纽结外部中两次穿孔环面数量的一个上界

ROMÁ ´N ARANDA、ENRIQUE RAMIREZ-LOSADA 和 JESUS RODRIGUEZ-VIORAT O

arXiv:2304.09312v1 [math.GT] 18 Apr 2023

ABSTRACT. 本文延续了 Motegi 关于双曲纽结补空间中非同位的本质 n 穿孔环面数量普适上界的研究计划。对于 $n = 1$，Valdez-S´anchez 证明，双曲纽结外部中非同位的 Seifert 环面至多有五个。本文研究情形 $n = 2$。我们证明，每个双曲纽结的补空间中，嵌套的本质双孔环面至多有六个，且彼此非同位。

1. INTRODUCTION

W. Jaco、P. Shalen 和 K. Johannson 的一项著名结果表明，每个 Haken 三维流形都可以沿本质环面作唯一分解 [JS79, Joh79]。所得的各个块是 Seifert 纤维化空间及其他简单的 3-流形。K. Motegi 提出，沿双曲纽结在 S^3 上作 Dehn 手术所得的 3-流形中，JSJ 块的数量是否有界。鉴于此，我们希望为双曲结补空间中两两不相交的本质穿孔环面数量找到一个普适上界。在 [Tsu03], Y. Tsutsumi 对 Motegi 的问题给出了部分答案，证明每个双曲纽结的补空间中至多有七个非同位且互不相交的亏格一 Seifert 曲面。在 [VS19], L. Valdez-S´anchez 找到了最佳下界，证明此类单次穿孔环面至多有五个。本文首次为双曲纽结补空间中两次穿孔环面的数量给出一个普适上界。

定理 1. *K 是 S^3中的一个双曲纽结。其补空间中至多有六个两两不相交、非同痕、嵌套的嵌入的两次穿孔环面，且斜率为整数斜率。*

我们认为这个上界并不紧。最近，M. Eudave-Mu˜noz 和 M. Teragaito 构造了无穷多个双曲纽结族，每个纽结的外部都有四个非同痕的两次穿孔环面（个人通信）。

猜想 2. *S^3中的任意双曲纽结，其补空间中至多有四个两两不相交、非同痕、嵌套的嵌入的两次穿孔环面，且斜率为整数斜率。*

我们的证明建立在 Tsutsumi 和 Valdez-S´ánchez 关于亏格二把手体中不可压缩曲面的研究之上。在此过程中，我们还发现了一些技术性引理，或许

对求解缠结方程的人有所帮助（见命题 12、13 和 14）。基于这样一个事实：双曲结补空间中的二重曲面 S^3 会在其中一侧界定把手体（详见 [Tsu03，第 3] 节），定理 1 可直接由以下结果推出。

定理 3. 设 V 是一个亏格二把手体，且 $J = J_1 \cup J_2$ 是一对本质的简单闭曲线，它将一个环带与 ∂V分离。那么， J 至多围成三个两两不相交、互不平行、不可压缩、分离的两次穿孔环面，位于 V中。

2. Preliminaries

本节回顾 [VS19] 和 [Tsu03] 的一些结果，这些结果将在本文后文中使用。我们先在以下定义中介绍一些基本术语。

定义 4. 设 γ 和 γ' 是 ∂H中的简单闭曲线。

- 对于 γ，伴随环带 是一个环带 A，它适当嵌入于 H 中，且 ∂A在 ∂H 中围成一个环带 B，其中 γ 位于 B的核内。
- 若存在某个 $\alpha \in \pi_1(H)$ 使得 $[\gamma] = \alpha^n$，且 $n \geq 2$，则称 γ 为幂圆 。
- 若曲线 γ 是 $\pi_1(H)$的一组基的一部分，则称其为本原曲线 。
- 若 $\{\gamma, \gamma'\}$ 代表某个基点处 $\pi_1(H, *)$ 的一组基，则称它们为基本圆。

以下结果出自 [VS19，命题 3.3]；我们在此摘录所需部分。

命题 5 （L. Valdez, [VS19]）。设 H 是一个亏格二把手体， $\gamma \subset \partial H$ 是 H中一条非平凡曲线。当且仅当 γ 是 H中的本原曲线或幂圆时，曲面 $\partial H - \gamma$ 在 H 中可压缩。

命题 6 （L. Valdez, [VS19]）。设 H 是一个亏格二把手体， $\gamma \subset \partial H$ 是 H中一条非平凡曲线。那么，当且仅当 γ 是 H中的幂圆时， γ 在 H 中有一个伴随环带。在这种情况下，存在唯一的非分离压缩圆盘 D，它对应于 H，且 ∂D 与 γ不相交。

命题 7 (L. Valdez, 引理 3.5(2) [VS19])。设 H 为一个亏格二把手体， γ、$\gamma' \subset \partial H$ 为一对不相交圆。设 $M = V \cup_\gamma H \cup_{\gamma'} V'$ 为一个流形，通过沿着 γ 和 γ' 的不相交环带邻域 $A = \partial H \cap \partial V$ 和 $A' = \partial H \cap \partial V'$，分别将实心环面 V、 V' 粘合到 H 上而得到，其中每个环带 A、 A' 分别至少绕 V、 V' 两周。那么，当且仅当 γ 和 γ' 是 H 中的基本圆时， M 是一个亏格二把手体。

2.1. 简单对。 本节将讨论关于如下各对 (H, J) 的一些结果：其中 H 是一个亏格二把手体, $J \subset \partial H$ 是一个本质分离圆。我们称一对 (H, J) 为

(1) 平凡的，如果它与这对空间同胚（$T \times I$， $\partial T \times \{0\}$）

(2) 极小，如果在 H 中任何带有 $\partial T = J$ 的一次穿孔环面 T 都相对于J与 ∂H 平行；特别地，任何平凡对都是极小的。

现在我们定义一类由 [Tsu03] 引入的特殊族对 (H, J)。

定义 8。 类型为 (p_0, p_1) 的一个对是按如下方式构造的元组 (H, γ) :

- 取一个一次穿孔环面以及 (a_0, a_1) 一对构成 $\pi_1(T)$的基的简单闭曲线。
- 取 (V_0, c_0) 和 (V_1, c_1) 两个带框架的实心环面。其中， c_i 是 ∂V_i 上的一条曲线，对于 $i = 0$，它绕 V_i 的核转p_i 圈，1。

