arXiv:2304.09323v1 [math.AC] 18 Apr 2023

关于交换环的 τ_q-弱整体维数

Xiaolei Zhang、Ning Bian、Refat Abdelmawla Khaled Assaad、Wei Qi

摘要

本文引入了交换环 R 的 τ_q-弱整体维数 τ_q-w.gl.dim(R)。我们从同调、直积、多项式扩张和拼接等方面研究了 τ_q-弱整体维数等于 0 的环。此外，我们还研究了多项式环的 τ_q-弱整体维数。

关键词： τ_q-平坦维数； τ_q-弱整体维数； τ_q-冯·诺伊曼正则环；多项式环。
2010年数学主题分类：13D05，13C11。

1. Introduction

在本文中，我们始终假设 R 是一个带幺元的交换环。对于环 R，我们分别用 T(R) 表示 R的全商环，用 Min(R) 表示 R的所有极小素理想的集合，用 Nil(R) 表示 R 的幂零根，并用 fPD(R) 表示 R 的小有限直射维数。

为了建立一些非诺特整环与经典整环之间的联系，Wang 等人[15] 在整环上引入了 w-运算的概念，随后 Yin 等人 [20]将其推广到带零因子的交换环。这使得人们能够用 w-运算来研究交换环上的模及其同调维数。2015年，Kim 等人 [9] 将经典的平坦模概念推广为 w-平坦模。随后，Wang 等人 [13] 证明，环 R 是冯·诺伊曼正则环，当且仅当每个 R-模都是 w-平坦的。后来，Wang 等人 [16] 构造了交换环的 w-弱整体维数，并证明冯·诺伊曼正则环恰好是 w-弱整体维数为 0 的环。此外，PvMD 恰好是 w-弱整体维数至多为 1 的整环。他们还建立了环的 w-弱整体维数、多项式环的 w-弱整体维数与其 Nagata 环的弱整体维数之间的联系。

为了更详细地研究带零因子的交换环，Zhou 等人[24] 利用有限生成半正则理想引入了 q-运算的概念。 q-运算是半星运算，其弱于 w-运算。 [24] 中的作者还提出了 τ_q-诺特环（即任意理想

都是 τ_q-有限生成的环），并从模论的角度对其进行研究，例如希尔伯特基定理、Krull 主理想定理、Cartan-Eilenberg-Bass 定理和 Krull 交定理的τ_q-类比。最近，本文作者 [22] 引入并研究了 τ_q-平坦模、 τ_q-冯·诺伊曼正则环和 τ_q-协调环的概念。作者 [22] 证明了，一个环 R 是 τ_q-冯·诺伊曼正则环，当且仅当 T($R[x]$) 是冯·诺伊曼正则环，当且仅当 R 是一个 Min(R) 紧的约化环。作者 [22] 还给出了 τ_q-协调环的 Chase 定理。本文的主要动机是引入并研究模的 τ_q-平坦维数以及环的 τ_q-弱整体维数。我们还建立了环 R 的 τ_q-弱整体维数、 $R[x]$ 的 τ_q-弱整体维数与 T($R[x]$) 的弱整体维数之间的联系。

2. Preliminary

本节回顾一些关于 q-运算的基本概念。更多详细信息请参阅 [22, 24]。设 R 是一个环，且 $A, B \subseteq R$。记 $(A :_R B) := \{r \in R \mid Br \subseteq A\}$。回顾一下，若理想 I 满足 $(0 :_R I) = 0$，则称其为稠密理想；若存在一个有限生成稠密子理想 I，则称其为半正则理想；若其包含一个非零因子，则称其为正则理想。 R 的所有有限生成半正则理想的集合记为 $\mathcal{Q}(R)$（或者在 R 明确时记为 $\mathcal{Q}$ ）。众所周知，有限生成理想 $I = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle$ 是半正则的，当且仅当多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 是 $R[x]$ 中的正则元素（参见 [14, 练习 6.5]）。Lucas [10] 引入了 R的有限分式环:

$$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid \text{ there exists } I \in \mathcal{Q}(R) \text{ such that } I\alpha \subseteq R\}.$$

注意，对于任意交换环 R，我们有 $R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$。

设 M 是一个 R-模。记

$$\mathrm{tor}_{\mathcal{Q}}(M) := \{x \in M | Ix = 0, \text{ for some } I \in \mathcal{Q}(R)\}.$$

回顾 [18]， R-模 M 被称为 $\mathcal{Q}$-挠（分别为 $\mathcal{Q}$-无挠）的，如果 tor$_{\mathcal{Q}}(M) = M$（分别地，tor$_{\mathcal{Q}}(M) = 0$）。如果对于任意 $I \in \mathcal{Q}$，都有 $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$，则称 $\mathcal{Q}$-无挠模 M 为 Lucas 模，而 M 的 Lucas 包络为

$$M_q := \{x \in \mathrm{E}_R(M) | Ix \subseteq M, \text{ for some } I \in \mathcal{Q}(R)\},$$

其中，$\mathrm{E}_R(M)$ 是 M 作为 R-模的内射包络。根据 [18, 定理 2.11],$M_q = \{x \in \mathrm{T}(M[x]) | Ix \subseteq M$，对于某个 $I \in \mathcal{Q}(R)\}$. 显然， M 是 Lucas 模当且仅当 $M_q = M$。DQ 环 R 是这样一种环：其中每个 R-模都是 Lucas 模。根据 [19, 命题 2.2], ，DQ 环恰好是小有限直射维数

