里具有 $q-$ 阶指数增长的无穷扇形域。我们将证明，对于 $\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m,\ t}(\hat{u})$，同样的结论也成立。

我们考虑序列 $\tilde{m} = (m_p p!)_{p\geq 0}$ 以及柯西问题

$$(\partial_{\tilde{m},t} - \partial_z)\omega = 0,$$

在初始条件 $\omega(0,z) = \mathcal{B}_{q;s}(\hat{u})(z)$ 下。我们注意到，前一个问题的形式解为

$$\hat{\omega}(t,z) = \sum_{p\geq 0} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))^{(p)}(z)}{m(p)p!} t^p.$$

事实上，注意到

$$\mathcal{B}_{q;s}\mathcal{B}_{m,t}(\hat{u}) = \sum_{p\geq 0} \frac{u_p}{q^{s\frac{p(p-1)}{2}} m(p)} t^p = \sum_{p\geq 0} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))^{(p)}(0)}{p!m(p)} t^p = \hat{\omega}(t,0),$$

因此，$\hat{w}(t,0)$ 定义了一个全纯函数 $\omega(t)$，其定义在某个原点邻域内，例如D_r，其中 $r > 0$。接下来需要证明，$\hat{\omega}(t,0)$ 可以沿方向 d 延拓至无穷远，并具有 $q-$ 阶指数增长。令 $0 < r_0 < r$。由柯西积分公式可知，导数满足

$$\omega(t,0) = \sum_{p\geq 0} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))^{(p)}(0)}{m_p p!} t^p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r_0} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi,$$

其中 $\psi(t) = \sum_{p\geq 0} \frac{t^p}{m_p} = \mathcal{B}_{m,\ t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right)$。根据假设，$\psi(t)$ 在某个原点邻域内收敛，记为 D_{r_1}，并且可以解析延拓到平分方向为 $d \neq 0 \bmod 2\pi$ 、具有 $q-$ 阶指数增长的无穷扇形域。我们将积分路径变形为

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r_0} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi$$

从 $\{|\xi| = r_0\}$ 到 $\Gamma_1 + \Gamma_2(R)$，其中 $\Gamma_1 : (d+\epsilon, d+2\pi-\epsilon) \ni \theta \mapsto r_0 e^{i\theta}$ 对于某个足够小的 $\epsilon > 0$ 以及 $\Gamma_2(R) = \Gamma_{21}(R) + \Gamma_{22}(R) - \Gamma_{23}(R)$，其中 $\Gamma_{21}(R)$: $(r_0, R) \ni s \mapsto s e^{i(d+\epsilon)}$，$\Gamma_{23}(R)$: $(r_0, R) \ni s \mapsto s e^{i(d+2\pi-\epsilon)}$ 以及 $\Gamma_{22}(R)$: $(d-\epsilon, d+\epsilon) \ni \theta \mapsto R e^{i\theta}$。通过改变 $R > 0$，这就得到了 $\omega(t)$ 关于 $S_d \cup D_{r_0}$ 的全纯性。

设 $t \in S_d \cup D_{r_0}$。一方面，有

$$\left\| \oint_{\Gamma_1} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \int_{d+\epsilon}^{d+2\pi-\epsilon} \left\| (\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(r_0 e^{i\theta}) \right\|_{\mathbb{E}} |\psi(t/(r_0 e^{i\theta}))| d\theta$$
$$\leq (2\pi - 2\epsilon) \max_{|z|=r_0} \|\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(z)\|_{\mathbb{E}} C_1 \exp\left(\frac{\log^2(|t|/r_0 + \tilde{h})}{2s\log(q)} \right) \left(\frac{|t|}{r_0} + \tilde{h} \right)^{\alpha}$$

~对于某些 C_1、$h > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。注意到

$$\log^2(|t|/r_0 + \tilde{h}) - \log^2(|t| + \tilde{h}) = \log\left(\frac{|t|/r_0 + \tilde{h}}{|t| + \tilde{h}} \right) \log((\frac{|t|}{r_0} + \tilde{h})(|t| + \tilde{h}))$$
$$\leq \left[\max_{x>0} \log\left(\frac{x/r_0 + \tilde{h}}{x + \tilde{h}} \right) \right] \log(\ell(|t| + \tilde{h})^2) \leq \left[\max_{x>0} \log\left(\frac{x/r_0 + \tilde{h}}{x + \tilde{h}} \right) \right] (\log(\ell) + 2\log(|t| + \tilde{h}))$$
$$\leq C_3 + C_4 \log(|t| + \tilde{h}),$$

