arXiv:2304.09300v1 [math.GT] 18 Apr 2023

# 圆上的纤维丛的相对三分解

Rudy Dissler

2023年4月20日

**摘要**

对于圆上的一个定向四维纤维丛，我们从纤维的缝合海加德分解构造一个相对三分解。我们给出一种算法，利用纤维的缝合海加德图，显式构造相应的相对三分解图。作为应用，我们将这些相对三分解图与已有图示粘合，以还原经三分解的闭纤维丛（其底空间为 $S^1$ ）和经三分解的旋转流形，并为四维开书分解提供三分解。

## 1 引言

Gay 和 Kirby 的三分解理论将闭光滑 4 维流形描述为由简单部分拼接而成：以适当方式粘合在一起的 4 维 1-柄把手体。Gay 和 Kirby 确立了存在性与唯一性（相差一次稳定化操作）的结果，并率先将这一概念推广到相对情形，从而提出了紧致 4 维流形的相对三分解概念 [GK16]。随后，Castro、Gay 和 Pinz´ón-Caicedo 在 [CGPC18a] 和 [CGPC18b], 中发展了相对三分解理论，并像闭情形一样确立了存在性与唯一性（相差一次稳定化）的结果。文献中的闭三分解流形实例涵盖了从 [GK16] 或 [MZ17], 中的经典低亏格三分解，到更复杂的构造，例如 Koenig 的圆上的纤维丛三分解 [Koe17], 、Williams 的曲面上的曲面丛三分解 [Wil20], ，以及 Meier 的旋转流形三分解 [Mei17]。在相对情形中，既有 [Cas16], 中 $B^4$ 或 $I \times S^3$ 的相对三分解等简单实例，也有 [CGPC18a], 中的 2-球面上的圆盘丛，或 [KM20]中的曲面补空间等更复杂的实例。在这两种情形下，这些具体实例都至关重要：它们不仅能建立直觉，也为尚待解决的问题提供答案（例如，Meier 的工作后来被用于 [Isl21]，构造出同一流形的亏格相同的三分解，而这些三分解实际上需要经过稳定化后才能彼此同痕）。本文旨在构造另一类相对三分解：紧致的圆上的纤维丛的相对三分解，以呼应 Koenig 在闭情形下的构造 [Koe17]。

我们的构造具有双重意义。首先，我们受到 [Koe17]，的启发，利用纤维的缝合海加德分解，以一种非常初等的方式构造相对三分解。因此，这也是一项相当不错的相对三分解操作练习，因为它展示了非空边界所带来的复杂性，并且能够相当精确地直观呈现其中发生的情况。其次，只要边界所诱导的分解一致，相对三分解就可以粘合在一起 [CO17]。这将产生所得空间的一个（相对）三分解。 [CO17] 或 [KM20] 利用这一事实，通过粘合其不同部分的相对三分解，构造闭流形的三分解。在本文中，我们将利用相对三分解的圆上的纤维丛，构造闭纤维丛的三分解、4 维开书以及旋转流形。

让我们聚焦于我们的丛：底空间是一个圆，而纤维是一个边界非空的紧致三维流形。核心思路是考察纤维的一个缝合海加德分解，该分解在丛的单值化作用下要么保持不变，要么发生翻转（粗略地说，在第一种情况下，单值化作用将分解的每个压缩体映射到其自身；在第二种情况下，则会将两个压缩体彼此翻转）。从这个特定的缝合海加德分解出发，我们将推导出一个

丛的相对三分解：将该分解所给出的纤维分解与将底空间分解为若干区间结合起来，并采用管化技术。我们还将证明，纤维总是存在一个在单值化作用下保持不变的缝合海加德分解。因此，总是存在一个保持不变的缝合海加德分解，可以据此推导出相对三分解；不过，我们也考察了翻转分解的情形，事实上还从这一情形开始，因为它更简单，并且能产生亏格更低的三分解。纤维的边界可以是不连通的，但单值化作用在其各个分支上的作用会使相对三分解亏格的计算变得复杂。这些结果总结在以下定理中。

**定理 1.1.** 设 $M$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的3维流形，且 $\phi$ 是 $M$ 的一个自微分同胚。那么 $M$ 存在一个被 $\phi$ 保持不变的缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$；也就是说，存在 $M$ 的一个环境同伦，将 $C_1$ 映至 $\phi(C_1)$，并将 $C_2$ 映至 $\phi(C_2)$。

**注1.2.** 定理 1.1 可以通过三角剖分来证明，但在我们的证明中，我们将借助莫尔斯函数，坚持采用微分范畴的方法。

**定理1.3.** 设 $M$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的3维流形，且 $\phi$ 是 $M$ 的一个保定向自微分同胚。设 $X$ 是一个以 $M$ 为纤维、单值化为 $\phi$ 的圆上的光滑定向丛。假设 $M$ 存在一个被 $\phi$ 翻转的缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$，其中 $S$ 是一个具有 $b$ 个边界分支且欧拉示性数为 $\chi(S)$ 的紧曲面。那么 $X$ 存在一个相对三分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，其中 $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ 的欧拉示性数为$3(\chi(S) - b)$。

**定理1.4.** 设 $M$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的3维流形，且 $\phi$ 是 $M$的一个保持定向的自微分同胚。设 $X$ 是以$M$ 为纤维、以 $\phi$为单值化的圆上的光滑定向丛。那么 $M$ 存在一个在 $\phi$作用下保持不变的缝合海加德分解。给定这样一个分解，记其海加德曲面为 $S$，其边界分支数为 $b$，欧拉示性数为 $\chi(S)$。那么 $X$ 存在一个相对三分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，其中 $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ 的欧拉示性数为$6(\chi(S) - b)$。

本文的组织结构如下。第2节回顾紧致三维流形的缝合海加德分解、紧4维流形的相对三分解及其相关图示的概念。读者可参阅 [CGPC18a] 和 [CGPC18b]，以了解更为全面的论述。第3节中，我们转而讨论三维情形，以证明定理1.1；该定理表明，我们总能找到一个纤维的缝合海加德分解，使其在单值化作用下保持不变（至同痕）。第4节中，只要纤维存在一个缝合海加德分解，且该分解在丛的单值化作用下保持不变或被翻转，我们便构造圆上的纤维丛的相对三分解。我们计算这些相对三分解的参数，并给出定理1.3和定理1.4更精确的表述。第5节中，我们描述相应的图示。第6节中，我们使用粘合技术，从相对三分解图构造若干类闭流形的三分解图。首先，我们重新得到[Koe17], 中的圆上的三分解闭纤维丛，接着得到 [Mei17]中的三分解旋转流形；最后，我们给出一类新的三分解：纤维为边界是环面的三维流形的四维开书分解。具体而言，我们从纤维的亏格为 $g$的缝合海加德图出发，明确导出该开书分解的一个$(6g + 4)$三分解图。

# 2 背景

我们用 $F_{g,b}$ 表示一个亏格为 $g$、具有 $b$ 个边界分支的紧致连通曲面。若存在 $M$ 的一个环境同痕，将 $M_i$ 映至 $M_i'$，则称流形 $M = \cup M_i$ 和 $M = \cup M_i'$ 的两个分解是同痕的。

**定义 2.1**。设 $S$ 为具有非空边界的紧致连通曲面。取乘积 $S \times [0, 1]$，并沿 $S \times \{0\}$ 上一族 $\alpha$ 互不相交且非平凡的简单闭曲线附加三维 2-把手。将所得的紧致连通 3维流形记为 $C$。我们称 $C$ 为压缩体，并定义：

- 其正边界 $\partial_+ C$ 为 $S \times \{1\}$;
- 其负边界 $\partial_- C$ 为 $\partial C \setminus \big((\partial S \times ]0,\ 1]) \cup \partial_+ C\big)$。

我们称集合 $\alpha$ 为与 $C$对应的 $S$ 切割系统。

因此， $\partial_- C$ 可通过沿曲线 $\alpha$ 压缩 $\partial_+ C$ 得到。本文中，我们只考虑没有闭分支的负边界。在这种情况下，压缩体是一个标准把手体，其边界带有固定的分解。

**注 2.2.** 我们也可以反向进行这一构造：从其负边界 $\partial_- C = F$（一个紧致的、可能不连通的曲面）出发，取乘积$F \times [0,1]$，并沿 $F \times \{1\}$ 添加三维 1-柄，使所得的 3维流形 $C$连通。从这一角度看，负边界为 $\partial_- C = F \times \{0\}$，而正边界$\partial_+ C$ 则定义为 $\partial C \setminus \big((F \times \{0\}) \cup (\partial F \times [0,1])\big)$ 的闭包（见图 1）。

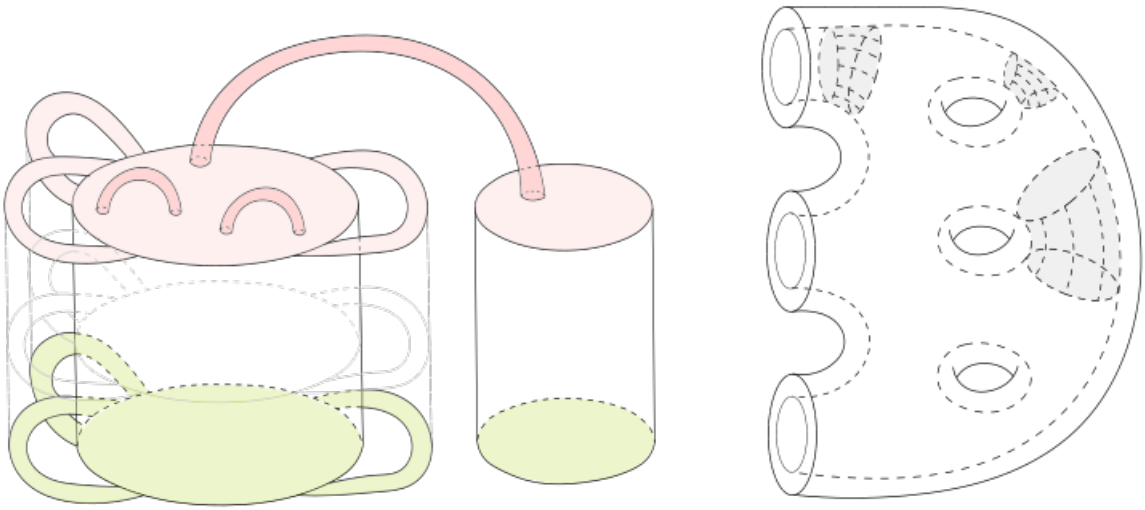

图 1：压缩体的两种表示左：负边界为绿色，正边界为粉色；1-把手为深粉色。右：正边界为实线，负边界为虚线；2-把手为灰色

我们将使用具有压缩体结构的把手体来构造具有非空边界的紧致三维流形的分解。为此，我们需要缝合流形这一概念，该概念由 Gabai 在 [Gab83] 中引入。下文中，我们只保留必要的理论内容。

**定义 2.3**。 设 $M$ 为具有非空边界的紧致、光滑、连通三维流形。 $M$ 的缝合海加德分解是一个分解 $M = C_1 \cup_S C_2$，其中:

- 交集 $S = C_1 \cap C_2$ 是具有非空边界的紧致连通曲面;
- $C_1$ 和 $C_2$ 是具有压缩体结构的把手体，且 $\partial_+ C_1 = -\partial_+ C_2 = S$。

我们称 $M$ 的缝合海加德分解是平衡的，当且仅当 $\partial_- C_1 \simeq \partial_- C_2$。

**注记 2.4.** $M$ 的缝合海加德分解会诱导出 $\partial M$ 的一个分解，将其分为两个边界非空的紧曲面 $S_1$ 和 $S_2$，以及一组有限的环带 $\cup_i A_i$，它们将 $\partial S_1$ 的每个分支连接到 $\partial S_2$的一个分支。我们称这样的分解为 $\partial M$的缝合分解 。

**注记 2.5.** 必然有 $\cup_i A_i \simeq (\partial S_1 \times [0,1]) \simeq (\partial S_2 \times [0,1])$。 $A_i$ 上的一条与 $\partial S_1$ 的某个分支同痕的曲线称为该分解的一条缝合曲线。本文有时无需区分曲面 $S$ 的缝合分解与沿公共边界粘合两个紧曲面所得的分解。在这种情况下，我们也将后者称为 $S$的缝合分解。

现在我们转向 4 维。我们只简要定义相对三分解；关于证明和更多细节，请参阅 [Cas16], [CGPC18a] 和 [CGPC18b]。

**定义 2.6.** 紧致、连通、光滑 4 维流形 $X$ 的相对三分解是一个分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，满足：

- 每个 $X_i$ 都是一个 4 维把手体，即 $X_i \simeq \natural^{k_i}(S^1 \times B^3)$，其中 $k_i$；
- 三重交 $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = S$ 是带边界的紧致连通曲面；
- 每个交 $\big(X_i \cap X_j\big) \cap \partial X$ 都与给定的紧曲面 $P$微分同胚；
- 每个二重交 $X_i \cap X_j = (\partial X_i \cap \partial X_j)$ 都是一个把手体 $C_{i,\ j}$ 其压缩体结构由 $\partial_+ C_{i,\ j} = S$ 和 $\partial_- C_{i,\ j} = \big(X_i \cap X_j\big) \cap \partial X \simeq P$定义；
- 每个 $X_i \cap \partial X$ 都与 $P \times I$微分同胚。定义 2.6

给出了 $\partial X$ 的如下分解：

- 三个与 $P \times I$微分同胚的集合，它们粘合在一起构成一个圆上的 $P$纤维丛；
- 实心环面 $\partial P \times I \times I$ 以平凡方式粘合，从而填满丛的每个边界分支。

这是 $\partial X$的一个开书分解，其页为 $P$，绑定为 $\partial P \simeq \partial S$。

我们称三重交为三分解的中心曲面。若 $X$ 的边界连通，则一个（$g, k_1, k_2, k_3, p, b$）相对三分解，是指中心曲面亏格为 $g$ 且有 $b$ 个边界分支、由亏格为 $k_i$ 的四维把手体以及亏格为 $p$的页构成的相对三分解（若所有 $k_i$ 都等于 $k$，则简记为一个（$g, k, p, b$）相对三分解）。若 $\partial X$不连通，则页的数量与 $\partial X$中的分支数量相同。在这种情况下，我们将对 $p$ 和 $b$使用多重指标，并注意到 $b$ 中指标的总和必须等于中心曲面的边界分支数。

