arXiv:2304.09307v1 [math.GR] 18 Apr 2023

从望远镜到框架与单群

Steffen Kionke 和 Eduard Schesler

Abstract. 我们引入群望远镜这一概念。粗略地说，群望远镜是由群构成的有向系统，其中包含某个固定群 B 的多个彼此交换的像。群望远镜的灵感源自群作用于有根树的理论。借鉴已知的分支群构造，我们得到若干 B-望远镜的例子，并讨论了若干应用。我们给出二生成无限可解单群的例子。我们证明，每个有限生成的剩余有限（可解）群都能嵌入一个有限生成的（可解）LEF单群。我们在有限单群的直积中构造二生成框架，并证明存在由可解群和具有性质（τ）的群组成的格罗滕迪克对。我们给出有限生成、剩余有限、可解群的自同构示例：这些自同构不是内自同构，却在有限剩余完备化中变为内自同构。我们描述了非初等可解群的例子；这些群有限生成且剩余有限，并且其所有有限生成次正规子群都是直因子。

1. Introduction

本文发展了群的望远镜理论。简而言之，一个 B-望远镜 $\mathcal{S}$ 由一个群的有向系统 $((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}},\iota_{i,j})$ 以及同态 $\phi_i\colon B \to \Omega_i$ 组成，其中 $\iota_{i,j}\circ\phi_i$ 的像彼此交换，但仍然足够大，能够正规生成每个 Ω_j。每个望远镜都会产生两个群：群 $G_{\mathcal{S}}$ 和头部 $Q_{\mathcal{S}}$。群 $G_{\mathcal{S}}$ 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$的子群，并且（通常） $Q_{\mathcal{S}}$ 是 $G_{\mathcal{S}}$的商群。在适当的假设下，最终将证明这两个群都具有显著的性质： $G_{\mathcal{S}}$ 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$ 中的框架，而 $Q_{\mathcal{S}}$ 是单群。此外，这些群的构造相当明确，只需要少量生成元。这带来了群论中许多此前未知的例子，我们现在将予以介绍。

应用 1：无限可和单群。可和群的概念[1] 由 von Neumann [56] 在研究巴拿赫-塔斯基悖论 [4]时提出。此后，可和群引起了广泛关注，人们发现了许多有趣的可和群例子；离散情形的最新综述见 [35] 。然而，直到 2013 年，Juschenko 和 Monod 才给出了首批无限、有限生成的可和群的单群例子 [36, 定理A]。更确切地说，他们证明了，对于康托尔集 $\mathfrak{C}$上的每个极小同胚 α ，其拓扑全群 $[[\alpha]]$——即由在 $\mathfrak{C}$ 上局部地作用为 α的幂的同胚组成的群——都是可和的。在此之前，Matui 已证明 $[[\alpha]]$ 的换位子子群具有单性 [53,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 20E18；次要分类 20E08、20E26、43A07。*Key words and phrases.* 可 amenable、有限剩余完备化、分支群、单群。由德国研究基金会（DFG，即德国研究基金会）资助 - 441848266。[1]Von Neumann 用德语单词“messbar”（英语为“measurable”，意为“可测”）来称呼这类群。如今这类群被称为可 amenable 群，这一事实可追溯到 Day [22], ，显然是一个双关语。

定理 4.9]。此外，他还证明，如果 α 是一个极小子移位，则 $[[\alpha]]'$ 是有限生成的 [53, 定理 5.4]。尽管如此，关于无限、有限生成的可和单群，至今仍鲜有构造。这一点可从 Juschenko 的一个问题看出 [35, 问题 B.5], ： 该问题询问是否存在二生成的无限单可和群，另见 [28, 问题 4.7]。下面的结果对此给出了肯定回答。

定理 1.1（定理 9.13）。存在一个无限二生成可 amen 性的剩余有限群 G，它具有一个无限单商群 Q。

本定理中的群 G 和 Q 分别是交错群望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$ 的群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 和头部 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$，它将作为我们贯穿全文的 B-望远镜实例。还值得一提的是，尽管定理 1.1 中的二生成性需要一些论证，但 G 和 Q 的有限生成性是 B-望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$ 定义的直接结果。群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 和 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 的可 amen 性，以及本文中所有其他可 amen 群的可 amen 性，都依赖于 Juschenko、Nekrashevych 和 de la Salle 的一个判据 [37]。

应用2：嵌入单群。将群嵌入单群是群论中的一个经典主题。由 Baer-Schreier-Ulam 定理 [3] 可直接推出，每个群 G 都能嵌入一个单群 Q。对于 G 为可数的情形，Gorjuˇskin [30] 证明了 Q 可以选为二生成群（另见 [67]）。此后，人们取得了许多关于将具有附加性质的特定类群嵌入单群的嵌入结果；例如，参见 [8, 20, 60] 中这方面较新的结果。沿着这一主题，一个自然的问题是：哪些群可以嵌入有限生成的单可 amen 群？据我们所知，这个问题似乎尚无完整答案。Matte Bon [52, 定理 1.1], 得出了一项关于该问题的有趣结果，他证明了由有界自动机生成的群可以嵌入有限生成的单可 amen 群。特别是，这包括许多经典的分支群实例，例如 Grigorchuk 群和 Gupta-Sidki 群。这里我们通过证明每个有限生成的残余有限可 amen 群 G 都嵌入某个有限生成的单可 amen 群 Q，得到了一个更一般得多的结果。当然，除非 G 是有限的，否则 G 的残余有限性会在过渡到 Q 时丧失。但我们的构造将直接推出，按照 Vershik-Gordon [72] 的意义， Q 仍然是局部可嵌入有限群（简称 LEF）。

定理 1.2（定理 9.14）。令 H 为一个有限生成、剩余有限（可 amenable）的群。存在一个有限生成、剩余有限（可 amenable）的群 G 以及一个无限、单（可 amenable）的 LEF群 Q，使得

(1) 存在一个嵌入 $\iota\colon\ H \to G$，(2) 存在
一个投影 $\pi\colon\ G \to Q$，(3) 复合 $\pi \circ \iota$
是单射。

定理中的群 Q 是一个交错群望远镜 $\mathcal{S}$ 的头部。在我们的构造中，我们将把群 H 嵌入剩余有限群 $G_{\mathcal{S}}$，使得 H 与投影 $G_{\mathcal{S}} \to Q_{\mathcal{S}}$ 的核的交为平凡群。作为定理 1.2 的推论，我们得到了大量由两两不同构的有限生成单可 amenable 群组成的不可数族。事实上，这是因为一个可数群只包含可数多个（同构类的）有限生成群，而已知存在许多由有限生成剩余有限群组成的不可数族。Juschenko 和此前已经证明，有限生成单可 amenable 群存在不可数多个同构类

Monod [36, 推论 B] 是 Matui [53], 以及 Giordano、Putnam 和 Skau [27]的结果的推论。

应用 3：框架。1937 年，Bernhard Neumann [55] 构造出了已知的第一个由不可数多个有限生成群同构类组成的族，因此也隐含地证明了有限生成但非有限呈示群的存在。更准确地说，Neumann 引入了一族由无限子集 S 参数化的群，这些子集属于基数至少为 3 的奇自然数集合 $\mathbb{N}_{\geq 3,\ \mathrm{odd}}$。对于每个这样的子集 S，他定义了群

$$G_S := \langle (\sigma_n), (\tau_n) \rangle \leq \prod_{n \in S} \mathrm{Alt}(n),$$

其中 $\sigma_n = (1, 2, 3)$，且 $\tau_n = (1, \ldots, n)$，并证明了 $G_S \cong G_T$ 当且仅当 $S = T$。此后，群 G_S 一直是观察群论中有趣现象的丰富来源；经典应用见例如 [63, 64, 49]，较新的应用见 [10, 11]。在 [49] 中，Lubotzky、Pyber 和 Shalev 证明群 G_S 具有奇特的子群增长类型。为此，他们证明了$\widehat{\ \ \ \ }$，G_S 的有限群拓扑完备化为 $G_S \cong \mathbb{Z} \times \prod \mathrm{Alt}(n)$。利用一个$_{n \in S}$

沿着类似的构造思路，他们还证明了，每个形如$_{\frown}\mathbb{Z} \times \prod \mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$且满足 $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ 的群，都可以作为某个有限$_{n \in S}$生成群的有限剩余完备化。Pyber [64] 提出了另一种相关构造，旨在将 $\widehat{\mathbb{Z}} \times \prod \mathrm{Alt}(n)^{f(n)}$ 实现为某个有限生成$_{n \geq 5}$群的有限剩余完备化

$\widehat{\ }$，其中 f 满足某种温和的增长条件。这些有限拓扑完备化中出现的商群 $\mathbb{Z}$，本质上可以追溯到 Neumann 群 G_S中的元素（τ_n），该元素可以映射到 $\mathbb{Z}$。由于 $\mathbb{Z}$ 对于每个有限指数$\widehat{\ }$都只有一个子群，因此商群 $\mathbb{Z}$ 不会影响对子群增长的分析。然而，它使得这些例子不适用于构造具有奇特表示增长的群；参见 [6, 命题 2]。因此，自然会问能否去掉这个商群。例如，Pyber 在 [63] 中提出，$_{\infty}$直积$\prod \mathrm{Alt}(2n+1)$是否是某个有限生成群的有限剩余完备化。$_{n=2}$根据 [42, 第 2], 页，Kassabov$_{\infty}$在这方面迈出了第一步：他证明了 $\prod \mathrm{Alt}(n)$包含一个有限生成稠密子群 G，其$_{n=5}$有限剩余完备化为 $\widehat{G} \cong \widehat{H}^6 \times \prod_{n=5}^{\infty} \mathrm{Alt}(n)$，其中 $H = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p[t, t^{-1}])$。$_{n=5}$Kassabov 的构造基于他在 [39, 40] 中的想法，后来他与 Nikolov [42] 对其进行了修改，从而解决了哪些有限单群的直积可以作为有限生成群的有限剩余完备化这一问题。他们引入了以下有用的概念。

$_{\infty}$定义 1.3（参见 [42]）。设 $P = \prod S_n$ 是有限群的直积。有限$_{n=1}$生成子群 $G \leq P$ 是 P 的框架，当且仅当

$_{\infty}$(1)$\bigoplus S_n$ 包含于 G,$_{n=1}\widehat{\ }$(2) 自然映射 $G \to P$ 是同构。

Kassabov 和 Nikolov 的工作中，主要难点在于证明某个有限交错群的无限乘积中存在某个框架。他们证明，对于每个奇素数 p，$\prod_{n=3}^{\infty} \mathrm{Alt}\left(\frac{p^{3n}-1}{p-1}\right)$ 都存在一个由 10 个元素生成的框架，

参见 [42, 定理 3。3], 据我们所知，这是迄今唯一已知的框架直接构造。尽管构造这样的框架很困难，但事实证明，框架具有出人意料的稳定性，并且可以合并，从而在其他有限群的乘积中构造出框架，参见 [42, 引理 2。2]利用这一点，Kassabov 和 Nikolov [42, 定理 1。4] 推导出，若一个非阿贝尔有限单群的乘积 $P = \prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$ .....

(1) P 是拓扑有限生成的，即包含一个有限生成的稠密子群；(2) $(S_n)_n$ 具有本质上的无界秩，这意味着每个交错群 Alt(k) 都嵌入除有限多个 S_n之外的所有群中。

一般而言，拓扑有限生成的有限拓扑群不必来源于某个剩余有限的有限生成群的有限剩余完备化。例如，有限拓扑群 $\prod_{p\in\mathbb{P}}$PSL$_n(\mathbb{F}_p)$ 就是一个反例；参见 [69, 第 6 节。2]一个相关的有趣现象是：一个有限生成的剩余有限群可能需要比它的每个有限商群更多的生成元。事实上，Noskov [59] 证明，对于一个有限生成的剩余有限群 G， G的生成集的最小基数（记为 $d(G)$）与$\prec \qquad \prec G$中稠密子群的生成集的最小基数（记为 $\delta(G)$）之差可以任意大。Wise [74]给出了有限呈示的例子。在 Kassabov 和 Nikolov 的上述结果中， P中的框架可以取为 22($\delta(P)$ + 1)-生成的 [42, 第 {v. 3], , 其中该界来自他们在 $\prod_{n=3}^{\infty}$ Alt $\left(\frac{p^{3n}-1}{p-1}\right)$ 中的 10-生成框架。与此相反，这个无限乘积显然包含二生成的稠密子群。关于这一点，Kassabov 和 Nikolov 提出了是否存在 $\delta(P)$-生成框架的问题 [42, 问题 1。6]。在这里，我们对某些无限乘积给出了肯定的回答：

定理 1.4（定理 3.11 和定理 3.13）。

(1) 令 $d \geq 5$。那么 $\prod_{j=1}^{\infty}$ Alt(d^j) 存在一个二生成框架。(2) 令 $\mathbb{F}_q$ 为一个有限域，并令 $d \geq 4$。那么 $\prod_{j=1}^{\infty}$ SL$_{d^j}(\mathbb{F}_q)$ 存在一个二生成框架。

该定理中的框架是望远镜的群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 和 $G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)}$ ，其中望远镜分别由交错群和特殊线性群构成。在相当温和的假设下，望远镜能够提供框架，这将在第 3 节中解释。熟悉分支群理论的读者会注意到，该证明类似于某些经典完美分支群的同余子群性质的证明。将这一证明与上文提到的 Kassabov 和 Nikolov 证明中的粘合部分结合起来，便可得到一个相当初等的证明：每个拓扑有限生成的乘积 $P = \prod S_n$ 在 $(S_n)_n$ 本质上具有$n\in\mathbb{N}$时都允许一个框架

无界秩

关于定理 1.4 的第二点，我们将在第 2 节和第 3 节看到，当我们用任意含幺结合环 R 替换 $\mathbb{F}_q$ 时，底层望远镜 $\mathcal{E}_d(R)$ 仍然表现良好。于是，关联群$G_{\mathcal{E}_d(R)}$的有限剩余完备化为 $\widehat{G_{\mathcal{E}_d R}()} \cong \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{{}_{d^j} R}$E （），其中 E$_n(R)$ 表示由初等矩阵生成的 GL$_n(R)$ 的子群。如果 E$_d(R)$ 是有限生成的，那么这可用于证明：生成$m \bigoplus$ E$_{d^n}(R)$ 所需的最小生成元数有一个上界，该上界仅取决于 d 和 R ，并且$n=1$当 m 取得足够大时，E$_{d^m}(R)$ 不存在基数为给定有限值的商群。

应用 4：可 amenable-(τ) 格罗滕迪克对。群论中有一个经典问题：如果知道一个有限生成的剩余有限群G 的所有有限商群，或者等价地，知道它的有限拓扑$\widehat{\ }$完备化 G （参见 [23]），那么可以对它作何判断？众所周知，一般而言， G 无法由其有限剩余完备化确定。即使对虚拟循环群，这一点也不成立；参见 [7]。虽然已知一些有趣的群具有有限拓扑刚性（例如参见 [13]），但这似乎是一种例外情况。尽管如此，某些性质——称为有限拓扑性质——可以由有限剩余完备化检测出来。有限拓扑性质的简单例子包括是阿贝尔群、幂零群或可解群。然而，已知许多其他性质并非有限拓扑性质；例如有限性性质 [48] 以及更高阶的 ℓ^2-Betti 数 [38]。但拥有相同有限剩余完备化的群之间究竟可以有多大差异？在这里，我们考察群论中两种相当对立的性质：可 amen 性和具有性质 (τ)。后一性质由 Lubotzky 和 Zimmer [50] 引入，是 Kazhdan 性质（T）的一个稍弱变体。性质 (τ) 和可 amen 性都不是有限拓扑性质。对于性质 (τ)，这一点由 Kassabov [41], 证明；对于可 amen 性，这是作者们的结果 [44]。作为对这些结果的共同强化，我们将把它们结合到一个格罗滕迪克对中。回顾一下，若一对 (G, H) 有限生成的剩余有限群满足：G 是 H 的真子群，且包含映射 $\iota\colon G \to H$ 诱导出同构$\curvearrowright$ $\curvearrowright\widehat{\iota}\colon G \to H$，则称其为格罗滕迪克对。对于 G 和 H 均为有限呈示群的情形，Grothendieck [31] 于 1970年 提出是否存在这样的群对。即使在有限生成群的情形下，也直到 1986年，Platonov 和 Tavgen [62] 才构造出首批格罗滕迪克对。近 20 年后，Bridson 和 Grunewald [15] 才解决了有限呈示的情形。结合 Ershov、Jaikin-Zapirain 和 Kassabov [25] 关于满足性质 (τ) 的群的强有力结果，以及我们望远镜群 $G_{\mathcal{S}}$ 的性质，我们将证明如下结论。

定理 1.5（定理 10.2）。存在一个格罗滕迪克对（G, H），由一个可和群 G 和一个具有性质（τ）的群 H 组成。

再次，本定理中的群 G 是我们之前提到过的望远镜 $\mathcal{A}(d, r)$ 的群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$。

文章结构。第 2 节给出望远镜的定义，并引入柔性的概念。我们还介绍主要例子：交错群的望远镜 $\mathcal{A}(d, r)$，以及特殊线性群的望远镜 $\mathcal{SL}_d(F)$。第 3 节包含关于完美群 B的柔性 B-望远镜结构的一些有用结果。特别地，我们将在本节中推导出关于框架的结果。第 4 节讨论望远镜 $\mathcal{S}$ 的群 $G_{\mathcal{S}}$ 的正规子群与次正规子群。我们将看到，在适当的假设下，$G_{\mathcal{S}}$ 是一个 t-群，即每个次正规子群都是正规的。作为应用，我们将证明 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 的所有有限生成次正规子群都是直因子。第 5 节仍然讨论直因子，其中包含一个简单构造：构造一个有限生成的剩余有限群，使得无法在有限拓扑完备化中识别直因子。在此过程中，我们为 Goldstein 和 Guralnick 提出的一个问题提供了一个可 amenable 的反例。第 6 节简要介绍望远镜的作用，我们认为这是理解望远镜的一种有用方式。然而，本节中的结果仅用于给出头部 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 单性的另一种证明。该证明，以及 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 单性的一个简短且自包含的证明，将在第 7 节给出。第 8 节将证明，望远镜 $\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)$ 的一个射影变体的头部同样是单的。必要的背景知识以及嵌入结果定理 1.2 的证明包含在第9节中。第 10 节中，我们观察到群

$G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 可以与具有性质（τ）的已知群结合起来，从而得到定理 1.5 中的格罗滕迪克对。最后，在第 11 节中，我们介绍一些涉及 B-望远镜的未决问题。

2. Definitions and Examples

2.1. 记号。设 G 为一个群。下文将使用以下记号。设 $g, h \in G$。我们用 $g^h = h^{-1}gh$ 表示共轭，且 g, h 的交换子定义为 $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$。

2.2. B-望远镜的定义。

定义 2.1。设 B 为一个群。一个 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 由一个群 Ω_i 及同态 $\iota_{i,j}\colon \Omega_i \to \Omega_j$（对所有 $i < j$）构成的有向系统 $((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, \iota_{i,j})$，以及对每个 $i \geq 2$ 的同态 $\phi_i\colon B \to \Omega_i$ 组成，其像 $B_i \subseteq \Omega_i$ 满足

$$\Omega_i = \langle\{hB_ih^{-1} \mid h \in \iota_{i-1,i}(\Omega_{i-1})\}\rangle \tag{2.1}$$

and

$$[\iota_{i,j}(B_i), B_j] = 1 \tag{2.2}$$

对所有 $2 \leq i < j$ 均成立。为方便起见，我们通常写作 $\iota_{i,i}$ 来表示恒等映射。

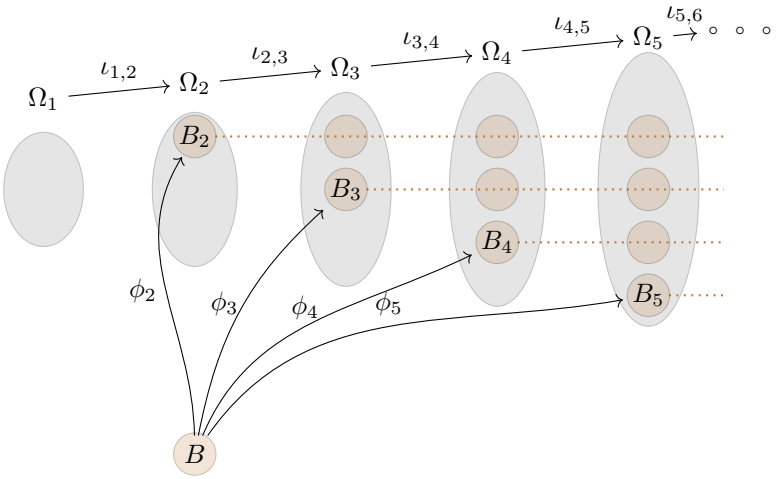


Figure 1. B-望远镜示意图

设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 为一个 B-望远镜。我们所关注的群是直积 $P_\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ 的子群。从 $P_\mathcal{S}$ 到 Ω_i 的典范投影记为 π_i。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\Delta_i\colon \Omega_i \to P_\mathcal{S} \quad \text{with} \quad \omega \mapsto (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \omega, \iota_{i,i+1}(\omega), \iota_{i,i+2}(\omega), \dots).$$

我们注意到，Δ_i 是一个单射同态。

对于元素 $g \in B$ 和 $n \geq 1$，我们将 $\tilde{g}^{[n]} \in P_\mathcal{S}$ 定义为如下元素：当 $i \leq n$ 时为 $i\pi_i(\tilde{g}^{[n]}) = 1$，当 $i > n$ 时为 $\pi_i(\tilde{g}^{[n]}) = \prod \iota_{k,\,i}(\phi_k(g))$。由条件 $k=n+1$ (2.2) 可知，该乘积中的各项两两交换。我们将 $\tilde{g}$ 记作 $\tilde{g}^{[1]}$。注记 2.2。映射 $\tau_n\colon B \to P_\mathcal{S}$，$g \mapsto \tilde{g}^{[n]}$ 是一个同态。这直接源于我们的假设：每个 ϕ_i 都是一个同态，并且满足条件 (2.2)。

τ_n 下 B 的像记作 $C^{[n]}$。群

$$G_{\mathcal{S}} = \langle \Delta_1(\Omega_1), C^{[1]} \rangle \subseteq P_{\mathcal{S}}$$

称为该望远镜的群。这里我们主要关注群 $G_{\mathcal{S}}$ 的结构。不过，研究另一个由 $\mathcal{S}$ 定义的群也很方便。该群

$$\widetilde{G}_{\mathcal{S}} = \langle \{\Delta_i(\Omega_i) \mid i \geq 1\} \cup C^{[1]} \rangle \subseteq P_{\mathcal{S}}$$

称为该望远镜的巨大群。稍后我们将看到，在对望远镜作出适当假设时，该群与巨大群相同。注意，$\curvearrowright G_{\mathcal{S}}$ 包含直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ 作为正规子群（证明见下文推论 3.3）。商群

$$Q_{\mathcal{S}} = \widetilde{G}_{\mathcal{S}} / \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

称为该望远镜的头部。

记号 2.3. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。对于满足 $i \leq j$ 的任意两个数 i、$j \in \mathbb{N}$，我们分别用 $B_{i,\ j}$ 和 $\Omega_{i,\ j}$ 表示 B_i 和 Ω_i 在 $\iota_{i,\ j}$ 下的像。对于 $a \in \Omega_i$ 和 $j > i$，我们定义 $a_{i,\ j} = \iota_{i,\ j}(a)$。

我们将经常使用以下这个单一观察，它是一个 B-望远镜的公理的直接结果。

注 2.4. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。对于所有 $b \in B$ and $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{b}^{[n]} = \Delta_{n+1}(\phi_{n+1}(b))\tilde{b}^{[n+1]} = \tilde{b}^{[n+1]}\Delta_{n+1}(\phi_{n+1}(b)).$$

定义 2.5. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。我们称 $\mathcal{S}$ 是柔性的，如果对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个元素 $\alpha_i \in \Omega_i$，使得以下条件成立。

(F1) $[\alpha_{i,i+1}, B_{i+1}] = 1$ 对所有 $i \geq 1$，(F2) $[B_{k,m}^{\alpha_{i,m}}, B_{\ell,m}] = 1$ 对所有 k、$\ell \geq i+2$，以及 $m \geq k$、ℓ，(F3) $[B_{k,m}^{\alpha_{i,m}}, B_{\ell,m}^{\alpha_{j,m}}] = 1$ 对所有 $k \geq i+2$、$\ell \geq j+2$、$i > j$ 以及 $m \geq k$、ℓ，