我们通过将 $c_i \subset \partial V_i$ 的一个正规邻域与 $a_i \times \{i\} \subset \partial(T \times [0, 1])$ 之一进行识别，构造出作为结果的空间 H ，其中 $i = 01$。我们取 $\gamma = \partial T \times \{1/2\} \subset H$。在 [Tsu03]中证明了 H 是一个二柄体。

在上述定义中，注意到一个类型为 $(1, 1)$ 的对是一个平凡对，而一个类型为 $(1, p)$ 的对同胚于沿 $T \times \{1\}$ 上的一条本原曲线粘合一个实心环面。

对 $(1, p)$ 自然地作为具有多个一次穿孔环面的对 (H, J) 的一部分出现，如下述命题所述。

命题 9 (L. Valdez，Rem 3.8 和 Cor 3.10，见 [VS19])。 设 (H, J) 是一个对，其中 H是一个亏格二把手体， $J \subset \partial H$ 是一条将 ∂H 分隔为两个环面 T_1、 T_2 的曲线。假设 T_1'、 T_2' 是边界位于 J 中的不可压缩环面，将 H划分为如下的非积区域

$$H = H_1 \cup_{T_1'} \cup H_0 \cup_{T_2'} H_2.$$

那么，对于某些 p_1、 $p_2 > 1$，(H_1, J) 和 (H_2, J) 分别是类型为 $(1, p_1)$ 和 $(1, p_2)$ 的对。

引理 10。 设(H, γ) 是一对类型为$(1, p)$ 且满足 $p > 1$ 的对象。设 T_0 和 T_1 是 $\partial H - \gamma$ 中的带一个穿孔的环面， $\rho_i \subset T_i$ 是一条非分离简单闭曲线。若 ρ_0 和 ρ_1 在 H 中共同围成一个嵌入环带，则 ρ_i 是 H 中的幂圆。

证明。 我们将证明，若 ρ_1 和 ρ_0 在 H 中自由同伦，则 ρ_1 是 H 中的幂圆。

使用上述记号，将 T_0 识别为 $T \times \{0\}$ ，将 T_1 识别为 $(T \times \{1\} - \eta(c \times \{1\})) \cup (\partial V - \eta(\alpha))$。设 $* \in \partial H$ 是 $\eta(c \times \{1\}) = \eta(\alpha)$ 的一个边界分支上的点。我们将 $c_1 = c \times \{1\}$ 和 α 视为以 $*$为基点的环路。设 $b \subset T$ 是与 c 对偶的简单闭曲线。我们可以选取 b ，使得 $(b \times \{1\}) \cap (c \times \{1\}) = \{*\}$ ，且 $b_1 = b \times \{1\}$ 以 $*$为基点。这样，$\pi_1(T \times [0, 1], *) = \pi_1(T_0, *) = \langle b_1, c_1 \rangle$。另一方面，设 $\delta \subset \partial V$ 是一条在 $*$处与 α 相交的简单闭曲线。设 b_2 是 T_1 中以 $*$ 为基点的环路：沿着 b_1 走到 $\eta(c_1)$ 的另一个边界，然后沿着 δ 走到 $*$。根据构造， b_2 在 T_1 中与 α 对偶，因此 $\pi_1(T_1, *) = \langle \alpha, b_2 \rangle$。

设 $\lambda \subset V$ 是以 $*$ 为基点的 V 的经线。使用这一记号，$\delta = \lambda^r$、$\alpha = \lambda^p$ 对某个 $r \neq 0$ 成立。特别地，r 和 p 互素。将 F_i 嵌入 H 记为 ι_i。根据构造，以下方程在 $\pi_1(H, *)$ 中成立：$\iota_0^*(c_1) = \lambda^p$，$\iota_0^*(b_1) = b_1$，$\iota_1^*(\alpha) = \lambda^p$，以及 $\iota_1^*(b_2) = b_1\lambda^r$。根据塞弗特-范坎彭定理，我们得到 $\pi_1(H, *) = \langle b_1, \lambda\rangle$。

我们现在可以讨论引理的证明。选取表示$\rho_i \in \pi_1(T_i, *)$的循环约化字如下：$\rho_0 = c_1^{n_1}b_1^{m_1}c_1^{n_2}b_1^{m_2}\cdots c_1^{n_k}b_1^{m_k}$, $\rho_1 = \alpha^{x_1}b_2{}^{y_1}\alpha^{x_2}b_2{}^{y_2}\cdots\alpha^{x_l}b_2{}^{y_l}$。$\rho_i$ 是非分离简单闭曲线这一事实意味着 ρ_i 在 $\pi_1(T_i, *)$中是本原的。根据[OZ81，对于所有 i, j，有 Pig06], $m_im_j > 0$ 和 $n_in_j > 0$（分别有 $x_ix_j > 0$ 和 $y_iy_j > 0$）。若 ρ_0 和 ρ_1在 H中自由同伦，则对于 $\{b_1, \lambda\}$中的某个字 ω，有 $\iota_0^*(\rho_0) = \omega\iota_1^*(\rho_1)\omega^{-1}$。特别是，

$$\lambda^{pn_1}b_1^{m_1}\lambda^{pn_2}b_1^{m_2}\cdots\lambda^{pn_k}b_1^{m_k} = \omega\lambda^{px_1}(b_1\lambda^r)^{y_1}\lambda^{px_2}(b_1\lambda^r)^{y_2}\cdots\lambda^{px_l}(b_1\lambda^r)^{y_l}\omega^{-1}.$$

回顾一下，ρ_0 和 ρ_1 中的词均为循环约化的。假设 $y_j > 0$。由上面的方程可知，如果存在某个 $y_j > 1$，那么将存在满足 $\lambda^r = \lambda^{pn_i}$的 i，这与 $\gcd(p, r) = 1$的事实矛盾。于是，对于所有 j，都有 $y_j = 1$。在此情形下，对于某个 i，j，$\lambda^{r+px_j} = \lambda^{pn_i}$，这与 $\gcd(p, r) = 1$、$p > 1$ 和 $r \neq 0$的事实矛盾。综上，对于所有 j，都有$y_j = 0$，因此 $\rho_1 = \lambda^{px}$ 是 H中的一条幂曲线。□