缝合海加德分解和相对三分解的一个重要特征是，它们都可以通过图示来描 e desc述，正如海加德分解和三分解一样。

**定义 2.7**。缝合海加德图是一个三元组 $(S,\ \alpha,\ \beta)$，其中 $S$是一个带边界的紧致连通曲面，$\alpha$ 和 $\beta$ 是 $Int(S)$ 中两组互不相交的非平凡简单闭曲线，并且沿每组曲线压缩 $S$ 都不会产生任何无边界分支。

因此，每组曲线都对应于某个压缩体的切割系统，而最后一个条件确保该压缩体同时也是一个把手体。由此，缝合海加德图定义了一个带有缝合海加德分解的 3维流形。我们也可以逆向进行：给定一个缝合海加德分解，通过令 $S$ 为交集$C_1 \cap C_2$，将 $\alpha$（分别为 $\beta$）作为定义 $C_1$（分别为 $C_2$）的切割系统，从而得到一个缝合海加德图。事实上，缝合海加德图（在曲面的微分同胚以及每个切割系统内曲线的把手滑动意义下）与缝合海加德分解（在微分同胚意义下）之间存在一一对应关系。

**例 2.8**。给定一个 Heegaard 图 $(\Sigma,\ \alpha,\ \beta)$（与闭三维流形 $M$相关），考虑缝合海加德图 $(S,\ \alpha,\ \beta)$，其中 $S$ 是从 $\Sigma$ 中去掉与 $\alpha$ 和 $\beta$ 曲线不相交的 $b$ 个圆盘的内部所得的曲面。如果 $b = 1$，我们得到一个与去掉一个三维球内部后的 $M$ 相关的缝合海加德图；如果 $b = 2$，我们得到一个与去掉一个实心环面内部后的 $M$ 相关的缝合海加德图。如果 $b = 2$，并在$\alpha$或 $\beta$中加入一条与边界分支平行的曲线，我们再次得到去掉一个三维球内部后的 $M$；如果 $b = 2$，并在每个集合中加入一条与边界分支平行的曲线，所得结果是去掉两个不相交三维球内部后的 $M$。

**定义 2.9**。 标准缝合海加德图是 $S^3$ 和 $S^1 \times S^2$ 的标准属一海加德图与一个具有非空边界的紧曲面 $F_{p,b}$的连通和。

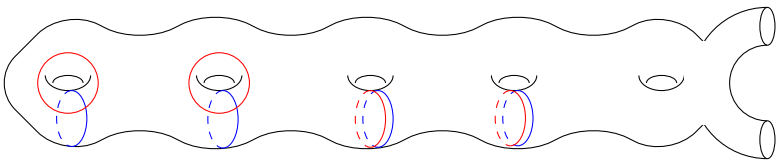

图 2：标准缝合海加德图

**定义 2.10**。 相对三分解图是一个 4 元组 $\{S, \alpha, \beta, \gamma\}$，其中每个三元组 $\{S, \alpha, \beta\}$、$\{S, \beta, \gamma\}$、$\{S, \alpha, \gamma\}$ 都与涉及同一紧曲面 $P \simeq F_{p,b}$ 的标准缝合海加德图经手柄滑动微分同胚。

相对三分图与相对三分解的 4 维流形之间存在一一对应关系：前者视为每个曲线族 $\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$ 内曲线的把手滑动以及 $S$ 的微分同胚下的等价类，后者视为微分同胚下的等价类；参见 [CGPC18a]。如果一个相对三分解图对应于一个相对三分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，则每个由三分解曲面和两组曲线组成的缝合图，都对应于其中一个 $\left(X_{i-1} \cap X_i\right) \cup \left(X_i \cap X_{i+1}\right)$ 的缝合海加德图。

# 3 保持单值化的分解 M

我们要证明，为了找到一个由单值化保持的缝合海加德分解，无须对 $M$ 作任何假设。这正是定理 1.1 的内容，下面我们将证明该定理。为此，我们需要一些预备结果。

**命题 3.1.** 给定 $\partial M$ 的一个缝合分解，存在一个诱导该分解的缝合海加德分解$M = C_1 \cup_S C_2$ 。

证明. 我们将使用由莫尔斯函数给出的手柄分解。我们将 $M$ 的边界分解记为 $\partial M \simeq S_1 \cup (\partial S_1 \times [0,1]) \cup S_2$，并考虑 $\partial M$ 的一个领域邻域 $\nu$，其中 $\psi$ 是一个嵌入，满足 $\psi\big((S_1 \cup (\partial S_1 \times [0,1]) \cup S_2) \times \{0\}\big) = \partial M$。我们在 $\partial M$ 上定义如下光滑函数 $f$：

- 在 $\psi(S_1 \times \{0\})$ 上，$f \equiv -1$；在 $\psi(S_2 \times \{0\})$ 上，$f \equiv 4$；
- 对于 $((x, u), 0)$，$\in (\partial S_1 \times [0,1]) \times \{0\}$，$f(\psi((x, u), 0)) = g(u)$，其中 g 是一个从 $[0,1]$ 到 $[-1,4]$ 的光滑且严格递增的函数，满足：$g(0) = -1$，$g(1) = 4$，且 $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1) = 0$ 对于 $k > 0$。

然后，我们通过以下方式将 $f$ 扩展为 $\nu$ 上的光滑函数 $\tilde{f}$：

- $\tilde{f}(\psi(y, t)) = t - 1$对于 $(y, t) \in S_1 \times [0, 1/2]$，且 $\tilde{f}(\psi(y, t)) = -t + 4$对于 $(y, t) \in S_2 \times [0, 1/2]$;
- 对于 $\big((x, u)\ t\big) \in (\partial S_1 \times [0,1]) \times [0, 1/2]$，$\tilde{f}\big(\psi((x, u)\ t)\big) = th(u) + g(u)$，其中 $h$ 是一个从 $[0,1]$ 到 $[-1,1]$ 的光滑严格递减函数，满足：
  - $h(0) = 1$; $h(1/2) = 0$; $h(1) = -1$;
  - $h^{(k)}(0) = h^{(k)}(1) = 0$ for $k > 0$;
  - $-h'(u) < 2g'(u)$ for $0 < u < 1$.

˜那么 $f$ 是一个在 $\nu$上没有临界点的光滑函数，它将 $\psi(\partial M \times \{1/2\})$ 映到 $[-0.5, 3.5]$。˜由于 $\psi(\partial M \times \{1/2\})$ 嵌入在 $M$中，我们可以利用切片图将 $f$ 延拓到 $M$，最终在 $M$上得到一个在 $\nu$上没有临界点、且将 $M \setminus \nu$映到 $[-0.5, 3.5]$的光滑函数。我们可以对该函数作一般莫尔斯逼近，然后在其临界点附近（因此远离 $\nu$）对其进行修改，从而得到一个自指标莫尔斯函数 $F$。考虑一个指标为 0 的临界点。它对应于添加一个 0-柄，但由于 $M$ 是连通的，必定存在一个与之抵消的 1-柄。同样的论证也适用于 $F^{-1}(\{-1\}) = S_1$的各个分支，它们必须由 1-把手连接起来。因此，原像 $F^{-1}([-1, 3/2]) = C_1$ 微分同胚于由 $F^{-1}(\{-1\}) \times I$ 与 1-把手连成的整体：它是一个把手体，其压缩体结构由 $\partial_- C_1 = S_1$ 和 $\partial_+ C_1 = F^{-1}(\{3/2\}) = S$给出，其中 $S$ 是一个带边界的紧致连通曲面。对 $-F$应用同样的论证，我们看到 $C_2 = F^{-1}([3/2, 4])$ 也是一个把手体，其压缩体结构由 $\partial_- C_2 = S_2$ 和 $\partial_+ C_2 = F^{-1}(\{3/2\}) = S$给出。因此，$M = C_1 \cup_S C_2$是 $M$的一个缝合海加德分解，它诱导出 $\partial M$所要求的缝合分解。

□

**注记 3.2**。这些论证通常用于证明柄分解定理以及海加德分解的存在性（例如参见 [Kos13]）。我们只是将它们调整到了由边界的缝合分解所构造的情形。注意，对于某个度量，$f$的梯度可以在 $\psi(\partial S_1 \times [0, 1])$ 中与 $\partial M$ 平行，这对于理解 $F^{-1}([-1, 0])$ 是尊重缝合线的 $S_1$ 的加厚（可能还带有一些额外的 3维球）十分重要（参见 [BNR16]）。我们还请参阅 [Juh06]: 后者实际上涵盖了证明，但我们认为给出我们的版本很有用，因为 [Juh06] 侧重于平衡缝合海格图。在本文中，我们不需要 [Juh06], 的完整图示方法，但确实需要处理非平衡分解。

**定义 3.3.** 莫尔斯函数 $f\colon M \to [-1, 4]$ 与缝合海加德分解$M = C_1 \cup_S C_2$ 相容，如果：

- 我们有 $f^{-1}([-1, 3/2]) = C_1$、$f^{-1}([3/2, 4]) = C_2$，以及 $f^{-1}(3/2) = S$；
- $f$ 的指标为 0 和 1 的临界点属于 $C_1$，而指标为 2 和 3 的临界点属于 $C_2$。

现在我们证明，任意缝合海加德分解都可以由一个与之相容的莫尔斯函数给出。

**命题 3.4.** 若 $M = C_1 \cup_S C_2$ 是一个缝合海加德分解，则存在一个与之相容的莫尔斯函数。

证明。令 $V_1 = \partial_- C_1 \setminus \nu_1$，其中 $\nu_1$ 是 $\partial_- C_1$中 $\partial(\partial_- C_1)$的一个小正则邻域。考虑一个粘到 $V_1 \times [0, 1]$上的把手 $H$。记 $T$为 $V_1 \times [0, 1]$中 $H$的附着球面的一个正则邻域。于是，在（$V_1 \times [0, 1]$）$\cup H$上存在一个莫尔斯函数 $G$，使得在子集 $H \cup T$之外，$G(x, t) = t$，且只有一个临界点对应于 $H$的附着。将各个把手视为分别附着，我们把这样的函数组合成一个定义在 $V_1 \times [0, 1]$ 与该分解的 1-把手之并上的莫尔斯函数$F$，其指标为 1 的临界点对应于 1-把手的附着。对 $C_2$应用同样的论证，将其视为 $\partial_- C_2 \times I$ 与 1-把手之并，然后取相反的莫尔斯函数，得到一个莫尔斯函数，其临界点对应于 2-把手；该函数在与 $\partial M$ 的交集上等于 4，并且在 $S$上与 $F$ 一致。将这两个函数组合起来，就得到一个对应于 $C_1 \cup C_2$ 去掉$\partial S \times I$的一个正则邻域后的手柄分解的莫尔斯函数。最后，在 $\partial V_1 \times [0, 1]$ 上的函数值与命题 3.1 的莫尔斯函数在 $\partial(\partial_- C_1)$上定义的函数值之间进行插值，且不产生新的临界点，从而得到 $M$上所需的莫尔斯函数。

□

**命题 3.5**。若流形 $M = C_1 \cup_S C_2$ *and* $M = C_1' \cup_{S'} C_2'$ 的两个缝合海加德分解诱导出 $\partial M$ 的同一个缝合分解，那么经过有限次内部稳定化后，它们将同痕。

证明。利用命题 3.4，设 $f$（分别地，$f'$）是定义 $M = C_1 \cup_S C_2$（分别地，$M = C_1' \cup_{S'} C_2'$）的莫尔斯函数。我们可以假设 $f$ and $f'$ 在 $\partial M$ 的一个邻域内一致（见命题 3.4 的证明）。那么 Cerf理论给出一条广义有序Morse函数$\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ 的路径，从 $f = f_0$ 到 $f' = f_1$。由于 $f_0$ and $f_1$ 在 $\partial M$ 的一个正则邻域内没有临界点，我们可以假设各个 $f_t$' 的行为与之相应，并且它们在此邻域内与 $f_0$ and$f_1$ 一致，从而固定 $\partial M$ 的缝合分解。现在可以应用 Cerf理论和手柄分解的标准论证（见 [Juh06]）：随着 $t$ 从 0 变到 1，$f_t$ 将产生有限次临界点的出生与消亡，对应于稳定化和去稳定化，此外还会发生有限次把手滑动。

□

现在我们需要另一个命题，它依赖于更多组合论证，并将使我们能够完成定理 1.1 的证明。

**命题 3.6.** 若 $M$ 是一个紧致、定向、连通且带边界的 3 维流形，$\phi$ 是 $M$ 的一个自微分同胚，则存在 $\partial M$ 的一个缝合分解，该分解在一个与 $\phi$ 同痕的 $M$ 的微分同胚下保持不变。

证明。取 $\partial M$ 的一个分支 $\partial_1 M$，并选取一个圆盘 $D_1 \subset \partial_1 M$。现在，考虑 $\partial_1 M$ 在 $\phi$ 的作用下的轨道：

$$\{\partial_1 M, \dots, \partial_j M = \phi(\partial_{j-1} M) = \phi^{j-1}(\partial_1 M), \dots, \partial_s M = \phi^{s-1}(\partial_1 M) = \phi^{-1}(\partial_1 M)\}.$$

那么 $\phi^s(D_1)$ 不一定是 $D_1$，但我们可以将 $\phi_{|\partial M}$ 与 $\partial M$ 的一个微分同胚 $g$ 复合；该微分同胚在除 $\partial_1 M$ 以外的每个分支上都等于恒等映射，在 $\partial_1 M$ 上与恒等映射同痕，但会将 $\phi^s(D_1)$ 映至 $D_1$。由于 $g$ 在 $\partial M$ 上与恒等映射同痕，我们可以将其延拓为 $M$ 的一个与恒等映射同痕的微分同胚，仍记作 $g$。于是，$g \circ \phi$ 是一个与 $\phi$ 同痕的 $M$ 的微分同胚，并保持集合 $\{D_1, D_2 = \phi(D_1) \dots, D_s = \phi^{s-1}(D_1)\}$ 不变。通过为每个分支设置一个缝合分解：

$$\partial_j M = D_j \cup (\partial D_j \times [0,1]) \cup \overline{\left(\partial_j M \setminus (D_j \cup (\partial D_j \times [0,1])\right)}$$