等于 0 的环。回顾 [24]， $\mathcal{Q}$-无挠模 M 的子模 N 称为 q-子模，如果 $N_q \cap M = N$。如果 R 的一个理想 I 是 R 的 q-子模，那么 I 也称为 R 的 q-理想。极大 q-理想是 R 的一个理想，并且在 R 的 q-子模中为极大的理想。所有极大 q-理想的集合记为 q-Max(R)；它也是 R 的所有极大非半正则理想的集合，因此非空且是 Spec(R) 的子集（见 [24, 命题 2.5、命题 2.7]）。

若 R-同态 $f: M \to N$ 满足：对任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，$f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 上是单态（分别地，满态、同构），则称其为 τ_q-单态（分别为 τ_q-满态、τ_q-同构）。根据 [24,命题 2.7(5)]，R-同态 $f: M \to N$ 是 τ_q-单态（分别为 τ_q-满态、τ_q-同构），当且仅当 Ker(f) 是（分别地，Cok(f) 是，Ker(f) 和 Cok(f) 都是） $\mathcal{Q}$-挠的。若对于任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，$A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}} \to C_{\mathfrak{m}}$ 作为 $R_{\mathfrak{m}}$-模是正合的，则称 R-模的序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$为 τ_q-正合的。设 M 为一个 R-模。若存在一个 τ_q-正合序列 $F \to M \to 0$，其中 F 为有限生成自由模，则称 M 为 τ_q-有限生成的。若存在一个 τ_q-正合序列$F_1 \to F_0 \to M \to 0$，使得 F_0 和 F_1 是有限生成自由模，则称 M 为 τ_q-有限表示的。

回忆一下，[14] 有限生成理想 J of R 称为 Glaz-Vasconcelos 理想（简称 GV-理想），如果自然同态 $R \to \mathrm{Hom}_R(J, R)$ 是同构，并且所有 GV-理想的集合记为 GV(R)。显然，$\{R\} \subseteq$GV(R) $\subseteq \mathcal{Q}(R)$。若一个环 R 满足 GV(R) $= \{R\}$（分别地，GV(R) $= \mathcal{Q}(R)$），则称其为 DW-环（分别地，WQ-环）。Kim 和 Wang [9] 利用 GV(R)-挠理论引入了 w-平坦模的概念，这与下面的τ_q-平坦模类似。

回忆一下，[22] 若一个 R-模 M 满足：对于任意 τ_q-单态 $f: A \to B$，$1_M \otimes f: M \otimes_R A \to M \otimes_R B$ 是一个τ_q-单态，则称其为 τ_q-平坦模。τ_q-平坦模的类在 τ_q-同构下封闭。一个环 R 是 DQ-环（分别地，WQ-环）当且仅当任意 τ_q-平坦模都是平坦模（分别地，w-平坦模）。下面的结果给出了 τ_q-平坦模的一些刻画。

引理 2.1。[22, 定理 4。3] 以下陈述对于一个 R-模 M 是等价的。

(1) M 是 τ_q-平坦的；(2) 对任意单态 $f: A \to B$，$1_M \otimes f$ 是 $M \otimes_R A \to M \otimes_R B$ 的τ_q-单态；(3) 对任意 N，$\mathrm{Tor}_1^R(M, N)$是 $\mathcal{Q}$-挠的；(4) 对任意 N和 $n \geq 1$，$\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$是 $\mathcal{Q}$-挠的；(5) 对任意理想 I，自然同态 $M \otimes_R I \to MI$是一个 τ_q-同构；

(6) 对任意有限生成的（τ_q-有限生成的）理想 I，自然同态 $M \otimes_R I \to MI$ 是一个 τ_q-同构；(7) 对任意有限生成的（τ_q-有限生成的）理想 I，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M)$ 是$\mathcal{Q}$-挠的；(8) 对任意 $\mathfrak{m} \in q\text{-Max}(R)$，$M_{\mathfrak{m}}$ 是一个平坦的 $R_{\mathfrak{m}}$-模；(9) $M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$是一个平坦的$\mathrm{T}(R[x])$-模。

3. On τ_q-flat dimensions of modules and τ_q-weak global dimensions of rings

给定的 R-模的 w-平坦维数，定义为其最短 w-平坦 w-分解的长度（见 [16]）。现在，我们如下引入 τ_q-平坦维数的概念。

定义 3.1. 设 R 为一个环，M 为一个 R-模，则若存在一个由 R-模构成的 τ_q-正合序列，使得 $\tau_q\text{-fd}_R(M) \leq n$ （τ_q-fd 是 τ_q-平坦维数的缩写）

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 \qquad (\Diamond)$$

其中每个模都是 F_i τ_q-平坦的。正合序列 $(\Diamond)$ 称为 M 的长度为 n 的 τ_q-平坦 τ_q-分解。若不存在这样的有限 τ_q-分解，则 $\tau_q\text{-fd}_R(M) = \infty$；否则，定义 $\tau_q\text{-fd}_R(M) = n$，其中 n 是 M 的最短 τ_q- 平坦 τ_q- 分解的长度。

显然，R-模 M 是 τ_q-平坦的，当且仅当 $\tau_q\text{-fd}_R(M) = 0$。若我们用 $\mathrm{fd}_R(M)$（分别用 $w\text{-fd}_R(M)$）表示 M的平坦维数（分别表示 w-平坦维数），则

$$\tau_q\text{-fd}_R(M) \leq w\text{-fd}_R(M) \leq \mathrm{fd}_R(M).$$

注意，如果 R 是 WQ-环，则 $\tau_q\text{-fd}_R(M) = w\text{-fd}_R(M)$；如果 R 是 DQ-环，则 $\tau_q\text{-fd}_R(M) = \mathrm{fd}_R(M)$。