2.2. 2-弦缠结。 一个（2-弦）缠结是一个二元组 (B, T)，其中 B是一个三维球，而 T是 B中一对互不相交的适当嵌入的弧。如果 T 与 ∂B中的嵌入弧（保持 ∂T不变）同痕，则称该缠结为非缠结的或有理的。如果一个缠结不是有理的，并且任意与 T 横截相交于两点的二维球面都围成一个球，其中包含T的一条无结跨越子弧，则称该缠结为素缠结。若将每个缠结的边界固定为点集 $\{NE, NW, SW, SE\}$，则可以通过将 T_1 垂直堆叠在 T_2上方来“相乘”两个缠结 (B, T_1) 和 (B, T_2)；将所得缠结记为 $(B, T_1 * T_2)$。缠结的分子闭包记为 $N(T)$，它是通过用水平弧连接 T 的北端点（分别为南端点）而得到的链环（或纽结）。如需更深入地了解缠结演算，请参阅 [KL04]。

引理 11 （引理 2，出自 [Lic81]）。 设（A, t）是一个素缠结或有理缠结（由两条弦组成）。设 B 是 A 内部的一个三维球，它与 t的每个分支都交于一个区间。设 u 是 B 中的两条弧，使得（B, u）是一个素缠结，且 $\partial u = B \cap t$。令 t'表示这两条弧（$t -$ （$t \cap B$））$\cup\, u$；则（A, t'）是一个素缠结。

命题 12。 设（B, T）是一个有理缠结，满足 $T = T_1 * T_2$，则存在某个 T_i，使其为形如 $1/n$的有理缠结。

证明。 注意到，T_1 和 T_2 都是局部无结的，因为 T 是一个有理缠结。因此，对于 $i = 1$，2，T_i 要么是有理缠结，要么是素缠结。假设其中一个是素缠结，不妨设为 T_1，我们可以用平凡缠结 S 替换 T_1，从而得到一个与 T_2同痕的缠结。利用引理 11 以及$A' = B$和 $A = S * T_2 = T_2$（后者要么是素缠结，要么是有理缠结），我们得出 B 必定是素缠结，这与 B 是有理缠结这一事实矛盾。因此，这两个缠结都必定是有理缠结。

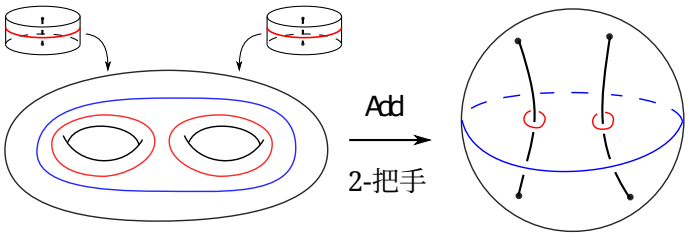

FIGURE 1. 沿一对基曲线添加两个2-把手，会形成一个二弦缠结

现在，通过取分子闭包，我们得到 $N(T) = N(T_1)\#N(T_2)$。但我们知道， $N(T)$是一个素纽结 [Sch84],，因此 $N(T_1)$或 $N(T_2)$是一个平凡纽结。可是，使 $N([p/q])$成为平凡纽结的有理缠结 p/q 只有缠结 $\pm 1/n$。□

命题13。 设 H 为一个亏格二把手体， $J = c_1 \cup c_2 \cup c_3$ 为将 ∂H 分隔成两个不可压缩三裤结构 S 和 S_0的*1*-子流形。若 c_1 和 c_2 是 H中的基本圆，则任何张成 J 的不可压缩裤子曲面 $K \subset H$ ，都与 S 或 S_0平行。

证明。我们将 H视为一个平凡2-弦缠结（B^3， T）的补空间。沿 c_1 和 c_2给 H 添加2-把手即可看出这一点：所得3-流形是一个球 B^3 ，而这些2-把手的余核就是 T的弦。我们可以如图1所示描绘（B^3， T）；子午曲线（斜率0）对应于 J的曲线 c_3 ，且每条弦的子午线都与 c_1 和 c_2同痕。 ∂中的顶部三孔圆盘（$B^3 - \eta$（T））对应于 S_0，底部的则对应于 S。此外，任何其他裤子曲面（K， ∂K） $\subset$（H， J）都对应于 B^3中的一个圆盘，其 ∂斜率为0，且与每条弦恰好相交一次。特别地，每个 K 都会给出 T 分解为两个二弦缠结 $T = T_1 * T_2$的乘积。根据命题 12，这两者都是有理的，其中一个（设为 T_2）具有 $1/n$的形式。由此特别可得 K 与S之间的平行性。因此，配对（H， J）是极小的。□

命题14。 设 H 是一个亏格二把手体， c_1和 $c_2 \subset \partial H$ 是一对互不相交的本质简单闭曲线。设 $M = H \cup T$ 是通过沿着 $c_1 \cup c_2$ 的环带邻域 $A_1 \cup A_2 = \partial H \cap \partial T$ 粘合实心环面 T_{c_1, c_2} 而得到的流形，其中每个 A_i 都绕 T 至少两圈。若 M 是一个亏格二把手体，则 $\{c_1, c_2\}$ 是 H 中的基圆。

证明。 设 B_1 和 B_2 是 ∂T 中 $A_1 \cup A_2$ 的互补环带。设 b_1 和 b_2 分别是 B_1 和 B_2 的核心曲线。注意， b_1 和 b_2 位于 ∂M 上，且它们分别有伴随环带 $A_1 \cup A_2 \cup B_2$ 和 $A_1 \cup A_2 \cup B_1$。根据命题 6， b_1 和 b_2 是 π_1（M）中的幂圆。特别地，存在一个针对 ∂M 的非分离压缩圆盘 D ，使得$D \cap b_1 = \emptyset$。取 C 作为 M 中 A_1 的平行副本，其中 $\partial C = b_1 \cup b_2$。

由于 D 中的任何圆在 $\pi_1(M)$ 中都是平凡的，并且 C （与 b_1 和 b_2 平行）的核是 M 中的幂圆，因此 $D \cap C$ 不可能有与该核平行的圆。这意味着

$D \cap C$ 中的圆（闭曲线）在 C 中都是平凡的。通过逐次移除 C 中 $C \cap D$ 的最内层圆，我们可以将 D 与 C 之间的交点减少到只有弧。

由于 D 与环带 C 的两个边界之一不相交，$C \cap D$ 的交弧的两个端点位于 ∂C 的同一分支中。因此，$D \cap C$ 的交弧的端点只位于 ∂C 的一个分支中（在 b_2 上），所以它们与 b_2 平行。然后，每次移除一条最内层的弧，就可以消除 C 与 D 之间的所有交点。综上，我们可以使 D 与 C 不相交。特别地，我们已使 D 与 b_1 和 b_2 不相交。