我们得到一个缝合分解，它分解了 $\partial_1 M$ 的轨道，并且在 $g \circ \phi$ 的作用下保持不变。现在，我们可以将同样的论证应用于 $\phi$ 在 $\partial M$ 上作用所产生的每个轨道，因为 $g$ 保持这些轨道不变。由此，我们得到了所需的 $\partial M$ 的缝合分解。

□

定理 *1.1* 的证明。设 $\phi$ 是 $M$ 的一个自微分同胚。根据命题 3.6，我们可以假设总存在一个在 $\phi$ 的作用下保持不变的 $\partial M$ 的缝合分解（准确地说，是一个非平衡缝合分解，见注记 3.2）。于是，由命题 3.1，存在一个诱导该分解的缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$。现在，我们可以将 [Koe17] 的论证移植到缝合情形：像 $M = \phi(C_1) \cup_{\phi(S)} \phi(C_2)$ 也是 $M$ 的一个缝合海加德分解，其中涉及 $\partial M$ 的同一个分解。利用命题 3.5（以及稳定化的像是像的稳定化这一事实），我们可以得出结论：经过若干次内部稳定化后，总能得到一个在同痕意义下由 $\phi$ 保持不变的缝合海加德分解。

□

# 4 构造相对三分解

给定一个紧致、定向、连通的光滑 3维流形 $M$，其边界非空（但可能不连通），以及一个保定向自微分同胚 $\phi$，我们考虑纤维丛 $X = \big(M \times I\big)/\sim$，其中 $(x,\ 0) \sim (\phi(x),\ 1)$。于是 $X$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的 4 维流形（边界非空），我们希望为其构造一个相对三分解。

我们假设 $M$ 具有缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$，且该分解在 $\phi$ 下保持不变（即 $\phi(C_i) = C_i$），或被翻转（即 $\phi(C_i) = C_{i+1}$，其中指标模二计算）。我们用 $g$ 表示 $S$ 的亏格，用 $b$ 表示其边界分支数，即 $S \simeq F_{g,\ b}$。根据定理 1.1，我们总可以期望 $M$ 具有一个在同痕意义下被 $\phi$ 保持不变的缝合海加德分解（它仅在同痕意义下保持不变并无妨，因为同痕的单值化会产生微分同胚的丛）。

**注 4.1.** 单值化作用于 $\partial M$ 和 $\partial S$ 的分支；在这两种情况下，它都可以保持或翻转边界分支。除非另有说明，以下我们不对单值化如何作用于边界分支作任何假设。

## 4.1 情形1： $\phi$ 翻转 $M$的缝合海加德分解

在这种情况下，必有 $\partial_- C_1 \simeq \partial_- C_2$，即 $M = C_1 \cup_S C_2$ 是平衡的。我们可以将 $X$ 表示为一个竖直边相互粘合的矩形，如图 3 所示。水平线段对应于由 $t$ 参数化的区间 $I$ 。每条竖直线段都是 $M$ 的一个副本。竖直线段 $M \times \{0\}$ 和 $M \times \{1\}$ 按照 $\phi$ 进行粘合。

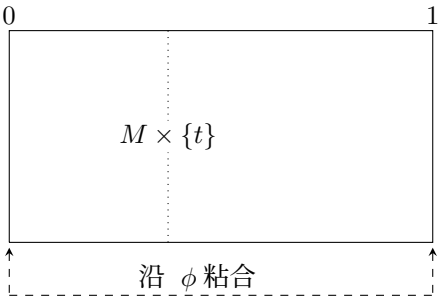


图 3： $X$的表示

接下来，我们根据 $(C_1 \cup_S C_2) \times \{t\}$ 划分每个副本 $M \times \{t\}$。我们进一步划分水平线段 $I$，同时注意到 $C_i$ 在 $0 \sim 1$ 处与 $C_{i+1}$ 识别，从而得到图 4 所示的分解。

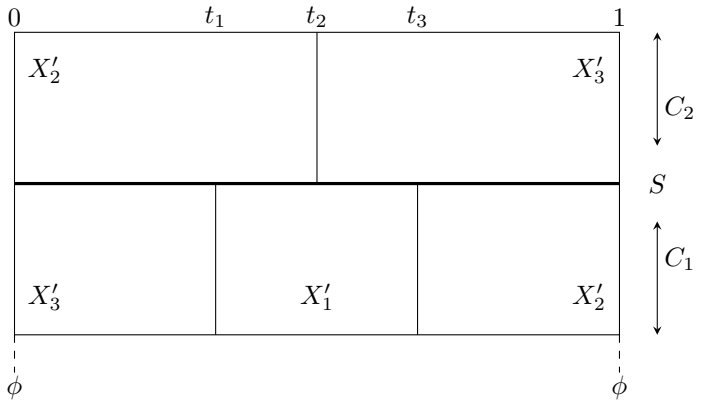


图 4： $X$的分解

现在，图 4 中的每个 $X_k'$ 都与一个 $C_i \times I$ 微分同胚。由于这些 $C_i$ 是三维把手体，因此这些 $X_k'$ 是四维把手体。但三重交并不连通。因此，我们还需要完成一些工作：最后一步是在这些 $X_k'$ 的边界上钻出三组四维管 $I \times B^3$ ，然后将每组管分配给一个 $X_k'$，从而得到图 5 所示的最终分解。整体构造与闭情形相同（[Koe17]），但由于存在边界，我们设计这些管时必须更加谨慎。

让我们关注图 5 中分隔矩形的水平细彩色条带。每条条带表示一组 $b$ 4 维管，也就是 $I \times B^3$ 的副本。因此，每根管都可以看作一族由 $t$ 参数化的 3维球 $\{B_t\}$。我们要求，对于每个 $t$， $B_t$ 与 $S \times \{t\}$ 相交。

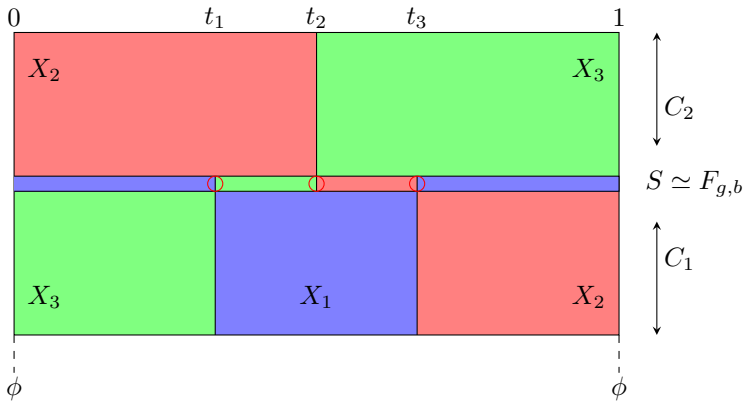


图 5： $X$的三分解，情形1

Now 我们必须指定如何。例如，如果每个 $B_t$ 在曲面的内部与 $S \times \{t\}$ 相交
ages $(X_i \cap X_j) \cap \partial X$ 永不相连。
ce, the p

- 我们从一个管 $[t_1, t_2] \times B^3$开始。我们选取 $\partial S$的一个分支，并将其称为 $\partial_1 S$。接着，对每个 $t \in [t_1, t_2]$，定义一个球 $B_t$，使其与 $S \times \{t\}$沿一个圆盘相交，与 $\partial_1 S \times \{t\}$沿一个闭区间相交，并与 $\partial M \times \{t\}$沿一个圆盘相交。由此，我们构造出一条三维球路径 $\{B_t^{3,1} \mid t \in [t_1, t_2]\}$。我们要求这条路径光滑，并将其设为第一个管 $T_{3,\ 1}$。我们以同样的方式在 $M \times [t_2, t_3]$中定义一个管 $T_{2,\ 1}$。
- 然后，我们通过将两个管 $\{B_t^{1,1} \mid t \in [t_3, 1]\}$ 和 $\{B_t^{1,1} \mid t \in [0, t_1]\}$ 在 $0 \sim 1$处粘合，构造一个商管 $T_{1,\ 1} = \big([t_3, 1] \cup_{0 \sim 1} [0, t_1]\big) \times B^3$。
- 我们施加以下条件：
  - all the tubes are disjoint;
  - $B_{t_1}^{1,1} \subset C_1 \times \{t_1\}$ and $B_{t_3}^{1,1} \subset C_1 \times \{t_3\}$;
  - $B_{t_2}^{2,1} \subset C_2 \times \{t_2\}$ and $B_{t_3}^{2,1} \subset C_1 \times \{t_3\}$;
  - $B_{t_1}^{3,1} \subset C_1 \times \{t_1\}$ and $B_{t_2}^{3,1} \subset C_2 \times \{t_2\}$;
  - for each $t_i < t < t_{i+1}$, $S \times \{t\}$ is transverse to $B_t^{k,1}$.
- 对于 $\partial S$ 的每个 $b$分支，我们以相同方式定义 $3b$ 管 $\{T_{1,1}...T_{1,b}\}$、$\{T_{2,1}...T_{2,b}\}$、$\{T_{3,1}...T_{3,b}\}$。我们令 $X_k = \big(X_k' \cup (\cup_{l \in [1,b]} T_{k,\ l})\big) \setminus Int(\cup_{i \neq k} \cup_{l \in [1,b]} T_{i,\ l})$。

非正式地说，构成每根管的三维球从 $\{t_i\}$ 完全包含于 $C_1 \times \{t_i\}$或 $C_2 \times \{t_i\}$的位置出发，随后横向移动至 $S$，到达其在 $\{t_{i+1}\}$ 中所占据的位置（见图 6）。这一切使我们得以为 $(X_i \cap X_j) \cap \partial X$ 得到一个紧曲面。

**备注 4.2**。 管的数量使页的边界分支数量与中心曲面（以及 $\partial X$ 的边界分支数量）相匹配。

**备注 4.3**。 这些 3维球在微分同胚意义下既不影响 $C_i$，也不影响曲面 $S$ 和$\partial_- C_i$。因此，我们将上文定义的 3维球族的内部之外的 $C_i$ 简称为 $C_i$，并将 $(S \times \{t\}) \setminus Int\big((S \times \{t\}) \cap \cup_{k,\ l} B^{k,\ l}_{,\ t}\big)$ 称为 $(S \times \{t\})$。

**命题 4.4**。 分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ 是 $X$ 的相对三分解。

证明。 我们只需检查分解中的各个部分是否与 2.6 中定义的部分相对应。

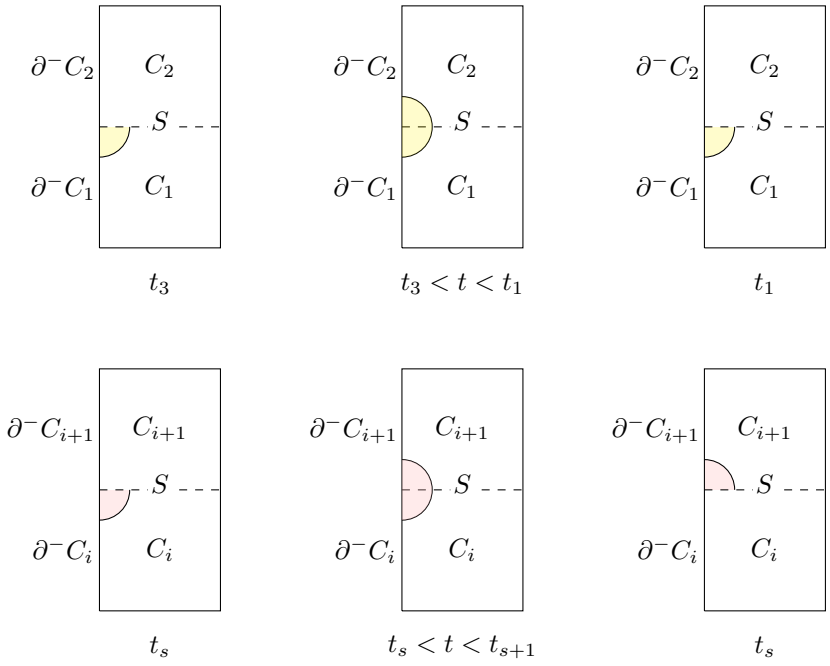


图6：压缩体中三维球位置的示意图黄色 $B_{1,\ell}$ 和粉色 $B_{2,\ell}$ 或 $B_{3,\ell}$

- 每个 $X_k$ 都是一个 4 维把手体 $C_i \times I$ 和 $b$ 4维 1-把手的并集 les （我们的管 $\cup_{l\in[1,b]} T_{k,\ell}$）。因此，每个 $X_k$ 都是一个四维把手体。

- 三重交 $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ 由三份 $S$ 组成（对于$i = 1$， $S \times \{t_i\}$ 分别对应 2、3），其边界分支通过 $3b$ 2 维 1-柄 $\left(B^k, \ell \cap (S \times \{t\})\right) \times I$相连，如图7和图8所示。因此， $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ 是一个边界非空的紧致连通曲面。

- 交集（$X_1 \cap X_2$）$\cap \partial X$ 是 $\partial_- C_1 \times \{t_3\}$ 与带的边界连通和（见图9和图10）。因此它也是一个紧曲面。其他交集（$X_2 \cap X_3$）$\cap \partial X$ 和（$X_3 \cap X_1$）$\cap \partial X$ 也以相同方式构造：这三个曲面彼此微分同胚。请注意，如果 $\partial M$ 不连通，它们也可能不连通。在这种情况下，它们的分支数与 $\partial X$ 相同（如果单值化将 $M$的两个不同边界分支粘合在一起，它也会相应地作用于各页）。

- 由以下部分组成：

  – $C_1 \times \{t_3\}$；– $S \times [t_1, t_2]$（一个三维把手体，因为 $S$ 有边界）；– $2b$ 连接上述把手体的三维 1- 柄；

它是一个三维把手体，我们将其称为 $C_{1,2}$（见图9）。此外，图10和图11展示了 $X_1 \cap X_2$ 边界的分解：

$$\partial(X_1 \cap X_2) = \left(X_1 \cap X_2 \cap X_3\right) \cup \left((X_1 \cap X_2) \cap \partial X\right)$$

这赋予了 $C_{1,2}$ 一个压缩体结构，其中 $\partial_+ C_{1,2} = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ 和 $\partial_- C_{1,2} = (X_1 \cap X_2) \cap \partial X$。

交集 $X_2 \cap X_3$ 和 $X_3 \cap X_1$ 的构造方式相同。

- 最后，我们得到：

$$X_1 \cup \partial X \simeq (\partial_- C_1 \times [t_1, t_3]) \cup \big((\cup_{l\in[1,b]} T_{1,l}) \cup \partial X\big) \simeq \big((X_1 \cap X_2) \cap \partial X\big) \times I$$