其中 $\alpha_{i,\ j} = \iota_{i,\ j}(\alpha_i)$。

注 2.6. 如果 $\mathcal{S}$ 是柔性的，那么由于 (F1) 和 (2.2)，$\ell = i+1$ 也满足条件 (F2)。类似地，使用条件 (F1)、(F2) 和 (2.2)，$k \geq i+1$ 和 $\ell \geq j+1$ 满足条件 (F3)。

定义 2.7. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，我们考虑系统 $\mathcal{S}_{+n} := ((\Omega_{i+n})_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_{i+n})_{i\geq 2})$，该系统将被称为 $\mathcal{S}$ 的 n-重移位 B-望远镜。

由公理可立即得出，$\mathcal{S}_{+n}$ 确实是一个 B-望远镜，并且如果 $\mathcal{S}$ 是柔性的，则 $\mathcal{S}_{+n}$ 是柔性的。

引理 2.8. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。假设 M_i 是 Ω_i 的正规子群，并且 $\iota_{i,j}(M_i) \subseteq M_j$。那么 $\mathcal{T} = ((\Omega_i/M_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\overline{\phi}_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜，对于 $\overline{\phi}_n(b) = \phi_n(b)M_i$。如果 $\mathcal{S}$ 是柔性的，那么 $\mathcal{T}$ 也是柔性的。

证明。根据假设 $\iota_{i,\ j}(M_i) \subseteq M_j$，过渡映射 $\iota_{i,\ j}$ 诱导出良定义映射 $\overline{\iota}_{i,\ j}\colon \Omega_i/M_i \to \Omega_j/M_j$。显然，如果 Ω_i 由 $B_i = \phi_i(B)$ 的 $\Omega_{i-1,\ i}$-共轭元生成，那么商群 Ω_i/M_i 就由 $\overline{\phi}_i(B)$ 的 $(\Omega_{i-1,\ i}/M_{i-1})$-共轭元生成。$B$-望远镜和灵活性的其余公理依赖于交换关系，而这些关系显然在商群 Ω_i/M_i 中仍然成立。□

2.3. 初等例子。我们通过若干例子来说明这个定义。先从一些几乎显而易见的例子开始；这些例子有助于理解后文出现的一些假设。

例 2.9（{1}-望远镜）。假设 $B = \{1\}$是平凡的。考虑一个 {1}-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$。那么条件 (2.1) 蕴含，对于所有 $k \geq 2$，$\Omega_k = \{1\}$。特别地，一个 {1}-望远镜由群 Ω_1唯一确定。此外，$\mathcal{S}$ 的群是 Ω_1（同构）。显然，对于所有 i，{1}-望远镜总是柔性的，且 $\alpha_i = 1$。

例 2.10（长度为 2 的 B-望远镜）。设 Ω_2 是一个具有两个子群 Ω_1 和 B 的群，且 B 在 Ω_1 中的共轭元生成 Ω_2。对所有 $k \geq 3$，定义 $\Omega_k = \{1\}$。令 $\iota_{1,\,2}\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ 和 $\phi_2\colon B \to \Omega_2$ 表示包含映射。若对所有 $j \geq 3$，我们选择$\iota_{i,\,j}$ 和 ϕ_j 均为平凡的，那么 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。对于所有 i，它都是柔性的，且 $\alpha_i = 1$。群 $G_{\mathcal{S}}$是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 的子群，由下式定义

$$G_{\mathcal{S}} = \langle \{(g, g) \mid g \in \Omega_1\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\} \rangle \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2.$$

将形如 $(1, b)$ 的元素与形如 (g, g) 的元素共轭，可以应用条件 (2.1) 得到 $G_{\mathcal{S}} = \Omega_1 \times \Omega_2$。

例 2.11（阿贝尔 B 的一个 B-望远镜）。令 B 为阿贝尔群。对所有 i，定义 $\Omega_i = B$。我们令 $\iota_{i,j}$ 和 ϕ_j 在所有 $1 \leq i < j$ 上均为恒等映射。于是$\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个柔性 B-望远镜，对所有 i，都有 $\alpha_i = 1$。群$G_{\mathcal{S}}$同构于 $B \times B$，因为它是由元素 $\Delta_1(\Omega_1) = \{(b, b, b \ldots) \mid b \in B\}$ 和 $C^{[1]} = \{(1, b, b^2, b^3, b^4 \ldots) \mid b \in B\}$ 生成的 $\prod_{i=1}^{\infty} B$ 的子群。

例 2.12（一个非柔性 B-望远镜）。令 B 为任意群。对所有奇数 i，定义 $\Omega_i = \{1\}$；对所有偶数 i，定义 $\Omega_i = B$。对于所有 $i < j$，映射 $\iota_{i,j}$ 必须都是平凡的。此外，我们定义 $\phi_j\colon B \to \Omega j$：对于所有偶数 j，取恒等映射，否则取平凡映射。于是 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。由于 $\Delta_1(\Omega_1)$ 是平凡的，群 $G_{\mathcal{S}}$ 同构于 B，因为$C^{[1]} = \{(1, b, 1, b, 1, b, 1, \ldots) \mid b \in B\} \cong B$。当 B为非阿贝尔群时，该望远镜不是柔性的。事实上，由于 Ω_1 是平凡的，唯一可能的选择是 $\alpha_1 = 1$。然而，$B_4 = \Omega_4$ 是非阿贝尔的，并且我们有$[B_4^{\alpha_{1,4}}, B_4] \neq 1$；这与 (F2) 矛盾。

2.4. Alt(rd)-望远镜族。现在我们将介绍一个主要示例，它促使我们定义 B-望远镜。这个示例将贯穿全文，并用于我们的主要应用中。我们鼓励读者熟悉这个示例。

固定一个整数 $d \geq 5$ 和一个整数 $2 \leq r \leq d - 3$。我们的目标是构造一个柔性的 Alt(rd)-望远镜 $\mathcal{A}(d, r) = ((\Omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}, (\phi_\ell)_{\ell\geq 2})$，其中 $\Omega_\ell \cong \mathrm{Alt}(d^\ell)$ 是一个有限交错群。为此，我们固定一个含 d 个元素的集合 $X := \{x_1, \ldots, x_d\}$，并将其视为一个字母表。令 X^* 表示由 X 构成的所有词（包括空单词 $\emptyset$）的集合。我们将长度为 $\ell \in \mathbb{N}_0$、由 X 构成的词的集合视为直积 X^ℓ。令 $\Omega_\ell = \mathrm{Alt}(X^\ell)$ 表示作用在 X^ℓ上的交错群。对于每个 $k \geq \ell$，我们考虑嵌入 $\iota_{\ell,\,k}\colon \Omega_\ell \to \Omega_k$，定义如下：

$$\iota_{\ell,k}(\sigma)(vw) = \sigma(v)w$$

对所有 $v \in X^\ell$ 和 $w \in X^{k-\ell}$均成立。注意，对于每个 $\sigma \in \Omega_\ell$，$\iota_{\ell,k}(\sigma)$ 确实是一个偶置换。令 $B := \mathrm{Alt}(\{x_1, \ldots, x_r\} \times X)$，我们将其视为 Ω_2 的子群，它固定所有满足 $i > r$ 的词 $x_i x_j$。对于每个 $\ell \geq 2$，我们定义一个同态$\phi_\ell\colon B \to \Omega_\ell$如下。给定 $\sigma \in B$、$v \in X^{\ell-2}$ 和 x、$y \in X$，令

$$\phi_\ell(\sigma)(vxy) = \begin{cases} v\sigma(xy), & \text{if } v = x_d^{\ell-2} \\ vxy, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据定义 2.1，我们将 B 在 ϕ_ℓ 下的像记作 B_ℓ。

注 2.13. 注意， B_ℓ 可以描述为：在所有以某个 $x_d^{\ell-2}x_i$ 开头、长度为 ℓ、由 X 中元素组成的词构成的集合上的交错群，其中 $i \le r$。换言之，我们有

$$B_\ell = \mathrm{Alt}(\{x_d^{\ell-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X). \tag{2.3}$$

我们将证明， $\mathcal{A}(d,r) = ((\Omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}, (\phi_\ell)_{\ell\ge 2})$ 是一个柔性 B-望远镜。照例，我们分别用 $B_{\ell,\ k}$ 和 $\Omega_{\ell,\ k}$ 表示 B_ℓ 和 Ω_ℓ 在 $\iota_{\ell,\ k}$ 下的像。为建立各种交换子关系，我们将利用支撑不相交的置换彼此交换这一事实。

定义 2.14. 给定集合 X 及其子集 $S \subseteq \mathrm{Sym}(X)$，我们将 S 在 X 中的支撑定义为 $\mathrm{supp}_X(S) = \{\, x \in X \mid \sigma(x) \ne x \text{，其中 } \sigma \in S \,\}$。

为了使 $\mathcal{A}(d,r)$ 具有柔性，我们需要如定义 2.5 中所述的元素 $\alpha_i \in \Omega_i$。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，我们定义元素 $\alpha_\ell \in \Omega_\ell$ 为以下 3-循环

$$\alpha_\ell := (x_d^{\ell-1}x_{d-2}, x_d^{\ell-1}x_{d-1}, x_d^\ell) \in \Omega_\ell.$$

回想一下，对于 $k \ge \ell$，我们将 α_ℓ 在 $\iota_{\ell,k}$ 下的像记为 $\alpha_{\ell,k}$。

引理 2.15. 给定 $i, j, k \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

(1) If $j \ge i \ge 2$, then $\mathrm{supp}_{X^j}(B_{i,j}) = \{x_d^{i-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{j+1-i}$.
(2) If $j \ge i$, then $\mathrm{supp}_{X^j}(\alpha_{i,j}) = \{x_d^{i-1}\} \times \{x_{d-2}, x_{d-1}, x_d\} \times X^{j-i}$.
(3) If $k \ge j \ge i+2$, then

$$\mathrm{supp}_{X^k}(B_{j,k}^{\alpha_{i,k}}) = \{x_d^{i-1}x_{d-1}x_d^{j-2-i}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{k+1-j}.$$

证明。前两个断言直接由 $B_{i,\ j}$ 和 $\alpha_{i,\ j}$ 的定义得到。应用这两个断言，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}_{X^k}(B_{j,k}^{\alpha_{i,k}}) &= \alpha_{i,k}^{-1}(\mathrm{supp}_{X^k}(B_{j,k})) \\ &= \alpha_{i,k}^{-1}(\{x_d^{j-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{k+1-j}) \\ &= \{x_d^{i-1}x_{d-1}x_d^{j-2-i}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{k+1-j},\end{aligned}$$

这就得到了最后一个结论。 □

命题 2.16。上文定义的 $\mathcal{A}(d,r)$ 是一个柔性 B-望远镜。

证明。令 $\ell \ge 2$。我们首先验证 (2.1)，即 $\Omega_\ell = \langle \{\sigma B_\ell \sigma^{-1} \mid \sigma \in \Omega_{\ell-1,\ \ell}\} \rangle$。鉴于注 2.13，我们有

$$\sigma B_\ell \sigma^{-1} = \mathrm{Alt}(\sigma(\{x_d^{\ell-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X)).$$

在 $\sigma = \iota_{\ell-1,\ell}(\sigma')$ 的情况下，对于某个 $\sigma' \in \Omega_{\ell-1}$，这就给出了我们

$$\sigma B_\ell \sigma^{-1} = \mathrm{Alt}(\sigma'(\{x_d^{\ell-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\}) \times X). \tag{2.4}$$

设 v_1, ..., $v_{d^{\ell-1}}$, 以及 w_1, ..., w_{d^ℓ}, 分别是 $X^{\ell-1}$ 和 X^ℓ 的字典序枚举。那么对于每个 $v_k \in X^{\ell-1}$，我们有

$$\{v_k\} \times X = \{w_{j+1}, \dots, w_{j+d}\} \tag{2.5}$$

对于某个 j。根据我们的假设 $d \ge 5$，可知 $\Omega_{\ell-1}$ 在 $X^{\ell-1}$ 上二重传递地作用。因此，对于每个 $1 \le k < d^{\ell-1}$，存在某个 $\sigma_k \in \Omega_{\ell-1}$，使得 $\sigma_k(x_d^{\ell-2}x_1) = v_k$ 且 $\sigma_k(x_d^{\ell-2}x_2) = v_{k+1}$。令 $M_k := \{v_k, v_{k+1}\} \times X$，由 (2.4) 可得

$$\mathrm{Alt}(\{w_{j+1}, \dots, w_{j+2d}\}) = \mathrm{Alt}(M_k) \le \sigma_k B_\ell \sigma_k^{-1} \tag{2.6}$$

对于适当的 j。鉴于 (2.5)，每个交集 $M_k \cap M_{k+1} = \{v_{k+1}\} \times X$ 都由 X^ℓ 中连续的 d 个词组成。结合 (2.6) 和我们的假设

这意味着 $2d \geq 10$，由此可知，任意连续的三个词 w_j、w_{j+1}、w_{j+2} 都属于某个 M_k。因此，形如 (w_j, w_{j+1}, w_{j+2}) 的每个 3-循环都包含在某个交错群 $\mathrm{Alt}(M_k)$ 中。这些 3-循环众所周知可以生成 $\mathrm{Alt}(\Omega_\ell)$，参见例如 [53, 引理 5.1]。

为建立条件 (2.2)，我们固定两个整数 i, j，满足 $2 \leq i < j$。于是，由引理 2.15 可得

$$\mathrm{supp}_{X^j}(B_{i,j}) = \{x_d^{i-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{j+1-i}$$

and

$$\mathrm{supp}_{X^j}(B_j) = \{x_d^{j-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X.$$

由于 $r \leq d-3 < d$，可知 $\mathrm{supp}_{X^j}(B_{i,\ j})$ 与 $\mathrm{supp}_{X^j}(B_j)$ 不相交；因此我们得到 $[B_{i,j}, B_j] = 1$ 属于 Ω_j。

最后，我们验证定义 2.5 中的灵活性条件 (F1)、(F2) 和 (F3)。假设 $i \geq 1$。再次应用引理 2.15 可得

$$\mathrm{supp}_{X^{i+1}}(\alpha_{i,i+1}) = \{x_d^{i-1}\} \times \{x_{d-2}, x_{d-1}, x_d\} \times X$$

and

$$\mathrm{supp}_{X^{i+1}}(B_{i+1}) = \{x_d^{i-1}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X,$$

利用 $r \leq d-3$ 可知它们互不相交。因此我们看到 $\alpha_{i,\ i+1}$ 与 B_{i+1} 交换，从而得到 (F1)。为验证 (F2)，设 $\ell \geq 2$, $j \geq i+2$，且$k \geq j, \ell$。此时，由引理 2.15 可得

$$\mathrm{supp}_{X^k}(B_{j,k}^{\alpha_{i,k}}) = \{x_d^{i-1} x_{d-1} x_d^{j-2-i}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{k+1-j}$$

and

$$\mathrm{supp}_{X^k}(B_{\ell,k}) = \{x_d^{\ell-2}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{k+1-\ell},$$

由此我们推出，$\mathrm{supp}_{X^k}(B^{\alpha_i}{}_{,j\ k}{}^{k}{}_{,})$ 与 $\mathrm{supp}_{X^k}(B_{\ell,k})$ 不相交。因此${}_{B^{\alpha_{i,j}}{}_{k}{}^{k}{}_{,}}$与 $B_{\ell,k}$ 交换。

为验证 (F3)，设 $j > i$、$k \geq i+2$、$\ell \geq j+2$ 已给定，并设 $m \geq k$、ℓ 已给定。引理 2.15 告诉我们

$$\mathrm{supp}_{X^m}(B_{k,m}^{\alpha_{i,m}}) = \{x_d^{i-1} x_{d-1} x_d^{k-2-i}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{m+1-k}$$

and

$$\mathrm{supp}_{X^m}(B_{\ell,m}^{\alpha_{j,m}}) = \{x_d^{j-1} x_{d-1} x_d^{\ell-2-j}\} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X^{m+1-\ell}.$$

由于 $i < j$，这意味着 $B^{\alpha_i}{}_{,k\ m}{}^{m}{}_{,}$ 与 $B^{\alpha_j}{}_{,\ell\ m}{}^{m}{}_{,}$ 的支集在 X^m 中不相交。因此 $B^{\alpha_i}{}_{,k\ m}{}^{m}{}_{,}$ 与 $B^{\alpha_j}{}_{,\ell\ m}{}^{m}{}_{,}$交换，从而完成证明。□

注记 2.17. 若将集合 X^ℓ 视为正则有根树的层集，则 $\mathcal{A}(d, r)$ 的构造使人联想到作用于有根树上的脊群的构造。自同构 $\Delta_1(\Omega_1)$ 作为“有根”树自同构作用，将第一层顶点下方悬挂的树相互置换。~元素 b 似乎沿着脊 x_d^∞ 定向。然而，这些元素并非该树的自同构。

2.5. 一族 $\mathrm{E}_{2d}(R)$-望远镜。设 R 是一个含幺结合环。对于有限集 Y，我们用 $\mathrm{M}_Y(R)$ 表示以 $Y \times Y$ 为指标、元素取自 R 的矩阵环。令 $\mathrm{E}_Y(R) = \langle \{ e_{y,z}(r) \mid y, z \in Y,\ r \in R \} \rangle$ 表示 $\mathrm{GL}_Y(R)$ 中由初等矩阵生成的子群。对于 $Y' \subseteq Y$，如果一个矩阵$A = (a_{u,v})_{u,v \in Y} \in \mathrm{GL}_Y(R)$ 满足 $a_{y,y} = 1$ 对所有 $y \notin Y'$ 均成立，并且当 x 或 y 属于 $Y \setminus Y'$ 时有 $a_{x,y} = 0$（其中 Y'），我们就称其支撑在 Y' 中。如果 A_1 和 A_2 是支撑在 Y的两个不相交子集上的矩阵，那么 A_1 和 A_2 交换。我们将把 $\mathrm{E}_{Y'}(R)$ 视为

由支撑在 Y' 中的初等矩阵生成的 $\mathrm{E}_Y(R)$ 子群。注意，对于 $y \neq z \in Y$，矩阵

$$s_{y,z} = e_{y,z}(-1)e_{z,y}(1)e_{y,z}(-1) \tag{2.7}$$

支撑在 $\{y, z\}$ 中，且对应的 s_y 的（2×2）块，$_z$ 是

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由形如 $s_{y,\ z}$ 的元素生成的群称为带符号置换群。特别地，带符号置换群在标准基向量上的作用与对称群类似，但允许改变符号。

令 $d \geq 4$，并固定一个具有 $X = \{x_1, \ldots, x_d\}$ 个 d 的集合。我们将把 X^k 看作由字母 x_1、.....、x_d 构成的长度为 k 的词的集合。我们考虑分块对角包含映射 ι_n: $\mathrm{M}_{X^n}(R) \to \mathrm{M}_{X^{n+1}}(R)$，将 $A = (a_{u,v})_{u、\ v \in X^n}$ 映射为矩阵 $A = (\tilde{a}_{u',v'})_{u'、\ v' \in X^{n+1}}$，其中当 $x = y$ 时，$\tilde{a}_{ux、\ vy} = a_{u、\ v}$；当 $x \neq y$ 时，对所有 $u、\ v \in X^n$ 以及 $x、\ y \in X$，有 $\tilde{a}_{ux、\ vy} = 0$。带有分块对角包含映射的群列 $\Omega_n := \mathrm{E}_{X^n}$({v39)

$$\iota_n \colon \Omega_n \to \Omega_{n+1}$$

将赋予其一个 B-望远镜结构，用于 $B := \mathrm{E}^{\{x_1,x_2\}\times X}(R)$。态射 ϕ_n: $B \to \Omega_n$ for $n \geq 2$ 对应于显然的双射

$$j_n \colon \{x_1, x_2\} \times X \to \{x_d^{n-2}\} \times \{x_1, x_2\} \times X$$

将 u 映射到 $x_d^{n-2}u$ 的映射。我们记 $\mathcal{E}_d(R)$ 为 $= ((\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$。与之前一样，$B_n$ 表示 B 在 Ω_n 中的像。

命题 2.18。设 R 为一个含幺结合环。那么 $\mathcal{E}_d(R)$ 是 $d \geq 4$ 的一个柔性 $\mathrm{E}_{2d}(R)$-望远镜。

证明。设 $m \geq n \geq 2$。我们观察到，$B_{n,\ m}$ 中的所有元素都支撑于

$$Z(n, m) = \{x_d^{n-2} x_i v \mid i \in \{1, 2\}, v \in X^{m-n+1}\}. \tag{2.8}$$

由于 $d > 2$ 集合 $Z(n, m)$ 和 $Z(m, m)$ 对于 $m > n$ 是不相交的，因此 $B_{n,m}$ 和 B_m 交换。接下来我们验证 that

$$\Omega_n = \langle \{hB_n h^{-1} \mid h \in \Omega_{n-1,n}\} \rangle,$$

其中 Ω_{n-1} 被视为 Ω_n中的像。由于 $d \geq 3$，我们注意到 (2.7) 表明，Ω_{n-1} 在 $R^{X^{n-1}}$ 中的标准基向量集合上（差一个符号）二重传递。设 $h \in \mathrm{E}_{X^{n-1}}(R)$ 是一个将 $\{x_d^{n-2}\} \times \{x_1, x_2\}$映射到一个二元子集 $U \subseteq X^{n-1}$的带符号置换。则 $hB_n h^{-1} = E_{U\times X}(R)$。由于 X^n 的每一对元素都包含在形如 $U \times X$的集合中，我们可以推断 Ω_n 由共轭元 $hB_n h^{-1}$生成。

为了证明 $\mathcal{E}_d(R)$ 是柔性的，我们定义元素 $\alpha_n \in \mathrm{E}_{X^n}(R)$ 为

$$\alpha_n = s_{x_d^{n-1} x_{d-1}, x_d^n}$$

（见（2.7））。注意，α_n 支撑在 $x_d^{n-1} \times \{x_{d-1}, x_d\}$上。令 $n \geq 1$。B_{n+1}的元素支撑在 Z（$n+1$，$n+1$）上（见（2.8））。由于$\alpha_{n,\ n+1}$ 支撑在集合 $\{x_d^{n-1}\} \times \{x_{d-1}, x_d\} \times X$上，而当 $d \geq 4$时，该集合与 Z（$n+1$，$n+1$）不相交，因此公理（F1）成立。现在考虑公理（F2）和（F3）。令 $i \geq 1$ 并令 $k \geq i + 2$。我们注意到 $B^{\alpha_{i,\ k\ m}}$，支撑在

$$Z^{(i)}(k, m) = \{x_d^{i-1} x_{d-1} x_d^{k-i-2} x_t x \mid t \in \{1, 2\}, x \in X^{m-k+1}\}.$$

设 k、$\ell \geq i + 2$，并设 $m \geq k$、ℓ。那么集合 $Z^{(i)}(k, m)$ 和 $Z(\ell, m)$ 不相交（回顾一下，$d \geq 4$）。因此 $[B_{k,m}^{\alpha_{i,m}}, B_{\ell,m}] = 1$。最后，设给定 $i > j \geq 1$，并设

$k \geq i+2$和 $\ell \geq j+2$以及 $m \geq k$、ℓ。集合 $Z^{(i)}(k,m)$ 和 $Z^{(j)}(\ell,m)$ 不相交，这意味着 (F3)。由此可得，$\mathrm{E}_{2d}(R)$- 望远镜 $\mathcal{E}_d(R)$ 是柔性的。□

注 2.19。（a）采用与第2.4节类似的变体，可以为所有含幺结合环定义柔性 $\mathrm{E}_{rd}(R)$-望远镜（带有 $2 \leq r \leq d-2$）。（b）群 $E_m(R)$ 对于 $m \geq 3$ 是完美的；见 [32, 1.2.15]。（c）设 R 是交换环。若 R 是域、欧几里得环或整体域中的整数环，则对于 $m \geq 3$ 有 $\mathrm{E}_m(R) =$ 特殊线性群$_m(R)$；见[32, 4.3.9]。