引理 3.2. 设 N 是一个 R-模，且 $0 \to A \to F \to C \to 0$ 是由 R-模构成的 τ_q-正合序列，其中 F 是一个 τ_q-平坦模。那么对于任意整数 $n > 0$，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(C, N)$ 是 $\mathcal{Q}$-挠的，当且仅当 $\mathrm{Tor}_n^R(A, N)$ 也是如此。

证明. 设 $\mathfrak{m}$ 是 R 的一个极大 q-理想。那么 $0 \to A_{\mathfrak{m}} \to F_{\mathfrak{m}} \to C_{\mathfrak{m}} \to 0$ 是由 $R_{\mathfrak{m}}$-模构成的短正合序列。因此我们有一个 $R_{\mathfrak{m}}$-正合序列

$$\mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n+1}(F_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n+1}(C_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n}(A_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n}(F_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}).$$

由于 F 是 τ_q-平坦的，$F_{\mathfrak{m}}$ 是一个平坦的 $R_{\mathfrak{m}}$-模。因此我们有自然同构

$$\mathrm{Tor}_R^{n+1}(C, M)_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n+1}(C_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{Tor}_{R_{\mathfrak{m}}}^{n}(A_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \cong \mathrm{Tor}_R^{n}(A, M)_{\mathfrak{m}}.$$

因此，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(C, N)$ 是 $\mathcal{Q}$-挠的，当且仅当 $\mathrm{Tor}_n^R(A, N)$ 也是如此 . □

命题3.3. 设 n 为一个非负整数。则对于一个 R-模 M., 以下条件等价

(1) τ_q-fd$_R(M) \leq n$。(2) 对所有 R-模 N 和所有 $k > 0$, Tor$^R_{n+k}(M, N)$ 都是 $\mathcal{Q}$-挠的。(3) 对所有 R-模 N, Tor$^R_{n+1}(M, N)$ 都是 $\mathcal{Q}$-挠的。(4) 若 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个 τ_q-正合序列, 其中 $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是 τ_q- 平坦 R- 模, 则 F_n 是 τ_q- 平坦的。(5) 若 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个 τ_q-正合序列, 其中 $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的 R- 模, 则 F_n 是 τ_q- 平坦的。(6) 若 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个正合序列, 其中$F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是 τ_q- 平坦 R- 模, 则 F_n 是 τ_q- 平坦的。(7) 若 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是一个正合序列, 其中$F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的 R- 模, 则 F_n 是 τ_q- 平坦的。(8) 存在一个正合序列 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$, 其中 $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的 R-模, 且 F_n 是 τ_q-平坦的。(9) 存在一个 τ_q-正合序列 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$, 其中 $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ 是平坦的 R-模, 且 F_n 是 τ_q-平坦的。

证明。（2）⇒（3）、（4）⇒（5）⇒（7）、（4）⇒（6）⇒（7）以及（8）⇒（9）⇒（1）：显然。

（1）⇒（2）：我们将对 n 使用归纳法证明（2）。设 $n = 0$。由于 M 是 τ_q-平坦的，根据引理 2.1，（2）成立。若 $n > 0$，则存在一个 τ_q-正合序列 $0 \to F_n \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$，其中对于 $i = 0$，...，$n-1$，每个 F_i 都是 τ_q-平坦的，且 F_n 是 τ_q-平坦的。令 $K_0 =$=$F_0 \to M$ 的核。于是 $0 \to K_0 \to F_0 \to M \to 0$ 和 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \to K_0 \to 0$ 都是 τ_q-正合的，并且 τ_q-fd$_R$（K_0）$\leq n-1$。根据归纳法，对于所有 R-模 N 以及所有 $k > 0$，Tor$^R_{n-1+k}$（K_0，N）都是 $\mathcal{Q}$-挠的。因此，由引理 3.2 可知，Tor$^R_{n+k}$（M，N）是 $\mathcal{Q}$-挠的。

(3) ⇒(4) 设 $L_n = F_n$和 $L_i =$Im($F_i \to F_{i-1}$)，其中 $i = 1, \ldots, n-1$。那么 $0 \to L_{i+1} \to F_i \to L_i \to 0$ 和 $0 \to L_1 \to F_0 \to M \to 0$ 都是 τ_q-正合序列。通过反复应用引理 3.2，我们可以得到，对于所有R-模 N，Tor$^R_1(F_n, N)$ 都是 $\mathcal{Q}$-挠的。因此 F_n 是 τ_q-平坦的。

(7) ⇒ (8)：由于每个 R-模都有一个平坦覆盖，我们可以导出一个长正合序列

$$\cdots \to F'_n \to F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-2} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

其中每一项都是平坦的。令 $F_n =$Ker(d_{n-1})，由 (7) 可知 F_n 是 τ_q-平坦的。 □

命题 3.4. 设 M 是一个 R-模。则

(1) τ_q-fd$_R(M) \leq n$ *if and only if* fd$_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \leq n$ *for all* $\mathfrak{m} \in q$-Max(R).