并且 $X_2 \cap \partial X$ 或 $X_3 \cap \partial X$ 以相同的方式构造。

因此， $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ 是 $X$的相对三分解。 □

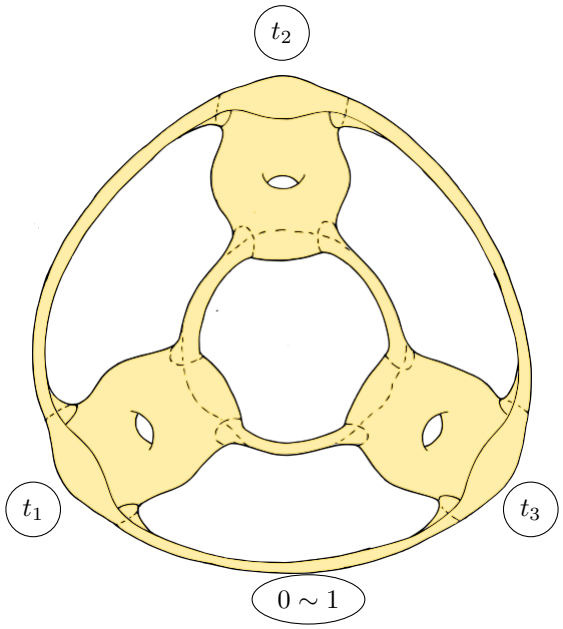


图7： $X_1 \cap X_2 \cap X_3$的示意图，情形1， $\phi$ 保持了 $\partial S$的各分支

现在我们可以证明以下结果（这是定理1.3一个更精确、但也稍显复杂的版本）。

**定理 4.5.** 设 $M$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的3维流形，且 $\phi$ 是 $M$的一个保定向自微分同胚。设 $X$ 是纤维为 $M$ 、单值化为 $\phi$的圆上的光滑定向丛。单值化通过置换作用于 $\partial M$的连通分支 $\{\partial^1 M, ..., \partial^{\ell_M} M\}$，我们将此作用记为$\sigma_{\phi,\ \partial M}$。假设 $M$具有一个被 $\phi$翻转的缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$ 。我们采用以下记号：

- 曲面 $S$ 的亏格为 $g$ ，有 $b$ 个边界分支；
- 我们记 $p$ 为 $\partial_- C_1 \simeq \partial_- C_2$各分支亏格之和；
- $\sigma_{\phi,\partial M}$的轨道为 $\{\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_{\ell_X}\}$，其中 $\ell_X$是$X$的边界分支数；我们记 $p_k$ 为 $\partial_- C_1$ （或等价地，$\partial_- C_2$）在 $\mathcal{O}_k$ 中的各分支亏格之和，并记 $b_k$ 为它们的边界分支数之和；我们记 $c_{\mathcal{O}_k}$ 为 $\partial_- C_1$（或等价地， $\partial_- C_2$）在 $\mathcal{O}_k$中的分支数；
- 由于 $\phi$ 也在每个轨道内对 $\partial S$ 的各分支作置换作用，我们记 $c_\phi^k$ 为给定 $\mathcal{O}_k$内的诱导轨道数，并记 $c_\phi = \sum_{k=1}^{\ell_X} c_\phi^k$ 为 $\phi$ 对 $\partial S$的各分支作用所产生的轨道总数。

那么 $X$就有一个（$G$， $k$； $P$， $B$）–相对三分解，其中：

- $G = 3g + 3b - c_\phi - 2$;

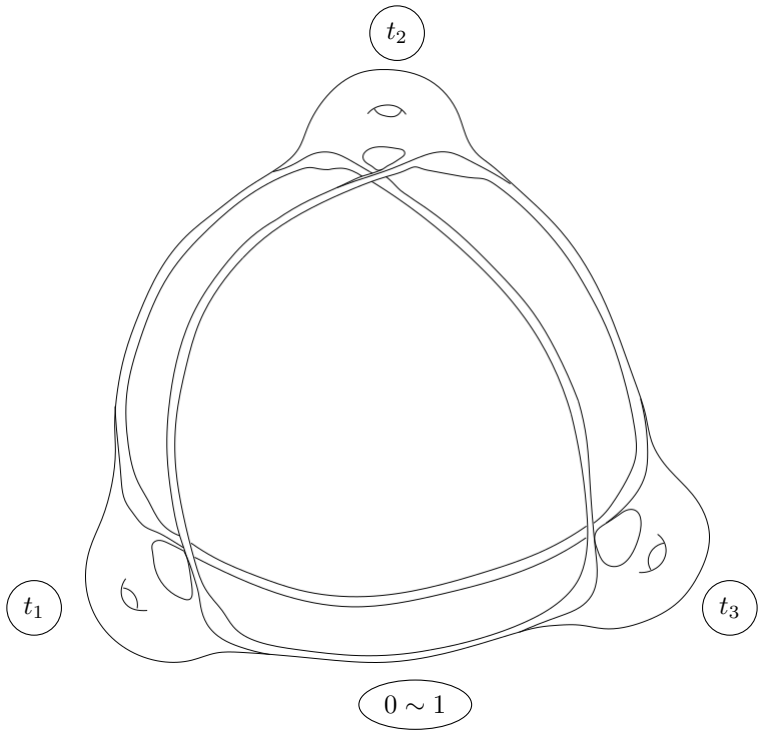


图8： $X_1 \cap X_2 \cap X_3$的视图，情形1，其中 $\phi$ 翻转了 $\partial S$的各个分支

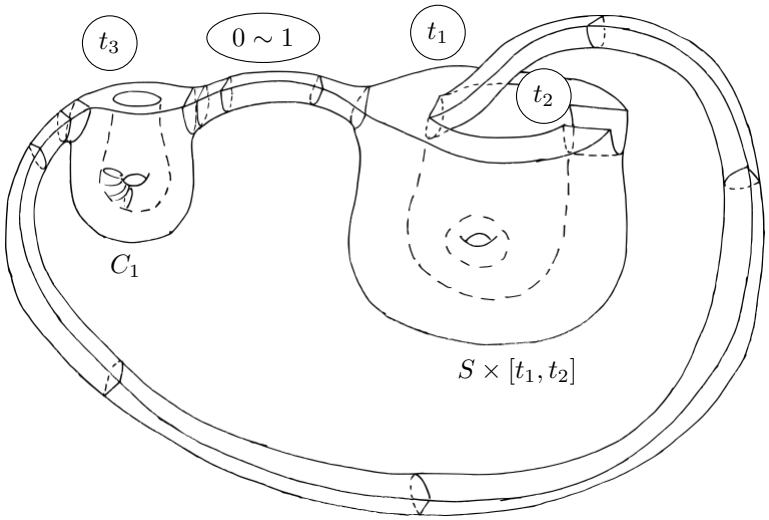


图9： $X_1 \cap X_2$的视图，情形1

- $k = g + p + 2b - 1$;
- $P = (P_k)^{1 \le k \le \ell_X}$，其中 $P_k = p_k + b_k - c_{\mathcal{O}_k} - c_\phi^k + 1$;
- $B = (B_k)^{1 \le k \le \ell_X}$，其中 $B_k = 2c_\phi^k$。

中心曲面的欧拉示性数为 $\chi = 3(\chi(S) - b)$。

*Proof.* 我们只需计算命题 4.4 中定义的三分解参数。每 h

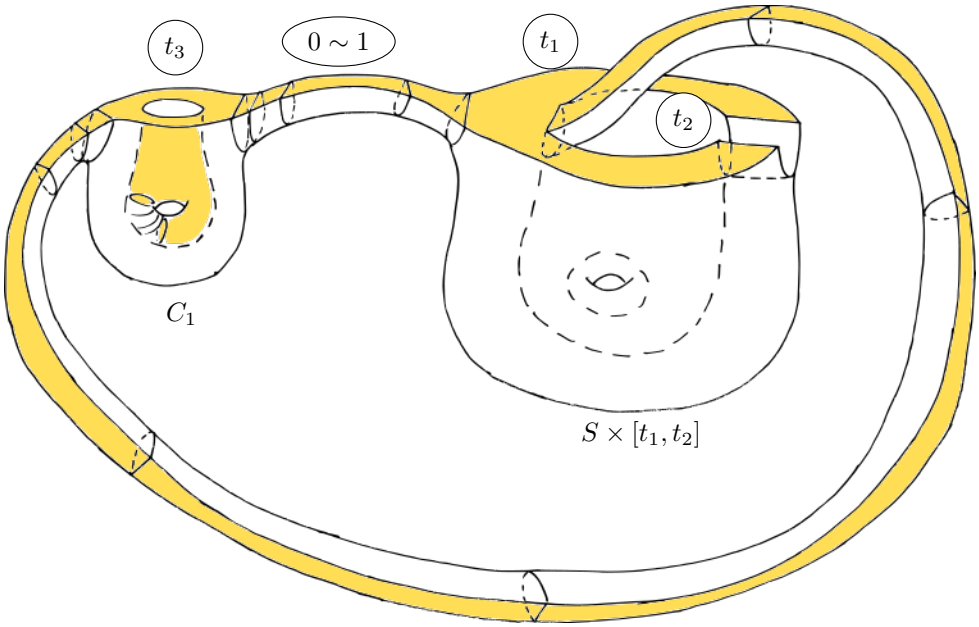


图10：页（$X_1 \cap X_2$）$\cap \partial X$，在 $X_1 \cap X_2$上以黄色标示，情形1

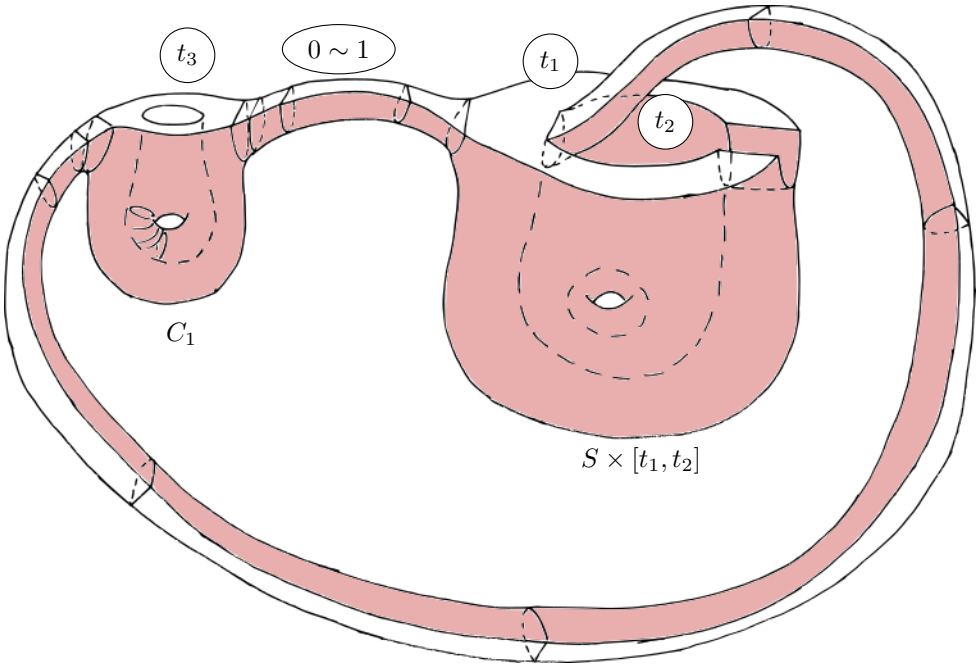


图11：在 $X_1 \cap X_2$上以粉色标示的中心曲面，情形1

$X_i$是由一个 $C_k \times I$（亏格为 $g+p+b-1$ 的四维把手体）和 $b$ 4 维 1-把手组成的并。因此 $k = g+p+2b-1$。为计算三重交的亏格和边界分支数以及各页的这些参数，我们使用它们的欧拉示性数 $\chi$。回想一下，在三角剖分曲面 $S$ 上沿两条相对边粘合一条带，会得到一个曲面 $S'$，其 $\chi(S') = \chi(S)-1$。由于中心曲面由三个 $S$ 副本通过 $3b$ 条带连接而成，我们得到其欧拉

特征数为 3($\chi(S)$ $-b$)。利用我们还有 $\chi(F_{G,B}) = 2-2G-B$这一事实，只需计算中心曲面的边界分支数，即可从 $\chi$ 推导出$G$ 。单值化通过置换作用于 $S$ 的边界分支。该置换的一个轨道恰好产生中心曲面的两个边界分支。因此，若以 $c_\phi$ 表示该置换的轨道数，则有 $B = 2c_\phi$，且有 $G = 3g + 3b - c_\phi - 2$。对于页面的每个分支的亏格 $P_k$ ，情况也相同。一个分支由属于同一轨道的 $\partial_- C_i$ 的 $c_{\mathcal{O}_k}$ 个分支构成，这些分支由 $b_k$ 条带连接，所得曲面具有 $B_k = 2c_\phi^k$个边界分支。于是得到 $P_k = p_k + b_k - c_{\mathcal{O}_k} - c_\phi^k + 1$。

□

**例 4.6**。 如果单值化保持 $S$ 的所有边界分支不变，且 $M$的边界连通，则得到 $X$的一个 $(3g+2b-2,$ $g+p+2b-1; p, 2b)$–相对三分解。

## 4.2 情形 2： $\phi$ 保持 $M$的缝合海加德分解

过程和记号与前一种情形相同。我们采用图 12 所示的分解。我们不再重述该分解确实是 $X$的相对三分解的证明，因为这基本上与命题 4.4 的证明相同。

我们仅概述一些事实。现在，压缩体的负边界不一定是微分同胚的。由于我们确实需要页 $(X_i \cap X_j) \cap \partial X$ 微分同胚，因此将区间 $I$ 分成六个子区间。因此，相对三分解的亏格将高于情形1，因为中心曲面将由六个 $S$ 的副本通过带连接而成。注意，单值化仍然可以翻转 $S$ 或 $M$的某些边界分支。