对于某个足够大的整数 $\ell > 0$ 以及某些 C_3、$C_4 > 0$。我们得出

$$\exp\left(\frac{\log^2(|t|/r_0 + \tilde{h})}{2s\log(q)} \right) \leq \exp\left(\frac{\log^2(|t| + \tilde{h})}{2s\log(q)} \right) \exp\left(\frac{C_3}{2s\log(q)} \right) (|t| + \tilde{h})^{\frac{C_4}{2s\log(q)}}. \tag{6}$$

此外注意到

$$\left(\frac{|t|}{r_0} + \tilde{h} \right)^{\alpha} \leq C_5 (|t| + \tilde{h})^{\alpha}, \tag{7}$$

对于某个 $C_5 > 0$，对所有 t 均成立。由（6）和（7）可得

$$\left\| \oint_{\Gamma_1} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \Delta_1 \exp\left(\frac{\log^2(|t| + \tilde{h})}{2s\log(q)} \right) (|t| + \tilde{h})^{\alpha_1}, \tag{8}$$

其中 $\Delta_1 = (2\pi - 2\epsilon) \max_{|z|=r_0} \|\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(z)\|_{\mathbb{E}} C_1 \exp\left({}_{2s}{}^{C_3 \log(q)} \right) C_5$，以及 $\alpha_1 = \alpha + {}_{2s}{}^{C_4}{}_{\log(q)}$。其次，类似的估计给出

$$\left\| \oint_{\Gamma_{21}(R)} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \int_{r_0}^{R} \frac{1}{h} \left\| (\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(h e^{i(d+\epsilon)}) \right\|_{\mathbb{E}} |\psi(t/(h e^{i(d+\epsilon)}))| dh.$$

令 $R = \frac{2|t|}{r_0}$。考虑到被积函数中各项的 q–指数增长这一事实，并且对于每个 $h \in [r_0, R]$ 和足够大的 R，有

$$\log^2(h) + (\log(|t|/h))^2 = 2\log^2(h) + \log^2|t| - 2\log|t|\log(h) = \log^2|t| + 2\log(h)\log(h/|t|)$$
$$\leq \log^2|t| + 2\log(2|t|/r_0)\log(2/r_0),$$

可得

$$\left\| \oint_{\Gamma_{21}(R)} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \Delta_2 \exp\left(\frac{\log^2(|t| + \tilde{\delta}_2)}{2s\log(q)} \right) (|t| + \tilde{h}_2)^{\alpha_2}, \tag{9}$$

~ ~对于某些 Δ_2、δ_2、$h_2 > 0$ 以及某个 $\alpha_2 \in \mathbb{R}$。沿 Γ_{23} 的积分上界估计以相同方式得到上界，从而得到

$$\left\| \oint_{\Gamma_{23}(R)} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \Delta_3 \exp\left(\frac{\log^2(|t| + \tilde{\delta}_3)}{2s\log(q)} \right) (|t| + \tilde{h}_3)^{\alpha_3}, \tag{10}$$

~ ~对于某些 Δ_3、δ_3、$h_3 > 0$以及某个 $\alpha_3 \in \mathbb{R}$。最后，注意到通过以下类似的论证，

$$\left\| \oint_{\Gamma_{22}(R)} \frac{(\mathcal{B}_{q;s}(\hat{u}))(\xi)}{\xi} \psi(t/\xi) d\xi \right\|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\epsilon R}{\pi R} C_6 (R + \tilde{\delta}_4)^{\alpha_4} \exp\left(\frac{\log^2(R + \tilde{\delta}_4)}{2s\log(q)} \right) C_7 (\frac{|t|}{R} + \tilde{\delta}_5)^{\alpha_5}$$
$$\times \exp\left(\frac{\log^2(\frac{|t|}{R} + \tilde{\delta}_5)}{2s\log(q)} \right) \leq \Delta_4 (\frac{2|t|}{r_0} + \tilde{\delta}_4)^{\alpha_4} \exp\left(\frac{\log^2(\frac{2|t|}{r_0} + \tilde{\delta}_4)}{2s\log(q)} \right),$$