(2) τ_q-fd$_R(M)$ =上确界{fd$_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})$ | $\mathfrak{m} \in \tau_q$-Max(R)}。

证明. (1) 假设 τ_q-fd$_R(M) \leq n$。令 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，且 N 是一个 $R_\mathfrak{m}$-模。则 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N)$ 是 $\mathcal{Q}$-挠的，因此 $\mathrm{Tor}_{R_\mathfrak{m}}^{n+1}(M_\mathfrak{m}, N) = 0$。所以 fd$_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \leq n$。另一方面，设 N 是一个 R-模。对于任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，我们有$0 = \mathrm{Tor}_{R_\mathfrak{m}}^{n+1}(M_\mathfrak{m}, N_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N)_\mathfrak{m}$。因此 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N)$ 是 $\mathcal{Q}$-挠的，从而由命题 3.3 得τ_q-fd$_R(M) \leq n$。

(2) 由(1)可得。 □

推论3.5。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 τ_q-短正合序列，由 R-模组成 [14,定理3.6。7]。

(1) 则 τ_q-fd$_R(C) \leq 1 +$ 最大{τ_q-fd$_R(A)$ τ_q-fd$_R(B)$}。(2) 若 τ_q-fd$_R(B) < \tau_q$-fd$_R(C)$，则 τ_q-fd$_R(A) = \tau_q$-fd$_R(C) - 1 \geq \tau_q$-fd$_R(B)$。

证明。由于 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 τ_q-短正合序列，$0 \to A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m} \to C_\mathfrak{m} \to 0$ 对于任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)都是 $R_\mathfrak{m}$-模的短正合序列。因此，结论由命题 3.4和 [14, 定理3.6。7]得出。□

推论3.6. 设 $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ 是一族 R-模，则

$$\tau_q\text{-fd}_R(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i) = \sup\{\tau_q\text{-fd}_R(M_i) \mid i \in \Gamma\}.$$

证明. 注意到对于任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，$(\bigoplus M_i)_\mathfrak{m} \cong \bigoplus (M_i)_\mathfrak{m}$。因此由命题 3.4 可得结果。 □

推论3.7. 设 M 和 N 是 R-模，且 M 与 N τ_q-同构。则 τ_q-fd$_R(M) = \tau_q$-fd$_R(N)$。

证明. 由于 M 与 N τ_q-同构，因此存在一个 R-模的正合序列 $0 \to K_1 \to M \to N \to C_1 \to 0$ 或 $0 \to K_2 \to N \to M \to C_2 \to 0$，使得 K_i 和 C_i 是 $\mathcal{Q}$- 挠的（$i = 1, 2$）。所以对于任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)，$M_\mathfrak{m}$ 与 $N_\mathfrak{m}$ 同构。于是由命题 3.4，τ_q-fd$_R(M) = \tau_q$-fd$_R(N)$。□

[16] 中的作者还引入了给定环的弱整体维数。类似地，我们可以引入环 R 的 τ_q-弱整体维数。

定义 3.8. 环 R 的 τ_q-弱整体维数定义为

$$\tau_q\text{-w.gl.dim}(R) = \sup\{\tau_q\text{-fd}_R(M) \mid M \textit{ is an } R\textit{-module}\}.$$

显然，若将环 R 的弱（分别为 w-弱）全局维数记作 w.gl.dim(R)（分别记作 w-w.gl.dim(R)），则

$$\tau_q\text{-w.gl.dim}(R) \leq w\text{-w.gl.dim}(R) \leq \text{w.gl.dim}(R).$$

注意，若 R 是 WQ-环，则 τ_q-w.gl.dim(R) $=$ w-w.gl.dim(R)；若 R 是 DQ-环，则 τ_q-w.gl.dim(R) $=$w.gl.dim(R)。

以下结果刻画了 τ_q-弱整体维数至多为n的环。

定理 3.9. 对于 R.，以下命题等价

(1) τ_q-w.gl.dim(R) $\leq n$. (2) 对所有 R-模 M.， τ_q-fd$_R$(M) $\leq n$ 。(3) 对所有 R-模 M 和 N，以及所有 $k > 0$.，Tor$^R_{n+k}$(M, N) 都是 $\mathcal{Q}$-挠的。(4) 对所有 R-模 M 和 N.，Tor$^R_{n+1}$(M, N) 都是 $\mathcal{Q}$-挠的。(5) 对 R 的所有理想 I， τ_q-fd$_R$(R/I) $\leq n$ 。(6) 对 R. 的所有 τ_q-有限生成理想 I， τ_q-fd$_R$(R/I) $\leq n$ 。(7) 对 R. 的所有有限生成理想 I， τ_q-fd$_R$(R/I) $\leq n$

因此， R 的 τ_q-弱整体维数也由以下公式确定:

$$\begin{aligned}\tau_q\text{-w.gl.dim}(R) &= \sup\{\text{w.gl.dim}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \tau_q\text{-Max}(R)\}\\ &= \sup\{\tau_q\text{-fd}_R(R/I) |\ I \textit{ is an ideal of } R\}\\ &= \sup\{\tau_q\text{-fd}_R(R/I) |\ I \textit{ is a } \tau_q\textit{-finite type ideal of } R\}\\ &= \sup\{\tau_q\text{-fd}_R(R/I) |\ I \textit{ is a finitely generated ideal of } R\}.\end{aligned}$$

证明。（1）⇔（2）和（2）⇒（5）⇒（6）⇒（7）：显然。

（2）⇔（3）⇔（4）：由命题3.3得出。

（4）⇒（5）：显然。

（7）⇒（1）：设 M 是一个 R-模，且 $0 \to F_n \to ... \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$是一个正合序列，其中 F_0、F_1、.....、F_{n-1}是平坦的 R-模。根据命题3.3，要完成证明，只需证明 F_n 是 τ_q-平坦的。设 I 是 R的一个有限生成理想。因此，由（7）可得 τ_q-fd$_R$（R/I）$\leq n$ 。由引理 3.2 可知，Tor$^R_1$（R/I， F_n）≅Tor$^R_{n+1}$（R/I， M）是 $\mathcal{Q}$-挠的。