注 2.19 的后一种情形将在我们的记号中体现为写作 $\mathcal{SL}_d(R)$，而不是 $\mathcal{E}_d(R)$。

例 2.20。设 F 是一个域，并设 $d \geq 4$。考虑望远镜 $\mathcal{E}_d(F) = ((\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$。在此情形下，$\Omega_n =$特殊线性群$_{d^n}(F)$。令 $Z_n \subseteq \Omega_n$ 表示中心。同态

$$\iota_{n,n+1}\colon \mathrm{SL}_{d^n}(F) \to \mathrm{SL}_{d^{n+1}}(F)$$

是一个分块对角嵌入，并且将数量矩阵映射为数量矩阵；也就是说 $\iota_{i,j}(Z_i) \subseteq Z_j$. 特别地，系统 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足引理 2.8 的假设，因此我们可以推得 $\mathcal{PSL}_d(F) = ((\Omega_n/Z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\overline{\phi}_n)_{n\geq 2})$ 是一个柔性特殊线性群 $\mathrm{SL}_{2d}(F)$-望远镜。

3. Perfect telescopes and the profinite completion

这里我们将研究完美群的柔性望远镜 $\mathcal{S}$ B。我们将看到，$G_{\mathcal{S}}$ 的子群结构可以相当详细地加以描述。这将使我们能够证明，$\mathcal{S}$ 的群与巨大群相同，并且 $G_{\mathcal{S}}$ 的有限剩余完备化是望远镜中各群 Ω_i 的有限剩余完备化的直积 $\prod_{i=1}^{\infty} \widehat{\Omega}_i$。

3.1. 完美的望远镜结构 B。在本节中，B表示一个完美群，我们固定一个柔性 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$。我们注意到，这意味着对所有 $i \geq 2$，Ω_i 都是完美的；事实上，根据 (2.1)，Ω_i由完美子群生成。我们将讨论一些预备结果。下面这个简单但有用的观察基于分支群理论中的一个标准技巧；参见 [57, 68]。

引理 3.1. 设 G 是一个群。假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 n 个互不相同的子群 $H_{1,n}, \ldots, H_{n,n}$ 包含于 G 中，且它们两两交换，即 $[H_{i,n}, H_{j,n}] = 1$ 对于 $i \neq j$成立。那么，G 的每个有限指数正规子群 N 都包含某些合适的 i, j所对应的$H'_{i,j}$ 的正规闭包。

证明。设 N 是 G 的一个有限指数正规子群，并令 m 为满足 $N \leq H \leq G$的子群 H 的个数。根据假设，我们可以在 G 中找到 $m+1$ 个互不相同的子群$H_{i,m+1}$，使得对于 $i \neq j$，$[H_{i,m+1}, H_{j,m+1}] = 1$ 成立。鸽巢原理告诉我们，存在互不相同的 i, j，使得 $NH_{i,m+1} = NH_{j,m+1}$。由此可得

$$H'_{i,m+1} \leq [NH_{i,m+1}, NH_{i,m+1}] = [NH_{i,m+1}, NH_{j,m+1}] \leq N$$

并且 N 包含 $H'_{i,m+1}$的正规闭包。□

引理 3.2. 群 $G_{\mathcal{S}} = \langle \Delta_1(\Omega_1)\ C^{[1]} \rangle$ 包含 $\Delta_i(\Omega_i)$ 和 $C^{[i]}$，对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。我们记 $G = G_{\mathcal{S}}$。我们对 i 使用归纳法。对于 $i = 1$，由 G 的定义可知该断言成立。设 $i \geq 1$，并假设 $\Delta_i(\Omega_i) \subseteq G$ 和 $C^{[i]} \subseteq G$。设 h、$k \in B$ 和 $\alpha_i \in \Omega_i$ 如定义 2.5 所述。则 $\tilde{h}^{[i]}$、$\tilde{k}^{[i]}$、$\Delta_i(\alpha_i) \in$。

G。考虑元素 $g = [\tilde{h}^{[i]}, \Delta_i(\alpha_i)\tilde{k}^{[i]}\Delta_i(\alpha_i)^{-1}]$。对于每个 $j \le i$ 我们有$\pi_j(\tilde{h}^{[i]}) = 1$ 以及 $\pi_j(\tilde{k}^{[i]}) = 1$，这给出 $\pi_j(g) = 1$。应用 (F1) 我们得到

$$\begin{aligned}\pi_{i+1}(g) &= [\pi_{i+1}(\tilde{h}^{[i]}), \pi_{i+1}(\Delta_i(\alpha_i))\pi_{i+1}(\tilde{k}^{[i]})\pi_{i+1}(\Delta_i(\alpha_i)^{-1})]\\ &= [\phi_{i+1}(h), \alpha_{i,i+1}\phi_{i+1}(k)\alpha_{i,i+1}^{-1}]\\ &= [\phi_{i+1}(h), \phi_{i+1}(k)]\\ &= \phi_{i+1}([h,k]).\end{aligned}$$

现在考虑 $\pi_j(g) \in \Omega_j$ 对 $j \ge i+2$。利用 (F1)、(F2) 和 (2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\pi_j(g_i) = {} & [\pi_j(\tilde{h}^{[i]}), \pi_j(\Delta_i(\alpha_i))\pi_j(\tilde{k}^{[i]})\pi_j(\Delta_i(\alpha_i)^{-1})]\\ = {} & \Big[\prod_{\ell=i+1}^{j} \iota_{\ell,j}(\phi_\ell(h)), \prod_{\ell=i+1}^{j} \iota_{\ell,j}(\phi_\ell(k))^{\alpha_{i,j}}\Big]\\ = {} & \Big[\prod_{\ell=i+1}^{j} \iota_{\ell,j}(\phi_\ell(h)), \iota_{i+1,j}(\phi_{i+1}(k))\Big]\\ = {} & [\iota_{i+1,j}(\phi_{i+1}(h)), \iota_{i+1,j}(\phi_{i+1}(k))]\\ = {} & \iota_{i+1,j}(\phi_{i+1}([h,k])).\end{aligned}$$

这些等式共同表明 $g = \Delta_{i+1}(\phi_{i+1}([h,k]))$。由于 B 是完美的，我们推得 G 包含 $\Delta_{i+1}(B_{i+1})$。根据 (2.1)，群 Ω_{i+1} 由 $\Omega_{i,i+1}$-共轭元生成，这些共轭元是 B_{i+1}的共轭元。由于 $\Delta_i(\Omega_i) \subseteq G$ 且 $\Delta_{i+1}(B_{i+1}) \subseteq G$，因此可知 $\Delta_{i+1}(\Omega_{i+1})$包含于 G中。由于对所有 $g \in B$均有 $\tilde{g}^{[i]} = \Delta_{i+1}(\phi_{i+1}(g))\tilde{g}^{[i+1]}$ 成立，我们得出 $C^{[i+1]}$ 包含于 G中。□

~推论 3.3。在我们的假设下，有 $G_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}}$。特别地，群 $G_{\mathcal{S}}$ 包含无限直和 $\bigoplus_{i \in \Omega_i,\mathbb{N}}$

证明。令 $i \in \mathbb{N}$ 并令 $\omega \in \Omega_i$。由引理 3.2 可知，$\Delta_i(\omega)$ 和$\Delta_{i+1}(\iota_{i,\ i+1}(\omega^{-1}))$ 属于 $G_{\mathcal{S}}$。因此，$g := \Delta_i(\omega)\Delta_{i+1}(\iota_{i,\ i+1}(\omega^{-1}))$ 属于 G。根据定义，对于 $j < i$，有 $\pi_j(g) = 1$，且 $\pi_i(g) = \omega$。对于 $j > i$，我们得到

$$\pi_j(g) = \iota_{i,j}(\omega)\iota_{i+1,j}(\iota_{i,i+1}(\omega^{-1})) = \iota_{i,j}(\omega)\iota_{i,j}(\omega^{-1}) = 1.$$

综上可知，$(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \bigoplus \Omega_j$，其中 $\omega_i = \omega$ 和 $\omega_j = 1$ 对于 $j \ne i$ 属于$_{j\in\mathbb{N}}G_{\mathcal{S}}$，这就证明了所述结论。□

引理 3.4。令 $n \ge 1$ 并定义 $K_{n-1} =$ker$(G_{\mathcal{S}} \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1})$。那么$K_{n-1} = \langle \Delta_n(\Omega_n)\ C^{[n]} \rangle$。

证明。根据引理 3.2，我们得到包含映射 $\langle \Delta_n(\Omega_n)\ C^{[n]} \rangle \le K_{n-1}$。为了证明反向包含关系，我们对 n 使用归纳法。当 $n = 1$ 时，我们有 $K_0 = G_{\mathcal{S}}$，结论由 $G_{\mathcal{S}}$ 的定义得出。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $K_{n-1} = \langle \Delta_n(\Omega_n)\ C^{[n]} \rangle$。令 $x \in K_n$。由于 $K_n \le K_{n-1}$，我们可以写成

$$x = \Delta_n(\omega_1)c_1\Delta_n(\omega_2)c_2 \cdots \Delta_n(\omega_r)c_r$$

对于某些 $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega_n$ 和 $c_1, \ldots, c_r \in C^{[n]}$。将 x 投影到 Ω_n 上，我们得到 $1 = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_r$，因此

$$x = \Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_1))c_1\Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_2))c_2 \cdots \Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_r))c_r.$$

通过写出 $c_i = \Delta_{n+1}(h_i)c_i'$，并结合 $c_i' \in C^{[n+1]}$ 和 $h_i \in B_{n+1}$，得到

$$x = \Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_1)h_1)c_1'\Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_2)h_2)c_2' \cdots \Delta_{n+1}(\iota_{n,n+1}(\omega_r)h_r)c_r',$$

它是 $\langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})\ C^{[n+1]} \rangle$ 中的一个元素。由于 $x \in K_n$ 是任意的，我们推得 $K_n = \langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})\ C^{[n+1]} \rangle$。□

引理 3.4 使我们能够将柔性 B 望远镜的群与一个平移望远镜的群联系起来。

推论3.5。令 $\mathcal{S}$ 为柔性 B-望远镜，并令 $n \in \mathbb{N}$。若 B 是完美的，则$G_{\mathcal{S}_{+n}} = K_n$，其中 $K_n = \ker(G_{\mathcal{S}} \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$G_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega_i \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i = P_{\mathcal{S}}.$$

证明。根据定义，我们有 $G_{\mathcal{S}_{+n}} = \langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1}) \cup C^{[n+1]} \rangle$。另一方面，我们的假设使我们能够应用引理 3.4，从而推出 $K_n = \langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1}) \cup C^{[n+1]} \rangle$，这就证明了第一个断言。由推论 3.3，我们知道 $G_{\mathcal{S}}$ 包含无限直和 $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$。因此， K_n 与规范映射 $G_{\mathcal{S}} \to \prod_{i>n} \Omega_i$ 的像重合。这就给出了

$$G_{\mathcal{S}} = K_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega_i = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega_i,$$

从而证明了该推论。 □

引理 3.6。设 $n \geq 1$。则 K_n 是 $G_{\mathcal{S}}$ 中由 $C^{[n]}$ 生成的正规闭包。

证明。设 $N \trianglelefteq G_{\mathcal{S}}$ 是包含 $C^{[n]}$ 的正规子群。令 h、$k \in B$，则 $\tilde{h}^{[n]}$、$\tilde{k}^{[n]} \in C^{[n]}$。回顾引理 3.2， $G_{\mathcal{S}}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都包含 $\Delta_i(\Omega_i)$ 和 $C^{[i]}$。如引理 3.2 中所述，由 (F1) 和 (F2) 可得

$$[\tilde{h}^{[n]}, \Delta_n(\alpha_n)\tilde{k}^{[n]}\Delta_n(\alpha_n)^{-1}] = \Delta_{n+1}(\phi_{n+1}([h,k])),$$

该对象包含于 N 中。由于 B 是完美的，我们推出 N 包含 $\Delta_{n+1}(B_{n+1})$。作为 $G_{\mathcal{S}}$ 的正规子群，群 N 包含 $\Delta_{n+1}(B_{n+1})$ 的 $\Delta_n(\Omega_n)$-共轭元；根据 (2.1)，这些共轭元生成 $\Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$。因此， $\Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$ 包含于 N 中。由于 $C^{[n+1]}$ 显然包含于 $\langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})\ C^{[n]} \rangle$ 中，只需应用引理 3.4，即可得到 $K_n = \langle \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})\ C^{[n+1]} \rangle \subseteq N$。□

引理 3.7. 令 N 为 $G_{\mathcal{S}}$ 中 $\Delta_i(\Omega_i)$ 的正规闭包。对于 $i \geq 2$，我们有 $N = K_{i-1}$。对于 $i = 1$，我们总有 $N \supseteq K_2$；若 Ω_2 是单的且 Ω_3 非平凡，则 $N = G_{\mathcal{S}}$。

证明. 令 N 为 $G_{\mathcal{S}}$ 中 $\Delta_i(\Omega_i)$ 的正规闭包。显然， K_{i-1} 包含 N。令 $j =$ 为 $\max(2, i)$。任取 h、$k \in B$。则

$$x := [\tilde{h}^{[j]}, \Delta_i(\alpha_{1,i})] = \tilde{h}^{[j]}\Delta_i(\alpha_{1,i})(\tilde{h}^{[j]})^{-1}\Delta_i(\alpha_{1,i})^{-1}$$

属于 N。由 (F2) 和 (F3)，我们有

$$[\tilde{k}^{[j]}, x] = [\tilde{k}^{[j]}, \tilde{h}^{[j]}] \in N.$$

由于 B 以及由此可知的 $C^{[j]}$ 都是完美的，我们推得 $C^{[j]} \subseteq N$。引理 3.6 推出 $K_j \subseteq N$。若 $i \geq 2$，则 $j = i$，从而我们推得 $K_{i-1} = \Delta_i(\Omega_i)K_i \subseteq N$。

如果 $i = 1$ 我们假设 Ω_2 是单的，并且 Ω_3 是非平凡的。根据上述论证，N 包含 $K_2 = \ker(G_{\mathcal{S}} \to \Omega_1 \times \Omega_2)$，由于 N 包含 $\Delta_1(\Omega_1)$，它投影到第一个因子 Ω_1上。由 Ω_2 的单性，只需证明 $\pi_2(N)$ 是非平凡的。我们断言，元素 $\pi_2(\Delta_1(\alpha_1)) = \alpha_{1,2}$ 是非平凡的。事实上，由于 Ω_3 是非平凡的，(2.1) 蕴含群 B_3 是非平凡且完美的。元素$\alpha_{1,3} = \iota_{2,3}(\alpha_{1,2})$ 根据 (F2) 满足 $[B_3^{\alpha_{1,3}}, B_3] = 1$，因此 $\alpha_{1,3} \neq 1$，从而$\alpha_{1,2} \neq 1$。□

命题 3.8. 设 $\mathcal{S}$ 是完美群 B的一个柔性 B-望远镜。假设对于无穷多个 $i \in \mathbb{N}$，Ω_i 是非平凡的。那么

(a) $G_{\mathcal{S}}$ 不是线性的。

(b) $G_{\mathcal{S}}$ 是 ℓ^2-无环的。

证明。根据推论 3.3 $G_{\mathcal{S}}$ 包含无限直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\Omega_i$。由于 B 是完美的，对于 $i \geq 2$，群 Ω_i 都是完美的。如果有无穷多个 Ω_i 是非平凡的，那么根据 [1, 推论 6] （另见 [43]），$G_{\mathcal{S}}$ 不可能是线性的。

现在假设对于指标$i \in S \subseteq \mathbb{N}$的一个无限集合，$\Omega_i$ 是一个非平凡有限群。那么，$\bigoplus_{i\in S}\Omega_i$ 是 $G_{\mathcal{S}}$ 的一个无限可 amenable 正规子群，由 [51, 定理 7.2] 可知，$G_{\mathcal{S}}$ 是 ℓ^2-无环的。现在假设对于几乎所有 i，Ω_i 都是无限的，并通过对 k进行归纳法，证明 k阶 ℓ^2-Betti 数 $G_{\mathcal{S}}$ 为零。我们注意到，如果 Ω_i 是无限的，那么 $G_{\mathcal{S}}$ 也是无限的（根据推论 3.3），因此 $G_{\mathcal{S}}$ 的第 0 个 ℓ^2-Betti 数为零，即 $b_0^{(2)}(G_{\mathcal{S}}) = 0$。现在令 $k \geq 1$，并令 $n \in \mathbb{N}$ 为使 Ω_n 为无限的最小值。于是根据推论 3.5 $G_{\mathcal{S}}$ 包含一个有限指数子群 H，该子群同构于

$$G_{\mathcal{S}_{+n}} \times \Omega_n.$$

由归纳假设、K¨unneth 公式以及 ℓ^2-Betti 数的归纳公式 [51, 定理 6.54(5)、(6)]，我们得到

$$b_k^{(2)}(G_{\mathcal{S}}) = \frac{1}{|G_{\mathcal{S}} : H|} \sum_{i+j=k} b_i^{(2)}(G_{\mathcal{S}_{+n}}) b_j^{(2)}(\Omega_n) = \frac{1}{|G_{\mathcal{S}} : H|} b_k^{(2)}(G_{\mathcal{S}_{+n}}) b_0^{(2)}(\Omega_n) = 0.$$

□

3.2. 有限群拓扑完备化。推论 3.3 有如下直接推论。

推论 3.9. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是完美群 B 的柔性 B-望远镜。群 $G_{\mathcal{S}} = \langle \Delta_1(\Omega_1) \; C^{[1]} \rangle$ 对所有 $n \geq 1$ 都投影到 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$。特别地，$G_{\mathcal{S}}$ 的像在 $\prod_{i=1}^{\infty} \widehat{\Omega}_i$ 中稠密。

这一结果使我们能够推出以下定理。

定理 3.10. 设 B 是一个完美群，且 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个柔性B-望远镜。那么，包含映射 $G_{\mathcal{S}} \to P_{\mathcal{S}}$ 诱导一个同构

$$\widehat{G}_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\cong} \prod_{i=1}^{\infty} \widehat{\Omega}_i.$$

如果 Ω_1 和 B 是有限生成的，那么 $G_{\mathcal{S}}$ 是有限生成的。如果所有 Ω_i 都是剩余有限的，那么 $G_{\mathcal{S}}$ 是剩余有限的。

证明。根据推论 3.9，包含 K_n 的 $G_{\mathcal{S}}$ 的有限指数子群与 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ 的有限指数子群相对应。给定 $G_{\mathcal{S}}$ 的有限指数正规子群 N，只需证明对于某个 n，N 包含 K_n （这或许可以称为“同余子群性质”）。

设 $n \geq 2$。根据假设 (F3)，子群 $\Delta(\alpha_i^{-1})C^{[n]}\Delta(\alpha_i)$ 对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ 两两交换。因此，我们可以由引理 3.1 推出，N 包含某个 $\Delta(\alpha_i^{-1})C^{[n]}\Delta(\alpha_i)$ 的导出子群。由于 N 是正规的，并且 $C^{[n]}$ 是完美的——作为完美群 B 的像——我们推出 $C^{[n]} \subseteq N$。在此情况下，引理 3.6 蕴含 $K_n \subseteq N$。□

设 $P = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$ 是有限群的直积。我们回顾一下，P 中的框架是一个有限生成子群 $G \leq P$，满足它包含 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n$，并且诱导映射 $G \to P$ 是同构（见定义 1.3）。因此，有限群的柔性B-望远镜产生了出人意料的单框架示例。

接下来我们将看到，我们的主要示例所提供的框架可以由最小生成元数的生成元生成。设给定 $d \geq 5$ 和 $2 \leq r \leq d-3$。我们考虑在 § 2.4 中定义的柔性 交错群(rd)-望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$。

∞定理 3.11. 群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是二生成的，并且是 $\prod_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{Alt}(d^\ell)$ 中的一个框架。

证明。设 $\Gamma = G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是 $\mathcal{A}(d,r)$的群。由命题 2.16，我们知道 $\mathcal{A}(d,r)$是柔性的。由于群 B 是完美群 交错群(rd)，我们可以∞由定理 3.10 得出，包含映射 $\Gamma \to \prod_{\ell=1}^{\infty} \Omega_\ell$ 诱导出同构 $\Gamma \to \prod_{\ell=1}^{\infty} \Omega_\ell$。推论 3.3 告诉我们，直和 $\bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \Omega_\ell$ 包含于 Γ，因此它是一个框架。

还需证明 Γ 是二生成的。我们注意到，只需证明对于某个 n，子群 $K_n = G_{\mathcal{S}_{+n}}$ 是二生成的即可。事实上，已知$\bigoplus_{j=1}^{n}$交错群(d^j)是二生成的，并且由于 $\bigoplus_{j=1}^{n}$ 交错群(d^j)与 K_n 不具有公共的非平凡商群，乘积 $K_n \times \bigoplus_{j=1}^{n}$交错群($d^j$)不含真次直积子群。

回顾 $X = \{x_1, \ldots, x_d\}$。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $d^n \geq \max(18, 3(r+1)\ 2rd)$。注意 $n \geq 2$。我们固定一个满足以下条件的素数 p

$$d^n/2 < p < (1 + \frac{1}{3})d^n/2 = \frac{2}{3}d^n \leq d^n - (r+1),$$

根据 [54] 的主定理，这样的素数存在。设 σ_1 是 Alt(X^n) 中一个 p-轮换，它固定 $\{x_d^{n-1}\} \times \{x_1, \ldots, x_r, x_d\}$ 并移动 $\{x_1^{n-1}\} \times X$。设 σ_2 是一个 p-轮换，它移动 σ_1 的每个不动点，并固定 $\{x_1^{n-1}\} \times \{x_1, \ldots, x_r, x_d\}$。由于 $p > d^n/2$， σ_1 和 σ_2 的支撑不可能不相交；根据构造，它们生成 Alt(d^n) 的一个传递子群 $T \leq$ 。利用 C. Jordan 的一条经典定理，可以证明，Alt(d^n) 中任何包含一个 p-轮换的传递子群 $T \subseteq$ 都等于交错群 Alt(d^n)；参见 [33, 定理 4.2]。设 τ_1、τ_2 是 Alt(rd) 的任意生成集。我们注意到 $p > d^n/2 \geq rd$，因此每个 τ_i 的阶都与 p 互素。这意味着 τ_1^p 和 τ_2^p 生成 Alt(rd)。

我们定义 $a = \Delta_n(\sigma_1)\tilde{\tau}_1^{[n]}$，并注意到根据构造， $\Delta_n(\sigma_1)$ 和 $\tilde{\tau}_1^{[n]}$交换。取 a^p 和 $a^{\mathrm{ord}(\tau_1)}$，我们看到 $\langle a \rangle$ 包含 $\Delta_n(\sigma_1)$ 和 $\tilde{\tau}_1^{[n]}$。令 $\omega \in$Alt(X^{n-1}) 满足 $\omega(x_1^{n-1}) = x_d^{n-1}$。考虑这些元素

$$c = \Delta_{n-1}(\omega)^{-1}\tilde{\tau}_2^{[n]}\Delta_{n-1}(\omega) = \Delta_n(\omega_{n-1,n})^{-1}\tilde{\tau}_2^{[n]}\Delta_n(\omega_{n-1,n}) \tag{3.1}$$

以及 $b = \Delta_n(\sigma_2)c$。同样， $\Delta_n(\sigma_2)$ 和 c 交换，因此 $\langle b \rangle$ 包含 $\Delta_n(\sigma_2)$ 和c。我们得出群 $H = \langle a, b \rangle$ 包含 $\tilde{\tau}_1^{[n]}$、 c 和 $\Delta_n(\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle) =$$\Delta_n$(交错群($d^n$))；特别地，它包含 $\Delta_n(\omega_{n-1,\ n})$。因此，由 (3.1) 可知 H 也包含$\tilde{\tau}_2^{[n]}$，又由于 τ_1 和 τ_2 生成交错群(rd)，根据引理 3.4，我们推出 $H = \langle \Delta_n($交错群$(X^n))\ C^{[n]} \rangle =$$K_{n-1}$。这证明了 K_{n-1} 是二生成的，并完成了定理的证明。□

类似的结果也适用于 § 2.5 中定义的 $\mathrm{SL}_{2d}(\mathbb{F}_q)$-望远镜。为了证明这一点，我们需要一个关于 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ 生成集的结果。

引理 3.12. 设 $n \geq 11, \ell$ 是一个素数，且 $\mathbb{F}_q$ 是一个带有 $q = \ell^k$ 的有限域。假设 p 是满足 $n/2 < p < n-5$ 的奇素数。那么，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ 由一对矩阵 $U, V \in \in$ S L$_n(\mathbb{F}_q)$ 生成，其阶分别为 ord(U) $= 2p$ 和 ord(V) $= 3p$。可以选择生成元 U 和 V，使得它们中的每一个都支撑于至多 $p+5$ 个标准基向量上。