~ ~对于某些 C_6、C_7、δ_4、$\delta_5 > 0$ 和 α_4、$\alpha_5 \in \mathbb{R}$，其中

$$\Delta_4 = \epsilon C_6 C_7 (\frac{r_0}{2} + \tilde{\delta}_5)^{\alpha_5} \exp\left(\frac{\log^2(\frac{r_0}{2} + \tilde{\delta}_5)}{2s\log(q)} \right).$$

利用上述类似估计，结合先前的上界估计以及(8)、(9)和(10)，我们可以得出结论。

当 m^{-1} 时，证明可以用类似的方式展开。 □

事实上，任何保持 $q-$Gevrey渐近展开的序列，都保持 [7]意义下的可求和性。

定义13 设 $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$。形式幂级数$\hat{u}(t) = \sum_{p\geq 0} a_p t^p \in \mathbb{E}[[t]]$ 沿方向 d是$k-$可求和的，当且仅当$\mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},\ t}\hat{u} = \sum_{p\geq 0} \Gamma^{a_p}_{(1+\frac{p}{k})} t^p$在某个原点邻域内定义一个收敛函数，并且可以解析延拓为一个解析函数，记为v，延拓到一个平分方向为 d的无穷扇形域中，记为 S，且该延拓具有 k 指数增长，即存在 A、$B > 0$，使得对于所有 $t \in S$，$\|v(t)\|_{\mathbb{E}} \leq Ae^{B|t|^k}$。

定义14（定义 **11,** [**7**]）若正实数序列 m保持可求和性，则对于每个 $k > 0$、$d \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$，以下陈述等价：

(i) $\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{k,\ d}$。

(ii) $\mathcal{B}_{m,\ t}\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{k,\ d}$。

定理 3（定理 **1,** [**7**]）正实数序列 m 保持可求和性，当且仅当对于每个 $k > 0$ 以及任意 $\theta \neq 0 \mod 2\pi$，$\mathcal{B}_{m,\ t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right)$ 和 $\mathcal{B}_{m^{-1},\ t}\left(\sum_{p\geq 0} t^p\right)$属于 $\mathbb{C}\{t\}$，并且它们可以延拓到一个平分方向为 θ 的无穷扇形域，且具有 k 阶的指数增长。

根据定理 2，可得以下结果。

推论1 保持 Gevrey渐近展开的正实数序列 m 是保持可和性的序列。

证明 由 m 保持 q–Gevrey渐近展开，根据定理 2 可知，对于 $s>0$ 和 $\theta\neq 0$ 模 2π，形式幂级数 $\mathcal{B}_{m,\ t}\left(\sum_{p\geq 0}t^p\right)$ 和 $\mathcal{B}_{m^{-1},\ t}\left(\sum_{p\geq 0}t^p\right)$在某个原点邻域内收敛，并且二者都可以延拓到平分方向为 θ 的无穷扇形域，记为 S_θ，且具有阶为 s 的 q–指数增长。我们注意到，在 S_θ 上具有阶为 s 的 q–指数增长的函数满足如 (4) 中所示的界，因此对任意 $k>0$，它在 S_θ 上具有 k–指数增长。由此，根据定理 3 可知， m 保持可和性。□

例 3 给定 $A>0$，序列 $(A^p)_{p\geq 0}$ 保持可求和性和 q–Gevrey渐近展开。

例 4 序列 $m=\left(\frac{(2p)!}{p!^2}\right)_{p\geq 0}$ 保持 q–Gevrey渐近展开。事实上，取 $d\in\mathbb{R}$，满足 $d\neq 0$ 模 2π 和 $s>0$。有

$$\mathcal{B}_{m^{-1},t}\left(\sum_{p\geq 0}t^p\right)=\sum_{p\geq 0}\frac{(2p)!}{p!^2}t^p=\frac{1}{(1-4t)^{1/2}},$$

以及

$$\mathcal{B}_{m,t}\left(\sum_{p\geq 0}t^p\right)=\sum_{p\geq 0}\frac{p!^2}{(2p)!}t^p=\frac{1}{1-\frac{t}{4}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-\frac{t}{4}}\right)^{1/2}\arcsin(\frac{1}{2}t^{1/2})\right).$$