注意，我们已使 D 与 C 不相交。由于 C 与 A_1 平行，因此也可以使 D 与 A_1 不相交。同样地，我们可以使 A_2 与 D 不相交。

由于我们对 D 所作的所有修改都是同痕，D 仍然是非分离的。于是 $M' = M - \eta(D)$ 是一个实心环面，其中嵌入了 A_1 和 A_2。回想一下，A_1 和 A_2 将一个环面 T 与 M 分离，因此圆盘 D 必须位于 T 中或补空间 H 中。它不可能位于 T 中，因为 A_1 和 A_2 至少绕经线两周，所以在 T 中与 A_i （$i = 1, 2$）不相交的任何适当嵌入的圆盘都与 $B_1 \cup B_2 = T - A_1 \cup A_2$ 平行，因而与 ∂M 平行。因此，D 位于 H 上，而不在 T 上。综上，D 是 H 的一个压缩盘，并且与 A_1 和 A_2 不相交。

那么，根据 D 是否为分离的，$H' = H - \eta(D)$ 是一个或两个实心环面。我们可以排除前一种情况，因为沿两个互不相交的环带粘合两个实心环面的边界，会得到一个具有非连通边界的定向流形，或一个具有连通边界的不可定向流形。

设 T_1' 和 T_2' 是 H' 分解得到的两个实心环面分支，其中 T_i' 是包含环带 A_i 的那个，对 $i = 1, 2$ 成立。这意味着，若沿 $A_1 \cup A_2$ 切开 M'，便得到三个实心环面：T、T_1' 和 T_2'，对 $A_i \subset \partial T_i'$、$i = 1, 2$ 成立。最后，我们将证明：对于 $i = 1, 2$，A_i 环路恰好绕 T_i 的经线一周。

回想一下，M' 也是实心环面，其中有两个不可压缩环带 A_1 和 A_2 适当地嵌入其中。因此，A_1和 A_2与 $\partial M'$是 ∂-平行的。于是，A_i将 M'分割成两个实心环面；其中一个 A_i只沿经线绕行一次；我们将证明该环面就是 T_i'。沿着A_1切开 M'，得到两个部分；其中一个是乘积区域，即 $A_1 \times I$。现在，A_2 不能位于该区域内，否则便意味着 A_2 与 A_1平行，也就是说，M' 内由 A_1 和 A_2 围成的区域 T 是积空间；这与 A_i 沿经线至少绕行两次这一事实矛盾。因此，A_1 的平行区域是 T_1'。同理，由 A_2 切出的平行区域是T_2'。证明至此完成。□

3. Proof of Theorem 3

为方便读者，我们重述该定理。

定理 3。 设 V 是一个亏格二把手体，且设 $J = J_1 \cup J_2$ 是一对将环带与 ∂V 分离的本质简单闭曲线。那么， J 至多界定三个两两不相交、互不平行、不可压缩、分离的双穿孔环面，这些环面位于 V 中。

注意，任何一个这样的曲面都会将 V 切割成一个亏格三把手体 H_1 和一个亏格二把手体 H_0。取最外层曲面后，只需证明 H_0 的定理 3，而不是 V 的定理 3。因此，接下来在不失一般性的情况下，我们假设 $\partial V - J$ 由一个环带 A 和一个不可压缩的 双穿孔环面组成。

设 F 是一个张成 J 且不与 F_0 平行的不可压缩双穿孔环面。注意到 F 必须是边界可压缩的。根据下面的引理， F 必须朝向 F_0 进行边界压缩。

引理 15。 F 不能朝向 A进行 ∂-边界压缩。

证明。 设 D 是 V 中关于 F 的一个边界压缩圆盘，并设 D 与 A 相交。沿 D 对 A 进行边界压缩，得到一个适当嵌入圆盘 A'。注意， $\partial A'$ 是 F 中的一条曲线，将其切割成一个裤子曲面和一个一次穿孔环面。因此， $\partial A'$ 是非平凡的，而 A 是 F 的一个压缩盘。这与 F 的不可压缩性矛盾。□

设 D 是 V 内 F 的一个边界压缩。记 $\beta = D \cap F$ 和 $\alpha = D \cap F_0$ 为 ∂D 中的弧。由于 F 和 F_0 都是不可压缩的，这些弧分别是 F 和 F_0 中的本质弧。从 F 中去除 β 的一个小邻域的内部。我们得到一个曲面 $F' = F - \eta(\beta)$，其边界上有 β 的两个标记的平行副本。现在沿着 β 弧将 D 的两个副本粘到 F' 上。我们将所得曲面记为 $F|_D$（见图 2）。沿 D 的边界压缩在 J 上沿弧 α 诱导出一个手术，其描述如下。取一个闭正规邻域 $\eta(\alpha) = \alpha \times [-1,1] \subset F_0$，令 $J|_\alpha = (J - \eta(\partial\alpha)) \cup \alpha \times \{-1\} \cup \alpha \times \{1\}$ 为沿 α 对 J 的边界压缩（见图 3）。注意， $\partial(F|_D) = J|_\alpha$。

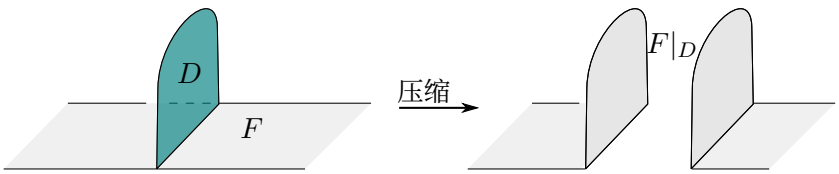

Figure 2. 在右侧 $F|_D$； F 沿 D进行边界压缩后

沿 D 对 F 进行边界压缩后，我们得到一个边界为$J' = J|_\alpha$的曲面 $F' = F|_D$。 J' 中的曲线将 V的边界分成两个曲面，分别为 F_0'和 P。曲面F_0' 可由 F_0 去除 α 的开正规邻域得到，而 P则可通过沿 $\eta(\alpha)$添加一个二维 1-柄，由 A 得到。