推论中的第一个等式由命题 3.4 得出，其余等式由上述定理得出。□

命题 3.10. 设 $R = R_1 \times R_2 \times \cdots R_n$ 是环的有限直积。则

$$\tau_q\text{-w.gl.dim}(R) = \max\{\tau_q\text{-w.gl.dim}(R_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

证明。注意， R 的每个（有限生成的半正则）理想都具有$I = I_1 \times I_2 \times \cdots I_n$的形式，其中每个 I_i 都是 R_i的（有限生成的半正则）理想。因此，对 R 的所有理想 I， τ_q-fd$_R$(R/I) $\leq n$ 成立，当且仅当对 R_i 的所有理想I_i 以及所有 $i = 1$、2、.....、n， τ_q-fd$_{R_i}$(R_i/I_i) $\leq n$成立。因此，由定理 3.9 可得结论。□

4. More results on τ_q-VN regular rings

回顾 [22, 定义 4.7] ，若环 R 满足所有 R-模都是 τ_q-平坦的，则称其为 τ_q-VN正则环（ τ_q-冯·诺伊曼正则环的简称）。显然，整环和冯·诺伊曼正则环都是 τ_q-VN正则的。以下结果给出了 τ_q-冯·诺伊曼正则环的同调刻画。

命题 4.1. 对于环 R，以下断言等价 .

(1) τ_q-w.gl.dim(R) $= 0$; (2) R是 τ_q-VN正则环; (3) 对所有 R-模 M和 N 以及所有 $k > 0$., $\mathrm{Tor}_k^R(M, N)$都是 $\mathcal{Q}$-挠的 (4) 对所有 R-模 M和 N., $\mathrm{Tor}_1^R(M, N)$都是 $\mathcal{Q}$-挠的 (5) 对R的所有（ τ_q-有限生成或有限生成）理想 I ， R/I 都是 τ_q-平坦的。(6) 对于 R的任意有限生成理想 K ，存在一个理想 $I \in \mathcal{Q}$ 使得 $IK = K^2$; (7) 对任意 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)， $R_{\mathfrak{m}}$ 都是冯·诺伊曼正则环; (8) T($R[x]$)是冯·诺伊曼正则环; (9) R 是约化环，且Min(R)是紧的。(10) $Q_0(R)$是冯·诺伊曼正则环。

证明。(1) – (5) 的等价性由定理 3.9 得出，而 (2) 和 (6) –(9) 的等价性由 [22, 定理 4.9] 得出。

(9) $\Leftrightarrow$ (10) 注意到 $R \subseteq Q_0(R)$。因此， $Q_0(R)$ 的约化性蕴含 R的约化性。故等价性由 [11, 定理 7.6] 得出。□

注 4.2. 若环 R 满足 T(R) 是冯·诺伊曼正则环，则 R 是一个 τ_q-VN 正则环，因为前者等价于 R 是约化环、Min(R) 紧，并且若一个有限生成理想包含于 R 的极小素理想之并中，则它包含于其中一个极小素理想中（见 [12, 命题 9]）。[12] 中的作者还给出了一个反例，说明反向结论一般不成立。

Cor推论 4.3. 设 R 是一个环。则以下陈述等价 :

(1) R 是冯·诺伊曼正则环；(2) R 是 τ_q-冯·诺伊曼正则环和 DQ-环；(3) R 是 τ_q-冯·诺伊曼正则环和 DW-环；(4) R 是 τ_q-冯·诺伊曼正则环和 WQ-环。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 设 R 是冯·诺伊曼正则环。那么， R 显然是 τ_q-冯·诺伊曼正则环。注意到， R 的每个有限生成理想都由一个幂等元生成。因此， R 是 DQ-环。

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 显然。

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 M 是一个 R-模，则 M 是 τ_q-平坦的，因为 R 是 τ_q-冯·诺伊曼正则的；又由于 R 是一个 WQ-环，因此 w是 R -平坦的。因此，根据 [13, 定理 4.4]， R 是一个冯·诺伊曼正则环。□

推论 4.4. 设 $R = R_1 \times R_2 \times \cdots R_n$是环的有限直积。那么，当且仅当每个 R_i 都是 τ_q-VN 正则环（ $i = 1$，2，...， n ）时， R 是一个 τ_q-VN 正则环。

证明。由命题 3.10 和命题 4.1 可得。 □

设 $f: A \to B$ 是一个环同态，且 J 是 B的一个理想。由 [3]可知，关于 f，沿着 J将 A与 B进行拼接，记作 $A \bowtie^f J$，定义为

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) | a \in A, j \in J\},$$

它是 $A \times B$ 的子环。由 [3,命题 4.2]可知， $A \bowtie^f J$ 是拉回 $f \times_{B/J} \pi$，其中 $\pi: B \to B/J$ 是自然满同态，而 $f = \pi \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} A \bowtie^f J & \xrightarrow{p_A} & A \\ \downarrow{\scriptstyle p_B} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{f}} \\ B & \xrightarrow{\pi} & B/J. \end{array}$$

引理 4.5。 [3, 命题 5.4] 设 $f: A \to B$ 是环同态，且 J 是 B 的理想。那么，当且仅当 A 是约化环且 $\mathrm{Nil}(B) \cap J = 0$ 时， $A \bowtie^f J$ 是约化环。