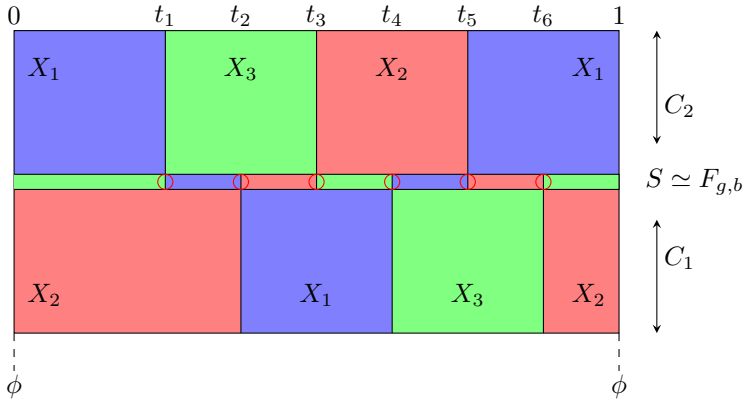


图 12： $X$的相对三分解，情形 2

**定理 4.7**。 设 $M$ 是一个光滑、紧致、定向、连通的3维流形， $\phi$ 是 $M$的一个保定向自微分同胚。设 $X$ 是一个以 $M$ 为纤维、单值化为 $\phi$的圆上的光滑定向丛。单值化通过置换 $\partial M$的连通分支 $\{\partial^1 M, ..., \partial^{\ell_M} M\}$而作用，我们将$\sigma_{\phi,\partial M}$此作用称为.....。设 $M = C_1 \cup_S C_2$是 $M$ 的一个由 $\phi$保持的缝合海加德分解。我们采用以下记号：

- 曲面 $S$ 的亏格为 $g$ ，有 $b$ 个边界分支；
- 我们用 $p_i$ 表示 $\partial_- C_i$各分支亏格之和；
- 我们将 $\sigma_{\phi,\partial M}$ 的轨道记为 $\{\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_{\ell_X}\}$，其中 $\ell_X$ 是 $X$ 的边界分支数；我们记 $p_{k,i}$ 为 $\partial_- C_i$ 在 $\mathcal{O}_k$ 内各分支的亏格之和，并记 $b_k$ 为它们的边界分支数之和；我们记 $c_{\mathcal{O}_k,i}$ 为 $\partial_- C_i$ 在 $\mathcal{O}_k$ 中的分支数；

- 由于 $\phi$ 还通过置换作用于每个轨道内 $\partial S$ 的分支，我们记 $c_\phi^k$ 为给定 $\mathcal{O}_k$ 内的诱导轨道数，并记 $c_\phi = \sum_{k=1}^{\ell_X} c_\phi^k$ 为 $\phi$ 作用于 $\partial S$ 的分支所得的轨道总数。

则 $X$ 具有一个$(G, k; P, B)$–相对三分解，其中：

- $G = 6g + 6b - c_\phi - 5$;
- $k = 2g + p_1 + p_2 + 4b - 3$;
- $P = (P_k)^{1 \le k \le \ell_X}$，其中 $P_k = p_{k,\,1} + p_{k,\,2} + 2b_k - c_{\mathcal{O}_k,\,1} - c_{\mathcal{O}_k,\,2} - c_\phi^k + 1$;
- $B = (B_k)^{1 \le k \le \ell_X}$，其中 $B_k = 2c_\phi^k$。

中心曲面的欧拉示性数由 $\chi = 6(\chi(S) - b)$ 给出。

证明。 我们仅给出证明的概要，因为论证本质上与定理 4.5 中给出的论证相同。我们仍然可以利用中心曲面的欧拉示性数来计算这一相对三分解的亏格。我们得到一个欧拉示性数为 $6(\chi(S) - b)$ 的中心曲面，其中 $S \simeq F_{g,\,b}$ 是该分裂的 Heegaard 曲面。随后，我们利用各页分支的欧拉示性数以及所涉及曲面的边界分支数，计算定理 4.7 中出现的参数。

□

**例 4.8**。 例如，如果单值化保持 $S$ 的所有边界分支不变，且 $M$ 的边界连通，那么我们得到 $X$ 的一个 $(6g+5b-5,\ \ 2g+p_1+p_2+4b-3;\ p_1+p_2+b-1,\ \ 2b)$– 相对三分解。

**注 4.9.** 在 [Koe17], Koenig 构造了两种情况下亏格相同（且最优）的三分解。如果单值化保持某个海加德分解不变，他的构造就不那么直接；此外，该构造能否推广到紧致情形，仍是一个开放问题。

# 5 图示

回顾一下， $X$ 是一个以 $S^1$为底空间、纤维为 $M = C_1 \cup_S C_2$的纤维丛。我们利用纤维的缝合海加德图，绘出对应于第4节相对三分解的图示，同时考虑两种不同情形。

## 5.1 一个特定的压缩体

在构造相对三分解时，我们遇到了一种特定类型的压缩体，记作 $C_{g,\,b} = F_{g,\,b} \times I$，其中：

- 其正边界为 $\partial_+ C_{g,\,b}$ 由 $F_{g,\,b} \times \{0\}$ 和 $F_{g,\,b} \times \{1\}$的并组成，相匹配的边界分支由带两两连接；
- 其负边界是由互不相交的 $b$ 圆盘组成的并集，每个圆盘封住 $\partial_+ C_{g,b}$的一个边界分支。

我们要在 $\partial_+ C_{g,b}$ 上定义一个与该压缩体对应的切割系统。若弧 $a$ 适当地嵌入在 $F_{g,b}$中，那么 $a \times I$ 就是 $C_{g,b}$中的一个适当嵌入圆盘，其边界曲线为 $(a \times \{0\}) \cup (\partial a \times I) \cup (-a \times \{1\})$。将 $\partial a$ 置于一条连接 $F_{g,b} \times \{0\}$ 与 $F_{g,b} \times \{1\}$的带上，可以确保该圆盘的边界位于 $\partial_+ C_{g,b}$上。因此，这样的曲线可以作为我们切割系统的候选曲线。

**注记5.1.** 为了绘制下一幅图中的图示，我们选择一个 $\partial_+ C_{g,b}$ 的嵌入，使其关于 $F_{g,b} \times \{0\}$ 对称：在此嵌入下，前文讨论的曲线由 $F_{g,b} \times \{0\}$ 上的一段弧构成，并通过画在相应带上的互不相交的弧与其在 $F_{g,b} \times \{1\}$ 上的对称部分相连（或者说，$\partial_+ C_{g,b}$ 上任何看起来关于 $F_{g,b} \times \{0\}$ 和 $F_{g,\,b} \times \{1\}$ 对称的曲线，都围成 $C_{g,b}$ 中的一个适当嵌入圆盘）。

我们定义如下切割系统，如图13所示：

• 由 $2g$ 条在 $F_{g,b}\times\{0\}$ 上不互相同痕且适当嵌入的弧构成，这些弧将曲面切割成一个带有 $(b-1)$ 个孔的圆盘。由此，我们得到 $2g$ 条在 $\partial_+ C_{g,b}$ 上按上述方式定义的不同痕曲线（图13中的深蓝色曲线）。沿这些曲线进行手术后，我们得到一个亏格为 $(b-1)$、具有 $b$ 个边界分支的曲面。

• 上一步选定了 $F_{g,b}\times\{0\}$ 的一个边界分支（图13中的浅蓝色点线），其粘接的带被用于绘制曲线的 $(\partial a\times I)$ 部分。我们选择 $(b-1)$ 条连接该分支与其他分支的弧，然后绘制由这些弧按上述方式得到的 $(b-1)$ 条曲线（图13中的绿色对称曲线）。沿这些曲线进行手术后，我们得到一个具有 $b$ 个边界分支的球面。

• 我们绘制 $(b-1)$ 条曲线，每条都平行于一个边界分支（图13中的红色曲线）；沿这些曲线进行手术，会生成对应于 $\partial_- C_{g,b}$ 的 $b$ 个不交圆盘。

• 由于所有这些曲线都围成了$C_{g中b}$适当嵌入的圆盘，因此证明完毕。

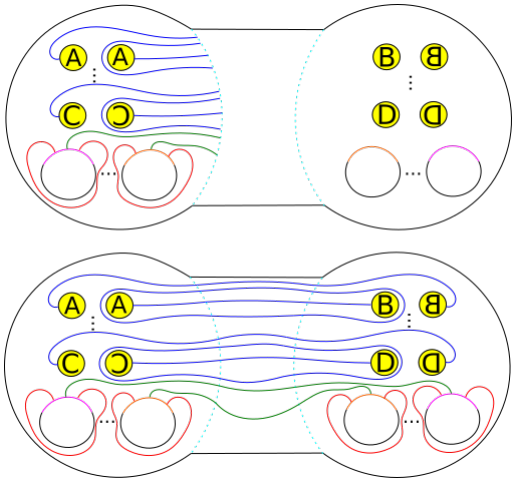


图13：$C_{g的b}$一个切割系统

围成黄色圆盘的圆两两识别，从而计入$F_{g的b}$每个副本的亏格；黑色半圆表示每个副本的边界分支的一部分；彩色半圆（此处为粉色或橙色）按颜色识别以形成带；我们选取了一个分支，并在其上画出连接弧

## 5.2 相对三分图，情形1

单值化翻转了 $M$ 的缝合海加德分解，我们为其使用一幅缝合海加德图。回顾第4节，把手体 $X_i\cap X_j$ 由 $C_1$ 或$C_2$ 的一个副本和一个把手体 $F_{g组成,\ b}\times I$，它们通过 1-柄连接。中心曲面由 $S$ 的三个副本通过带连接而成。对应于 $C_1$ 或 $C_2$ 的切割系统可以从 $M$ 的缝合海加德图中导出。我们还需要从通过带连接的 $S$ 的最后两个副本中获得一个压缩体 $F_{g,\ b}\times[t_k,t_{k+1}]\simeq C_{g,\ b}$。因此，我们可以利用 5.1 的结果，为中心曲面选择如下嵌入。我们将 $S_k$ 的副本标记为 $S\times\{t_k\}$。按照三条射线 $\theta_1$、$\theta_2$ 和 $\theta_3$，将平面等分。我们在 $\theta_k$ 上绘制 $S_k$，使得 $S_2$ 是 $S_1$ 关于位于 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 之间的中间射线的对称图形，并且是 $S_3$ 关于位于 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 之间的中间射线的对称图形（见图14）。以下算法生成 $X$ 的相对三分解图。

- 从与 $X_1 \cap X_2$ 相关联的红色曲线开始。

  – 在 $t_3$处，我们有一个 $C_1$的副本；我们在 $S_3$上绘制相应的图。– 在 $t_3$ 和 $t_1$之间，我们的压缩体只是连接 $S$各副本的带的加厚，因此不添加任何曲线（ $t_2$ 和 $t_3$之间同样如此）。– 从 $t_1$ 到 $t_2$，我们有一个 $C_{g,b}$ 的副本；我们在 $S_2$、 $S_3$ 及其连接带的并集上绘制相应的图，如 5.1 所示。

- 然后，我们以相同的方式绘制对应于 $X_1 \cap X_3$ 的蓝色曲线，同时记住这一次在 $t_1$ 处有一个 $C_1$ 的副本，并且从 $t_2$ 到 $t_3$有一个$C_{g,b}$ 的副本。
- 最后，我们绘制对应于 $X_2 \cap X_3$ 的绿色曲线。

  – 在 $t_2$处，我们有一个 $C_2$的副本；我们在 $S_2$上绘制相应的图。由于中心曲面的嵌入，这样的图与绘制在 $S_1$ 或 $S_3$ 上的图对称。 – 在 $t_2$ 和 $t_3$之间，我们的压缩体只是连接 $S$ 各副本的带的加厚，因此不添加任何曲线（ $t_1$ 和 $t_2$之间同样如此）。 – 从 $t_3$ 到 $t_1$，$X_2 \cap X_3$ 由两个沿其边界的一部分粘合的压缩体组成，这一粘合由单值化 $\phi$决定。若考虑 $S_1$中的一条弧 $a$ ，以及它在 $S_3$中的像$\phi$（$a$），我们可以沿（$a \times \{0\}$） $\simeq$（$\phi$（$a$） $\times \{1\}$）将两个圆盘（$a \times [t_1, 0]$）和（$a \times [1, t_3]$）粘合起来。这样便得到商压缩体中的一个圆盘，其边界为（$a \times \{t_1\}$） $\cup$（$\partial a \times [t_1, 0]$） $\cup_\phi$（$\partial a \times [1, t_3]$） $\cup$（$-\phi$（$a$） $\times \{t_3\}$）。因此，如果我们像 5.1 中那样在 $S_1$ 上给出一组弧，就可以将每条弧沿其在 $S_3$ 中经由 $\phi$ 得到的像（方向相反）粘合起来，从而得到一个对应于商压缩体的切割系统。

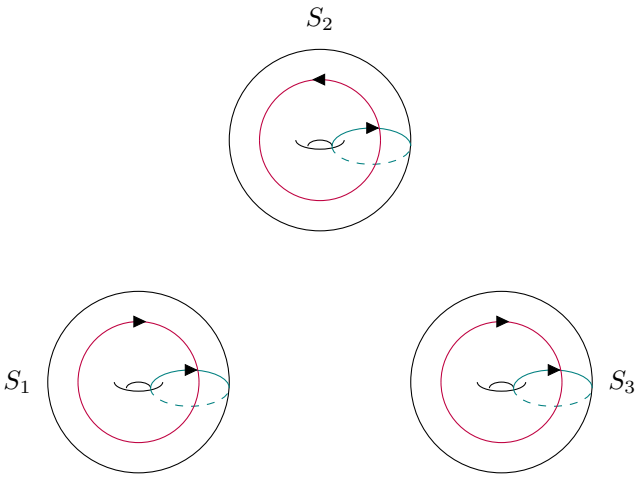


图14： $S$ 在中心曲面中的对称嵌入，情形1

注意，红色曲线和蓝色曲线不依赖于单值化。由于我们总可以选择子午线和/或边界平行曲线作为 $C_1$的切割系统，因此红色曲线和蓝色曲线仅在此范围内依赖于 $M$ 。图15展示了切割系统由单条子午线组成时的这些曲线。以下示例将说明绿色曲线的构造。

**例5.2.** 考虑 $M = (S^2 \times I) \simeq B_3 \setminus \mathring{B}_1$，其中 $B_r \subset \mathbb{R}^3$ 是一个以原点为中心、半径为 $r$的三维球。沿 $xz$ 平面剖分 $M$ ，得到$M$、 $M = C_1 \cup_S C_2$的缝合海加德分解，其亏格为0，海加德曲面是一个环带。现在定义单值化 $\phi$