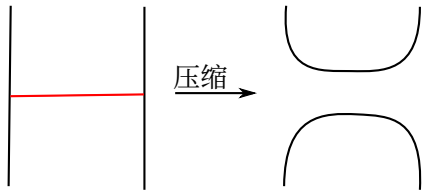

FIGURE 3. 右侧 $J|_\alpha$：沿 α 进行边界压缩后 J

引理16. 曲面 F'、F'_0和 P在 V中是不可压缩的。

证明。由于 F'_0 包含于 F_0 中，且后者不可压缩，因此 F'_0 不可压缩。同理，F' 也不可压缩，因为 F' 变形收缩到 $F-\eta$（β），而后者不可压缩。

根据构造，P 要么是一次穿孔环面，要么是裤子曲面，这取决于 α 是否连接 A 的两个边界。若 P 是裤子曲面，则 V 中任何用于压缩 P 的压缩盘 L 都会使 ∂L 与 ∂P 的某个分支平行，从而使 F'_0 可压缩。因此，若 P 是裤子曲面，则 P 不可压缩。现在考虑 P 是一次穿孔环面的情形，并假设它有一个压缩盘 D。若 ∂D 是 P 中的非分离曲线，则沿 D 压缩 P 会得到一个边界为 $\partial P = J|_\alpha = \partial F'_0$ 的圆盘，这与 F'_0 不可压缩这一事实矛盾。类似的论证表明，∂D 不可能是 P 中的分离曲线。因此，这样的 D 不可能存在，所以 P 不可压缩。□

由于我们构造曲面 F'、F'_0和 P 的方式，它们的欧拉示性数都等于 -1。设 K 是另一张张成 J 的双穿孔曲面。由于曲面 F_0，F 和 K 是“嵌套”的，∂ 压缩盘 D 必须与 K 相交。事实上，K 与 D 恰好在中间相交（沿着 α 和 β 之间的一条弧）。因此，我们可以沿着 D 中包含 α 的半圆盘对 K 进行边界压缩，并像之前那样构造一个不可压缩曲面 K'：其中 $\chi(K') = -1$，且 $\partial K' = \partial P$。

在同胚意义下，双穿孔环面 T 中有三种不同的本质适当嵌入弧。若一条弧将 T 切割成一个单穿孔环面、一张裤子曲面或一个不连通曲面，我们分别称其为 I 型、II 型或 III 型弧。图4展示了每种类型弧的标准模型。一般而言，弧 α 和 β 可以属于任意类型。以下引理将这些可能性减半（见表1）。

引理*17. </style}*弧 α 是 *I* 型，当且仅当 β 是 *I* 型。

证明. 根据构造，α 的端点与 β的端点相同。因此，α 连接 $J = \partial F_0 = \partial F$ 的两个不同分支，当且仅当 β 也如此。由于 I 型是唯一能连接 J的两个不同分支的弧类型，故引理成立。□

引理18. 如果 β 是 *III* 型，那么 α 是 *III* 型。

证明。如果 β 是 III型，那么 F' 是不交并的一个环带 A_1 和一个一次穿孔环面。与 V中的其他不可压缩曲面一样，A_1 在 V中是 ∂-可压缩的。通过一次 ∂-压缩

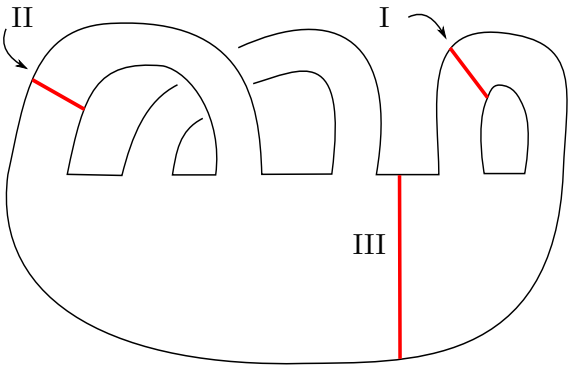

FIGURE 4. 双穿孔环面中一条弧的可能类型

对于 A_1，我们构造一个圆盘 $A_1' \subset V$，其边界位于 F_0'或 P中。由于这两个曲面都是不可压缩的，这意味着 ∂（A_1'）在与 $J' = J|\alpha$不相交的 ∂V中围成一个圆盘 B。由于V是不可约的， A_1' 与 B 共同围成一个三维球，即它们在 V中平行。因此， A_1 与 F_0'或 P中的一个边界平行。但 $\partial A_1 \subset J' = \partial F_0' = \partial P$，所以 F_0'或 P中的一个必须包含一个环带分支。由于 P 始终是连通的，我们得出 F_0' 是环带的，而 α 是 III型。□

Case	α的类型	β的类型
1	I	I
2	II	II
3	III	III
4	III	II

TABLE 1. α 和 β的四种可能情形

现在只剩下有限种关于 α 和 β类型的可能性。接下来我们将分别讨论每一种情形。

情形 1：弧类型 I-I。 在这种情形下， P、 F'和F_0'都是一次穿孔环面。任何一张在 F 与 F_0 之间张成 J 的两次穿孔曲面，都会变成位于 F' 与 F_0'之间的一次穿孔环面 K'。根据引理19，我们知道这样的环面 K'至多有一个。因此，至多有三个不平行的两次穿孔环面： F_0、 F和 K。情形1至此得证。

引理19 (Y.Tsutsumi [Tsu03])。 设 V 是一个亏格二把手体，且J是一条将 ∂V 分离的本质简单闭曲线。那么， J 至多围成四个互不相交、互不平行的一阶不可压缩曲面，这些曲面位于 V 中。

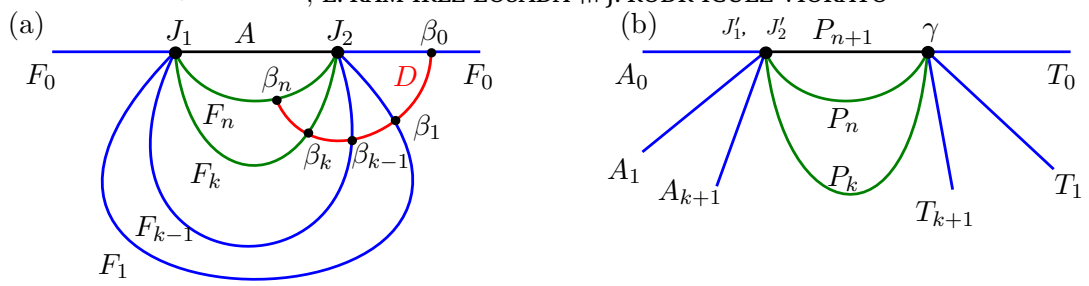

FIGURE 5. 情形 III-X。（a）在沿 D进行 ∂压缩之前和（b）之后。

情形2：弧类型 II-II。 在这种情形下， P、 F_0'和 F' 都同胚于裤子曲面。因此，在 F_0 和 F 之间对一个双穿孔环面K 进行边界压缩所得到的任何其他曲面 K' 都符合要求（见引理17和18）。和之前一样，只需证明 V 中至多还有一个张成 $J' = J|_\alpha = \partial P = \partial F_0' = F'$ 的曲面 K'。引理20将证明这一点，它是引理19的“裤子曲面版本”。引理20的证明将在第4节讨论。