两个函数沿方向 d均具有 q–指数增长。结论得证。

定理 4 序列 $([p]_{1/q}!\ )_{p\geq 0}$ 保持可求和性，同时也保持 q–Gevrey渐近展开。

证明 序列 $m_q:=([p]_{1/q}!\ )_{p\geq 0}$ 保持可求和性的事实已在定理 2 [7]中陈述并证明。现在我们证明 $([p]_{1/q}!\ )_{p\geq 0}$ 保持 q–Gevrey渐近展开这一事实。我们证明定理 2 中所述的刻画。设 $s>0$ 且 $\theta\neq 0$ 模 2π。考虑形式幂级数

$$\hat{x}_1(t)=\sum_{p\geq 0}\frac{1}{[p]_{1/q}!}t^p,\qquad \hat{x}_2(t)=\sum_{p\geq 0}[p]_{1/q}!t^p.$$

我们将证明，这两个形式幂级数都在原点的某个邻域内收敛，并可解析延拓至无穷扇形域 S，其平分方向为 θ，且在该扇形域上具有 $q-$ 阶的指数增长 s。

我们注意到，$\hat{}x_1$ 与 $q-$ 指数函数 $e_{1/q}$ 相同。众所周知（见引理 2.6 [32] 或命题 2.2 [26]），$e_{1/q}$ 在 $D_{q/(q-1)}$ 上全纯，并且可解析延拓至 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$，使得对于每个平分方向为 π、开口小于 π 的扇形域 S_1，都有

$$|e_{1/q}(z)|\leq K,$$

对于某个 $K>0$ （它取决于 S_1）以及任意满足 $|z|\geq 1$的 $z\in S_1$。事实上， K_1 可以用一个在无穷远处指数衰减的 $q-$ 来替代。这就可以得出关于 $\hat{}x_1$ 的证明。

现在我们考虑形式幂级数 $\hat{x}_2$。我们考虑初值问题

$$\begin{cases} (\partial_{\tilde{m},t} - \partial_z)u = 0 \\ u(t,0) = \frac{1}{1-t} \end{cases}, \tag{11}$$

其中 $\tilde{m} = (p![p]_{1/q}!)_{p\geq 0}$。我们注意到

$$\hat{u}(t,z) = \sum_{p\geq 0} \frac{\partial^p_{\tilde{m},t}\left(\frac{1}{1-t}\right)}{p!} z^p$$

是 (11) 的形式解。由于

$$1 \leq [p]_{1/q}! \leq \left(\frac{q}{q-1}\right)^p, \qquad p \geq 0,$$

根据命题 1 [15],，存在 r、A、$B > 0$，使得

$$\sup_{|t|<r} \left|\partial^p_{\tilde{m},t}\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \leq AB^p p!, \qquad p \geq 0.$$

因此，$\hat{u}$ 在原点邻域 $D_r \times D_{1/B} \subseteq \mathbb{C}^2$ 内收敛。我们用 $u(t,z)$ 表示该级数所定义的解析函数。将矩导数作用于全纯点处的全纯函数（即 $\partial^p_{m,\ t}\psi(0)/m_p = \psi^{(p)}(0)/p!$，对所有 $p \geq 0$、任意矩序列及所有 $\psi \in \mathbb{E}\{t\}$ 均成立）后可知，当 t 足够小时，有

$$u(0,z) = \sum_{p\geq 0} \frac{\partial^p_{\tilde{m},t}\left(\frac{1}{1-t}\right)|_{t=0}}{p!} z^p = \sum_{p\geq 0} \frac{\tilde{m}_p\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(p)}|_{t=0}}{p!^2} z^p = \sum_{p\geq 0} [p]_{1/q}! z^p.$$

因此，$\hat{x}_2$ 在原点的某个邻域内定义了一个全纯函数。此外，考虑到 (1)，并利用柯西积分公式，可以写成

$$u(0,z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu|=\rho} \frac{1}{\nu(1-\nu)} \sum_{n\geq 0} (1/q;1/q)_n \left(\frac{z}{(1-1/q)\nu}\right)^n d\nu,$$

当 $\rho > 0$ 足够小时，该式在 $z = 0$ 的某个邻域内成立。此时，与引理3 [7], 类似，我们应用海涅变换公式（[6], 第 1.4 节；另见命题 2 [7]），将前述表达式写成如下形式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\nu|=\rho} \frac{1}{\nu(1-\nu)} \frac{(1/q;1/q)_\infty (z/((q-1)\nu);1/q)_\infty}{(qz/((q-1)\nu);1/q)_\infty} \sum_{p\geq 0} \frac{(qz/((q-1)\nu);1/q)_p}{(z/((q-1)\nu);1/q)_p (1/q;1/q)_p} \frac{1}{q^p} d\nu.$$