证明. 群 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{F}_q)$ 是 (2, 3)-生成的，即存在 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{F}_q)$ 的生成元 $A, B \in$，其阶分别为 2 和 3；见 [70]。设 U 是一个分块对角矩阵

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc|c} C_1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & A \end{array}\right)$$

其左上（$p \times p$）块 C_1 是一个 p循环置换矩阵。令 V为一个分块对角矩阵

$$V = \left(\begin{array}{c|ccc|c} B & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & C_2 \end{array}\right)$$

其右下（$p \times p$）块 C_2 是一个 p循环置换矩阵。由于 $p > n/2 > 5$，我们有 $\mathrm{ord}(U) = 2p$ 以及 $\mathrm{ord}(V) = 3p$。群 $\langle U, V\rangle$ 包含置换矩阵 U^2, V^3，它们生成 $\mathrm{Alt}(n)$ 的一个传递子群，其中包含一个 p循环，因此根据 [33, 定理 4.2]，它们生成交错置换矩阵群。由于 $\mathrm{Alt}(n)$ 作用为 $n-2$传递（且 $n-2>5$），我们可以选取一个置换矩阵 $P \in \langle U, V\rangle$，使得 PU^pP^{-1}的 5×5块A位于左上位置。由此可知，PU^pP^{-1}和 V^p在左上块中生成 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{F}_q)$ 的一个副本，其中特别包含初等矩阵。通过用置换矩阵共轭这些初等矩阵，我们找到 $\langle U, V\rangle$ 中的所有初等矩阵，并推得 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) = \langle U, V\rangle$。注意，按构造，$U$ 和 V中的每一个至多支撑于 $p+5$ 个标准基向量上。□

定理 3.13. 令 $d \geq 4$，并令 $\mathbb{F}_q$ 为有限域。群 $G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)}$ 是一个用于 $\prod$ 特殊线性群$_{d\ell}(\mathbb{F}_q)$ 的∞二生成框架。$_{\ell=1}$

证明. 令 $\Gamma = G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)}$ 表示特殊线性群$_{2d}(\mathbb{F}_q)$-望远镜的群。由命题 2.18 可知，$\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)$ 是柔性的。此外，群 B =特殊线性群$_{2d}(\mathbb{F}_q)$ 是∞完美的，因为 $2d \geq 3$。再次应用定理 3.10 可知，包含映射 $\Gamma \to \prod\Omega_{\ell\ell=1\curvearrowleft}$ ∞诱导出一个同构 $\Gamma \to \prod \Omega_\ell$，而推论 3.3 表明它是一个框架。$_{\ell=1}$

令 $q = \ell^k$ 为一个素数 ℓ。我们将证明，Γ 是二生成的。正如引理 3.11 的证明中所述，只需证明对于某个 n，层子群 K_n 是二生成的。取 n 使得 $d^n \geq 24$。根据 [54]的主定理，存在一个素数 p使得$d^n/2 < p < \frac{2}{3}d^n \leq d^n - 8$。令 U、$V \in \mathrm{SL}_{d^n}(\mathbb{F}_q)$为阶分别为 $2p$ 和 $3p$ 的生成元，如引理 3.12 所述。由于 $2d \geq 8$，由 [61] 可知，$B = \mathrm{SL}_{2d}(\mathbb{F}_q)$可由两个元素 s、t 生成，其中 $\mathrm{ord}(s) = 2$ 且 $\mathrm{ord}(t) = 3$。根据引理 3.12，存在 $d^n - p - 5 \geq 3$ 个标准基向量不包含在 U的支撑中；也就是说，我们可以用一个$\omega \in \Delta_n(\Omega_n)$中的元素将 $\tilde{t}^{[n]}$ 共轭，使得 $\delta_1\tilde{t}^{[n]}\delta_1^{-1}$并且 $\Delta_n(U)$ 交换。同样地，我们可以用一个 $\delta_2 \in \Delta_n(\Omega_n)$中的元素将$\tilde{s}^{[n]}$ 共轭，使得$\delta_2\tilde{s}^{[n]}\delta_2^{-1}$ 并且 $\Delta_n(V)$交换。由此我们得到

$$\begin{aligned}\langle \Delta_n(U)\omega\tilde{t}^{[n]}\omega^{-1}, \Delta_n(V)\tilde{s}^{[n]}\rangle &\supseteq \langle \Delta_n(U)^3, \Delta_n(V)^2, \delta_1\tilde{t}^{[n]}\delta_1^{-1}, \delta_2\tilde{s}^{[n]}\delta_2^{-1}\rangle \\ &\supseteq \langle \Delta_n(\Omega_n), C^{[n]}\rangle = K_{n-1}.\end{aligned}$$

□

矩阵群望远镜的构造并不局限于域，还能够提供更为奇特的例子。令 R 为一个含幺结合环，并令$\mathcal{E}_d(R)$表示例 2.5 中定义的望远镜。关联群 $G_{\mathcal{E}_d(R)}$ 的有限群拓扑完备化为 $\widehat{G_{\mathcal{E}_d\ R}()} \cong \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{{}_{d^j}\ R}\mathrm{E}(\ )$，其中 $\mathrm{E}_n(R)$表示由初等矩阵生成的 $\mathrm{GL}_n(R)$的子群。现在，$G_{\mathcal{E}_d(R)}$ 是有限生成的，当且仅当 $\mathrm{E}_d(R)$是有限生成的。在此情形下，我们得到，生成 $\bigoplus \mathrm{E}_{d^n}(R)$所需的最小生成元数 m被某个常数从上方界定，该常数只取决于 d 和 R。尽管这可能是已知的，我们还是想指出，后者表明：无需使用任何算术，当 m 取足够大时，$\mathrm{E}_{d^m}(R)$不具有给定有限基数的商群。

让我们考察一个具体实例。给定 $d \geq 4$，我们考虑 §2.5 中描述的柔性 $\mathrm{SL}_{2d}(\mathbb{Z})$-望远镜 $\mathcal{SL}_d(\mathbb{Z})$。由于 $\mathrm{SL}_{2d}(\mathbb{Z})$ 是完美且有限生成的，由定理 3.10 可知，$G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{Z})}$ 是一个有限生成群，其有限剩余完备化同构于

$$\widehat{G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{Z})}} \cong \prod_{k=1}^{\infty} \widehat{\mathrm{SL}_{d^\ell}(\mathbb{Z})} \cong \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{p \text{ prime}} \mathrm{SL}_{d^k}(\mathbb{Z}_p),$$

其中，后一个同构是 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 对 $n \geq 3$ 所具有的同余子群性质的结果。

$_k$推论 3.14。对于每个 $d \geq 4$ 以及每个 $_{i=1}k \in \mathbb{N}$，群 $\prod \mathrm{SL}_{d^i}(\mathbb{Z})$ 都是 4生成的。

证明。Trott [71] 的一个经典结果表明，对于 $n \geq 3$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 可以由 2_k 个元素生成。因此，根据推论3.5，$G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{Z})}$ 是 4生成的，并且映射到 $\prod \mathrm{SL}_{d^i}(\mathbb{Z})_{i=1}$ 上。□

3.3. 头部的单性。设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个完美群 B 的柔性 B-望远镜。回顾一下，$Q_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}}/\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ 称为 $\mathcal{S}$ 的头部。由定理 3.10 可知，头部 $Q_{\mathcal{S}}$ 不存在任何有限商群。根据推论 3.5，头部 $Q_{\mathcal{S}}$ 与任意移位的 B-望远镜的头部 $Q_{\mathcal{S}_{+n}}$ 之间存在一个典范同构。我们稍后将看到一些头部为单群的例子。下面的判据提供了一种验证这一点的方法。

引理 3.15. 设 B 是一个完美有限群，并设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个柔性 B-望远镜。假设 Ω_1 是有限生成的。我们考虑群

$$\mathcal{N}^\infty = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} N_{G_{\mathcal{S}}}(C^{[k]}).$$

假设每个包含 $\mathcal{N}^\infty$ 的极大子群 $M \subseteq G_{\mathcal{S}}$ 都满足 $\mathrm{core}(M) = \mathrm{core}(\mathcal{N}^\infty)$。那么 $G_{\mathcal{S}}/\mathrm{core}(\mathcal{N}^\infty)$ 是一个单群。

We note that $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ is always contained in $\mathcal{N}^\infty$ (and thus in $\mathrm{core}(\mathcal{N}^\infty)$).

证明。设 $N \trianglelefteq G_{\mathcal{S}}$ 是一个正规子群，且严格包含 $\mathrm{core}(\mathcal{N}^\infty)$。根据假设，$N$ 不包含于包含 $\mathcal{N}^\infty$ 的极大子群 M 中。由于 $N\mathcal{N}^\infty$ 大于 $\mathcal{N}^\infty$，且不包含于任何包含 $\mathcal{N}^\infty$ 的极大子群中，因此有 $N\mathcal{N}^\infty = G_{\mathcal{S}}$，即典范投影 $p\colon \mathcal{N}^\infty \to G_{\mathcal{S}}/N$ 的限制映射是满射。根据假设，$G_{\mathcal{S}}$ 是有限生成的；我们取一个有限生成集 g_1、……、g_r，并在 p 下选取其原像 n_1、……、$n_r \in \mathcal{N}^\infty$。根据

$\mathcal{N}^\infty$ 存在一个 $j \geq 1$，使得 n_1、.....、n_r 规范化 $C^{[j]}$。反过来，$p(C^{[j]})$ 在 $G_\mathcal{S}/N$ 中是一个正规子群。由引理 3.6，$C^{[j]}$ 的正规闭包生成 $G_\mathcal{S}$，其中 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i \subseteq N$，因此 $p(C^{[j]}) = G_\mathcal{S}/N$。由于 $C^{[j]}$ 是有限的，可知 $G_\mathcal{S}/N$ 是有限的。然而，$Q_\mathcal{S}$ 不允许存在非平凡有限商群，因此 $N = G_\mathcal{S}$，且 $G/\mathrm{core}(\mathcal{N}^\infty)$ 是单群。□

4. Normal subgroups of $G_\mathcal{S}$

设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}},(\phi_i)^{i\geq 2})$ 是完美群 B 的一个柔性 B-望远镜。本节旨在研究有限生成非阿贝尔单群的望远镜中 $G_\mathcal{S}$ 的正规子群与次正规子群的结构。

4.1. $G_\mathcal{S}$ 的正规子群。

命题 4.1. 设 B 是一个有限生成的完美群。假设存在一个柔性 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)^{i\geq 2})$，并且假设每个 Ω_i 都是有限生成非阿贝尔单群。若 $G_\mathcal{S}$ 的头部 $Q_\mathcal{S}$ 是单群，则对于 $G_\mathcal{S}$ 的每个正规子群 N，以下情况恰有一种成立。

(1) 存在一个子集 $I \subseteq \mathbb{N}$，使得 $N = \bigoplus \Omega_{i,i\in I}$(2) 存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 和一个有限子集 $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$，使得 $N = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus \Omega_{i,i\in I}$

证明。令 N 为 $G_\mathcal{S}$ 的正规子群。首先假设 $N \subseteq \bigoplus \Omega_i$。那么显然可推出 $N = \bigoplus \Omega_i$，其中 $I \subseteq \mathbb{N}$ 由满足以下条件的数 i 组成：$_{i\in I}$ 典范投影 π_i: $N \to \Omega_i$ 的像是非平凡的。因此，我们可以假设 N 不包含于 $\bigoplus \Omega_i$ 中。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 N_k 表示由 N 和 $\bigoplus \Omega_i$ 生成的 $G_\mathcal{S}$ 的正规 $_{i\in\mathbb{N}k}$ $_\infty$ 子群。于是，$N_\infty := \bigcup N_k$ 是 $G_\mathcal{S}$ 的一个正规 $_{i=1}$ $_{k=1}$ 子群，并且严格包含 $\bigoplus \Omega_i$。由于假定头部 $Q_\mathcal{S}$ 是$_{i\in\mathbb{N}}$ 单的，因此可得 $N_\infty = G_\mathcal{S}$。利用 B 与 Ω_1 有限生成这一假设，可得 $G_\mathcal{S}$ 是有限生成的。因此，对于某个 $k_0 \in \mathbb{N}$，我们得到 $N_\infty = N_{k_0}$ $_{k_0}$。于是 $G_\mathcal{S} = \langle N \cup \bigoplus \Omega_i \rangle$，由 Ω_{i} $_{i=1}$ 的单性可知，K_{k_0} 包含于 N 中。结合推论 3.5，我们得到

$$G_{\mathcal{S}_{+k_0}} = K_{k_0} \subseteq N \subseteq G_{\mathcal{S}_{+k_0}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_0} \Omega_i.$$

因此，存在一个有限集 $I \subseteq \{1,\ldots,k_0\}$ 使得 $N = G_{\mathcal{S}_{+k_0}}^{i=1} \oplus \bigoplus_{i\in I} \Omega_i$，这证明了该断言。□

推论 4.2. 设 B 是一个有限生成的完美群。假设存在一个柔性 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)^{i\geq 2})$，且每个 Ω_i 都是有限生成的非阿贝尔单群。若头部 $Q_\mathcal{S}$ 是单的，则对子群 $N \leq G_\mathcal{S}$而言，以下条件等价。

(1) N 是 $G_\mathcal{S}$的有限生成正规子群。(2) N 是 $G_\mathcal{S}$的直因子。

证明。由于 B 和 Ω_1 是有限生成的，因此 $G_\mathcal{S}$ 是有限生成的。因此，$G_\mathcal{S}$ 的每个直因子作为 $G_\mathcal{S}$ 的商群，都是有限生成的正规子群，这就得到了 (2) ⇒(1)。现在设 N 是 $G_\mathcal{S}$ 的有限生成正规子群。根据命题 4.1，需要考虑两种情况。

首先假设存在一个子集 $I \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $N = \bigoplus \Omega_i$。由于 N 是有限生成的，因此 I 是有限的。于是存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 I 包含于 $I_n := \{1, \dots, n\}$。因此，我们可以利用推论 3.5 推出 that

$$G_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus_{i \in I_n} \Omega_i = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus N \oplus \bigoplus_{i \in I_n \setminus I} \Omega_i,$$

这就证明了此情形下的断言。接下来，假设存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 和某个有限子集 $I \subseteq I_n$，使得 $N = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus \Omega_i$。再次应用 $i \in I$推论 3.5，可得

$$G_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus_{i \in I_n} \Omega_i = N \oplus \bigoplus_{i \in I_n \setminus I} \Omega_i,$$

这就证明了该推论。 □

4.2. 剩余有限 t-群。群论中的一个经典主题，是研究其次正规子群受到某些限制的群。一个自然但具有限制性的条件是要求所有次正规子群都是正规子群，或者等价地说，正规性是一种传递关系。反映后一种刻画，满足这一性质的群称为 t-群。自 Best 和 Taussky [9] 引入以来， t-群引起了相当大的关注；人们为理解其结构以及寻找等价或相关条件进行了大量努力，参见例如 [26, 65, 12, 21]。尽管对于一般的 t-群及相关群，可以获得许多结构性质，但文献中研究的几乎所有例子似乎都是可解的。其中一个原因是，可解群必然具有许多次正规子群。另一个原因由 Robinson [66, 在有限群情形下的第 13.4] 节指出。利用著名的 Schreier 猜想的肯定解答，即有限单群的外自同构群是可解的，他证明了每个没有非平凡阿贝尔正规子群的有限、完美 t-群，本身已经是非阿贝尔有限单群的直积。尽管如此，下面的结果表明，有限生成 t-群这一类中也包含无限群的例子：它们具有许多正规子群，却远非可解。

定理 4.3. 设 B 是一个有限生成的完美群。假设存在一个柔性的 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\phi_i)_{i \geq 2})$，且每个 Ω_i 都是有限生成的非阿贝尔单群。如果头部 $Q_{\mathcal{S}}$ 是单群，那么 $G_{\mathcal{S}}$ 是一个 t-群。

证明。设 N 是 $G_{\mathcal{S}}$ 的正规子群，且 M 是N的正规子群。我们要证明 M是 $G_{\mathcal{S}}$ 的正规子群。首先，假设对于某个子集 $I \subseteq \mathbb{N}$， $N = \bigoplus \Omega_i$；其中$i \in I$。由于每个 Ω_i 都是单群，因此可知，对于某个子集 $J \subseteq I$， $M = \bigoplus \Omega_i$；其中$i \in J$。这说明 M 是 $G_{\mathcal{S}}$的正规子群。鉴于命题 4.1，我们可以因此假设存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及一个有限子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$，使得 $N = G_{\mathcal{S}_{+n}} \oplus \bigoplus \Omega_i$。再次利用每个 Ω_i 都是非阿贝尔且$i \in I$单群这一事实，我们推得 $M = M_1 \oplus \bigoplus \Omega_i$，其中 $J \subseteq I$，且 M_1 是 $G_{\mathcal{S}_{+n}}$的正规$i \in J$子群。因此，只需证明 M_1 是 $G_{\mathcal{S}}$的正规子群。由关于 $\mathcal{S}$ 的假设可直接得出， $\mathcal{S}_{+n}$ 是一个柔性 B望远镜。头部 $Q_{\mathcal{S}_{+n}}$ 与 $Q_{\mathcal{S}}$ 规范同构，因此是单群。因此，我们可以应用命题 4.1，推得：要么对于适当的子集$i \in J$ $J \subseteq \mathbb{N}_{\geq n+1}$， $M_1 = \bigoplus \Omega_i$；要么对于某个 $m \in \mathbb{N}$和 $J \subseteq \{n+1, \dots, m\}$， $M_1 = G_{\mathcal{S}_{+m}} \oplus \bigoplus \Omega_i$。现在$i \in J$，由于这两种情况下 M_1 都是 $G_{\mathcal{S}}$的正规子群，结论得证。□

考虑望远镜 Alt(rd)-telescope $\mathcal{A}(d,r)$。利用定理 3.11，我们现在可以推出 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$具有以下奇异性质。

推论 4.4. 设 N 是 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$的次正规子群。若 N 是有限生成的，则 N 是二生成的。

证明. 由推论 4.2 可知， N 是 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$的直因子。因此，N 是 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 的商群，由定理 3.11 可推出 N 是二生成的。□

5. Direct factors of profinite completions

设 G 是一个有限生成的剩余有限群，且 N 是 G的一个有限生成的正规子群。令 $\iota\colon N \to G$ 表示包含映射，并令 $\widehat{\ }\ \widehat{\iota}\colon \widehat{N} \to \widehat{G}$ 表示有限剩余完备化之间的诱导映射。在此背景下，Goldstein 和 Guralnick [29, 提出了如下问题：问题 3.1]

问题 5.1（Goldstein 和 Guralnick）。假设 N 在 $\widehat{\iota}$ 下的像是 $\widehat{G}$的一个直因子。能否推出 N 是 G的一个直因子?

在 G 为几乎多项式群的情形下，Nikolov 和 Segal [58, 定理 1]给出了问题 5.1 的肯定解。在同一著作中，他们还为一般情形构造了一个反例，该反例基于 [42]中的方法。Bridson [14]给出了有限呈示的例子。这里我们想介绍一个新的反例，正如稍后将看到的，它是可 amenable 的。据我们所知，此前已知的所有问题 5.1 的反例都包含一个非阿贝尔自由群。我们的方法基于以下两个观察。

引理 5.2. 设 N 为有限生成剩余有限群。若 τ 是 N 的一个有限阶自同构，该自同构不是内自同构，但其在 N上的诱导自同构 $\widehat{\tau}$ 是内自同构，则 $G = N \rtimes \langle\tau\rangle$ 为问题 5.1 提供了一个反例。

证明。由于 N 在 G中具有有限指数，我们有 $\widehat{G} = \widehat{N} \rtimes \langle\widehat{\tau}\rangle$。根据假设，$\widehat{\tau}$ 由与 $\gamma \in N$ 的共轭给出，因此 $\widehat{G}$ 分解为直积 $\widehat{G} = \widehat{N} \times \langle(\gamma^{-1}, \tau)\rangle$。另一方面，$\tau$不是内自同构，因此不存在元素 $(n,\tau) \in G$中心化 N。□

尽管在有限非阿贝尔单群的无限乘积中构造出单个框架这一点相当困难，但事实证明，框架这一性质在组合下相当稳定。以下非常有用的引理对此作出了说明，参见 [42, 引理 2.2]。

引理 5.3（Kassabov，Nikolov）。设 $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$ 为有限群的直积。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 A_n、$B_n \le C_n$为子群，满足 $\langle A_n, B_n\rangle = C_n$。假设 G是 $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$的一个框架，且 H是 $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$的一个框架。那么 $K = \langle G \cup H\rangle$ 是 $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$中的一个框架。

设 $d \ge 5$，并给定 $r \le d-3$。考虑望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$ 及其关联框架 $G_{\mathcal{A}(d,r)} \subseteq \prod_{\ell\in\mathbb{N}}$交错群$(X^\ell) = P$，其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$。我们将 $\delta \in$交错群(X) 定义为 $\delta = (x_1, x_d)(x_2, x_{d-1})$，并进一步置 $\varepsilon_\ell = \delta \times \cdots \times \delta \in$交错群$(X^\ell)$。于是，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \in P$是一个二阶元素，现在将利用它来应用引理 5.2。

定理 5.4。群 $N = \langle G_{\mathcal{A}(d,r)}, G^{\varepsilon}_{\mathcal{A}(d,r)}\rangle \subseteq P$ 是一个带有 $N = P$ 的 4生成的剩余有限群。令 τ 为 N 的自同构，它由与 ε的共轭诱导。那么 τ 不是内自同构，但在 P 上诱导的自同构 $\widehat{\tau}$ 是内自同构。特别地，$N \rtimes \langle\tau\rangle$ 是问题 5.1 的一个反例

证明。由定理 3.11，群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是一个二生成框架，因此 N 可以由 4 个元素生成。群 N 是剩余有限的，因为它是 P 的一个子群 $\widehat{\ }$。由引理 5.3 可知，N 是 P 中的一个框架，因此经由自然包含映射 $N \cong P$。若一个点 $w \in X^i$ 满足以下条件：对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $y \in X^n$，$\pi_{i+n}(g)(wy) = \pi_i(g)(w)y$，则称该点对元素 $g \in P$ 一致。注意，ε 不存在任何一致点。X^i 中一致点的数量与 d^i 的比值称为 g 在第 i 层的一致性，记作 $\mathrm{con}_i(g)$。容易验证，一致性在与 ε 共轭下保持不变。我们注意到，对于所有 $g, h \in P$

$$\mathrm{con}_i(gh) \geq \mathrm{con}_i(g) + \mathrm{con}_i(h) - 1$$

对所有 i 都成立。事实上，如果 $w \in X^i$ 对 h 是一致的，并且 $h(w)$ 对 g 是一致的，那么 w 对 gh 是一致的。根据构造，$\Delta_i(\mathrm{Alt}(X^i))$ 中的元素在 X^i 的所有点处都是一致的。对于 $c \in \mathrm{Alt}(rd)$，元素 $\tilde{c}^{[1]}$ 在 X^i 的所有点处都是一致的，除了 $r+1$ 个点 x_d^i、$x_d^{i-1}x_1$、……、$x_d^{i-1}x_r$。特别地，$\lim_{i\to\infty} \mathrm{con}(\tilde{c}^{[1]}) = 1$，并且对字长进行归纳可知，上述公式表明，这对 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 中的所有元素以及 N 中的所有元素都成立。由此得出，ε 不属于 N。群 N 在 P 中稠密，且 P 的中心平凡，因此这意味着 τ 不是内的。□

如果从另一个非平凡元素 δ 开始，可以使 τ 具有任意给定的有限阶。定理 5.4 中群 $N \rtimes \langle\tau\rangle$ 的可 amen 性是 Juschenko、Nekrashevych 和 de la Salle 的一个判据 [37] 的推论，并将在第 9.4 节的更一般背景下得到验证，因此这里略去。

注 5.5. 可以证明，对于一个 B-望远镜 $\mathcal{S}$，N 是群 $G_{\mathcal{S}}$，其中$B =$ 交错群$(rd) \times$ 交错群(rd)。