引理20。 设 V 是一个亏格二把手体，且 J 是将∂V 分离成两个裤子曲面的*1*-子流形。则， J 至多界定 V中四个两两不交、非平行、不可压缩的裤子曲面。

情形3和4：弧类型 III-III 和 III-II。 在此情形中， P是一个裤子曲面，而 F_0'是不交并的一个环带和一个一次穿孔环面。记 F_0、 F_1、 F_2、.....、 $F_n = F \subset H$为在 F_0 和 F之间张成 J 的非同痕不可压缩两次穿孔环面。以如下方式为它们编号：对于每个 $0 < i < n$， F_i 位于由 $F_{i-1} \cup F_{i+1}$ 界定的亏格三把手体内（见图5（a））。目标是证明 $n \leq 2$。

如前所述， ∂-压缩盘 D for $F = F_n$ 可选为与每个 F_i相交于一条本质弧 β_i， 且满足 $\partial\beta_i = \partial\alpha$。这样，对每个曲面 F_i进行 ∂-压缩后，根据弧 β_i的标号是 II 还是 III，我们会得到一个裤子曲面 P_i， 或一个环带 A_i 与一个一次穿孔环面T_i的不交并。将 J'中的曲线记为 $J_1' \cup J_2' \cup \gamma$，其中$J_1' = J_1$， 而 $J_2' \cup \gamma$ 是沿着 α对 J_2 进行手术所得的结果。对 γ 进行标记，使得 $\partial T_i = \gamma$且 $\partial A_i = J_1' \cup J_2'$。根据引理18，若 β_{i+1} 标记为 III，则 β_i 也标记为 III。因此，存在 $1 \leq k \leq n+1$， 使得沿着 D进行 ∂-压缩后，我们得到（$n+2$）不可压缩曲面（$T_0 \cup A_0$），（$T_1 \cup A_1$）.....，（$T_{k-1} \cup A_{k-1}$） P_k，.....， P_n，以及嵌入在 H 中的 $P_{n+1} = P$，并按照图5所示的方式排列。

我们首先关注嵌入于 H中的不可压缩环带 $\{A_i : \ 0 \leq i \leq k-1\}$。假设对于某个 $i \neq 0$， A_i 不是 ∂平行的。那么， A_i 是 H中 $J_1' = J_1$ 的伴随环带。根据命题5和命题6， J_1 是 H 中的幂圆，并且 $\partial H - \eta(J_1)$ 是可压缩的。后者与 $F_0 = \partial H - \eta(J_1)$ 不可压缩这一原始假设矛盾。因此，所有的 the

环带 A_i 与 A_0同痕。对于每个 $k \le i \le n+1$，定义 $T_i \subset H$ 为一次穿孔环面，其 $\partial T_i = \gamma$ 是通过将 $P_i \cup A_0$ 向 H的内部推入而得到的。

引理 21。设 $\mathcal{T} = \{T_i : \ 0 \le i \le n+1\}$ 为如上定义的$(n+2)$ 环面集合。那么 $\mathcal{T}$仅包含 H 中的不可压缩环面，并且对于任意一对 $(i, j) \ne (k-1, k)$， T_i 与 T_j不同痕。

证明。可利用引理16的证明验证每个环面都是不可压缩的。假设对于某个 $i < j$， T_i 与 T_j 同痕。不难看出，对于 $i < l < j$， T_l 与 T_i 及T_j均同痕。因此，只需检验 $(i, \ i+1) \ne (k-1, \ k)$ 的情形。

设 $0 \le i < k-1$。根据构造， F_i（分别地， F_{i+1}）是通过添加一个连接 A_i 与 T_i （分别地， A_{i+1} 与 T_{i+1}）的二维 1-柄得到的。这里，该柄的余核对应于弧 β_i （分别地， β_{i+1}）。因此，由于 A_i 与 A_{i+1} 同痕， T_i 与T_{i+1} 之间的一个平行性可以扩展为 F_i 与 F_{i+1}之间的平行性。特别地， T_i 与 T_{i+1} 不可能同痕。

设 $k \le i \le n$ ，并假设 T_i 与 T_{i+1}平行。我们断言， P_i 和 P_{i+1} 必定平行。这些环面之间的区域 R 同胚于积空间 $T \times [0,1]$ ，其中$\gamma = \partial T \times \{1/2\}$和 T_i（分别）可以与 $T \times \{0\}$（分别与 $T \times \{1\}$）对应。设 ρ_0（分别设ρ_1）为环带 A_0 （分别位于 $T_{i+1} = T \times \{1\}$内）的核。根据构造，存在一个嵌入环带 $S \subset R$ ，且满足 $\partial S = \rho_0 \cup \rho_1$。根据 [Li07][1], 的引理 2.1，我们可以对 S 的内部作同痕，使其与除有限多个曲面 $T \times \{t\}$ 外的所有曲面都横截相交，交线为简单闭曲线；而非横截交点则对应于 S 的鞍点或圆相切（见 [Li07]的图 2.1(a)）。鞍点相切会使欧拉示性数改变 -1 和 $\chi(S) = 0$。因此， S 只有圆相切。在这种情况下，不难看出，可以进一步对 S 作同痕，使其与每个环面 $T \times \{t\}$ 恰好相交于一个圆；也就是说， S 是一个竖直环带。因此， R 上的平凡叶状结构在 P_i 和 P_{i+1}之间诱导出平行性。