对于每个 $z \neq 0$，函数 $\nu \mapsto$ $\frac{1}{(qz/((q-1)\nu);1/q)_\infty}$ 在 $\mathbb{C}$ 中是亚纯函数，其简单极点位于

$\nu_p = \frac{qz}{(q-1)\,q^p}$ 对每个 $p \geq 0$ 都成立。由留数原理可得

$$\begin{aligned} u(0,z) &= (1/q;1/q)_\infty \sum_{p\geq 0} \frac{1}{1-\frac{qz}{(q-1)q^p}} \mathrm{Res}_{\nu=\nu_p} \frac{1}{(qz/((q-1)\nu);1/q)_\infty} \frac{1}{\nu} \\ &\qquad \times (q^{p-1};1/q)_\infty \sum_{j\geq 0} \frac{(q^p;1/q)_j}{(q^{p-1};1/q)_j (1/q;1/q)_j q^j} \\ &= (1/q;1/q)_\infty \sum_{p\geq 0} \frac{1}{1-\frac{qz}{(q-1)q^p}} \mathrm{Res}_{\nu=\nu_p} \frac{1}{(qz/((q-1)\nu);1/q)_\infty} \frac{1}{\nu} \frac{(q^{p-1};1/q)_\infty (q^p;1/q)_p}{(q^{p-1};1/q)_p (1/q;1/q)_p q^p} \\ &= (1/q;1/q)_\infty \sum_{p\geq 0} \frac{1}{1-\frac{qz}{(q-1)q^p}} \mathrm{Res}_{\nu=\nu_p} \frac{1}{(qz/((q-1)\nu);1/q)_\infty} \frac{1}{\nu} \frac{(1/q;1/q)_\infty (q^p;1/q)_p}{(1/q;1/q)_p q^p} \\ &= (1/q;1/q)_\infty \sum_{p\geq 0} \frac{1}{1-\frac{qz}{(q-1)q^p}} \frac{1}{(q^p;1/q)_p (1/q;1/q)_\infty} \frac{(1/q;1/q)_\infty (q^p;1/q)_p}{(1/q;1/q)_p q^p}, \end{aligned}$$

由此我们得出

$$u(0,z) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{1-\frac{qz}{(q-1)q^p}} \frac{(1/q;1/q)_\infty}{(1/q;1/q)_p} \frac{1}{q^p}.$$

注意到对于所有 $p \geq 0$、$\sum_{p\geq 0} 1/q^p < \infty$，$(1/q;1/q)_\infty \leq (1/q;1/q)_p$，并且

$$\left| 1 - \frac{qz}{(q-1)q^p} \right| \geq 1 - \frac{q|z|}{q-1} = 1 - \frac{|z|}{1-1/q}.$$

函数 $u(0,z)$ 可在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ 中解析延拓，并且在无穷远处具有多项式增长（因此 $q-$具有 s 阶的指数增长），沿方向 $\theta \neq 0$ 模 2π。□

参考文献

[1] W. Balser，《亚纯常微分方程的形式幂级数与线性系统》，Universitext，施普林格出版社，纽约，2000 年。xviii+299 页。

[2] W. Balser、M. Yoshino，《具有常系数的非齐次偏微分方程形式幂级数解的 Gevrey 阶》，Funkcial. Ekvac. 53，第 3 期（2010），411–434。

[3] T. Dreyfus，使用 Borel-Laplace 求和构造 q-差分方程的亚纯解，Int. Math. Res. Not. 2015，第 15 期（2015），6562–6587。

[4] T.Dreyfus，A. Eloy，$q-$具有双斜率的 $q-$差分方程的 Borel-Laplace 求和，J. Difference Equ. Appl. 22，第 10 期（2016），1501–1511。

[5] T. Dreyfus，A. Lastra，S. Malek，关于具有全纯系数的某些线性偏 q-差分与微分方程的多尺度分析，Adv. Difference Equ. 2019，论文编号 326（2019），42 页。

[6] G. Gasper、M. Rahman，《基本超几何级数》，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。