6. Actions of telescopes

定义 6.1. 设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个 B-望远镜。设 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是由集合组成的有向序列，并带有相容映射

$$\iota_{i,j} \colon X_i \to X_j$$

对于所有 $i < j$，使得每个 X_i 都是一个 Ω_i-集合，并且映射 $\iota_{i,\,j}$ 满足

$$\iota_{i,j}(\omega.x) = \iota_{i,j}(\omega).\iota_{i,j}(x) \tag{6.1}$$

对于所有 $i < j$、所有 $\omega \in \Omega_i$ 以及所有 $x \in X_i$。在右端，$\iota_{i,\,j}(\omega)$ 指的是 B-望远镜中的过渡映射，而 $\iota_{i,\,j}(x)$ 指的是系统 $((X_i)$、$(\iota_{i,\,j})_{i<j})$ 的过渡映射。X_i 在 X_j 中的像记为 $X_{i,\,j}$。如果存在一个 $\kappa \geq 2$，使得 B_{i+n} 对所有 $n \geq \kappa$ 及每个 $i \in \mathbb{N}$ 都在 $X_{i,\,i+n}$ 上平凡作用，我们就称 $\mathcal{S}$ 作用于 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$。

为简便起见 $\iota_{i,i}$ 表示 X_i上的恒等映射。我们定义 $X_\infty = \varinjlim_{i\in\mathbb{N}} X_i$。$x \in X_i$ 在 X_∞ 中的像将记为 $[x]$，我们将 $X_{i,\infty}$ 记作子集 $\{[x] \mid x \in X_i\} \subseteq X_\infty$。注意到 $X_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{i,\infty}$。如果集合 Y 中的序列$(y_i)_i$ 存在某个 $t \geq 1$，使得 $y_i = y_t$ 对所有 $i \geq t$都成立，我们就称其稳定。在这种情况下，我们用 $\lim_{i\to\infty} y_i$ 表示稳定值 y_t。

~引理 6.2. 假设 $\mathcal{S}$ 作用于 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$。那么对每个 $\gamma \in G_{\mathcal{S}}$ 和每个$x \in X_i$，都存在某个 $t \geq i$，使得

$$\pi_k(\gamma).\iota_{i,k}(x) = \iota_{t,k}(\pi_t(\gamma).\iota_{i,t}(x)) \tag{6.2}$$

对所有 $k \geq t$ 均成立。特别地，序列 $[\pi_{i+k}(\gamma).\iota_{i,i+k}(x)]$ 稳定，并且

$$\gamma.[x] = \lim_{k\to\infty} [\pi_{i+k}(\gamma).\iota_{i,i+k}(x)]$$

~定义了巨大群 $G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞上的作用。

~证明。假设 $\gamma_1,\gamma_2 \in G_{\mathcal{S}}$ 对所有 $i \geq 1$ 和所有 $x \in X_i$ 都满足 (6.2)。那么 $\gamma_1\gamma_2$ 也具有相同性质。事实上，给定 $x \in X_i$，并令 $t \geq i$ 满足 $\iota_{t,k}(\pi_t(\gamma_2).\iota_{i,t}(x)) = \pi_k(\gamma_2).\iota_{i,k}(x)$，且对所有 $k \geq t$ 都成立。设 $y = \pi_t(\gamma_2).\iota_{i,t}(x)$。令 $s \geq t$ 满足 $\iota_{s,k}(\pi_s(\gamma_1).\iota_{t,s}(y)) = \pi_k(\gamma_1).\iota_{t,k}(y)$，对所有 $k \geq s$ 都成立。那么

$$\iota_{s,k}(\pi_s(\gamma_1).\iota_{t,s}(y)) = \pi_k(\gamma_1).\iota_{t,k}(y) = \pi_k(\gamma_1).\pi_k(\gamma_2).\iota_{i,k}(x) = \pi_k(\gamma_1\gamma_2).\iota_{i,k}(x)$$

对所有 $k \geq s$ 都成立。特别地，只需证明生成元集合~的 $G_{\mathcal{S}}$ 满足 (6.2) 即可。一旦验证了这一点，同样的计算便直接表明，$\sim\gamma.[x] = \lim_{k\to\infty}[\pi_{i+k}(\gamma).\iota_{i,i+k}(x)]$ 定义了 $G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上的作用。

令 $\omega \in \Omega_i$，并令 $x \in X_i$。由相容条件 (6.1)，对于所有 $k \geq 0$，我们有 $\iota_{i,i+k}(\omega).\iota_{i,i+k}(x) = \iota_{i,i+k}(\omega.x)$。令 $g \in B$。根据假设，当 $k \geq i+\kappa$ 时，$\phi_k(g)$ 在 $X_{i,k}$ 上平凡作用。特别地，

$$\begin{aligned}
\iota_{i+\kappa,k}(\pi_{i+\kappa}(\tilde{g}).\iota_{i,i+\kappa}(x)) &= \iota_{i+\kappa,k}\Big(\prod_{j=2}^{i+\kappa}\iota_{j,i+\kappa}(\phi_j(g)).\iota_{i,i+\kappa}(x)\Big)\\
&= \prod_{j=2}^{i+\kappa}\iota_{j,k}(\phi_j(g)).\iota_{i,k}(x) \qquad \text{(by (6.1))}\\
&= \prod_{j=2}^{k}\iota_{j,k}(\phi_j(g)).\iota_{i,k}(x)\\
&= \pi_k(\tilde{g}).\iota_{i,k}(x)
\end{aligned}$$

~对所有 $k \geq i+\kappa$ 都成立。现在，引理得证，因为根据定义，$G_{\mathcal{S}} = \langle\{\Delta_i(\Omega_i) \mid i \in\mathbb{N}\} \cup C^{[1]}\rangle$。□

满足 $\Delta_i(\omega)$ 且 $\omega \in\Omega_i$ 的元素以显然的方式作用：

$$\Delta_i(\omega).[x] = [\iota_{i,j}(\omega).x]$$

对于 $x \in X_j$，其中 $j \geq i$。设 $g \in B$，并设 $x \in X_i$，则 $\tilde{g}^{[n]}$ 的作用为：

$$\tilde{g}^{[n]}.[x] := [\pi_{i+\kappa}(\tilde{g}^{[n]}).\iota_{i,i+\kappa}(x)].$$

~注释 6.3。一般而言，$G_{\mathcal{S}}$ 对 X_∞ 的作用并非忠实。~$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$ 中的元素包含于 $G_{\mathcal{S}}$ 中，并且在 X_∞ 上平凡作用。因此，该作用总是经由头部 $Q_{\mathcal{S}}$ 分解。特别地，若 $\mathcal{S}$ 是某个完美群 B 的柔性 B-望远镜，则根据推论 3.5，$G_{\mathcal{S}}$ 在对称群(X_∞)中的像与任意平移望远镜 $\mathcal{S}_{+n}$ 的群的像一致。

~我们注意到，$G_{\mathcal{S}}$ 的每个元素在局部地看来都像某个 $\Delta_j(\Omega_j)$ 中的元素，其中~某个 $j \in \mathbb{N}$。更确切地说，对于每个 $\gamma \in G_{\mathcal{S}}$ 和每个 $x \in X_i$，都存在某个 $j \geq i$ 及一个属于 Ω_j 的元素 $\omega \in$，使得 $\Delta_j(\omega)^{-1}\gamma$ 稳定 $[x] \in X_{\infty}$。

例 6.4。群作用的自然构造可以扩展到 B-望远镜。我们用一个简单的例子来说明这一点。设 $\mathcal{S}$ 表示一个作用在 $((X_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\iota_{i,j})_{i<j})$ 上、具有单射过渡映射的 B-望远镜。假设 $|X_1| \geq k$。设 Y_i 表示 X_i 的 k-元素子集的集合。Ω_i 在 X_i 上的作用诱导出 Ω_i 在 Y_i 上的作用。此外，单射包含映射 $\iota_{i,j}\colon X_i \to X_j$ 诱导出单射映射$\iota'_{i,j}$: $Y_i \to Y_j$，且这些映射与 $\mathcal{S}$ 的作用相容。我们注意到，$Y_{i,j}$ 是 $X_{i,j}$ 的 k-元素子集的集合。根据假设，B_{i+n} 在 $X_{i,i+n}$ 上作用平凡（对于 $n \geq \kappa$），因此 B_{i+n} 在 $Y_{i,i+n}$ 上作用平凡。总之，我们得到了 $\mathcal{S}$ 在 $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 上的作用。

引理 6.5。设 $\mathcal{S} = ((\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_i)_{i\geq 2})$ 是一个完美群B的柔性 B-望远镜。假设 $\mathcal{S}$ 作用于 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$。设存在 $n_0 \geq 1$，使得该作用

对所有 $i \geq n_0$ 而言，Ω_i 在 X_i 上的作用是本原的（分别为 k-传递的）。假设 X_∞ 至少有三个元素（分别至少有 k 个元素）。那么 $G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上的作用是本原的（分别为 k-传递的）。

证明。假设存在某个 $k \geq 1$，使得 Ω_i 在 X_i 上的作用对所有 $i \geq n_0$ 都是 k-传递的。根据假设，X_∞ 至少有 k 个元素。设 $[x_1]$、$[x_2]$、……、$[x_k]$ 和 $[y_1]$、$[y_2]$、……、$[y_k]$ 是 X_∞ 中两个由互不相同的元素组成的 k-元组。不妨设对于某个 $i \geq n_0$，有 x_1、……、x_k、y_1、……、$y_k \in X_i$。由于 X_∞ 中的像彼此不同，因此对于所有 $s \neq t$，都有 $x_s \neq x_t$ 和 $y_s \neq y_t$。利用 Ω_i 在 X_i 上的 k-传递作用，我们可知存在一个元素 $g \in \Omega_i$，使得对于所有 $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 都有 $g.x_s = y_s$。由作用的定义，我们得到 $\Delta_i(g)[x_s] = [y_s]$。由于群 $\Delta_i(\Omega_i)$ 根据引理 3.2 包含于 $G_{\mathcal{S}}$ 中，因此 $G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上的作用是 k-传递的。

接下来假设 X_∞ 至少包含 3 个元素，且 Ω_i 在 X_i 上的作用对 $i \geq n_0$ 是本原的。假设 $Y \subsetneq X_\infty$ 是一个满足 $|Y| \geq 2$ 的子集。我们将证明 Y 不可能是 $G_{\mathcal{S}}$ 的作用下的一个块。由于 $X_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_{i,\infty}$，存在某个 $i \in \mathbb{N}$，使得 $Y_i = Y \cap X_{i,\infty}$ 至少有两个元素，且不同于 $X_{i,\infty}$。由于 Ω_i 的作用是本原的，且 $|X_i| \geq 3$，等变映射 $X_i \to X_{i,\infty}$ 是单射。由本原性可知，存在元素 $g \in \Omega_i$ 和 $y, z \in Y_i$，满足

$$\Delta_i(g).y \notin Y_i \quad \text{and} \quad \Delta_i(g).z \in Y_i \subseteq Y.$$

由于 X_i 在 $\Delta_i(\Omega_i)$ 的作用下不变，我们得出 $\Delta_i(g).y \notin Y$。再次由引理 3.2 可知，群 $\Delta_i(\Omega_i)$ 包含于 $G_{\mathcal{S}}$，因此 Y 不可能是 $G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上作用下的一个块；也就是说，该作用是本原的。□

我们称 $\mathcal{S}$ 在 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 上原本地作用，若 $|X_\infty| \geq 3$，且对除有限多个 i 外的所有情形，Ω_i 在 X_i 上的作用都是本原的。注意，在这种情况下，当 i 足够大时，集合 $X_{i,\infty}$ 是本原 Ω_i-集合 X_i 的 Ω_i-等变像。因此，它要么是平凡的，要么映射 $X_i \to X_{i,\infty}$ 是单射。利用 $|X_\infty| \geq 3$ 可得 $|X_i| \geq 3$，并且对所有充分大的 i，包含映射 $\iota_{i,i+1}\colon X_i \to X_{i+1}$ 都是单射。特别地，对所有足够大的 i，Ω_i 在 X_i 上的作用是传递的。

例 6.6。设 $d \geq 5$，并给定 $2 \leq r \leq d-3$。我们描述第2.4节中定义的望远镜 $\mathcal{A}(d,r) = ((\text{交错群}(d^i))_{i\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$ 的一个作用。回顾一下，$X = \{x_1, \ldots, x_d\}$ 是一个含有 d 个元素的集合。我们将 X^i 视为由字母 X 构成的长度为 i 的词的集合。对于 $j > i$，我们定义过渡映射

$$\iota_{i,j}\colon X^i \to X^j \quad u \mapsto u x_d^{j-i},$$

也就是说，$\iota_{i,j}$ 将 x_d^{j-i} 附加到词 u 上。注意，$X_{i,j} = X^i \times \{x_d^{j-i}\}$。对于所有 $\sigma \in \text{交错群}(X^i)$ 以及 $u \in X^i$，我们都有

$$\iota_{i,j}(\sigma).\iota_{i,j}(u) = \iota_{i,j}(\sigma).u x_d^{j-i} = \sigma(u) x_d^{j-i} = \iota_{i,j}(\sigma.u),$$

这表明，这些过渡映射与 $\mathcal{A}(d,r)$ 中的过渡映射按照 (6.1) 的意义相容。我们声称，这是 $\mathcal{A}(d,r)$ 在定义 6.1 意义下的一个作用。回忆一下，B_{i+n} 的支撑是 $\{x_d^{i+n-2}\} \times \{x_1, \ldots, x_r\} \times X$；参见引理 2.15。特别地，利用 $r \leq d-3 < d$，我们看到对于 $n \geq 2$，B_{i+n} 的支撑与 $X_{i,i+n} = X^i \times \{x_d\}^n$ 不相交，并且 B_{i+n} 在 $X_{i,i+n}$ 上平凡作用。

过渡映射 $X_i \to X_j$ 是单射，且这些集合的基数没有上界，因此 X_∞ 是一个无限集。由于 $\mathrm{Alt}(d^i)$ 在 d^i 个点上的作用是 $d^i - 2$ 传递的，根据引理 6.5 可知，$G_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上的作用是高度传递的，即对于每个 k，都是 k-传递的。特别地，对于每个 $x \in X_\infty$，$\mathrm{St}_{G_{\mathcal{S}}}(x)$ 都是一个极大子群。

利用 Nash-Williams 判据可以证明，$G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 在 X_∞ 上的作用是递归的。

设 F 是一个域，并设 $d \geq 4$。考虑第 2.5 节中定义的 $\mathrm{SL}_{2d}(F)$ 望远镜 $\mathcal{SL}_d(F) = ((\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$。回忆一下，$\Omega_n = \mathrm{SL}_{X^n}(F) \cong \mathrm{SL}_{d^n}(F)$，其中矩阵坐标由 X^n 编号，且 $X = \{x_1, \ldots, x_d\}$，即 $\mathrm{SL}_{X^n}(F)$ 作用在向量空间 $V_n := F[X^n]$ 上，该空间由一个与 X^n 相对应的基张成。注意，V_{n+k} 与 $V_n \otimes_F F[X^k]$ 典范同构，我们将默认为使用这一对应关系。

例 6.7。考虑单射线性映射

$$\iota'_{i,i+n} \colon V_i \to V_{i+n},$$

它将向量 $u \in V_i$ 映射到向量 $u \otimes x_3^n$。系统 $((V_i)\, \iota_{i,i+n})$ 与望远镜 $\mathcal{SL}_d(F)$ 的过渡映射相容。我们声称，这定义了 $\mathcal{SL}_d(F)$ 在 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 上的一个作用。为此，设 $i \geq 2$ 已给定，并固定某个 $n \geq 2$。正如我们在命题 2.18 的证明中所见，群 B_{i+n} 支撑在 $Z(i+n, i+n)$ 上。因此，只需注意 $Z(i+n, i+n)$ 不包含 $V_{i,i+n} = F[X^i \times \{x_3^n\}]$ 中的任何向量。

例 6.8。我们刚刚定义的作用产生了例 2.20 中望远镜 $\mathcal{PSL}_d(F) = ((P\Omega_n)_{n\in N}, (\phi_n)_{n\geq 2})$ 的作用。我们将 P_n 定义为 $V_n = F[X^n]$ 的射影空间，并注意到 $\mathrm{PSL}_{X^n}(F)$ 在 P_n 上作用。利用这些作用，我们可以构造 $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 的一个忠实作用。上面定义的映射 $\iota'_{i,i+n}$ 诱导了射影空间之间的映射 $\iota_{i,i+n} \colon P_i \to P_{i+n}$。系统 $((P_i)\, \iota_{i,j})$ 与望远镜 $\mathcal{PSL}_d(F)$ 的过渡映射相容。我们声称，这定义了 $\mathcal{PSL}_d(F)$ 在 $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 上的一个作用。只需验证 B_{i+n} 在 $P_{i,i+n}$ 上作用平凡。与上面一样，对于 $i \geq 2$ 和 $n \geq 2$，群 B_{i+n} 支撑在 $Z(i+n, i+n)$ 上；见命题 2.18。根据构造，$P_{i,i+n}$ 包含由子空间 $F[X^i \times \{x_3^n\}]$ 中向量张成的所有直线。因此，B_{i+n} 在 $P_{i,i+n}$ 上作用平凡。$\mathrm{PSL}_{X^n}(F)$ 在 P_n 上的作用是二重传递的，因而是本原的。这意味着 $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 在 P_∞ 上的作用也是二重传递的，并且稳定子是极大子群。我们稍后将看到该作用是忠实的。

7. Simplicity of the head for $\mathcal{A}(d, r)$

这里我们只考虑针对 $d \geq 5$ 和 $2 \leq r \leq d-3$ 的望远镜 $\mathcal{A}(d, r)$。我们将证明以下结果。

定理 7.1. 设 $d \geq 5$，并给定 $2 \leq r \leq d-3$。头部 $Q_{\mathcal{A}(d,r)} = G_{\mathcal{A}(d,r)} / \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{Alt}(X^\ell)$ 是一个二生成无限单群。

我们已在定理 3.11 中看到，$G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是二生成的。接下来需要证明头部的单性。为此，关键步骤是证明，对于不属于 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathrm{Alt}(X^i)$ 的元素 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$，当 n 充分大时，投影 $\pi_n(g)$ 均为非平凡。事实上，我们将证明更强的结论，并看到这类元素会移动 X^n 中相当大比例的点。我们将借助弱正规形定理来验证这一论断，下面先来介绍该定理。

设给定 $m \geq 0$。对于所有 $i \geq m+2$，我们定义嵌入

$$\phi_i^{(m)} \colon \mathrm{Alt}(X^m \times \{x_1, \ldots, x_r\} \times X) \to \mathrm{Alt}(X^i)$$

使用集合 $X^m \times \{x_1, \ldots, x_r\} \times X$ 和 $X^m \times \{x_d^{i-m-2}\} \times \{x_1, \ldots, x_r\} \times X$ 的典范识别。注意，对于 $m = 0$，同态 $\phi_i^{(0)} = \phi_i$ 是望远镜的结构映射。我们观察到，$\iota_{i,j} \circ \phi_i^{(m)}$ 和 $\phi_j^{(m)}$ 的像对于 $i < j$ 具有不交支集，因而交换。现在，我们仿照 $\tilde{b}^{[n]}$ 对元素 $b \in \mathrm{Alt}(\{x_1, \ldots, x_r\} \times X)$ 的定义。令 $n > m$。对于

$\sigma \in \mathrm{Alt}(X^m \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X)$，我们通过 $\pi_i(\tilde{\sigma}^{[n]}) = 1$ 为所有 $i < n+1$ 定义 $\tilde{\sigma}^{[n]} \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{Alt}(X^i)$，并通过

$$\pi_i(\tilde{\sigma}^{[n]}) = \prod_{k=n+1}^{i} \iota_{k,i} \phi_k^{(m)}(\sigma)$$

对于 $i \geq n+1$。这给出了递归描述

$$\tilde{\sigma}^{[n]} = \Delta_{n+1}(\phi_{n+1}^{(m)}(\sigma)) \tilde{\sigma}^{[n+1]} = \tilde{\sigma}^{[n+1]} \Delta_{n+1}(\phi_{n+1}^{(m)}(\sigma)). \tag{7.1}$$

引理 7.2. 设 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$。存在 $m \geq 0$, $\sigma \in$ 交错群$(X^m \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X)$,$\delta$, $\eta \in \Delta_{m+1}($交错群$(X^{m+1}))$ 和 $f \in \bigoplus_{i=1}^{m}$ 交错群(X^i)，使得

$$g = f \delta \tilde{\sigma}^{[m+1]} \eta.$$

数目 m 至多为 g 关于生成集$\Delta_1($交错群$(X)) \cup C^{[1]}$ 的字长。

证明。设 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$，并令 ℓ 表示 g 关于$\Delta_1($交错群$(X)) \cup C^{[1]}$ 的字长。我们对字长进行归纳。在每一步中，数目 m 至多增加 1。对于 $\ell = 0$，无需处理。假设$\ell = 1$。若 $g = \Delta_1(\omega)$，则令 $m = 0$，并令 $\delta = g$ 和 $\eta = f = \sigma = 1$。若 $g = \tilde{b}^{[1]}$，则令 $m = 0, \sigma = b$ 和 $\delta = \eta = f = 1$。

假设 $\ell > 1$。我们将 $g = hg'$ 写为 $h \in \Delta_1($交错群$(X)) \cup C^{[1]}$ 以及长度为 $\ell - 1$的 g'。根据归纳法假设，存在 $m \leq \ell - 1$，使得我们可以像上面那样将$g' = f \delta \tilde{\sigma}^{[m+1]} \eta$ 写出。注意到 $\bigoplus_{i=1}^{m}$ 交错群(X^i) 是正规的，因此 $hf = f_1 h$，其中$f_1 \in \bigoplus_{i=1}^{m}$交错群$(X^i)$。

若 $h = \Delta_1(\omega)$，则 $h = f_2 \Delta_{m+1}(\omega)$，其中 $f_2 \in \bigoplus_{i=1}^{m}$交错群$(X^i)$，并且我们有

$$g = hg' = f_1 f_2 \underbrace{\Delta_{m+1}(\omega)\delta}_{\in \Delta_{m+1}(\mathrm{Alt}(X^{m+1}))} \tilde{\sigma}^{[m+1]} \eta$$

这就证明了该断言。

现在设 $h = \tilde{b}^{[1]}$ 对于某个 $b \in$ 交错群$(\{x_1, \dots, x_r\} \times X)$。我们写成

$$\tilde{b}^{[1]} = \Delta_2(\phi_2(b)) \dots \Delta_{m+2}(\phi_{m+2}(b)) \tilde{b}^{[m+2]} = f_2 \delta' \tilde{b}^{[m+2]}$$

对于某个 $f_2 \in \bigoplus_{i=1}^{m+1}$ 交错群(X^i) 和 $\delta' \in \Delta_{m+2}($交错群$(X^{m+2}))$。这里有一个关键观察：考察支撑即可看出，$(\tilde{b}^{[m+2]})^{\delta} = \tilde{\tau}^{[m+2]}$ 对于某个$\tau \in$交错群$(X^{m+1} \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X)$。此外，根据等式（7.1），我们有 $\tilde{\sigma}^{[m+1]} = \tilde{\sigma}^{[m+2]} \eta'$，其中 $\eta' = \Delta_{m+2}(\phi_{m+2}^{(m)}(\sigma))$。这给出

$$g = hg' = f_1 f_2 \delta' \tilde{b}^{[m+2]} \delta \tilde{\sigma}^{[m+1]} \eta = f_1 f_2 \delta' \delta \tilde{\tau}^{[m+2]} \tilde{\sigma}^{[m+2]} \eta' \eta$$

结论由此得出，因为 $\tilde{\tau}^{[m+2]} \tilde{\sigma}^{[m+2]} = \widetilde{\tau\sigma}^{[m+2]}$，而且 $\delta\delta'$、$\eta'\eta$包含于 $\Delta_{m+2}($交错群$(X^{m+2})) \bigoplus_{i=1}^{m+1}$ 交错群(X^i)中。□

设 $\sigma \in$ 交错群(X^i)。我们将 σ 在 X^i 上的支撑体积定义为 $\mathrm{vol}(\sigma) = |\text{支撑}_{X^i}\ \sigma|$。对于 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$，记 $\mathrm{vol}_i(g) = \mathrm{vol}(\pi_i(g))$。若对所有 $n \geq 1$ 和所有 $y \in X^n$，均有 $\pi_{i+n}(g)(wy) = \pi_i(g)(w)y$，则称 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$在 $w \in X^i$处一致。