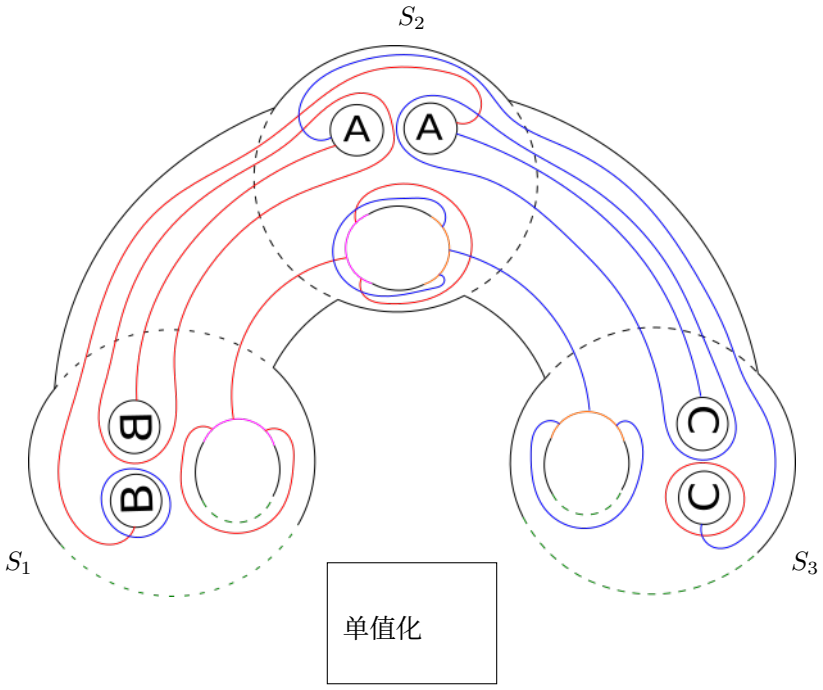


图15：红色和蓝色曲线组，情形1这里 $S \simeq F_{1,\ 2}$ 以及与 $C_1$ 相关联的切割系统是一条子午线；绿色点划弧的粘合方式取决于单值化

为绕 $z$ 轴旋转 $\pi$ 角后再关于以原点为中心、半径为2的球面反射的复合变换。于是 $\phi$ 会翻转缝合海加德分解 $M = C_1 \cup_S C_2$ 以及 $M$ 和 $S$的边界分支。图16展示了对应于此例的绿色曲线示意图。

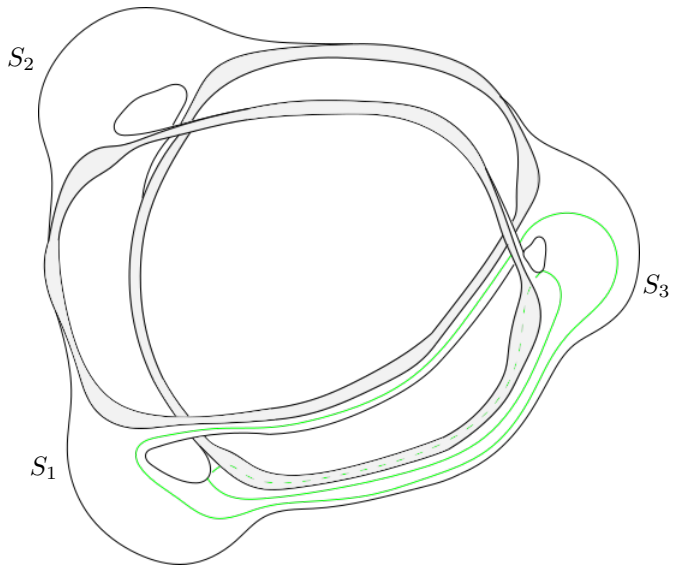


图16：绿色曲线组，情形1，例5.2

**例5.3.** 考虑透镜空间 $L(2,1)$ 的亏格 1 海加德分解 $H_1 \cup_{T^2} H_2$ 的一个 Heegaard 图。选取一个与图中曲线不相交的圆盘。移除该圆盘内部后得到的缝合海加德图对应于 $L(2,1)$ 去掉一个三维球 $B$ 的内部。我们将这个空间设为纤维 $M$。设 $\phi'$ 是 $T^2$ 的一个微分同胚，它将子午线 $m$ 映到 $-m+2\ell$。那么 $\phi'$ 可延拓为 $L(2,1)$ 的一个微分同胚，该微分同胚翻转海加德分解并保持三维球 $B$ 不变。这个微分同胚限制在 $M$ 上，并翻转其缝合海加德分解。我们将其设为单值化 $\phi$。

为了绘制上述算法定义的弧，我们首先对 $m$ 和 $\ell$ 作同痕，使它们沿着两个线段与 $S_1$ 的边界相交，然后移除这些线段。由此得到两条画在 $S_1$ 上的非同痕真嵌入弧。为了求出它们在单值化下的像，我们对经线和纬线的像采用相同的方法：$\phi(m) = -m+2\ell$ 和 $\phi(\ell) = \ell$。这样便在 $S_3$ 上得到两条定向弧。由于为了符合算法，单值化下弧的像必须沿相反方向读取，因此我们将 $S_1$ 上的每条弧与其在 $S_3$ 上的像以相反的定向连接起来。

绿色曲线显示在图18中。实际上，这适用于任意去掉一个三维球内部的透镜空间。

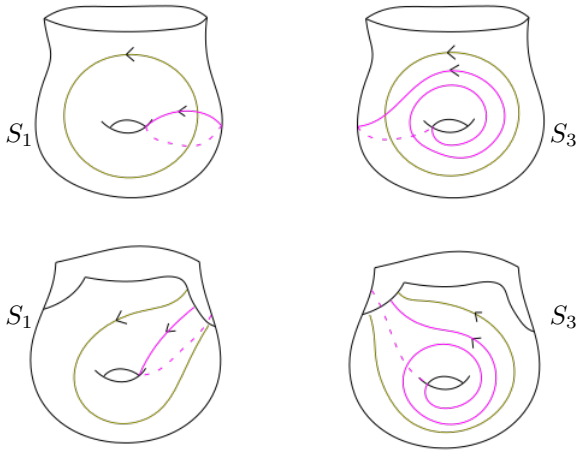


图17：在例5.3中寻找弧上方：$S_1$ 上的两条本质定向曲线及其在 $S_3$ 上的定向像；下方：由这些曲线得到的定向弧

## 5.3 相对三分图，情形 2

由于我们基本按照前一种情形的相同方式进行，这里只概述不同之处：我们用从原点出发的六条射线 $\theta_k$ 将平面划分为六个扇区；在每条射线上画一份 $S$；从 $S_1$开始，然后将 $S_2$ 画成关于位于 $\theta_1$ 和 $\theta_2$之间的中间射线的对称像，依此类推。采用这种嵌入方式，我们可以使用 5.1 中定义的乘积压缩体 $C_{g,\,b}$ 的切割系统。注意，$S_1$ 和 $S_6$现在互为对称，而单值化发生在二者之间，这与情形1相反。

由于单值化保持海加德分解，我们只需将其设为恒等映射，就能得到一些例子。图20表示 $X = M \times S^1$ 的相对三分解图，其中纤维$M$ 具有图19所示的缝合海加德图。若改为令 $M$ 是 $S^3$ 中的一个结外部，我们便重新得到 [ 中结外部与圆 $S^1$ 的乘积的相对三分解图，见]CGPC18a。

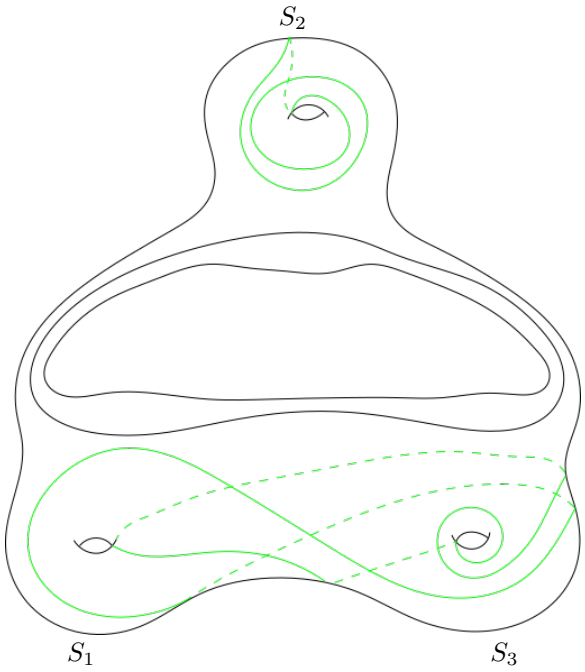


图18：对应于例5.3的绿色曲线 $S_1$ 和 $S_3$ 上的曲线由图17得到：将 $S_1$ 上的每条弧与其在 $S_3$上反向定向的像连接起来； $S_2$ 上的曲线是绘制在 $S_1$上的曲线 $-m+2\ell$ 的对称曲线

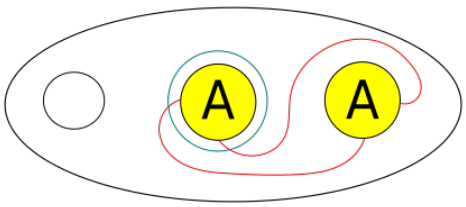


图19：纤维的缝合海加德图

**注5.4**。 在 [Koe17], 中，当单值化保持纤维的海加德分解时得到的三分解图可以进行去稳定化。在紧情形下得到的相对三分解图（具有更高的亏格）是否也可以进行去稳定化，这将是一个有趣的问题。

# 6 应用

相对三分解可以组合起来，产生三分解闭流形。这一理论方面在 [CGPC18b] 和 [CO17]中得到了发展。以下我们只考虑具有连通边界的流形。本节的目标是运用 [CO17]中确立的结果，将圆上的纤维丛的相对三分解与其他相对三分解的 4 维流形粘合起来，从而构造出一类三分解（闭）4 维流形的例子。我们重新得到 [Koe17], 中的圆上的三分解闭丛、 [Mei17], 中的三分解旋转流形，并为若干类四维开书分解给出三分解。

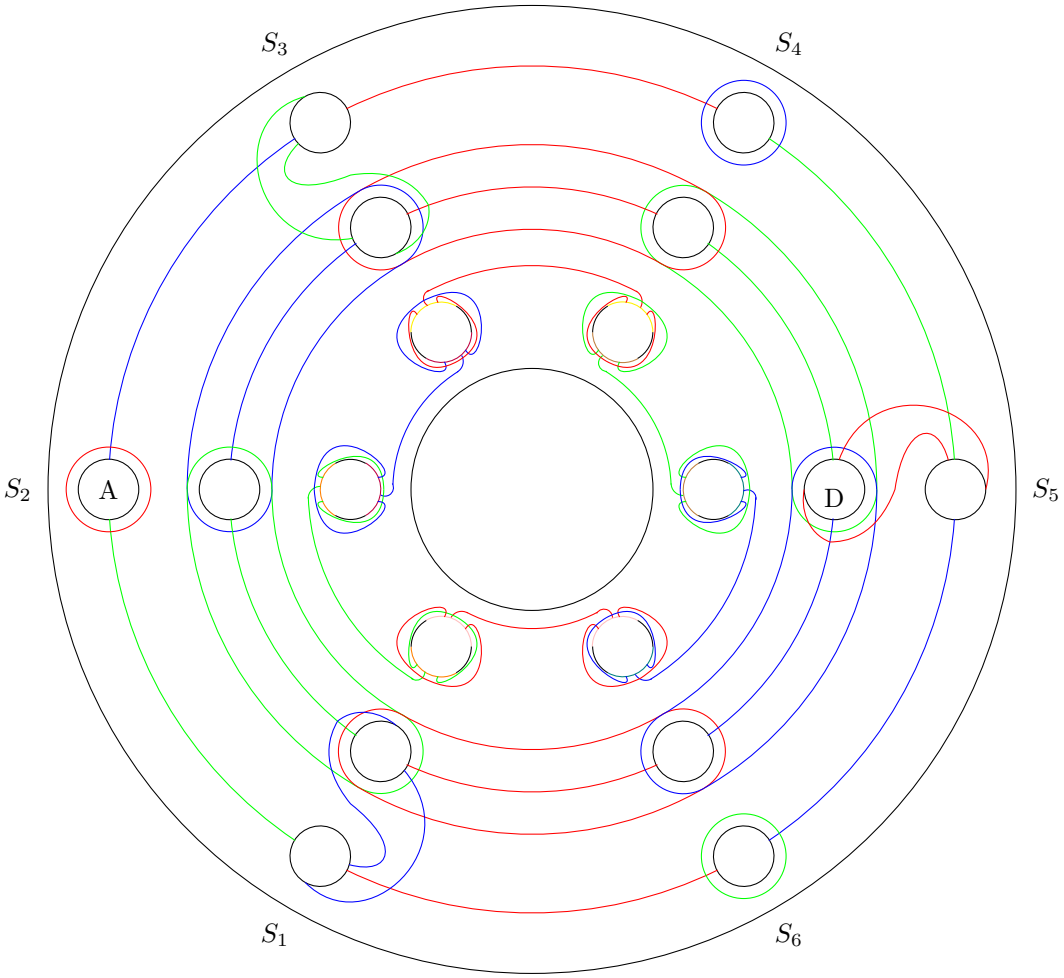


图20： $X = S^1 \times M$的相对三分解图，其中 $M$ 由图19的缝合海加德图定义

## 6.1 相对三分解图的粘合：理论方面

**定义 6.1**。 设 $S$ 为一个紧曲面， $\alpha$ 为 $S$上的一组曲线切割系统。记 $S_\alpha$ 为沿 $\alpha$ 条曲线对 $S$ 施行手术后得到的曲面（也就是说，沿 $\alpha$ 条曲线切割 $S$ ，再沿每个新产生的边界分支粘回一个圆盘）。与$\alpha$ 相关联的弧系是 $S$中的一族真嵌入弧，使得沿 $A_\alpha$ 切割 $S_\alpha$ 后得到一个圆盘。若一组切割系统及其相关联的弧（$\alpha$， $A_\alpha$）和（$\alpha'$， $A_{\alpha'}$）可通过将曲线滑过曲线、将弧滑过曲线而相互转化，则称二者把手滑动等价。