引理 4.6。 [4, 命题 2.6] 设 $f: A \to B$ 是环同态，且 J 是 B 的理想。设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想， $\mathfrak{q}$ 是 B 的素理想。令

(1) $\mathfrak{p}'^f := \mathfrak{p} \bowtie^f J = \{(p, f(p) + j) \mid p \in \mathfrak{p}\}$; (2) $\overline{\mathfrak{q}}^f$:
$= \{(a, f(a) + j) \in A \bowtie^f J \mid f(a) + j \in \mathfrak{q}\}$。

那么， $A \bowtie^f J$ 的每个素理想都具有 $\mathfrak{p}'^f$ 或 $\overline{\mathfrak{q}}^f$ 的形式，其中 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ 且 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) - V(J)$。

引理 4.7. [5, 推论 2.8] 设 $f: A \to B$ 是一个环同态，且 J 是 B 的一个理想。令

$$\mathcal{X} = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) - V(J)} V(f^{-1}(\mathfrak{q} + J)).$$

那么，以下性质成立。

(1) 由 $\mathfrak{q} \mapsto \overline{\mathfrak{q}}^f$ 定义的映射建立了 $\mathrm{Min}(B) - V(J)$ 与 $\mathrm{Min}(A \bowtie^f J) - V(\{0\} \times J)$ 之间的同胚。(2) 由 $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}'^f$ 定义的映射建立了 $\mathrm{Min}(A) - \mathcal{X}$ 与 $\mathrm{Min}(A \bowtie^f J) \cap V(\{0\} \times J)$ 之间的同胚。

因此，我们有

$$\mathrm{Min}(A \bowtie^f J) = \{\mathfrak{p}'^f \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A) - \mathcal{X}\} \cup \{\overline{\mathfrak{q}}^f \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(B) - V(J)\}.$$

命题 4.8. 设 $f\colon A \to B$ 是一个环同态，且 J 是 B的一个理想。那么，当且仅当 A 是约化的、$\mathrm{Nil}(B) \cap J = 0$，且 $\{\mathfrak{p}'^f \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A) - \mathcal{X}\}$ 以及 $\{\overline{\mathfrak{q}}^f \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(B) - V(J)\}$ 是紧的时，$A \bowtie^f J$ 是一个 τ_q-VN正则环。

证明。由引理 4.5、引理 4.7和命题 4.1可得。 □

回顾 [5]，令 $f = \mathrm{Id}_A\colon A \to A$为 A的恒等同态，我们将 $A \bowtie J := A \bowtie^{\mathrm{Id}_A} J$ 记作 A沿 J的拼接代数。由 [2, 定理 2.1] 可知，环 $A \bowtie J$ 是VN正则环，当且仅当 A 是VN正则环。由命题 4.8可以很容易地推出以下结果。

命题 4.9. 设 J 是 A的一个理想。那么 $A \bowtie J$ 是 τ_q-VN正则环，当且仅当 A 是 τ_q-VN 正则环。

推论 4.10. 设 A 是一个整环或冯·诺伊曼正则环，且 J 是 A的一个理想。那么 $A \bowtie J$ 是 τ_q-VN正则环。

回顾 [23]，若一个 R-模满足：对于任意 $I \in \mathcal{Q}.$，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$，则称其为半正则平坦模。显然，所有平坦模都是半正则平坦模。

命题 4.11. 假设每个半正则平坦 R-模都是平坦的。那么 R 是一个τ_q-VN正则环。

证明. 设 I 是 R 的一个有限生成半正则理想，且 M 是一个 R-模。由于 R/I 是 $\mathcal{Q}$-挠的，根据 [[22], 命题 2.3]，$R/I \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) = 0$。因此，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])) \cong \mathrm{Tor}_1^R(R/I \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) M) = 0$。由此可得，$M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$是一个半正则平坦 R-模，因此根据假设，它是一个平坦 R-模。所以

$$M \otimes_R (\mathrm{T}(R[x]) \otimes_R \mathrm{T}(R[x])) \cong M \otimes_R (\mathrm{T}(R[x]) \otimes_{R[x]} R[x] \otimes_R \mathrm{T}(R[x])) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$$

是一个平坦的 $\mathrm{T}(R[x])$-模。因此，$M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$ 是一个平坦的 $\mathrm{T}(R[x])$-模，所以根据引理 2.1，M是一个 τ_q-平坦的 R-模。由此可得，R 是一个 τ_q-VN正则环。□

注 4.12。我们不知道推论 4.11 的逆命题是否成立。因此，我们提出以下猜想：

猜想：环 R 是 τ_q-VN正则环，当且仅当每个半正则平坦 R-模都是平坦的。

5. On τ_q-weak global dimensions of polynomial rings

以下结果将经典弱整体维数（平坦维数）与 τ_q-弱整体维数（τ_q-平坦维数）联系起来。

命题 5.1. 设 R 是一个环， M 是一个 R-模。

(1) τ_q-fd$_R(M)$ =fd$_{\mathrm{T}(R[x])}(M \otimes_R \mathrm{T}(R[x]))$.

(2) τ_q-w.gl.dim(R) ≤w.gl.dim(T$(R[x])$.