令 M为 P_i与 P_{i+1}之间的乘积区域，我们将 J'视为 ∂M的一条缝合线。若 $k \le i < n$，沿 D 进行“撤销” ∂-压缩，相当于沿 J'的一个邻域将一个三维 1-柄附加到 M 上。因此， F_i 与 F_{i+1} 也平行，这是不可能的。若 $i = n$，由于 $P_{n+1} = P$ 是 ∂H的子集，“撤销” ∂-压缩不会改变 M。这只会通过沿连接 J'_2 与 γ的弧 $x \subset P_{n+1}$进行手术，改变缝合线 $J' \subset \partial M$。由于 M 是一个积空间，我们可以找到一个 M 的压缩盘，使其与P_n 相交于一条不与 x相交的弧。该圆盘在 M中变成 F_n 的 ∂-压缩盘，这与引理 15 的陈述矛盾。因此，区域 T_i 与 T_{i+1} 不同痕。□

根据引理 21， $\mathcal{T}$在 H 中边界为$\gamma \subset \partial H$的非同痕不可压缩环面数量最少，为 $n+1$ 。因此，根据引理19，我们得到 $n+1 \le |\mathcal{T}| \le 4$。特别地， $n \le 3$。

[1]尽管此引理 是针对闭曲面证明的，但该证明也适用于带边界的 Heegaard 曲面 y.

假设 $n = 3$。这里，曲面 T_{k-1} 和 T_k 必须同痕。将H 中位于 T_4 与 $T_5 = P \cup A_0$之间的区域记为 H_4。根据构造， $J_1 \subset \partial A_0$ 是 ∂H_4中的一条非分离曲线。注意，由原始环带 A 和双穿孔环面 F_4 围成的区域 $R \subset H$ 与 H中的 H_4 同痕。观察到沿 D 进行 ∂-压缩，会在该区域的边界上沿一个二维圆盘附加一个三维球，从而改变该区域，因此可得上述结论。假设 J_1 是 H_4中的本原圆或幂圆，那么它也是 R中的本原圆或幂圆。于是命题 5将推出 $F_4 = \partial R - \eta$（J_1）在 H_4 中可压缩，因而在 H中也可压缩，这就产生了矛盾。因此， J_1 不可能是 H_4中的本原圆或幂圆。

首先假设 $k = 4$，那么 T_4 和 $T_5 = P \cup A_0$ 围成一个积空间区域 $H_4 \cong T \times I$。根据构造， A_0 的核是 T 中的一条非分离简单闭曲线，因此它是 H_4 中的本原曲线。由于 $J_1 \subset \partial A_0$，我们得出 J_1 是 H_4 中的本原曲线。这与上一段矛盾。

假设 $1 \leq k < 4$。根据引理 21， $T_5 = A_0 \cup P$ 和 $T_4 = A_0 \cup P_4$ 是不同痕的环面。由于 $|\mathcal{T}| = 4$，命题 9 表明由 T_4 和 T_5 围成的区域属于类型 $(\mathbf{1}, p)$，其中 $p > 1$。 A_0 在 T_4 中的核与 A_0 在 T_5 中的核在 H_4 中共环。引理 10 表明， A_0 在 T_5 中的核是 H_4 中的幂圆。特别地， $J_1 \subset \partial A_0$ 也是 H_4 中的幂圆（或本原圆），由此产生矛盾。

因此， n 至多为 2。至此，本情形以及定理 3 的证明均告结束。

4. Proof of Lemma 20

将 $\partial V - \eta(J)$中的两条裤子曲面记为 S_0和 S_1。设 S是一条张成J、且不与 S_0 或 S_1平行的裤子曲面。沿 S切开 V，得到 H_0 和 H_1，其中 H_i是包含 S_i的那一部分。由于 S 不可压缩，根据 [Tsu03]的引理 2.3， H_0 和 H_1 是亏格二把手体。此外， J 将 ∂H_i 分成两条裤子曲面： S 和 S_i。

我们将证明，对于某个 $i \in \{0, 1\}$，在 H_i 中以J为边界的不可压缩三裤结构只有 S和 S_i。沿用 [VS19], 中的记号，这样一对（H_i， J）称为极小对。引理20由此断言可得。反设 V中存在五条彼此非同痕的裤子曲面。位于中间的那条会将 V 分成两对非极小的裤子曲面，这与任一侧的极小性矛盾。

注意到， S 在 V中是 ∂-可压缩的。不失一般性，设 S 朝向 S_0是 ∂-可压缩的。令 $D \subset H_0$ 为 S_0的一个 ∂-压缩盘。根据定义， $\partial D = \alpha \cup \beta$，其中 $\alpha \subset S_0$ 和 $\beta \subset S$ 是适当嵌入弧。由于 S_0 和 S 是不可压缩的，弧 α 和 β 分别在 S_0 和 S中是本质的。注意，如果 D 分离 H_0，那么 ∂D分离 ∂H_0。特别地， α 和 β 分别分离 S_0 和 S。此外，回顾一下， α 是否分离 S_0 由 $\partial\alpha = \partial\beta$决定。因此，根据 D 和 α 是否分离，我们有三种可能性。

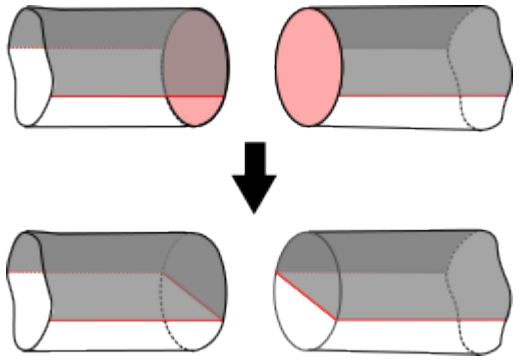

FIGURE 6. 压缩 H_0后，如何延拓曲面 S_0 和 S 。

情形（i）： D、 α **和** β **是非分离的**。记 H_0' 为沿 D压缩 H_0 所得的3-流形。由于 D 是非分离的， H_0' 是一个实心环面。我们可以将 S_0 和 S 延伸到 H_0' 的边界上，从而得到两个环带 S_0' 和 S' （见图6）。注意， S_0 和 S 的不可压缩性意味着 S_0' 和 S' 是 H_0'中的不可压缩环带。特别地，任何其他满足 $|K'| = |S'|$ 和 $\partial K' = \partial S'$ 的环带 $K' \subset H_0'$ 都将与 S' 或 S_0' 边界平行。因此， H_0 是极小的，因为任何其他张成 J 的不可压缩裤子曲面 $K \subset H_0$都会在 H_0'中产生其他环带 K' 。