**定义 6.2**。 弧图是一个满足以下条件的元组（$S$； $\alpha$， $\beta$， $\gamma$， $A_\alpha$， $A_\beta$， $A_\gamma$）：

- $(S; \alpha, \beta, \gamma)$ 是一个相对三分解图；
- $A_\alpha$ （分别为 $A_\beta$、 $A_\gamma$）是与 $\alpha$ （分别为 $\beta$、 $\gamma$）相关联的弧系；
- $(S; \alpha, \beta, A_\alpha, A_\beta)$ 与某个 $(S; \alpha', \beta', A_{\alpha'}, A_{\beta'})$ 把手滑动等价，其中 $(S; \alpha', \beta')$ 与一个标准缝合海加德图 $D$ 微分同胚，且 $A_{\alpha'} = A_{\beta'}$；
- $(S; \beta, \gamma, A_\beta, A_\gamma)$ 与某个 $(S; \beta', \gamma', A_{\beta'}, A_{\gamma'})$ 把手滑动等价，其中 $(S; \beta', \gamma')$ 与同一个标准缝合海加德图 $D$ 及 $A_{\beta'} = A_{\gamma'}$ 微分同胚。

**注 6.3**。 这一内在定义遵循 [GM22]。要从相对三分解图明确绘制弧图，我们应用 [CGPC18a] 中描述的算法。

- 选择一个与 $\alpha$相关联的弧系 $A_\alpha$ 。
- 存在一组弧 $A_\beta$，它由 $A_\alpha$ 通过将 $A_\alpha$ 弧滑过 $\alpha$ 曲线得到；还存在一组曲线 $\beta$，它由 $\beta$ 通过把手滑动得到，使得 $A_\beta$ 与 $\beta$ 互不相交。~
- 存在一组弧 $A_\gamma$，它由 $A_\beta$ 通过将 $A_\beta$ 弧滑过 $\beta$ 曲线得到；还存在一组曲线 $\tilde{\gamma}$，它由 $\gamma$ 通过把手滑动得到，使得 $A_\gamma$ 与 $\tilde{\gamma}$ 互不相交。

~那么，$(S;\ \alpha,\ \beta,\ \tilde{\gamma},\ A_\alpha,\ A_\beta,\ A_\gamma)$ 是由$(S;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$得到的弧图。

我们总能找到所述弧和曲线，这直接源于$(S,\ \alpha,\ \beta)$、$(S,\ \beta,\ \gamma)$和$(S,\ \alpha,\ \gamma)$都是标准的。构造弧系和曲线系时，我们会做出许多选择，但（[CGPC18b]）这些选择不会影响最终结果：由同一个相对三分解图得到的两个弧图把手滑动等价。

**注 6.4**。 图示 $(S;\ \alpha,\beta,\gamma)$ 描述了一个经过相对三分解的 4 维流形。相对三分解在该流形的边界上诱导出一个开书分解，而此开书分解的单值化可利用相应的弧图显式计算（见 [CGPC18a]或 [CGPC18b]）。

设 $X$ 和 $X'$ 是经过相对三分解的紧 4 维流形，其对应的相对三分解图分别为 $(S;\ \alpha,\beta,\gamma)$ 和 $(S;\ \alpha',\beta',\gamma')$，它们分别在 $\partial X$ 和 $\partial X'$上诱导出开书分解 $\mathcal{OB}$ 和 $\mathcal{OB}'$。假设存在一个反定向微分同胚 $f$，将 $\partial X$ 映到 $\partial X'$，并将 $\mathcal{OB}$ 映到 $\mathcal{OB}'$。

~从 $(S;\ \alpha,\beta,\gamma)$ 构造一个弧图 $(S;\ \alpha,\beta,\tilde{\gamma},A_\alpha,A_\beta,A_\gamma)$。由于 $f(A_\alpha)$ 将 $S_{\alpha'}=f(S_\alpha)$~ ~切成一个圆盘，从 $A_{\alpha'}=f(A_\alpha)$开始，并按照 6.3 中所述的过程，从 $(S,\alpha',\beta',\gamma')$ 构造一个弧图 $(S;\alpha',\beta',\gamma',A_{\alpha'},A_{\beta'},A_{\gamma'})$。

按照 $f$ 将 $S$ 和 $S'$ 沿其边界粘合。上述过程将 $A_\alpha$ （分别是 $A_\beta$、 $A_\gamma$）中的每条弧对应到 $A_{\alpha'}$ （分别是 $A_{\beta'}$、 $A_{\gamma'}$）中的一条弧。将每条弧与其对应弧相连，从而在 $S\cup_f S'$ 上形成三组曲线 $A_\alpha\cup A_{\alpha'}$、 $A_\beta\cup A_{\beta'}$、$A_\gamma\cup A_{\gamma'}$。

**定理 6.5** (Castro–Gay–Pinz´on-Caicedo)。 沿用上述讨论中的记号，$\big(S\cup_f S';\ \ \alpha\cup\alpha'\cup(A_\alpha\cup A_{\alpha'})\ \tilde{\beta}\cup\tilde{\beta}'\cup(A_\beta\cup A_{\beta'})\ \tilde{\gamma}\cup\tilde{\gamma}'\cup(A_\gamma\cup A_{\gamma'})\big)$ 是 $X\cup_f X'$ 的一个三分解图。

**注记 6.6**。 定理 6.5 的证明见于 [CO17] 和 [CGPC18a]。更准确地说，文中证明了，在边界连通的情况下，粘合 $(g,\ k,\ p,\ b)$ 和 $(g',\ k',\ p',\ b')$ 相对三分解会产生 $\big(g+g'+b-1,\ k+k'-(2p+b-1)\big)$–三分解 $X\cup_f X'$。

## 6.2 示例

现在我们利用定理 6.5，从相对三分解图构造三类三分解图。通过这一方法，我们重新得到 [Koe17] 和 [Mei17]，的一些三分解，同时还构造出四维开书分解的若干类三分解图；据我们目前所知，这些图示在文献中尚不存在。

### 6.2.1 圆上丛的 Koenig 三分解

我们考虑纤维为 $M$ 的圆上的闭丛，其中单值化保持纤维的亏格为 $g$ 的海加德分解。考虑紧致 3 维流形 $M^o=M\setminus Int(B^3)$，其中 $B^3$ 是一个与该分解的海加德曲面横截、且在单值化下保持不变的三维球。于是单值化下降为 $M^o$，从而得到一个纤维为 $M^o$、底空间为 $S^1$ 的丛，我们可以像第 5 节那样绘制其相对三分解图。实际上，由于 $M^o$ 的边界只是 $S^2$，我们可以根据图 22 的示意图，使用该丛的亏格较低（不平衡）的相对三分解。与此分解对应的相对三分解图示例如下

见图 23，其中还展示了相应的弧系（在图示中，我们假设单值化为恒等映射，但这不影响后续讨论）。我们从图 21 左侧所示的 $L(2,\ 1)$ 的海加德图开始；从海加德曲面上移除一个与曲线不相交的开圆盘，便得到 $L(2,\ 1)^o$) 的缝合海加德图。要得到纤维为 $M$ 的圆上的闭丛，我们必须将一个经过相对三分解的 $S^1 \times B^3$ 粘回去，其弧图正是一个带有三条平行弧的圆柱，如图 24 所示。由于这些图示所定义的页和弧彼此吻合，我们只需按照恒等映射将两个弧图粘合起来。由此得到该闭丛的 $(4g+1)$ 三分解图（见图 25），它等价于 [Koe17] 中所示的图。此图可以去稳定化 $g$ 次，从而得到 $(3g+1)$ 三分解图（关于最后一点，见 [Koe17]）。

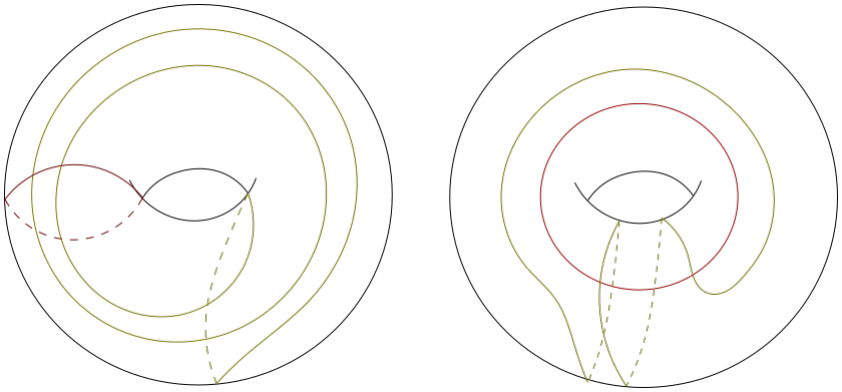

图 21： $L(2,\ 1)$ 的两个 Heegaard 图

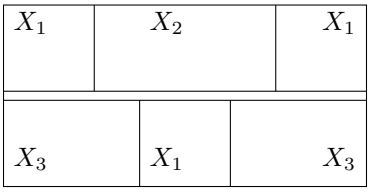


图 22：纤维为 $M^o$、基底为 $S^1$ 的丛的一个三分解

### 6.2.2 Meier 的旋转流形三分解

设 $M$ 是一个闭三维流形，且 $M^o = M \setminus Int(B^3)$。 $M$ 的纺起定义为 $\mathcal{S}(M)$ $=(M^o \times S^1) \cup_{S^2 \times S^1,\ Id} (S^2 \times D^2)$。我们按照前一个例子中的方法，从 $M$ 的一个亏格为 $g$ 的 Heegaard 图绘制出 $M^o$ 的缝合海加德图。接着，我们应用 5.3 中定义的步骤，得到 $M^o \times S^1$ 的相对三分解图，最后得到 $M^o \times S^1$ 的弧图（图 26 展示了一个例子，其中使用了图 21 右侧的 $M \simeq L(2,\ 1)$ 的 Heegaard 图）。图 27 展示了 $S^2 \times D^2$ 的弧图（见 [CGPC18a]）。由于这些图示中的页和弧相同，我们可以将它们粘合起来，得到 $\mathcal{S}(M)$ 的一个 $(6g+3)$–三分解图。有趣的是，我们可以通过把手滑动和三次去稳定化，明确地修改此图，使之成为 $M^o \times S^1$ 的初始相对三分解图，并用两个圆盘封住其边界分支（示例见图 28）。随后，我们还可以通过把手滑动和 $3g$ 次去稳定化进一步修改此三分解图，从而得到 [Mei17] 中展示的图。

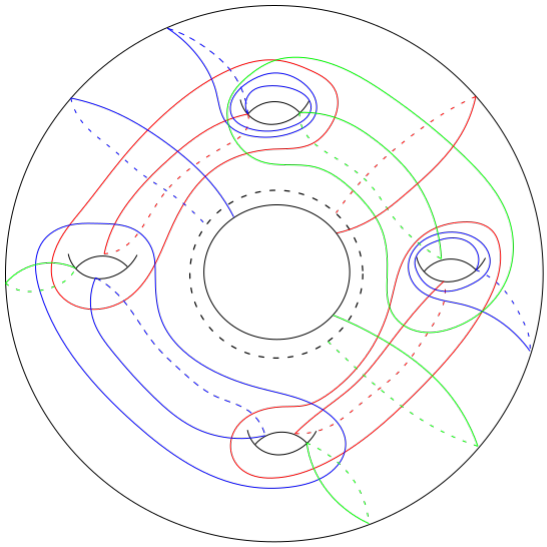

图 23： $S^1 \times M^o$的一个亏格4弧图，其中 $M \simeq L(2,\ 1)$

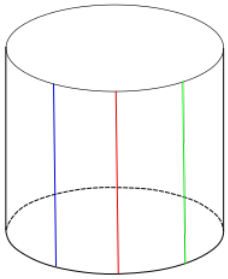

图24： $S^1 \times B^3$的一个弧图

### 6.2.3 某些4维开书的三分解

设 $M$ 是一个紧致 3维流形，其边界为一个环面；设 $\phi$ 是 $M$ 的一个自微分同胚，且在 $\partial M$ 的一个正则邻域上为恒等映射。我们将纤维为 $M$ 、单值化为 $\phi$ 的四维开书定义为：

$$\mathcal{OB}(M) = \left((M \times I)/\sim\right) \cup_{\partial M \times S^1, Id} \left(\partial M \times D^2\right), \text{where } (x,0) \sim (\phi(x),1).$$

我们证明如下结论。

**定理6.7.** 设 $\mathcal{OB}(M)$ 是一个纤维为 $M$ 、单值化为 $\phi$的4维开书，其中 $M$是一个边界为环面的紧流形。则存在 $M$, 的一个缝合海加德分解，该分解在 $\phi$作用下保持不变，并诱导出 $\partial M$ 的分解 $\partial M = (\partial M \setminus D) \cup D$，其中 $D$ 是 $\partial M$中的一个圆盘。此外， $\mathcal{OB}(M)$ 存在一个$(6g+4)$三分解，其中 $g$是 $M$的这一缝合海加德分解的亏格。而且，可以从与该分解对应的缝合海加德图明确导出 $\mathcal{OB}(M)$ 的三分解图。

证明。 为了构造 $\mathcal{OB}(M)$ 的三分解，我们将丛 $\left((M \times I)/\sim\right)$ 的弧图与来自 [CO17] 的 $T^2 \times D^2$ 的弧图粘合起来（见图 29 ）。第一个图由 $M$ 的缝合海加德图得到，该图诱导了 $M$ 边界上的分解：