引理 7.3。设 $g \in G_{\mathcal{A}(d,r)}$。假设 $g \notin \bigoplus_{i \in \mathbb{N}}$交错群$(X^i)$。那么存在$k \in \mathbb{N}$ 以及一个一致点 $w \in X^k$，使得 $g(w) \neq w$。特别地，$\mathrm{vol}_i(g)$ 有一个严格大于零的下界，并且对所有 $j \geq k$，$\pi_j(g) \neq 1$。

证明。由引理 7.2，存在某个 m，使得我们可以写成 $g = f \delta \tilde{\sigma}^{[m+1]} \eta$。我们将看到，对于某个 $k \leq m+3$，可以在 g 的支撑中找到一个一致的 $w \in X^k$。为证明此断言，我们可以模 $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Alt}(X^i)$ 进行讨论，并忽略 f。此外

该断言在与 $\Delta_{m+1}(\mathrm{Alt}(X^{m+1}))$ 共轭下保持不变，因此我们可以假设

$$g = \delta\tilde{\sigma}^{[m+1]}$$

其中 $\delta \in \Delta_{m+1}(\text{交错群}(X^{m+1}))$ 和 $\sigma \in \text{交错群}(X^m \times \{x_1, \dots, x_r\} \times X)$。如果 $\sigma = 1$ 那么支撑 δ 中的每个点 $w \in X^{m+1}$ 都是一致的，我们可以取 $k = m+1$。

假设 $\sigma \neq 1$，并考虑这样的情形：对于某个 $v \in X^m$，点 vx_d 位于 δ 的支撑中。于是 $w = vx_dx_{d-1} \in X^{m+2}$ 位于 δ 的支撑中，但不属于 $\tilde{\sigma}^{[m+1]}$ 的支撑。特别地，它是一致的，我们可以取 $k = m+2$。最后，我们假设 δ 的支撑与 $X^m \times \{x_d\}$ 不相交。于是取 $k = m+3$ 以及支撑 $\phi_k^{(m)}(\sigma)$ 中的一个元素 $w \in X^k$。由于对于任意 $j \neq k$，w 都不在 $\phi_j^{(m)}(\sigma)$ 的支撑中，因此它被一致地移动。我们得到，对于所有 $i \geq k$，$\mathrm{vol}_i(g) \geq \frac{1}{d^k}$。□

有了这些准备，我们可以给出定理 7.1 的两个证明。第一个证明更简短，也更直接地解释了一致移动的点如何蕴含单性。第二个证明使用作用，并包含有关 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 结构的更多信息。

定理 7.1 的第一种证明。设 $N \subseteq G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是一个正规子群，且真包含 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Alt}(X^i)$。取 $g \in N \setminus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Alt}(X^i)$。根据引理 7.3，存在某个 $k \geq 1$，以及 g 的支撑中的一个一致点 $w \in X^k$。设 $g(w) = v$。设 $\tau \in \mathrm{Alt}(X^{k+1})$ 是非平凡的，且其支撑包含于 $\{w\}\times X$ 中。设对于某个 $t \in \mathrm{Alt}(X)$，τ 的作用为 $\tau(wx) = wt(x)$。于是对于所有 $x \in X$ 和 $y \in X^i$，我们得到（利用 w 是 g 的一致点）

$$\begin{aligned}[\Delta_{k+1}(\tau), g](vxy) &= \Delta_{k+1}(\tau)g\Delta_{k+1}(\tau)^{-1}g^{-1}(vxy)\\ &= \Delta_{k+1}(\tau)g(\tau^{-1}(wx)y) = \Delta_{k+1}(\tau)g(wt^{-1}(x)y)\\ &= \Delta_{k+1}(\tau)(vt^{-1}(x)y) = vt^{-1}(x)y.\end{aligned}$$

此外，$[\Delta_{k+1}(\tau)\ g]$ 对所有不以 v开头的点都平凡作用。这意味着 $[\Delta_{k+1}(\tau)\ g] \in \Delta_{k+1}(\text{交错群}(X^{k+1}))$ 且是非平凡的。由于交错群(X^{k+1})是单的，我们推得 $\Delta_{k+1}(\text{交错群}(X^{k+1}))$ 包含于 N 中。根据引理3.7，这意味着 N 包含 K_{k+1}。由于 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 由 K_{k+1} 和 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}$交错群$(X^i)$生成（见推论3.5），我们推得 $N = G_{\mathcal{A}(d,r)}$。由此可知，$Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是单的。□

定理 7.1 的第二个证明。我们考虑例 6.6 中定义的 $\mathcal{S} = \mathcal{A}(d,r)$ 在 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 上的作用。由引理 7.3 可知，该作用的核为$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}$交错群$(X^i)$，即此作用诱导了 $Q_{\mathcal{S}}$ 在 X_∞ 上的忠实作用。

我们利用引理 3.15 证明 $Q_{\mathcal{S}}$ 的单性。为此，只需验证 $\mathcal{N}^\infty = \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{k=j}^\infty N_{G_{\mathcal{S}}}(C^{[k]})$ 是 $G_{\mathcal{S}}$ 的极大子群。我们通过证明 $\mathcal{N}^\infty$ 是 $G_{\mathcal{S}}$ 中 $x = [x_d] \in X_\infty$ 的稳定子来做到这一点。事实上，由于该作用是本原的，因此这是一个极大子群。

我们在 $Q_{\mathcal{S}}$ 中考虑这个稳定子，并声称 $\mathrm{St}_{Q_{\mathcal{S}}}(x)$ 由 $Z^\infty = \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{k=j}^\infty Z_{G_{\mathcal{S}}}(C^{[k]})$ 以及满足 $k \in \mathbb{N}$ 模 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$ 的群 $C^{[k]}$ 生成。在这种情况下，所需等式由稳定子的极大性推出。根据定义，$Q_{\mathcal{S}}$ 中的每个元素都可以写成 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k(\Omega_k) \cup \bigcup_{j=1}^\infty C^{[j]}$ 中元素的像之积。回忆一下，$\Delta_k(\Omega_k)$ 在 $Q_{\mathcal{S}}$ 中的像包含于 $\Delta_{k+1}(\Omega_{k+1})$ 的像中。令 $g \in \mathrm{St}_{Q_{\mathcal{S}}}(x)$。我们关于这个生成集，按字长对该断言进行归纳证明。对于归纳基础，我们注意到，当 $\sigma \in \Omega_k$ 时，元素 $\Delta_k(\sigma)$ 恰好在 σ 固定 x_d^k 时固定 x；在这种情况下，对于所有 $j > k$，$\Delta_k(\sigma)$ 都中心化 $C^{[j]}$，因为对于所有 n，这些群在对 X^n 的作用下具有不相交支撑。

设 $g \in \mathrm{St}_{Qs}(x)$ 的字长为 $\ell > 1$。对于归纳步骤，如果 g 的第一个或最后一个字母属于 $C^{[j]}$ 的像，则无需处理。我们假设 $g = \omega_1 c_2 \omega_3 \dots c_{\ell-1}\omega_\ell$，其中 ω_i 属于 $\Delta_{k_i}(\Omega_{k_i})$ 的像，而 c_i 属于 $C^{[k_i]}$ 的像。如果 ω_ℓ 固定 x，那么对于 $j > k_\ell$，它中心化 $C^{[j]}$，因而无需处理。否则，我们可以用 $\omega' c'_{\ell-1}$ 替换 $c_{\ell-1}$，从而假设 $k_{\ell-1} \geq k_\ell + 2$。于是 $\omega_\ell^{-1} c'_{\ell-1}\omega_\ell$ 固定 x。由于 ω_ℓ 移动 $x_d^{k_\ell}$，我们有 $z := \omega_\ell^{-1}(x_d^{k_\ell}) \neq x_d^{k_\ell}$。元素 $\omega_\ell^{-1} c'_{\ell-1}\omega_\ell$ 的支撑包含于 $\bigcup_{j \geq k_\ell+2} \{z x_d^{j-k_\ell-2}\} \times \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \times X$ 中，因此中心化 $C^{[k_\ell+2]}$。现在，剩余的词 $\omega_1 c_2 \omega_3 \dots \omega' \omega_\ell$ 固定 x，断言由归纳法得出。□

回顾一下，有限生成群是 LEF 群，当且仅当它同构于有限群的超积的一个子群。有限呈示的局部嵌入有限群是剩余有限的；参见 [72]。引理 7.3 表明，同态 $G_{\mathcal{A}(d,r)} \to \prod_{\ell \in \mathbb{N}}$交错群$(d^\ell)$ 对每个定义在 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子 $\mathcal{U}$，都会诱导一个从头部 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 到超积$\prod_{\mathcal{U}}$交错群(d^ℓ) 的单射同态。由此我们得到以下结果：

推论 7.4. $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是一个单 LEF 群，且不是有限呈示的。

8. Simplicity of the head for $\mathcal{PSL}_d(F)$

在本节中，我们研究某个固定域 F 上的望远镜 $\mathcal{PSL}_d(F)$，该望远镜定义于 §2.20 中，并证明以下结果。

定理 8.1。设 $d \geq 4$，且 F 是一个域。头部 $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 是一个单群。

我们的论证与关于 $\mathcal{A}(d,r)$ 的论证类似。第一步是关于望远镜 $\mathcal{PSL}_d(F)$ 的弱正规形定理。设 Y 为一个有限集。回顾一下，对于 $g \in \mathrm{SL}_Y(F)$，g 的支撑 $\mathrm{supp}(g)$ 是满足 $g(y) \neq y$ 或 $g(y^*) \neq y^*$ 的基元素 $y \in Y$ 所组成的集合，其中 y^* 是对偶基中与之对应的元素。换言之，基元素 $y \in Y$ 不属于支撑，当且仅当 $g(y) = y$，且补空间 $F[Y \setminus \{y\}]$ 是 g-稳定的。设定 $m \geq 0$。对于所有 $j \geq 0$，我们定义

$$Y(m,j) = X^m \times \{x_d^j\} \times \{x_1, x_2\} \times X \subseteq X^{m+j+2}.$$

对于 $i \geq m+2$，令 $\phi_i^{(m)} \colon \mathrm{SL}_{Y(m,0)}(F) \to \mathrm{SL}_{X^i}(F)$ 为由集合 $Y(m,0)$ 与 $Y(m, i-m-2)$ 的典范识别所诱导的嵌入，即像中的元素都支撑于 $Y(m, i-m-2)$ 中。关于 $\mathcal{A}(d,r)$，我们注意到，对于 $m = 0$，有 $\phi_i^{(0)} = \phi_i$，并且 $\iota_{i,j} \circ \phi_i^{(m)}$ 和 $\phi_j^{(m)}$ 的像对于 $i < j$ 具有不相交支集，因而彼此交换。设定 $n > m$。对于 $s \in \mathrm{SL}_{Y(m,0)}(F)$，我们通过 $\pi_i(\tilde{s}^{[n]}) = 1$ 对所有 $i < n+1$ 定义$\tilde{s}^{[n]} \in \prod_{i=1}^\infty \mathrm{SL}_{X^i}(F)$，并且通过

$$\pi_i(\tilde{s}^{[n]}) = \prod_{k=n+1}^{i} \iota_{k,i}(\phi_k^{(m)}(s))$$

对于 $i \geq n+1$。和之前一样，我们得到递归描述

$$\tilde{s}^{[n]} = \Delta_{n+1}(\phi_{n+1}^{(m)}(s))\tilde{s}^{[n+1]} = \tilde{s}^{[n+1]}\Delta_{n+1}(\phi_{n+1}^{(m)}(s)). \tag{8.1}$$

引理 8.2。对于每个 $g \in G_{\mathcal{SL}_d(F)}$，存在 $m \geq 0$、$\sigma \in$特殊线性群$_{Y(m,0)}$、δ、$\eta \in \Delta_{m+1}$（特殊线性群$_{X^{m+1}}(F)$）以及 $f \in \bigoplus_{i=1}^m$特殊线性群$_{X^i}(F)$，使得

$$g = f\delta\tilde{\sigma}^{[m+1]}\eta.$$

数字 m 至多为 g 关于生成集$\Delta_1(\mathrm{SL}_X(F)) \cup C^{[1]}$的字长。

证明。引理 7.2 的证明经过适当调整后同样适用于这种情况。□

在定理 8.1 的证明中，我们使用下面的初等引理。

引理 8.3。设 $V = U \oplus W$ 是 F 上的有限维向量空间，且假设 $\dim U \geq 2$。设 α: $V \to V$ 是一个自同构，且 $\alpha|_U$ 不是 id_U 的数乘。则存在 $\tau \in \mathrm{SL}(U)$，使得交换子 $[\alpha, \tau \oplus \mathrm{id}_W]$ 不是恒等映射的数乘。

证明。将 U 分成两个分量后，可假设 $\dim U = 2$。取 U 和 W的基。于是 α 和 τ 可表示为矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1、T_1 是 2×2-矩阵。我们计算

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} T_1^{-1}A_1T_1 & T_1^{-1}B \\ CT_1 & A_2 \end{pmatrix}.$$

如果 A_1 不是数量矩阵，那么很容易找到 $T_1 \in \mathrm{SL}_2(F)$，使得 $T_1^{-1}A_1T_1$不是 A_1的数乘。

假设 $A_1 = \lambda I$ 是数量矩阵。注意，在这种情况下 $C \neq 0$ 。设 C 的秩为 2（特别是当 $\lambda = 0$时就是如此，因为 α 是自同构），那么任取 x、$y \in F^2$ 作为一组基。设 C的秩为 1。在这种情况下，我们取一组基 x、$y \in F^2$，使得 $Cx \neq 0$ 且 $Cy = 0$。定义T_1，使得 $T_1x = y$ 且 $T_1y = -x$，则 CT_1 不是 C的数乘。□

定理 8.1 的证明。形如 $\Delta_n(\lambda I)$ 的元素，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in F$ 属于$G_{\mathcal{SL}_d(F)}$，在本证明中简称为数量元素。设 $N \subseteq G_{\mathcal{SL}_d(F)}$ 是一个正规子群，它包含子群 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{SL}_{X^i}(F)$ 和所有数量元素。设 $g \in N$是一个模 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{SL}_{X^i}(F)$ 不与数量元素同余的元素。我们证明 N在 $\Delta_n(\mathrm{SL}_{X^n}(F))$ 中包含一个非数量元素。于是，$\mathrm{PSL}_{X^n}(F)$ 的单性蕴含 $N = G_{\mathcal{SL}_d(F)}$，与定理 7.1 的第一个证明相同。

由引理 8.2，存在某个 m，使得我们可以写成 $g = f\delta\tilde{\sigma}^{[m+1]}\eta$。为证明这一断言，我们可以模 $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{SL}_{X^i}(F)$ 进行讨论，并忽略 f。此外，该断言在 $\Delta_{m+1}(\mathrm{SL}_{X^{m+1}}(F))$ 的共轭下保持不变，因此我们可以假设

$$g = \delta\tilde{\sigma}^{[m+1]}$$

与 $\delta \in \Delta_{m+1}$(特殊线性群$_{X^{m+1}}(F)$) 和 $\sigma \in$特殊线性群$_{Y(m,0)}$。如果 $\sigma = 1$，那么 δ不是数量，因此无需再做任何事。

现在假设 $\sigma \neq 1$。假设存在某个 $v \in X^m$，使得 $v \otimes x_d$不是 $\delta = \Delta_{m+1}(\omega)$的特征向量。那么 $F[X^{m+3}] = U \oplus W$，其中 $U = F[X^m \times \{x_d\} \times \{x_3\} \times X]$，且 W 是相对于基X^{m+3}的补空间。我们注意到，$\tilde{\sigma}^{[m+1]}$ 保持这个分解，并在U上平凡作用。根据引理8.3，存在 $\tau \in \mathrm{SL}_{X^{m+3}}(F)$，使得 τ与 $\tilde{s}^{[m+1]}$交换，但 $[\omega \otimes \mathrm{id}_{F[X^2]}, \tau]$ 不是数量矩阵。因此，$[g, \Delta_{m+3}(\tau)]$属于 N，并且是来自 $\Delta_{m+3}(\mathrm{SL}_{X^{m+3}}(F))$的非数量元素。

接下来，我们假设 δ通过数量 λ作用于 $F[X^m \times \{x_d\}]$。令 $k = m + 3$。将 g与 $\Delta_{m+1}(\lambda^{-1}I)$相乘，我们可以假设 $\lambda = 1$。

我们观察到，对于 $\sigma \neq 1$，元素 $\tilde{\sigma}^{[m+1]}$ 在 $F[X^m \times \{x_d\} \times \{x_1, x_2, x_3\} \times X]$ 上的作用并不像数量，只有分量 $\Delta_{m+3}(\phi_{m+3}^{(m)}(\sigma))$ 在该子空间上有非平凡作用。设 $\tau \in \mathrm{SL}_{X^{m+3}}(F)$ 支撑于 $X^m \times \{x_d\} \times \{x_1, x_2, x_3\} \times X$，使得 $[\tilde{\sigma}^{[m+1]}, \Delta_{m+3}(\tau)] = [\Delta_{m+3}(\phi_{m+3}^{(m)}(\sigma)) \ \Delta_{m+3}(\tau)]$不是

数量矩阵。那么

$$\begin{aligned}[g, \Delta_{m+3}(\tau)] &= [\delta\tilde{\sigma}^{[m+1]}, \Delta_{m+3}(\tau)] \\ &= \delta[\tilde{\sigma}^{[m+1]}, \Delta_{m+3}(\tau)]\delta^{-1}[\delta, \Delta_{m+3}(\tau)] \\ &= \delta[\Delta_{m+3}(\phi^{(m)}_{m+3}(s)), \Delta_{m+3}(\tau)]\delta^{-1}[\delta, \Delta_{m+3}(\tau)]\end{aligned}$$

并且由于 δ 在 $F[X^m \times \{x_d\}]$ 中的向量上平凡作用，我们看到这是一个来自 Δ_{m+3} (特殊线性群$_{X^{m+3}}(F)$) 且包含于 N 中的非数量元素。□

由 $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 的单性可知，它的所有非平凡作用都是忠实的。由此我们推得：

推论 8.4. $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 在例 6.8 中定义的对 P_∞ 的作用是忠实的。

对于交错群望远镜，我们可以得出如下结论：

推论 8.5。设 F 为一个有限域。头部 $Q_{\mathcal{PSL}_d(F)}$ 是一个单 LEF 群，且不是有限呈示的。

9. Embedding residually finite groups into simple groups

本节的目标是证明，每个有限生成、剩余有限、（可 amenable）群 G都嵌入某个有限生成、单的（可 amenable）LEF 群Q。事实上，我们将在定理 9.14 中看到， G 嵌入另一个有限生成、剩余有限、（可 amenable）群 H，该群存在一个到 Q的投影，其核与 G 的像的交集为 H 平凡群。我们将看到，只需对完美群证明这一结果。作为定理 9.14 证明的第一步，我们先将一个有限生成的剩余有限完美群嵌入某个球对称根树的自同构群。我们采用这一视角，旨在说明望远镜与作用在根树上的群之间的相似性。下面简要回顾一些标准术语。

9.1. 作用在根树上的群。设 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个基数为 $|X_n| \geq 2$的有限集序列，我们将其视为字母表。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$，考虑字长为 ℓ的词的集合，记作 $X^\ell := X_1 \times \ldots \times X_\ell$，其中$X^0 = \{\emptyset\}$ 定义为仅含唯一的长度为 0 的词 $\emptyset$ 的单元素集合。与 X相关联的球齐次有根树记为 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_X$，它是$\infty$以顶点集 $X^* = \bigcup X^\ell$ 为顶点集、以 $\emptyset$为根顶点的有根树；当且仅当存在某个字母 $x \in X_n$ （其中$n \in \mathbb{N}$ 满足相应条件），使得 $v = wx$ 或 $w = vx$时，两个顶点$\ell=0v$、w 之间有一条边。我们用 Aut(T) 表示所有保持根 $\emptyset$不动的 T 的自同构所构成的群。注意，顶点 v 到根的距离（称为 v的层）在 Aut(T) 的作用下保持不变，并且等于 v的字长。因此，层为 ℓ 的顶点集合 X^ℓ 在 Aut(T) 的作用下保持不变。

许多作用于有根树的群的重要例子，都是由有根的或有向的树自同构生成的。有根自同构很容易描述。它们由那些只置换词在 X^* 中的第一个字母的树自同构给出。因此，T 的有根自同构群与 Sym(X_1) 典范同构。为了定义 T 的有向树自同构，我们需要在 T 中固定一个方向，该方向由序列 $o = (o_i) \in X^\infty := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$给出

令 Y_i 表示 X_i 中 o_i 的补空间，并令 $\mathcal{S} := \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$。现在考虑一个群

G 作用于 X_i 对每个 $i \geq 2$，并令 $G_i \leq$ 对称群(X_i) 表示 G在此作用下的像。给定 $g \in G$，我们将 g_i 记作 g 在 G_i中的像。令 T$_i$ 为与子序列 $(X_i, X_{i+1}, \ldots)$ 相关联的球齐次有根树

X 的。注意，通过设定，我们得到一个嵌入 $\rho_i\colon G_i \to \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_i)$，将 G_i 作为 T_i 的有根自同构群。

$$\rho_i(g_i)x_ix_{i+1}\cdots x_k = (g_ix_i)x_{i+1}\cdots x_k.$$

在下文中，我们将 G_i 与其在 ρ_i下的像等同。对于每个 $\alpha \in \mathcal{S}$和每个 $g \in G$，我们可以递归地定义一族有向自同构$\tilde{g}^{\alpha}_{[i]} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_i)$，如下所示。给定一个字母 $x \in X_i$和一个词 $v \in X_{i+1}\times\ldots\times X_k$，我们定义

$$\tilde{g}^{\alpha}_{[i]}(xv) = \begin{cases} x\tilde{g}^{\alpha}_{[i+1]}(v) & \text{if } x = o_i \\ xg_{i+1}(v) & \text{if } x = \alpha_i \\ xv & \text{if } x \notin \{o_i, \alpha_i\}. \end{cases}$$

我们注意到，$\tilde{\cdot}^{\alpha}_{[i]}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_i)$ $g \mapsto \tilde{g}^{\alpha}_{[i]}$ 定义了一个同态，其核为$\bigcap_{k\geq i}\ker($ $G \to G_k)$，我们将其像记为 $G^{\alpha}_{[i]}$。

9.2. 将完美群嵌入 B-望远镜群中。本节中，我们构造证明嵌入定理所用的望远镜。我们固定一个非平凡、有限生成、剩余有限的完美群 G 以及一个序列 $(N_i)_{i\geq 2}$，其中各项都是 G中的有限指数正规子群。假设 $\bigcap N_i = 1$ 和$_{i\geq 2}$

每个 N_i 在 G 中的指数至少为 6。我们考察 G 对有限商群 $X_i := G/N_i$ 的典范作用，并将其视为上一小节中的字母表。令 X_1 为一个基数为 6 的集合，并令 $o, \alpha, \delta, \varepsilon,$ $y, z \in \prod X_{n\in\mathbb{N}}$

是每个坐标中两两不同的元素序列 X_n。将o 视为树 $\mathrm{T} = \mathrm{T}_X$中的一个方向，其中 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们便得到如上所述的映射$\tilde{\cdot}^{\alpha}_{[1]}\colon G \to \mathrm{Aut(T)}$。请注意，条件 $\bigcap_{i\geq 2} N_i = 1$保证了 $\tilde{\cdot}^{\alpha}_{[1]}$ 定义了一个到其像 $G^{\alpha}_{[1]}$ 上的同构。定理 9.14 的证明中的关键步骤是构造一个柔性 B-望远镜 $\mathcal{H} := ((\Omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}},(\phi_\ell)_{\ell\geq 2})^{\sim}$，其关联群 $G_{\mathcal{H}}$ 包含 $G^{\alpha}_{[1]}$。为了简化一些记号，我们记作$o^i := o_1o_2\cdots o_i$。考虑群 $B_0 :=$ 交错群$(\{\delta,\varepsilon\}\times\{y,z,o\})$。对于每个 $n \geq 2$，令

$$\psi^0_n\colon B_0 \to \mathrm{Alt}(\{o^{n-2}\}\times\{\delta_{n-1},\varepsilon_{n-1}\}\times\{y_n,z_n,o_n\})$$