情形（ii）： D, α **和** β **分离**。在此情形下，沿 D 压缩 H_0 所得结果是两个实心环面 $V_1 \cup V_2$的不交并。由于 α 在 S_0中是分离的，它连接 $J = \partial S_0$的同一个分支。将 J 中的另外两条曲线记为 c_1 和 c_2 ，其中 $c_i \subset V_i$。 由于 J在 H_0中非平凡， c_i 是 ∂V_i 中的一条本质曲线，并在 V_i中表示一个非平凡环路。注意， H_0 的基本群分解为 V_1和 V_2的基本群的自由积。因此， c_i 在 H_0 中是幂圆（分别地，本原）的充要条件是 c_i 至少绕 V_i 两圈（分别地，同伦于 V_i的一个核）。

现在我们讨论沿 D 压缩后， H_0 中的曲面会发生什么。在这种情况下，曲面 S_0 （分别为 S）延伸为两个环带 $S_0^1 \cup S_0^2$ （分别为 $S^1 \cup S^2$），其中 $S_0^i \subset \partial V_i$ （分别为 $S^i \subset \partial V_i$）。任何其他张成 J 的裤子曲面 $K \subset H_0$ 都会得到两个互不相交的环带 $K_1' \cup K_2'$，其中 $K_i' \subset \partial V_i$。 S_0^i、 S^i 和 K_i' 的边界与 ∂V_i 中的 c_i 同痕。特别地，若 c_i 是 V_i 中的本原圆，则 S_0^i、 S^i 和 K_i' 相对于其边界在 V_i 中均同痕。若 c_i 是 V_i 中的幂圆，则 K_i' 相对于其边界与 S_0^i 或 S^i 同痕。因此，若 c_i 曲线中至少有一条是本原曲线，则任意裤子曲面 K 都将与 S_0 或 S 同痕。因此，(H_0, J) 将构成一个极小对。

要结束这一子情形，只需假设 c_1 和 c_2 都是 H_0中的幂圆。根据上文， $c_1, c_2 \subset \partial H_1$ 满足命题7的条件。因此， c_1 和 c_2 是 H_1中的基本圆。将命题13应用于 $H = H_1$ 可得，(H_1, J) 是一个极小对，正如所需。

情形（iii）：D 不分离，但 α 和 β 分离。在此情形下，沿着 D 压缩 H_0 的结果是一个实心环面 H_0'。将 J 中的曲线记为 $c_1 \cup c_2 \cup c_3$。由于 α分离 S_0，它连接 $J = \partial S_0$的同一个分支，即 c_3。压缩后，$J|_D$变成边界环面 $\partial H_0'$ 中的四个具有相同斜率的环路。在这里，$c_1 \cup c_2 \subset J|_D$ 和c_3 分裂成两个圆。由于 S_0 不可压缩，c_1 和 c_2 不在 H_0'中界定圆盘。因此，它们要么是本原圆，要么是 H_0'中的幂圆。

假设 c_1 是 H_0'中的本原元素。首先注意，曲面 S 和 S_0 会变成两个环带，其并为 $\partial H_0'$。此外，任何张成 J 的裤子曲面 $K \subset H_0$ 都会变成两个适当嵌入 H_0'并张成 $J|_D$的环带。c_1 是本原元素这一事实意味着，$J|_D$与每个子午圆盘恰好相交于四个点，每条曲线上各有一个。特别地，$K|_D$ 必定同痕于 $S|_D$或 $S_0|_D$。因此，如果 c_1是 H_0'中的本原元素，则（H_0，J）是极小对。对 c_2也同样成立。

接下来要讨论 c_1 和 c_2 都是 H_0'中的幂圆的情形。令 $H_1' = V - H_0'$为亏格二把手体 $\overline{V}$中 H_0' 的补空间。注意，H_1' 是沿着 η将球体 η（D）粘接而成的，因此 H_1' 也是一个亏格二把手体。此外，$H_1' \cap H_0'$是两个环带邻域的并，这两个邻域分别围绕与 c_1 和 c_2同痕的两条曲线。由命题14，结合 $T = H_0'$、$H = H_1'$ 和 $M = V$，我们得出 $\{c_1, c_2\}$ 是 H_1'中的基本圆。由于 $H_1' = H_1 \cup_{\eta(\alpha)} \eta$（$D$），可知 $\{c_1, c_2\}$ 也是 H_1中的基本圆。将命题13应用于 $H = H_1$，可得（H_1，J）是一个极小对。引理20的证明至此完成。

References

[Joh79] KlausJohannson. *3*-流形边界的同伦等价，数学讲义第 761 卷。施普林格，柏林，1979 年。[JS79] William H. Jaco 和 Peter B. Shalen。3-流形中的 Seifert 纤维化空间。美国数学会回忆录，21(220):viii +192，1979 年。[KL04] Louis H. Kauffman 和 Sofia Lambropoulou。关于有理缠结的分类。应用数学进展，33(2):199–237，2004 年。[Li07] Tao Li。鞍点相切与海加德分解的距离。代数与几何拓扑，7:1119–1134，2007 年。[Lic81] W. B. Raymond Lickorish。素结与缠结。美国数学会汇刊，267(1):321–332，1981 年。[OZ81] R. P. Osborne 和 H. Zieschang。二生成元自由群中的本原元。数学创刊，63(1):17–24，1981 年。[Pig06] Adam Piggott。秩为二的自由群中的回文本原元与回文基。代数杂志，304(1):359–366，2006 年。[Sch84] Martin Scharlemann。隧道数为一的结满足 Poenaru猜想。拓扑学及其应用，18(2-3):235–258，1984 年。[Tsu03] Yukihiro Tsutsumi。双曲结的亏格一 Seifert 曲面及具有非平凡 JSJT分解的手术的普适界。载于冬季拓扑学研讨会/拓扑学与计算机研讨会论文集（仙台，*2002*/奈良，*2001*），第 9 卷，第 53–60 页，2003 年。

[VS19] LuisG. Valdez-S´anchez。三维球面中亏格一双曲结的 Seifert 曲面。代数与几何拓扑，19(5):2151–2231，2019 年。

Rom´an Aranda，宾汉姆顿大学，Vestal，纽约州，美国，电子邮箱：jaranda@binghamton.eduEnrique Ram´ırez-Losada，数学研究中心，瓜纳华托，瓜纳华托州，墨西哥，电子邮箱：kikis@cimat.mxJes´us Rodr´ıguez-Viorato，数学研究中心，瓜纳华托，瓜纳华托州，墨西哥，电子邮箱：jesusr@cimat.mx