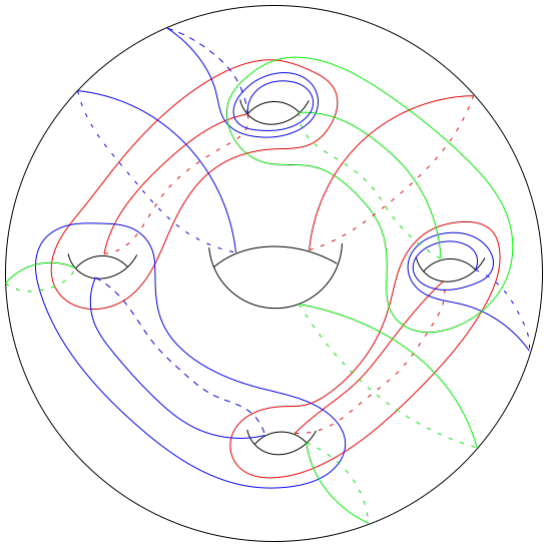

图25：当 $M \simeq L(2,1)$ 时，$S^1 \times M$ 的三分解图

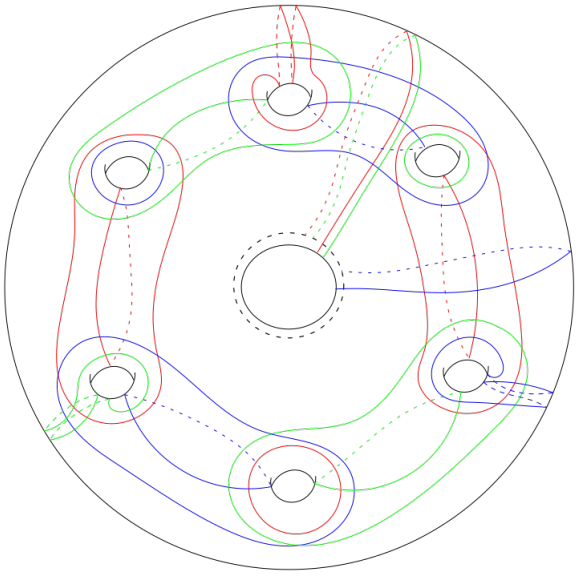

图 26：当 $M \simeq L(2,1)$ 时， $S^1 \times M^o$ 的亏格6弧图

$\partial M = (\partial M \setminus D) \cup D$，其中 $D$ 是 $\partial M$ 中的一个圆盘。图30展示了一个满足此条件的缝合图示例。缝合海加德分解上的这一条件使得 $\big((M \times I)/\sim\big)$ 与 $T^2 \times D^2$ 的开书分解的页微分同胚。注意，由于 $\phi$ 在 $\partial M$ 的一个邻域上是恒等映射，它保持 $\partial M$ 的任意缝合分解，因此这种特定的缝合海加德分解总是存在（见定理 1.1）。我们得到一个页为带两个孔的环面的相对三分解图，并计算出一组与图29所示相匹配的弧系（所得图示的一个示例见图31）。然后我们按照恒等映射粘合这两个图，从而构造出 $\mathcal{OB}(M)$ 的三分解图（示例见图32；由于涉及的曲面亏格相当高，这次我们采用了更合适的曲面平面表示）。在构造

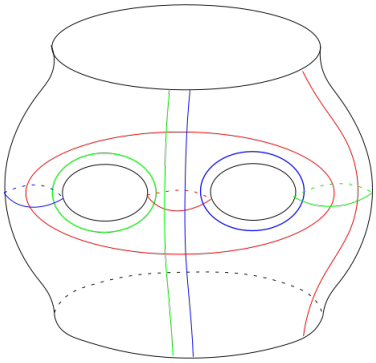

图 27： $S^2 \times D^2$的弧图

我们对弧进行了一些把手滑动，以便为之后对粘合图进行去稳定化做准备。

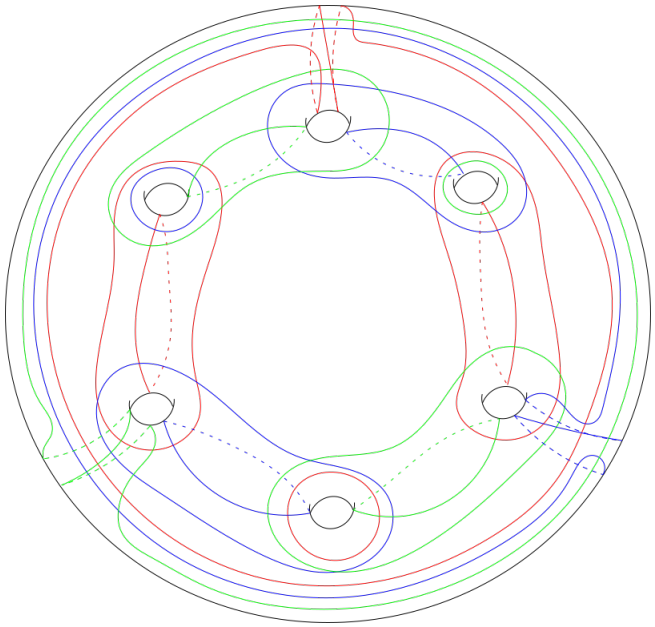

图 28： $\mathcal{S}(M)$的三分解图，其中 $M \simeq L(2,\ 1)$

通过丛的相对三分解图中的弧系，可以验证它既不依赖于单值化，也不依赖于 $M$ （在我们的图中，我们取单值化为恒等映射）。因此，我们从亏格为 $g$的 $M$ 的缝合海加德分解出发，构造出了 $\mathcal{OB}(M)$的一个（$6g+4$）–三分解图。 □

**注6.8**。 我们不知道这个三分解的亏格是否为最小，也不知道图 32 中得到的图是否可以经过去稳定化，从而产生一个更低亏格的三分解。

**注6.9**。 该方法可以扩展为任意四维开书构造三分解图（不限制纤维的边界分支数量或其亏格）。需要检查丛在 $S^1$ （纤维为 $M$）和丛在 $\partial M$ （纤维为 $D^2$）的相对三分解所诱导的页之间的相容性，但这始终可以实现。为说明这一点，首先考虑 $\partial M$ 是一个亏格为 $h$的连通曲面。然后（见 [CGPC18a]），$\partial M \times D^2$

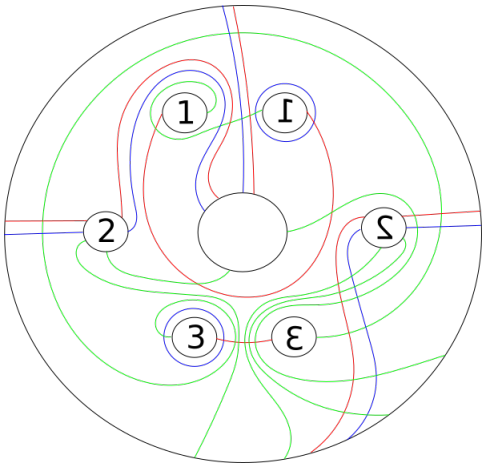


图29： $T^2 \times D^2$的弧图

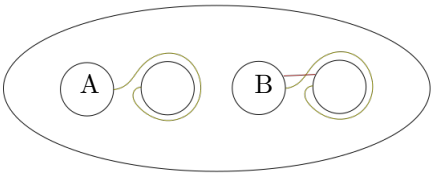


图30：某个 $M$，其边界为一个环面要构造这样的例子，考虑一个 Heegaard 图，其中对应于 $\alpha$ 曲线的把手体以标准方式嵌入 $\mathbb{R}^3$中，然后在一条 $\alpha$ 曲线旁边将 Heegaard 曲面打孔，并移除这条曲线。

admits a $(h+2, 2h+1; h, 2)$–相对三分解。但根据（定理 4.7），丛 $(M \times I)/\sim$ admits a ( $6g+5b-5, 2g+p_1+p_2+4b-3; p_1+p_2+b-1, 2b)$–相对三分解，其中 $\partial M$在两个亏格分别为 $p_1$ 和 $p_2$ 且具有 $b$ 个边界分支的曲面之间 admits a 缝合分解。因此，为了在两个丛的边界的诱导开书分解中获得微分同胚页，我们需要 $b = 1$ 和 $p_1 + p_2 = h$，这始终可以通过从缝合分解 $\partial M = (\partial M \setminus Int(D)) \cup D$开始实现，其中 $D$ 是嵌入于 $\partial M$中的圆盘。利用注记 6.6，我们可以计算得到 $\mathcal{OB}(M)$的一个 $(6g+h+3, 2g+h+1)$–三分解，其中 $h$ 是 $\partial M$ 的亏格，而 $g$ 是 $M$ 的缝合海加德分解的亏格。随后，我们可以将情形扩展到 $\partial M$ 不连通的情况，只需将该方法应用于每个边界分支。

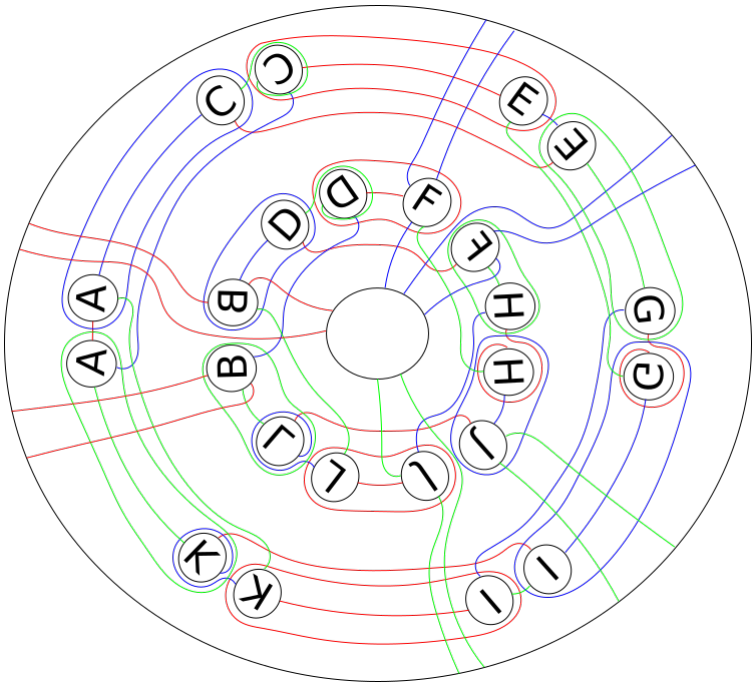


图31：$(M \times I)/\sim$的弧图，由图30中的图得到

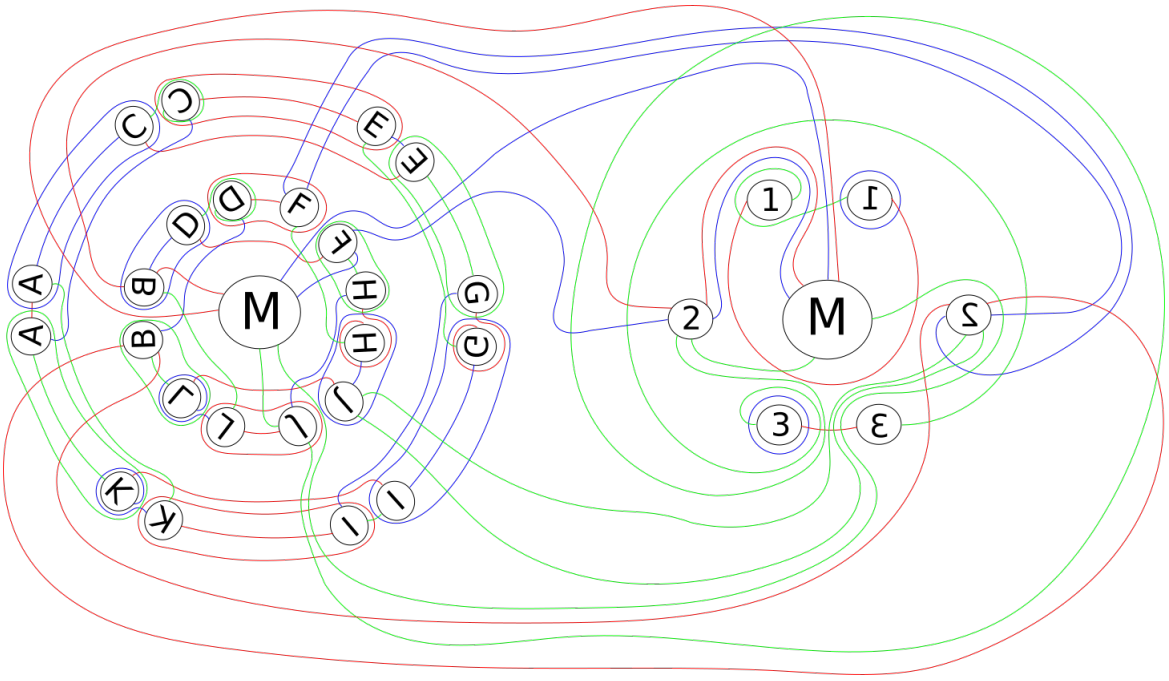


图 32：开书 $\mathcal{OB}(M)$ 的三分解图，由图30中的图得到

# 参考文献

[BNR16] M. Borodzik、 A. Némethi和 A. Ranicki，带边界流形的莫尔斯理论，《代数与几何拓扑》16，第2期（2016），971–1023。[CGPC18a] N. Castro、 D. Gay和 J. Pinzón-Caicedo，相对三分解图，《太平洋数学杂志》294，第2期（2018），275–305。[CGPC18b] N. A. Castro、 D. T. Gay和 J. Pinzón-Caicedo，带边界的4维流形的三分解，《美国国家科学院院刊》115，第43期（2018），10861–10868。[CO17] N. A. Castro和 B. Ozbagci，通过勒夫谢茨纤维化对4维流形进行三分解，arXiv:1705.09854（2017）。[Cas16] N. A. Castro，带边界光滑四维流形的相对三分解，博士论文，佐治亚大学，2016。[Gab83] D. Gabai，叶状结构与3维流形的拓扑，《美国数学会通报（新辑）》8，第1期（1983），77–80。[GK16] D. Gay 和 R. Kirby，四维流形的三分解，《几何与拓扑》20，第6期（2016），3097–3132。[GM22] D. Gay和 J. Meier，双标点三分解图与二维结的手术，172，剑桥大学出版社，2022，第163–195页。[Isl21] G. Islambouli，尼尔森等价与三分解，《专献几何》214，第1期（2021），303–317。[Juh06] A. Juhász，全纯圆盘与缝合流形，《代数与几何拓扑》6，第3期（2006），1429–1457。[KM20] S. Kim和 M. Miller，曲面补空间的三分解与普莱斯扭转，《代数与几何拓扑》20，第1期（2020），343–373。[Koe17] D. Koenig，$S^1$上的三维流形丛的三分解，arXiv:1710.04345（2017）。[Kos13] A. A. Kosinski，微分流形，Courier Corporation，2013。[Mei17] J. Meier，三分解与旋转四维流形，arXiv:1708.01214（2017）。[MZ17] J. Meier和 A. Zupan，属二三分解是标准的，《几何与拓扑》21，第3期（2017），1583–1630。[Wil20] M. Williams，曲面上的平坦曲面丛的三分解，博士论文，内布拉斯加大学林肯分校，2020。