[7] K. Ichinobe、S. Michalik，关于具有常系数线性$q-$差分-微分方程形式解的可求和性与收敛性，arXiv:2301.10331，2023年。[8] J. Jim´enez-Garrido、S. Kamimoto、A. Lastra、J. Sanz，借助非零邻近阶研究 Carleman 全纯类中的多重可求和性，J. Math. Anal. Appl. 472，第1号（2019），627–686。[9]A. Lastra、S. Malek，关于具有不规则奇点的奇异摄动 $q-$Gevrey 差分- $q-$微分问题的 Gevrey 渐近性，Abstr. Appl. Anal. 2012（2012），文章编号860716，共35页。[10]A. Lastra、S. Malek，关于某些线性 $q-$差分-微分方程的参数多层$q-$Gevrey 渐近性，Adv. Difference Equ. 2015，论文编号344（2015），共52页。[11] A. Lastra、S. Malek，关于某些线性 $q-$Gevrey 差分$q-$微分初值 Cauchy 问题的多尺度 Gevrey 与 Gevrey 渐近性，J. Difference Equ. Appl. 23，第8号（2017），1397–1457。[12] A. Lastra、S. Malek、J. Sanz，关于具有 Fuchs 型与不规则奇点的线性 $q-$差分-微分方程的 $q-$渐近性，J. Differential Equations 252，第10号（2012），5185–5216。[13] A. Lastra、S. Malek、J. Sanz，奇异摄动线性偏微分方程的强正规多层解，Results Math. 70，第3–4号（2016），581–614。[14] A. Lastra、S. Michalik、M. Suwi´nska，某些广义矩偏微分方程形式解的可求和性。Results Math. 76，第1号（2021），论文编号22，共27页。[15] A. Lastra、S. Michalik、M. Suwi´nska，某些广义矩偏微分方程形式解的估计，J. Math. Anal. Appl. 500，第1号（2021），论文编号125094，共18页。[16] A. Lastra、S. Michalik、M. Suwi´nska，一族广义矩积分-微分方程形式解的可求和性，Fract. Calc. Appl. Anal. 24（2021），1445–1476。[17] A. Lastra、S. Michalik、M. Suwi´nska，一族广义奇异摄动矩微分方程形式解的多重可求和性，Results Math. 78，第1号（2023），论文编号49，共31页。[18] M. Loday-Richaud，《发散级数、可求和性与复兴。II. 简单可求和性与多重可求和性》，数学讲义，2154。Springer，2016年。[19] S. Malek，关于某个线性初值问题 $q-$类比问题的参数 Gevrey 渐近性，Funkcial. Ekvac. 60，第1号（2017），21–63。[20] S. Malek，关于具有 Fuchs 型与不规则时间奇点的奇异摄动问题的一个部分 $q-$类比，Abstr. Appl. Anal. 2020（2020），1–32。[21] S. Malek，某个线性 $q-$差分-微分 Cauchy 问题的渐近性与合流，J. Geom. Anal. 32，第3号（2022），论文编号93，共63页。

[22]F. Marotte、C. Zhang，解析线性差分方程形式解的形式幂级数的多重可求和性，Ann. Inst. Fourier 50，第 6 期（2000），1859–1890。[23] J.-P. Ramis、J. Sauloy、C. Zhang，线性差分方程解的渐近展开与可求和性，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342，第 7 期（2006），515–518。[24] J.-P. Ramis、J. Sauloy、C. Zhang，差分方程的局部解析分类，Ast´erisque 355。巴黎：法国数学学会（SMF）vi，2013。[25]J. Sanz，形式幂级数的渐近分析与可求和性，《微分方程的解析、代数与几何方面》，199–262，Trends Math.，Birkh¨auser/Springer，Cham，2017。[26] H. Tahara，借助指数函数的拉普拉斯变换与博雷尔变换的类比，Ann. Inst. Fourier 67，第 5 期（2017），1865–1903。[27] H. Tahara，关于某些线性差分-微分方程形式解的可求和性，Funkc. Ekvacioj 63，第 2 期（2020），259–291。[28] H. Tahara、H. Yamazawa，某些线性差分-微分方程形式解可求和性的类比，Opuscula Math. 35，第 5 期（2015），713–738。[29] V. Thilliez，按平坦超可微函数作除法与扇区延拓，Results Math. 44（2003），169–188。[30] L. di Vizio、C. Zhang，关于求和与合流，Ann. Inst. Fourier 59，第 1 期（2009），347–392。[31] C. Zhang，借助 Jacobi θ 函数的博雷尔-拉普拉斯变换，C. R. Acad. Sci. Paris，S´ér. I，Math. 331，第 1 期（2000），31–34。[32] C. Zhang，关于 Jackson 的伽马函数，Aequationes Math. 62，第 1–2 期（2001），60–78。