是由集合 $\{\delta,\varepsilon\}\times\{y,z,o\}$ 与 $\{o^{n-2}\}\times\{\delta_{n-1},\varepsilon_{n-1}\}\times\{y_n,z_n,o_n\}$ 之间显然的双射所诱导的同构。此外，我们定义映射

$$\psi^{\alpha}_n\colon G \to \mathrm{Alt}(\{o^{n-2}\}\times\{\alpha_{n-1}\}\times X_n)$$

规定对每个 $n \geq 2$，$\psi^{\alpha}_n(g)(o^{n-2}\alpha_{n-1}x) = o^{n-2}\alpha_{n-1}g(x)$。现在，我们可以将 B-望远镜对应的群 B 定义为直积 $B = B_0 \times G$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\Omega_n = \mathrm{Alt}(X^n)$。记 $P_{\mathcal{H}} = \prod_n\Omega_n$。与 $\mathrm{Alt}(rd)$-望远镜的情形一样，我们考虑嵌入 $\iota_{i,j}\colon \Omega_i \to \Omega j$，其定义为 $\iota_{i,j}(\sigma)(vw) = \sigma(v)w$，其中 v 的字长为 i。接下来，我们定义映射

$$\phi_n\colon B \to \Omega_n,\ (b,g) \mapsto \psi^0_n(b)\cdot\psi^{\alpha}_n(g)$$

对每个 $n \geq 2$ 均如此。根据构造，群 $\psi^0_n(B_0)$ 和 $\psi^{\alpha}_n(G)$ 的支撑互不相交，因此 ϕ_n 是良定义的同态。为了说明$\tilde{} G^{\alpha}_{[1]}$ 包含于 $G_{\mathcal{H}}$，我们使用嵌入

$$\iota\colon \mathrm{SAut(T)} \to P_{\mathcal{H}},\ \gamma \mapsto (\pi_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}},$$

其中，$\mathrm{SAut(T)}$ 表示由树自同构构成的子群，这些自同构在 T 的每一层上都作为偶置换作用。由定义显然可知，$\tilde{\cdot}^{[1]}\colon B \to P_{\mathcal{H}}$到 G的限制映射与 $\iota\circ\tilde{\cdot}^{\alpha}_{[1]}$具有相同的像。此外，利用 $\tilde{G}^{\alpha}_{[1]}$由 T 的自同构构成这一事实，还可推出交集 $G^{\alpha}_{[1]}\cap\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ 是

平凡的。一旦我们证明 $\mathcal{H}$ 是一个柔性 B-望远镜，这将使我们能够˜将 $G^{\alpha}_{[1]}$ 视为 $Q_{\mathcal{H}}$ 的子群。

引理 9.1. 设 X 为有限集，且 Y、$Z \subseteq X$ 为满足 $Y \cap Z \neq \emptyset$ 的子集。假设 $|Y|$、$|Z| \geq 3$。那么，由 Alt(Y) 和 Alt(Z) 生成的 Alt(X) 的子群与 Alt($Y \cup Z$) 重合。

证明. 该结论直接由 O'Nan–Scott 定理得到。 □

命题 9.2. 上文定义的望远镜 $\mathcal{H}$ 是一个柔性 B-望远镜。

证明. (2.2) 以及柔性公理 (F1) - (F3) 的验证，沿用命题 2.16 中通过考察支撑对 $\mathcal{A}(d,r)$ 的相应公理所进行的验证。唯一的区别在于，需要将 $\mathcal{A}(d,r)$ 的柔性中出现的 3-循环 $(x_d^{\ell-1}x_{d-2}, x_d^{\ell-1}x_{d-1}, x_d^{\ell})$ 替换为 $\in \Omega_\ell$ 中的 3-循环 $(o^{\ell-1}y_\ell, o^{\ell-1}z_\ell, o^{\ell})$。剩下需要证明的是 (2.1)，即群 $K := \langle \{hB_{n+1}h^{-1} \mid h \in \Omega_{n,n+1}\}\rangle$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都与 Ω_{n+1} 重合。回忆 $\Omega_n = \mathrm{Alt}(X^n)$。根据定义，我们有

$$B_{n+1} = \phi_{n+1}(B_0 \times G) = \langle \psi^0_{n+1}(B_0), \psi^{\alpha}_{n+1}(G)\rangle.$$

考虑群 $\psi^0_{n+1}(B_0)$ = 交错群($\{o^{n-1}\} \times \{\delta_n, \varepsilon_n\} \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\}$)。由于 Ω_n 在 X^n 上二重传递地作用，通过用 $\iota_{n,n+1}$- 稳定子在 Ω_n 中的 $o^{n-1}\delta_n$ 上的像共轭 $\psi^0_{n+1}(B_0)$，可得对于每个 $v \in X^n$，交错群($\{v, o^{n-1}\delta_n\} \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\}$)都包含于 K 中。根据引理 9.1，这意味着 K包含群交错群($X^n \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\}$)。由于 G在 X_{n+1}上传递地作用，我们推得 $\psi^{\alpha}_{n+1}(G)$ 在 $\{o^{n-1}\} \times \{\alpha_n\} \times X_{n+1}$上传递地作用。因此，给定 $v \in X^n$，我们可以选择 $\psi^{\alpha}_{n+1}(G)$ 的一个适当的 $\Omega_{n,n+1}$-共轭 $Q_v \leq$ 交错群($\{v\} \times X_{n+1}$)，使其在 $\{v\} \times X_{n+1}$上传递地作用。由于交集

$$\mathrm{Alt}(X^n \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\}) \cap \mathrm{Alt}(X^n \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\})^q$$

对每个 $q \in Q_v$ 都包含 Alt($(X^n \setminus \{v\}) \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\}$)，我们可以应用引理 9.1，推出 Alt($X^n \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\} \cup \{v\} \times X_{n+1}$) 包含于 K 中。利用 X^{n+1} 可由形如 $X^n \times \{y_{n+1}, z_{n+1}, o_{n+1}\} \cup \{v\} \times X_{n+1}$ 的子集覆盖这一事实，再次应用引理 9.1 可得 $K = \Omega_{n+1}$，从而完成证明。□

注记 9.3。与我们之前关于 B-望远镜的例子不同，$\mathcal{H}$ 中的映射 ϕ_n 远非嵌入。事实上，群 B 包含 G，因此通常是无限的，而每个 Ω_n 都是有限的。

9.3. 望远镜与康托尔集。本节的最终目标是证明，望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$ 和 $\mathcal{H}$ 的群是可 amenable 的（前提是 G 是可 amenable 的）。为此，我们将应用 Juschenko、Nekrashevych 和 de la Salle 的著名判据 [37]，以检测作用于康托尔集上的群的可 amen 性。因此，第一步是定义群 $G_{\mathcal{H}}$ 和 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 在一个康托尔集上的适当作用。按照如下方式将这两个群置于共同的背景中会很方便。再次考虑一个序列 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中的 ∞ 有限集 X_n 的基数为 $|X_n| \geq 2$，并令 $\mathfrak{C} := \prod_{n=1} X_n$ 表示由这些集合的乘积给出的康托尔集。固定一点 $o = (o_n) \in \mathfrak{C}$。现在考虑一个柔性 B-望远镜 $\mathcal{S} = ((\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$，它由传递子群 $\Omega_n \leq \mathrm{Sym}(X^n)$ 构成，其中过渡映射 $\iota_{n,\,m}\colon \Omega_n \to \Omega_m$ 的定义方式是：令 $\iota_{n,\,m}(\omega)$ 通过置换长度为 m 的词的长度为 n 的初始子词来作用。我们假设

$$\mathrm{supp}(B_i) \subseteq \{o^{i-2}\} \times (X_{i-1} \setminus \{o_{i-1}\}) \times X_i. \tag{9.1}$$

我们证明 $\mathfrak{C}$ 具有一个由 $Q_{\mathcal{S}}$ 通过同胚给出的作用。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们~都有 Ω_n 在 $X^n = \prod_{i=1}^n X_i$ 上的作用，并且这些作用通过作用于前 n 个坐标，诱导出 $G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$~ 上的作用。更确切地说，对于 $g \in G_{\mathcal{S}}$ 和 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$，我们定义

$$g.{}_n\xi = \Delta_n(\pi_n(g))(\xi).$$

~引理 9.4。对于每个 $g \in G_{\mathcal{S}}$ 以及每个 $\xi \in \mathfrak{C}$，序列 $(g.{}_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ 稳定，并且

$$g.\xi = \lim_{n\to\infty} g.{}_n\xi$$

~定义了 $G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$上的同胚作用。

证明。如引理 6.2 的证明所述，只需在一组生成元上验证这些断言即可。巨大群 $G_{\mathcal{S}}$ 由 $\Delta_j(\Omega_j)$ 中的元素以及$C^{[k]}$生成。对于 $g \in \Delta_j(\Omega_j)$，根据过渡映射的定义，ξ 处的作用对所有 $n \geq j$ 都保持稳定；由于它们只作用于前 n 个条目，显然它们是同胚。

现在我们考虑 $C^{[k]}$中的元素。根据假设，群 B_i 在 $\mathfrak{C}$ 上的作用的支集是不相交的既开又闭集，并且每个 $\xi \in \mathfrak{C}$ 至多可以位于其中一个支集内。在每个这样的支集上，该作用都与 $\Delta_{k+j}(\Omega_{k+j})$ 中某个元素的作用一致。这意味着每个 $g \in C^{[k]}$ 的作用都是稳定且连续的。□

现在我们来研究引理 9.4 所给出的 $G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$ 上的作用。我们先确定这一作用的核。

引理 9.5. 设 $Q_{\mathcal{S}}$ 的头部 $\mathcal{S}$ 是单群。那么 $G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$上的~∞作用的核为 $\bigoplus_{n=1} \Omega_\ell$。特别地，$Q_{\mathcal{S}}$ 忠实地作用在 $\mathfrak{C}$上。

~∞证明。令 N 表示 $G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$上作用的核。我们知道，$\bigoplus_{\ell=1}^{\infty}\Omega_\ell$~是 $G_{\mathcal{S}}$ 的一个子群，并且按构造它在 $\mathfrak{C}$上的作用是平凡的。这表明 ~ ∞$\bigoplus_{\ell=1}^{\infty}\Omega_\ell \subseteq N$。利用假设 $Q_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}}/\bigoplus_{\ell=1}^{\infty}\Omega_\ell$是单群，并注意到 ∞这一作用并非平凡，可知 N 与 $\bigoplus_{\ell=1}^{\infty}\Omega_\ell$相同。□

注 9.6. 假设 $G_{\mathcal{S}}$ 是有限生成的，且包含 $\bigoplus_{\ell=1}^{\infty}\Omega_\ell$。注意，$\bigoplus_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega_\ell$ 不是 $G_{\mathcal{S}}$的有限生成正规子群。因此，$Q_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}}/\bigoplus_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega_\ell$ 不是有限呈示的；若 $Q_{\mathcal{S}}$ 是直接通过其在 $\mathfrak{C}$上的作用定义的，这一点便不那么显然了。

9.4. $G_{\mathcal{S}}$的可 amen 性。既然我们已经得到了 $Q_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathfrak{C}$上的忠实作用，现在我们希望为这一作用制定一些条件，以确保 $Q_{\mathcal{S}}$的可 amen 性。由于$\bigoplus_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega_\ell$ 是局部有限的，因而是可 amen 的，引理 9.5 表明，这些条件那么也要确保 $G_{\mathcal{S}}$ 的可 amen 性。关于可 amen 性的定义，请参阅 [35]。我们需要引入一些记号，以便在当前情形下表述 [37] 中的可和性判据。为此，对于每个 $v \in X^*$，我们考虑由所有以 v 开头的序列组成的开子集 $U_v \subseteq \mathfrak{C}$。借助这些集合，我们可以方便地推广先前关于元素 $\alpha \in \mathrm{Homeo}(\mathfrak{C})$ 在 $v \in X^\ell$ 处的一致性概念，规定存在某个 $\omega \in \Omega_\ell$，使得 α 在 U_v 上与 $\Delta_\ell(\omega)$ 重合。

定义 9.7。若存在某个$C \geq 0$ 使得

$$|\{ v \in X^{\ell} \mid \alpha \text{ is not consistent at } v \}| \leq C$$

对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$。

定义 9.8. 设 Γ 是作用于 $\mathfrak{C}$ 的群。对于每个 ξ， Γ 在 ξ 处的芽群定义为 $\mathcal{O}_{\xi}(\Gamma) = \mathrm{St}_{\Gamma}(\xi) / \sim$，其中 $g, h \in \mathrm{St}_{\Gamma}(\xi)$ 满足 $g \sim h$ 当且仅当 g 和 h 在 $\mathfrak{C}$ 中 ξ 的某个邻域上一致。

以下结果是定理 16] 的一个特例。

定理 9.9（Juschenko、Nekrashevych、de la Salle）。设 G 是一个通过有界型同胚忠实作用于 $\mathfrak{C}$ 上的群。如果对于每个 $\xi \in \mathfrak{C}$，芽群 $\mathcal{O}_{\xi}(G)$ 都是可 amenable 的，那么 G 是可 amenable 的。

以下引理为我们提供了 $Q_{\mathcal{S}}$ 中元素的标准形，适用于验证定理 9.9 的条件。为简便起见，我们将用$G_{\mathcal{S}}$中的代表元来表示该引理及其证明中的 $Q_{\mathcal{S}}$ 元素。回顾一下，在 $Q_{\mathcal{S}}$ 中，对于所有 n，有 $\Delta_n(\Omega_n) \subseteq \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$。

引理 9.10. 对于每个 $q \in Q_{\mathcal{S}}$，都存在 m、$n \in \mathbb{N}$，使得 q 可表示为如下形式的元素：$\varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta$，其中 $c_i \in C^{[n+1]}$、 $\delta_i \in \Delta_n(\Omega_n)$、 ε、$\eta \in \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$，并且对所有 $i \neq j$， $\pi_n(\delta_i^{-1})(o^n) \neq \pi_n(\delta_j^{-1})(o^n)$。

证明。我们对 $q \in Q_{\mathcal{S}}$ 关于生成集 $\Delta_1(\Omega_1) \cup C^{[1]}$ 的字长使用归纳法来证明该引理。若字长为 1，则结论显然成立。假设 $q = \varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta$ 如引理所述。令 $b_i \in B$、$\omega_i \in \Omega_n$，以及σ、$\tau \in \Omega_{n+1}$，使得 $c_i = \tilde{b}_i^{[n+1]}$、 $\delta_i = \Delta_n(\omega_i)$、 $\varepsilon = \Delta_{n+1}(\sigma)$ 和 $\eta = \Delta_{n+1}(\tau)$。将 q 右乘一个形如 $\Delta_1(\rho)$ 的元素，其中 $\rho \in \Omega_1$，即可得到

$$q\Delta_1(\rho) = \varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta \Delta_1(\rho) = \varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta',$$

其中 $\eta' = \Delta_{n+1}(\tau \iota_{1,\ n+1}(\rho))$，且这些方程是在 $Q_{\mathcal{S}}$ 中考虑的。因此， $q\Delta_1(\rho)$ 可以写成引理中的标准形。接下来考虑从右侧将 q 与某个形如 $\tilde{b}^{[1]}$ 的元素相乘，其中 $b \in B$。我们首先计算

$$\begin{aligned}
\eta \tilde{b}^{[1]} &= \Delta_{n+1}(\tau) \tilde{b}^{[n+2]} \Delta_{n+2}(\iota_{2,n+2}(\phi_2(b)) \cdots \iota_{n+1,n+2}(\phi_{n+1}(b)) \phi_{n+2}(b)) \\
&= (\tilde{b}^{[n+2]})^{\Delta_{n+1}(\tau^{-1})} \Delta_{n+2}(\iota_{n+1,n+2}(\tau) \cdot \iota_{2,n+2}(\phi_2(b)) \cdots \phi_{n+2}(b)) \\
&= c_{m+1}^{\delta_{m+1}} \Delta_{n+2}(\rho),
\end{aligned}$$

其中 $c_{m+1} = \tilde{b}^{[n+2]}$，并适当地选取 $\delta_{m+1} \in \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$、 $\rho \in \Delta_{n+2}(\Omega_{n+2})$。接下来更仔细地考虑元素 $c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m}$。对于每个 $k \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}_{X^{n+k+2}}(c_i^{\delta_i}) &= \delta_i^{-1}(\mathrm{supp}_{X^{n+k+2}}(c_i)) \\
&\subseteq \delta_i^{-1}(\{o^n\} \times X_{n+1} \setminus \{o_{n+1}\} \times X_{n+2} \times \cdots \times X_{n+k+2}) \\
&= \{\omega_i^{-1}(o^n)\} \times X_{n+1} \setminus \{o_{n+1}\} \times X_{n+2} \times \cdots \times X_{n+k+2}).
\end{aligned}$$

由此我们看到

$$c_i^{\delta_i} c_j^{\delta_j} = (\widetilde{b_i b_j}^{[n+1]})^{\delta_i} \tag{9.2}$$

若 $\omega_i^{-1}(o^n) = \omega_j^{-1}(o^n)$，否则为 $[c_i^{\delta_i}, c_j^{\delta_j}] = 1$。鉴于此，我们对 $\eta \tilde{b}^{[1]}$ 的计算以及这一假设

$$\omega_i^{-1}(o^n) = \pi_n(\delta_i^{-1})(o^n) \neq \pi_n(\delta_j^{-1})(o^n) = \omega_j^{-1}(o^n)$$

对于 $i \neq j$，我们得到

$$\begin{aligned} q\tilde{b}^{[1]} &= \varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} c_{m+1}^{\delta_{m+1}} \Delta_{n+2}(\rho) \\ &= \Delta_{n+1}(\sigma)(\tilde{b}_1^{[n+1]})^{\delta_1} \cdots (\tilde{b}_m^{[n+1]})^{\delta_m} c_{m+1}^{\delta_{m+1}} \Delta_{n+2}(\rho) \\ &= \Delta_{n+2}\left(\iota_{n+1,n+2}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{m} \phi_{n+2}(b_i)^{\iota_{n,n+2}(\omega_i)}\right) \cdot d_1^{\delta_1} \cdots d_m^{\delta_m} c_{m+1}^{\delta_{m+1}} \cdot \Delta_{n+2}(\rho), \end{aligned}$$

其中 $d_i = \tilde{b}_i^{[n+2]}$ 对每个 i成立。通过在必要时按照（9.2）将 $c_{m+1}^{\delta_{m+1}}$ 与某个 $d_i^{\delta_i}$ “合并”，我们看到 $q\tilde{b}^{[1]}$ 可以写成所需的标准形。□

命题 9.11. 假设 B 是一个完美、可和群，并且 $Q_{\mathcal{S}}$ 是单群。那么群 $G_{\mathcal{S}}$ 和 $Q_{\mathcal{S}}$ 也具有可和性。

证明． 由引理 9 .5 我们知道， $G_{\mathcal{S}}$ 是由初等.....扩张而成的 $Q_{\mathcal{S}}$ 可和群 $\bigoplus \Omega_{n\circ}$ 因此，只需证明关于 $Q_{\mathcal{S}}$ 的断言，我们将其视为 Homeo(𝔈) 的子群。从 $\Delta_1(\Omega_1) \cup C^{[1]}$ 中生成元的定义可直接得出，它们在 $\mathfrak{C}$ 上作用为有界型同胚。结合这一点以及有界型同胚的集合构成一个群这一基本事实，我们便可推得 $Q_{\mathcal{S}}$ 由有界型同胚组成。接下来验证，对于每个 $\xi \in \mathfrak{C}$， $\mathcal{O}_\xi(Q_{\mathcal{S}})$ 都是 B 的同态像，因而是可和的。为此，取一个固定 ξ 的元素 $q \in Q_{\mathcal{S}}$。先假设 q 可表示为某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \Omega_n$ 所对应的 $\Delta_n(\omega)$。那么 ω 固定 $v := \xi_1 \ldots \xi_n$，因此在 U_v 的开邻域上恒等，该邻域由所有以 v 开头的序列组成。因此， q 在 $\mathcal{O}_\xi(Q_{\mathcal{S}})$ 中是平凡的。再假设 $q \in Q_{\mathcal{S}}$ 任意。由引理 9.10 可知， q 可表示为如下形式的元素: $\varepsilon c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta$，其中 $c_i \in C^{[n+1]}$、$\delta_i \in \Delta_n(\Omega_n)$、 ε、 $\eta \in \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$，且对 $i \neq j$，有 $\pi_n(\delta_i^{-1})(o^n) \neq \pi_n(\delta_j^{-1})(o^n)$。那么 $\varepsilon \cdot \eta$ 固定 ξ，且 $c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m}$ 固定 $\eta(\xi)$。这是因为 $\Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$ 中的元素只会置换长度为 $n+1$ 的初始子词，而 $C^{[n+1]}$ 中的元素会固定长度为 $n+1$ 的初始子词。在这种情况下，我们刚刚已经看到，$\varepsilon \cdot \eta$ 在 $\mathcal{O}_\xi(Q_{\mathcal{S}})$ 中表示恒等元素。因此， q 在 ξ 处的芽可写为 $\eta^{-1} c_1^{\delta_1} \cdots c_m^{\delta_m} \eta$。由于对 $i \neq j$ 有 $\pi_n(\delta_i^{-1})(o^n) \neq \pi_n(\delta_j^{-1})(o^n)$，元素 $c_i^{\delta_i}$ 的支撑位于 $\mathfrak{C}$ 中彼此不相交的开子集内。因此存在某个指标 i_0，使得 q 在 ξ 处的芽由 $c_{i_0}^{\delta_{i_0}\eta}$ 表示。由此，我们可以假设 q 可由适当的元素 $c \in C^{[n+1]}$ 和 $\delta \in \Delta_{n+1}(\Omega_{n+1})$ 表示为 c^δ。不失一般性，可假设 c 在 $\delta(\xi)$ 的每个邻域上的限制映射都非平凡。从 $C^{[n+1]}$ 的定义显然可知，$\mathrm{supp}_{\mathfrak{C}}(c)$ 包含于 $U_{o^{n-1}\circ}$ 因此， $\delta(\xi)$ 属于 $U_{o^{n-1}\circ}$ 取满足 $c = \widetilde{b}^{[n+1]}$ 的 $b \in B\circ$ 由于 $\widetilde{b}^{[n+1]} = \Delta_{n+2}(\phi_{n+2}(b)) \cdot \widetilde{b}^{[n+2]}$ 固定 ξ，且 $\Delta_{n+2}(\phi_{n+2}(b))$ 与 $\widetilde{b}^{[n+2]}$ 在 $\mathfrak{C}$ 中的支撑不相交，我们推得这两个元素都固定 $\delta(\xi)$。如前所见，$\Delta_{n+2}(\phi_{n+2}(b))$ 在 $\mathcal{O}_{\delta(\xi)}(Q_{\mathcal{S}})$ 中表示恒等元素。因此， $\delta(\xi)$ 属于 $\mathrm{supp}_{\mathfrak{C}}(\widetilde{b}^{[n+2]}) \subseteq U_{o^n\circ}$ 归纳可得 $\delta(\xi) \in \bigcap U_{o^n} = \{o^\infty\}$，即 $\delta(o^\infty) = \xi$。这表明存在某个$k \geq n$ $\ell \in \mathbb{N}$ 以及一个词 $v \in X^\ell$ 使得 $\xi = v o_{\ell+1} o_{\ell+2} \cdots$。因此，存在某个 $\omega \in \Omega_\ell$满足 $\omega(\xi) = o^\infty$，由此我们可以推得 c^δ 和 $c^{\Delta_\ell(\omega)}$ 在 $\mathcal{O}_\xi(Q_{\mathcal{S}})$中的像相同。由于 ω 只取决于 ξ，这表明 $\mathcal{O}_\xi(Q_{\mathcal{S}})$ 是 $(C^{[n+1]})^{\Delta_\ell(\omega)}$ 的同态像，因此是可 amenable 的。□

推论 9.12. 给定两个整数 $d \geq 5$ 和 $2 \leq r \leq d-3$，群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$和 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是可 amenable 的。

证明。我们必须证明 $\mathcal{A}(d,r)$ 满足 B-望远镜 $\mathcal{S}$ 命题 9.11中的条件。由于 $B \cong$ 交错群(rd) 是完美的，并且根据定理7.1， $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是单的，因此还需证明 $\mathcal{A}(d,r) = ((\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\phi_n)_{n\geq 2})$ 满足 (9.1)，即

$$\operatorname{supp}_{X^n}(B_n) \subseteq \{o^{n-2}\} \times (X_{n-1} \setminus \{o_{n-1}\}) \times X_n$$