证明。(1) 假设 τ_q-fd$(M) \leq n$。那么存在一个正合序列 $0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ 其中每个 P_i 都是 τ_q-平坦的。应用 $- \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$, 我们得到 $0 \to P_n \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) \to \cdots \to P_1 \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) \to P_0 \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) \to M \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) \to 0$ 是 $(M \otimes_R \mathrm{T}(R[x]))$ 的一个平坦分解。因此， fdT$_{(R[x])}(M \otimes_R \mathrm{T}(R[x]))$ $\leq n$。另一方面， fdT$_{(R[x])}(M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])) \leq n$。于是，对于任意 R-模 N，我们有 TorT$_{(R[x])\ n+1}(M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])\ N \otimes_R \mathrm{T}(R[x])) \cong \mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, N) \otimes_R \mathrm{T}(R[x]) = 0$。因此，根据 [[22],命题 2， $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M, N)$ 是 $\mathcal{Q}$-挠的， 3],这意味着 τ_q-fd$(M) \leq n$。

（2）由（1）可得。 □

以下两个结果给出了在相干性假设下弱整体维数和 τ_q-弱整体维数的两种刻画。

引理 5.2. [16, 引理 3.7] 设 R 是一个相干环。当且仅当对每个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, w.gl.dim$(R) \leq n$ 且 fd$_R R/\mathfrak{m} \leq n$ 。

回顾 [22] ，若环 R 的每个 τ_q-有限生成理想都是 τ_q-有限表示的，或者等价地， R 的每个有限生成理想都是 τ_q-有限表示的，则称其为 τ_q-相干。

引理5.3. 设 R 是一个 τ_q-相干环。当且仅当对每个 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)， τ_q-w.gl.dim$(R) \leq n$ 且τ_q-fd$_R R/\mathfrak{m} \leq n$ 。

证明。其证明与 [16,命题 3.8] 的证明类似。 □

命题 5.4. 设 R 是一个环，且 T$(R[x])$ 是相干的。那么 R 是一个 τ_q-相干环。

证明. 设 I 是 R 的一个有限生成理想。那么 $I \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$ 是 $\mathrm{T}(R[x])$ 的一个有限生成理想。由于 $\mathrm{T}(R[x])$ 是一个协调环， $I \otimes_R \mathrm{T}(R[x])$ 是 $\mathrm{T}(R[x])$ 的一个有限表示理想。因此，根据 [22,定理 3.3]， I 是 τ_q-有限表示的。□

定理 5.5. 设 R 是一个环，且 $\mathrm{T}(R[x])$ 是相干的。那么

$$\tau_q\text{-w.gl.dim}(R) = \text{w.gl.dim}(\mathrm{T}(R[x])).$$

因此， τ_q-w.gl.dim$(R) = 0$ 或 ∞。

证明。令 n 为正整数。由引理 5.2、引理5.3 和命题 5.4 可得以下等价关系：

$$\begin{aligned}&\tau_q\text{-弱全局维数}(R) \leq n \Leftrightarrow \tau_q\text{-有限维}_R(R/\mathfrak{m}) \leq n \text{ 对于每个}\\ &\mathfrak{m} \in q\text{-极大理想}(R), \Leftrightarrow \text{有限维}_{T(R[x])}(T(R[x])/\mathfrak{m} \otimes_R T(R[x]))\\ &\leq n \text{对于每个 } \mathfrak{m} \in q\text{-极大理想}(R), \Leftrightarrow \text{w.gl.dim}(\mathrm{T}(R[x])) \leq n.\end{aligned}$$

因此 τ_q-w.gl.dim(R) =w.gl.dim(T$(R[x])$)。

注意，T$(R[x])$ 是一个相干全商环。因此，由 [1, 命题 6.1] w.gl.dim(T$(R[x])) = 0$, 1，或者 ∞. 如果 w.gl.dim(T$(R[x])) = 1$，那么 T$(R[x])$ 是一个半遗传全商环。由此，根据 [1, 定理3.12(i)]， $R[x]$是一个半遗传环。然后，由 [7, 定理 2], w.gl.dim(T$(R[x])) = 0$。因此 τ_q-w.gl.dim(R) =w.gl.dim(T$(R[x])) = 0$ 或者 ∞。□

注5.6. 一个环的 τ_q-弱整体维数一般既不能为 0，也不能为 ∞ in$_\infty$。事实上，令 $S = \prod \mathbb{Q}[x]$ 为由可数无限个$_{i=1}$系数组成的环，其中每个分量都是系数取自有理数域的多项式 $\mathbb{Q}[x]$ $\mathbb{Q}$。令 R 为 S的子环，该子环由序列（x、0、 x^2、 $\cdots$）以及所有最终由常数组成的序列生成。于是 R 是一个弱整体维数等于 1 但不是半遗传的环（见 [8, 第 54]页）。因此， τ_q-w.gl.dim$(R) \leq$ w.gl.dim$(R) = 1$.假设 τ_q-w.gl.dim$(R) = 0$. 令 K为由（x、0、 x^2、 $\cdots$）生成的理想。则存在一个理想 $I \in \mathcal{Q}$ ，使得 $IK = K^2$。比较I（x、0、 x^2、 $\cdots$）与 $= IK = K^2 =$（x^2、0、 x^4、 $\cdots$）的各个分量R。我们得到I 的每个（$2n-1$）分量都由 x^{n-1}生成。由于存在一个元素 $r \in I$ ，使得 r 最终非零，而 I 是半正则的，这是不可能的。由此可得， τ_q-w.gl.dim$(R) = 1$。

Lemma 5.7. 设 R 是一个环， $\mathfrak{m} \in q\text{-Max}(R)$。则$\mathrm{T}(R[x])_{\mathfrak{m}\otimes_R \mathrm{T}(R[x])} \cong R[x]_{\mathfrak{m}[x]}$.