对每个 $n \geq 2$。根据引理 2.15，只需对每个 $n \in \mathbb{N}$设置 $o_n = x_d$□，这一点显而易见。

命题 9.11 中的群 $Q_{\mathcal{S}}$ 是有限生成、无限且单的可 amenable 群中少见的例子之一；这类群的存在性最早在 [36] 中得到证明。据我们所知， $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是第一个二生成的例子；此外，它还具有一个二生成的剩余有限可 amenable 覆盖。

定理 9.13。存在一个无限、二生成、剩余有限且可 amenable 的群 G ，它有一个无限单商群 Q。

证明。考虑 Alt(rd)-望远镜 $\mathcal{A}(d,r)$。由定理 3.11 可知， $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是二生成的。特别地，群 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 根据推论 3.3 得到的一个商群，因此也是二生成的。此外，由定理 7.1， $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是单的。现在只需应用推论 9.12，该推论说明群 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 和$Q_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是可 amenable 的。□

回到我们的 B-望远镜 $\mathcal{H}$，现在可以证明如下结论。

定理 9.14. 设 G 是一个有限生成的、剩余有限的（可 amenable）群。则存在一个有限生成的、剩余有限的（可 amenable）群 H 以及一个无限的、单的（可 amenable）LEF群 Q ，使得

（1）存在一个嵌入 $\iota\colon\ G \to H$；（2）存在一个投影 $\pi\colon\ H \to Q$；（3）复合映射 $\pi \circ \iota$ 是单射。

证明。在 [45, 定理 1.1]中，作者证明了每个有限生成的、剩余有限的（可 amenable）群都嵌入到一个有限生成的、剩余有限的、完美的（可 amenable）群中。因此，我们可以假设 G 是完美的。在这种情况下，我们的柔性 B-望远镜 $\mathcal{H} = ((\Omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}, (\phi_\ell)_{\ell\geq 2})$中的群 $B = B_0 \times G$ 是完美的，因为 $B_0 \cong$交错群(6)。此外， B 是可 amenable 的当且仅当 G 是可 amenable 的。正如˜小节 9.2中所指出的，交 $G^{\alpha}_{[1]} \cap \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ 是平凡的，由此可得

$\mathcal{G} \cong G^{\alpha}_{[1]}$ 包含于 $Q_{\mathcal{H}}$ 中。为验证命题 9.11 中 B-望远镜 $\mathcal{S}$ 的条件，还需证明 $Q_{\mathcal{H}}$ 是单群，并证明 $\mathcal{H}$ 满足 (9.1)。后者直接由映射 ϕ_n的定义得出。关于 $Q_{\mathcal{H}}$ 单性的证明与第 7 节中给出的定理 7.1 的第一个证明遵循相同思路。唯一的区别是，需要将引理 7.2 中的标准形替换为引理 9.10 中的标准形。最后，由于 $Q_{\mathcal{H}} = G_{\mathcal{H}}/\bigoplus \Omega_n n\in\mathbb{N}$

具有有限群 Ω_n，因此可知 $Q_{\mathcal{H}}$ 满足 LEF 性质。 □

10. An amenable-(τ) Grothendieck pair

本节将重新探讨一个经典问题：如果知道一个有限生成、剩余有限群 G 的有限剩余完备化 G，那么我们能对它作何种推断？让我们针对群论中两个相当对立的性质来研究这一问题：可 amen 性和性质（τ）。为了强调这些概念的对立性，我们用凯莱图中子集的边界来定义它们。为此，记 $\partial_{\Gamma(G,S)}(F) := (F \cdot S \cup F \cdot S^{-1}) \setminus F$，其中 S、F是群 G的两个子集。以下刻画仅适用于有限生成、剩余有限群。可 amen 性的许多等价定义以及

性质（τ）的许多等价定义（同样适用于更一般的情形）可分别在 [18],和 [47]中找到。

定义 10.1。设 G 是一个有限生成的剩余有限群， S 是 G 的有限生成集。那么 G

(1) 若对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个非空有限子集 $F \subseteq G$，使得对 G 中的每个有限指数正规子群 N ，.....，则称其为可 amenable。(2) 若存在某个 $\varepsilon > 0$ ，使得.....，则称其具有性质 (T)

$$|\partial_{\Gamma(G/N,S)}(F)| \leq \varepsilon \cdot |F|$$

$$|\partial_{\Gamma(G/N,S)}(F)| \geq \varepsilon \cdot |F|$$

对于 G 中的每个有限指数正规子群 N，以及每个大小为 $|F| \leq \frac{|G/N|}{2}$ 的非空子集 $F \subseteq G/N$ ，.....。

回顾一下，若有限生成的剩余有限群对 (G, H) 满足 G 是 H 的真子群，且包含映射 $\iota\colon G \to H$ $\widehat{\ }$ 诱导出同构 $\widehat{\iota}\colon G \to H$，则称其为格罗滕迪克对。结合 Ershov、Jaikin-Zapirain 和 Kassabov 关于满足性质 (τ) 的群的强有力结果 [25] ，以及迄今所见的群 $G_{\mathcal{S}}$ 的性质，我们现在可以轻松推出以下结论。

定理 10.2. 存在一个格罗滕迪克对 (G, H)，其中包含一个可和群 G 和一个具有性质 (τ) 的群 H 。

证明. 由定理 3.11 和命题 9.11，我们知道 $G := G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 是 $P_{\mathcal{S}} = \prod \Omega_\ell \cong \prod$交错群$(d^\ell)$的一个 2-生成可 amenable 框架。根据 [42, 第3] 页，$\ell \in \mathbb{N}$还存在一个具有性质(τ)的 $P_{\mathcal{S}}$ 框架 K 。该陈述的详细证明见 [25, 第9节6], ，其中在构造中必须将 $\mathbb{N}_{\geq 5}$ 替换为 $\{ d^k \mid k \in \mathbb{N} \}$。另请参见 [41] ，那里给出了略有不同的证明。根据引理 5.3，由两个子群 G、$K \leq P$ 生成的群H 也是 P 的一个框架，这$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$意味着包含映射 $\iota\colon G \to H$ 诱导出一个同构 $\widehat{\iota}\colon G \to H$。还需注意， H 具有性质 (τ)。为此，我们使用通过具有有限像的表示来刻画性质 (τ)的方法。更确切地说，如果平凡表示在所有通过有限商群分解的表示空间中是孤立的，则 H 具有性质 (τ)，见 [47, 定义 1.11]。由此可以直接推出， H 从 K 继承了性质 (τ)，因为二者具有相同的通过有限商群分解的表示，并且向具有 (τ)的群中添加生成元只会使平凡表示更加孤立。□

注记10.3. 定理 10.2 的证明可用于说明，每个可数剩余有限群都嵌入到一个具有性质 (τ) 的有限生成群中。为此，只需将该证明中的群 $G = G_{\mathcal{A}_{d,\ r}}$ 替换为第9节中的群 $G_{\mathcal{H}}$ ，并使用 Wilson [73, 定理A] 的结果：每个可数剩余有限群都嵌入到一个有限生成剩余有限群中。因此，除显而易见的障碍外，群嵌入具有性质 (τ) 的有限生成群并无其他障碍。

一个与定理 10.2 相关的问题可追溯至 Lubotzky 和 Weiss 的猜想 5：他们猜想，每个包含有限生成稠密子群 G、H 的紧群 C 都是有限群，其中 G 是可 amenable 的，而 H 具有性质 (T)。Ershov 和 Jaikin-Zapirain 在第 6] 节中否定了这一猜想，他们考察的是群 $C = \prod$ 特殊线性群 ${}_{3n}(\mathbb{F}_p)$，其中 $p > 2$ 是素数。更确切地说，他们证明了 C 的一个稠密子群具有性质 (T)；Kassabov 此前已在定理 10] 中证明该子群具有性质 (τ)。另一方面，

Lubotzky 和 Weiss 证明了 C 存在一个稠密可解子群。关于以上这些，以下问题自然浮现。

问题 10.4. 是否存在一个格罗滕迪克对（G, H），其中 G 是可 amenable 的，且 H 具有性质 (T)?

关于定理 10.2 的证明，如果

1) there is a frame K for $\prod_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{Alt}(d^{\ell})$ that has property (T), and

2) 性质 (T) 是一种所谓的弱向上有限拓扑性质，这意味着对于每一个格罗滕迪克对（K, H），若 K 具有性质 (T)，则 H 也具有性质 (T)。

据我们所知，目前这些步骤均无法得到验证。不过，关于第一步，已有研究发现，交错群的乘积中包含具有性质 (T) 的稠密子群。参见 [17]，了解 Caprace 和 Kassabov 给出的最新例子。关于第二步，Cotton-Barratt [19, 定理 1.3] 已证明，若该问题有肯定解，则意味着存在非剩余有限的双曲群。Aka 在不限制为格罗滕迪克对的情况下，通过 [2, 定理 1] 证明了性质 (T) 并非有限拓扑性质。

11. Questions

我们预计望远镜的例子有很多。除了本文给出的例子，我们还知道一些辛群的望远镜。我们认为，若能有更多望远镜可供使用，将会很有裨益，因此提出以下

问题 11.1。构造李型群的望远镜，使其产生 2-生成框架。

据作者所知，定理 9.13 和定理 9.14 给出了首批既剩余有限又可 amenable，且具有无限单商群的群的例子。不过，Thom 的以下问题 [34] 表明这类群或许为数众多。

问题 11.2（Thom）。每个群是否都是某个剩余有限群对某个正规可解子群取商所得的商群?

事实上，如果问题 11.2 的答案是肯定的，那么每个有限生成的单可和群都存在一个剩余有限覆盖，而且该覆盖可以选为有限生成。

受分支群域中取得的一些突破及其与我们的 B-望远镜 $\mathcal{A}(r, d)$ 相似性的启发，我们不禁提出以下内容

问题 11.3. 是否存在一个望远镜 $\mathcal{S}$，使得 $G_{\mathcal{S}}$ 或 $Q_{\mathcal{S}}$ 是有限生成的无限群，并且具有

(1) 次指数增长，(2) 非一致指数增长，(3) 有限 L-表示，关于这一概念的定义，参见 [5]。

从分支群理论来看，下面的问题可能更容易。

问题 11.4。构造一个望远镜 $\mathcal{S}$，使其关联群 $G_{\mathcal{S}}$ 是一个有限生成的无限挠群。

根据 Brieussel [16, 定理 3.3], 的一项重要结果，一些经典的分支群例子拥有一个 Følner序列，而且可以用一种出人意料的简洁方式来描述。我们想知道，$G_{\mathcal{A}(d,r)}$ 或 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$是否也存在同样简洁的序列。

问题11.5。找出 $G_{\mathcal{A}(d,r)}$的Følner序列的一个简单描述，从而找出单群 $Q_{\mathcal{A}(d,r)}$的Følner序列。

关于缺乏单可解群的例子，以及事实上并非通过其在康托尔集上的作用来定义的非初等可和群，提出以下问题颇为引人入胜

问题 11.6。找出一些新的望远镜类，其关联群是可 amenable 的，但不是初等可 amenable 的。例如，群 $G_{\mathcal{SL}_d(\mathbb{F}_q)}$ 很容易看出不是初等可 amenable 的。它是可 amenable 的吗?

References

1. Mikl´os Ab´ert, *Representing graphs by the non-commuting relation*, 《Debrecen 数学出版物》69（2006 2273978 2 3，261 269），第 – 期。MR 。Menny Aka, *Profinite completions and Kazhdan's property (T)*, 《群、几何与动力学》6（2012），第 2 期，221–229。MR 2914858 3. Reinhold Baer, *Die kompositionsreihe der gruppe aller eineindeutigen abbildungen einer un-endlichen menge auf sich*, 《Studia Mathematica》1（1934），第 5 期，15–17。4. Stefan Banach 和 Alfred Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* **6** 1924 1, 244 277 , 《Fundamenta Mathematicae》（），第 – 期。5. Laurent Bartholdi, *Endomorphic presentations of branch groups*, 《代数杂志》268（2003），第 2 期，419–443。6. Hyman Bass、Alexander Lubotzky、Andy R. Magid 和 Shahar Mozes, *The proalgebraic completion of rigid groups*, 《几何与组合群论会议论文集》第二部分（海法，2000 1950883 7 95，2002，1958），第 卷，第 – 页。MR 。Gilbert Baumslag, *Residually finite groups with the same finite images*, 《Compositio Mathematica》29（1974 357615 8 249 252），–。MR 。James Belk 和 Matthew C. B. Zaremsky, *Twisted Brin-Thompson groups*, 《几何与拓扑》26（2022 4466647 9 3，1189 1223），第 – 期。MR 。Ernest Best 和 Olga Taussky, *A class of groups*, 《Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A》47（1942），55–62。MR 0006539 10. Robert Bieri、Yves Cornulier、Luc Guyot 和 Ralph Strebel, *Infinite presentability of groups and condensation* **13** 2014 4, 811 848 , 《J. Inst. Math. Jussieu》（），第 – 期。MR 3249690 11. Khalid Bou-Rabee 和 Brandon Seward, *Arbitrarily large residual finiteness growth*, 《J. Reine Angew. Math.》710 3437564 12 2016 199 204（），–。MR 。Ben Brewster 和 Surinder Sehgal, *The Frattini argument and t-groups*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》101 902535 13 1987 2，239 245（），第 – 期。MR 。M. R. Bridson、D. B. McReynolds、A. W. Reid 和 R. Spitler, *Absolute profinite rigidity and hyperbolic geometry* 2 **192** 2020 3, 679 719 , 《数学年刊》（）（），第 – 期。MR 4172619 14. Martin R. Bridson, *Direct factors of profinite completions and decidability*, 《群论杂志》12 2488145 15 2009 1，151 156（），第 – 期。MR 。Martin R. Bridson 和 Fritz J. Grunewald, *Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups*, 《数学年刊》（2）160（2004），第 1 期，359–373。MR 2119723 16. J´er´emie Brieussel, *Folner sets of alternate directed groups*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》64（2014 3330165 17 3，1109 1130），第 – 期。MR 。Pierre-Emmanuel Caprace 和 Martin Kassabov, *Tame automorphism groups of polynomial rings with property (t) and infinitely many alternating group quotients*, arXiv 预印本 arXiv:2210.00730（2022）。18. Tullio Ceccherini-Silberstein 和 Michel Coornaert, *Cellular automata and groups*, 《数学中的 Springer 专著》，Springer-Verlag，柏林，2010。MR 2683112 19. Owen Cotton-Barratt, *Detecting ends of residually finite groups in profinite completions*, 《剑桥哲学学会数学学报》155 3118408 20 2013 3，379 389（），第 – 期。MR 。Arman Darbinyan 和 Markus Steenbock, *Embeddings into left-orderable simple groups*, 《伦敦数学学会杂志》（2 4407115 21 105 2022 3，2011 2045）（），第 – 期。MR 。Ulderico Dardano 和 Fausto De Mari, *Groups in which each subnormal subgroup is commen-surable with some normal subgroup*, 《群论杂志》24（2021），第 4 期，819–834。MR 4279127

22. Mahlon M. Day, *Means on semigroups and groups*, 《美国数学学会通报》55（1949），第 11 期，1054–1055。23. John D. Dixon、Edward W. Formanek、John C. Poland 和 Luis Ribes, *Profinite completions and isomorphic finite quotients* **23** 1982 3, 227 231 , 《纯粹与应用代数杂志》（），第 – 期。MR 644274 24. Mikhail Ershov 和 Andrei Jaikin-Zapirain, *Property (T) for noncommutative universal lattices* **179** 2010 347 , 《数学发明》（），第 2 期，303 2570119 25 – 。MR 。Mikhail Ershov、Andrei Jaikin-Zapirain 和 Martin Kassabov, *Property T for groups graded* （） ，《美国数学学会回忆录》（），第 v 期。MR *by root systems* **249** 2017 1186, +135 3724373 26 ¨ *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist* 。Wolfgang Gaschutz, ，《J. Reine Angew. Math.》198 91277 27 1957 87 92（），– 。MR 。Thierry Giordano、Ian F. Putnam 和 Christian F. Skau, *Full groups of Cantor minimal systems* **111** 1999 285 320 1710743 , 《以色列数学杂志》（），– 。MR 。Gili Golan、28 Kate Juschenko、Roman Kogan、Tatiana Nagnibeda 和 Volodymyr Nekra- shevych, *Aimpl: Amenability of discrete groups*, *available at*, 未发表演讲（2016）。29. Daniel Goldstein 和 Robert M. Guralnick, *The direct product theorem for profinite groups*, 《群论杂志》9 2226615 30 2006 3, 317 322（），第 – 期。MR 。A. P. Gorjuˇskin, *Imbedding of countable groups in 2-generator simple groups*, 《数学札记》16 382456 31 1974 231 235（） MR 。Alexander Grothendieck, *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets* **2** 1970 375 396 , 《Manuscripta Mathematica》（），– 。MR 262386 32. Alexander J. Hahn 和 O. Timothy O'Meara, *The classical groups and K-theory*, 《数学科学基础丛书》 [数学科学基本原理], 第 291 卷，Springer-Verlag，柏林，1989 年，J. Dieudonn´e 作序。MR 1007302 33. Derek F. Holt、Bettina Eick 和 Eamonn A. O'Brien, *Handbook of computational grouptheory*, 《离散数学及其应用》（博卡拉顿），Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2005 2129747 34。MR 。Andreas Thom（https://mathoverflow.net/users/8176/andreas thom），*Quotientsof residually finite groups by amenable normal subgroups*, MathOverflow，网址：https://mathoverflow.net/q/40991（版本：2010-10-04）。35. Kate Juschenko, *Amenability of discrete groups by examples*, 《数学调查与专著》，第 266 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛， [2022] ©2022。MR 4454031 36. Kate Juschenko 和 Nicolas Monod, *Cantor systems piecewise translations and simple amenable groups* 2 **178** 2013 2, 775 787 , , 《数学年刊》（）（），第 – 期。MR 3071509 37. Kate Juschenko、Volodymyr Nekrashevych 和 Mikael de la Salle, *Extensions of amenable groups by recurrent groupoids* **206** 2016 3, 837 867 3573974 , 《数学发明》（），38 第 – 期。MR 。Holger Kammeyer 和 Roman Sauer, *S arithmetic spinor groups with the same finite quotients and distinct ℓ^2-cohomology* **14** 2020 3, 857 869 , 《群、几何与动力学》（），第 – 期。MR 4167024 39 170 2007。Martin Kassabov, *Symmetric groups and expander graphs* 2, , 《数学发明》（），327 354 2342639 第 – 期。MR 40.，_____ *Universal lattices and unbounded rank expanders* **170** 2007 2, , 297 326 2342638 《数学发明》（），第 – 期。MR 41.， *Pro-finite properties and property tau*，未发表演讲（2008）。42. Martin Kassabov 和 Nikolay Nikolov, *Cartesian products as profinite completions*, 《国际数学研究通知》（2006 2264720 43 72947，第 17 期），文章编号 。MR 。S. Kionke 和 E. Schesler, *On representations of direct products and the bounded generationproperty of branch groups*, 《数学档案》（2023）。43. Steffen Kionke 和 Eduard Schesler, *Amenability and profinite completions of finitely generated groups* 2106 08742 2021 , arXiv 预印本 arXiv:。（）。44., *Realizing residually finite groups as subgroups of branch groups*, arXiv 预印本 arXiv~~:2212.0~~7165（2022）。45. A. Lubotzky 和 B. Weiss, *Groups and expanders*, 《扩展图》（新泽西州普林斯顿，1992），DIMACS 离散数学、理论计算机科学丛书，第 10 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，1993，1235570 46 47 95 109 页。MR 。Alex Lubotzky 和 Andrzej Zuk, *On property (τ)* **52** 2005 6, , 《美国数学学会会刊》626 627 （），第 – 期。47. Alexander Lubotzky, *Finiteness properties and profinite completions*, 《伦敦数学学会通报》 **46** 2014 1, 103 110 3161766 （），第 – 期。MR 。Alexander Lubotzky、Laszlo Pyber 和 Aner 49 Shalev, *Discrete groups of slow subgroup growth*, 《以色列数学杂志》96 1433697 50 1996 399 418（），第 B 部分，– 。MR 。Alexander Lubotzky 和 Robert J. Zimmer, *Variants of Kazhdan's property for subgroups of semisimple groups* **66** 1989 1 3, 289 299 1017168 , 《以色列数学杂志》（），第 - – 期。MR

51. W. L¨uck, *L^2-invariants: theory and applications to geometry and K-theory*, 《数学及其边缘领域丛书》，第 44, 2002 1926649 卷，Springer-Verlag，柏林。MR。Nicolas Matte Bon, *Full groups of bounded automaton groups*, 《分形几何杂志》（2017），第4期，425–458。MR 3735459 53. Hiroki Matui, *Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems*, 《国际数学杂志》17 2205435 54 2006 2，231 251（），第–期。MR。Jitsuro Nagura, *On the interval containing at least one prime number*, 《日本科学院院刊》28（1952 50615 55 177 181），–。MR。Bernhard Hermann Neumann, *Some remarks on infinite groups*, 《伦敦数学学会杂志》1（1937），第2期，120–127。56. J v Neumann, *Zur allgemeinen theorie des masses*, 《基础数学》13（1929），第1期，73–116。57. Peter M. Neumann, *Some questions of Edjvet and Pride about infinite groups*, 《伊利诺伊数学杂志》30 840129 58 1986 2, 301 316（），第–期。MR。Nikolay Nikolov 和 Dan Segal, *Direct products and profinite completions*, 《群论杂志》10 2364826 59 2007 6，789 793（），第–期。MR。G. A. Noskov, *The number of generators of a group*, 《数学札记》33（1983），第4期，489–498。MR 704437 60. Denis Osin, *Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems*, 《数学年刊》（2 **172** 2010 1, 1 39 2680416 ）（），第–期。MR。Marco Antonio Pellegrini, *The* （2, 3）*-generation of the special linear groups over finite fields*, 《澳大利亚数学学会通报》95 3592543 62 2017 1，48 53（），第–期。MR。V. P. Platonov 和 O. I. Tavgen, *On the Grothendieck problem of profinite completions of groups* **288** 1986 5, 1054 1058 852649 , 《苏联科学院学报》（），第–期。MR。Laszlo Pyber, *Old groups can learn new tricks*, 《群、组合学与几何》（达勒姆，2001 1994970 64 2003，243 255），World Sci. Publ.，River Edge，NJ，第–页。MR。, *Groups of intermediate subgroup growth and a problem of Grothendieck*, 《杜克数学杂志》121 2031168 65 2004 1，169 188（），第–期。MR。Derek J. S. Robinson, *Groups in which normality is a transitive relation*, 《剑桥哲学学会会刊》**60** 1964 21 38 159885 （），–。MR。, , 第二版，《数学研究生教材》，第80卷，Springer-Verlag，纽约，1996 1357169 67。MR。Paul E. Schupp, *A course in the theory of groups* *Embeddings into simple groups* 2 **13** 1976 1, , 《伦敦数学会杂志》（）（），第–期。MR 68. Dan Segal, *Embeddings into simple groups* 90 94 401932 *The finite images of finitely generated groups*, 《伦敦数学学会会刊》（3）82（2001 1816690 69 3，597 613），第–期。MR。, *Some aspects of profinite group theory*, 《几何群论论文集》，《Ramanujan 数学学会讲义丛书》，第9卷，Ramanujan 数学学会，迈索尔，2009年，第27–60页。MR 2605354 70. Kerope Tchakerian, （2, 3）*-generation of the groups* $\mathrm{PSL}_5(q)$，《索非亚大学数学与信息学系年刊》97 2191873 71 2005 105 108（），–。MR。Stanton M. Trott, *A pair of generators for the unimodular group*, 《加拿大数学通报》5（1962），245–252。MR 141716 72. A. M. Vershik 和 E. I. Gordon, *Groups that are locally embeddable in the class of finite groups* **9** 1997 1, 71 97 1458419 , 《代数与分析》（），第–期。MR。J 73 ohn S. Wilson, *Embedding theorems for residually finite groups* **174** 1980 2, , 《数学杂志》149 157 592912 （），第–期。MR 74. Daniel T. Wise, *A residually finite version of Rips's construction*, 《伦敦数学学会通报》35（2003），第1期，23–29。MR 1934427

FernUniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, 58084 Hagen
Email address: steffen.kionke@fernuni-hagen.de*Email address*: eduard.schesler@fernuni-hagen.de