证明。设 $\sum(\tau_q)$ 是所有内容属于 $\mathcal{Q}$ 的多项式的集合。则容易验证 $\sum(\tau_q) \subseteq R[x] - \mathfrak{m}[x]$，因此有

$$\mathrm{T}(R[x])_{\mathfrak{m}\otimes_R \mathrm{T}(R[x])} \cong (R[x]_{\sum(\tau_q)})_{\mathfrak{m}[x]_{\sum(\tau_q)}} \cong R[x]_{\mathfrak{m}[x]}.$$

□

定理 5.8. 设 R 是一个环，且 T($R[x]$) 相干。那么

$$\tau_q\text{-w.gl.dim}(R[x]) = \tau_q\text{-w.gl.dim}(R).$$

证明. 假设 τ_q-w.gl.dim($R[x]$) $\leq n$。设 M 是一个 R-模，且 $\mathfrak{m} \in q$-Max(R)。那么 $\mathfrak{m}[x] \in q$-Max($R[x]$)。事实上，设 I 是 $R[x]$ 的一个非半正则（等价地，非正则）理想，且包含 $\mathfrak{m}[x]$。那么 I 不包含正则元素，因此其内容 $c(I)$ 是一个包含 $\mathfrak{m}$ 的非半正则理想。由 $\mathfrak{m}$ 的极大性可知，$c(I) = \mathfrak{m}$，这意味着 $I = \mathfrak{m}[x]$。由命题 3.4 和引理 5.7 可得

$$\mathrm{fd}_{\mathrm{T}(R[x])_{\mathfrak{m}\otimes_R \mathrm{T}(R[x])}} M \otimes_R \mathrm{T}(R[x])_{\mathfrak{m}\otimes_R \mathrm{T}(R[x])} = \mathrm{fd}_{R[x]_{\mathfrak{m}[x]}} M[x]_{\mathfrak{m}[x]} \leq n.$$

因此 fd$_{\mathrm{T}(R[x])} M \otimes_R$ T($R[x]$) $\leq n$，故由命题 5.1，τ_q-fd$_R$(M) $\leq n$。因此，τ_q-w.gl.dim(R) $\leq n$。

另一方面，设 τ_q-w.gl.dim(R) $\leq n$。令 $\mathfrak{p} \in q$-Max($R[x]$)。则$\mathfrak{p} \cap R$ 也是极大非正则的。因此 $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap R \in q$-Max($R$) 且 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}[x]$。由定理 3.9、引理 5.7 和定理 5.5 可得

$$\begin{aligned}
\tau_q\text{-w.gl.dim}(R[x]) &= \sup\{\text{w.gl.dim}(R[x]_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in q\text{-Max}(R[x])\} \\
&= \sup\{\text{w.gl.dim}(T(R[x])_{\mathfrak{p}\otimes_R T(R[x])}) \mid \mathfrak{p} \in q\text{-Max}(R[x])\} \\
&\leq \text{w.gl.dim}(\mathrm{T}(R[x])) \\
&= \tau_q\text{-w.gl.dim}(R).
\end{aligned}$$

因此，τ_q-w.gl.dim(R) = τ_q-w.gl.dim($R[x]$)。 □

推论 5.9。设 R 为一个环。则 R 是一个 τ_q-VN正则环，当且仅当 $R[x]$也是如此。

证明。设 R 是一个 τ_q-VN正则环。则 T($R[x]$) 是一个 VN正则环，因而是相干的。因此，根据定理 5.8，τ_q-w.gl.dim($R[x]$) = τ_q-w.gl.dim(R) = 0 。所以$R[x]$ 是一个 τ_q-VN正则环。另一方面，设 $R[x]$ 是一个 τ_q-VN正则环。则 T($R[x, y]$) 是一个 VN正则环，因此 T($R[x]$) ≅T($R[x, y]$)/yT($R[x, y]$) 也是如此。因此 R 是一个 τ_q-VN正则环。□

致谢。
第四位作者获得了国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12201361）。

References

[1] S. Bazzoni 和 S. Glaz，《全商环的高斯性质》，《代数杂志》310（2007）180-193。[2] M. Chhiti，N. Mahdou，《环沿理想的粘合复制的一些同调性质》，《伊朗数学会通报》38（2012），第2期，507-515。[3] M. D'Anna、C. Finocchiaro 和 M. Fontana，《沿理想粘合的代数》，载于《交换代数及其应用》，M. Fontana、S. Kabbaj、B. Olberding、I. Swanson 编（Walter de Gruyter，柏林，2009），第155-172页。[4] M. D'Anna、C. Finocchiaro 和 M. Fontana，《沿理想粘合的代数中素理想链的性质》，《纯粹与应用代数》214（2010）1633-1641。[5] M. D'Anna、C. A. Finocchiaro 和 M. Fontana，《沿理想粘合的代数的新代数性质》，Comm. Algebra 44（2016）1836-1851。[6] M. D'Anna、M. Fontana，《环沿理想的粘合复制：基本性质》，J. Algebra Appl. 6(3)（2007）443-459。[7] S. Endo，《关于半遗传环》，《日本数学会杂志》13（1961）109-119。[8] S. Glaz，《交换相干环》，《数学讲义》第1371卷，柏林：Spring-Verlag，1989。[9] H. Kim、F. G. Wang，《关于最小公倍数稳定模》，J. Algebra Appl.，13(4)（2014），1350133，共18页。[10] T. Lucas，《刻画何时 $R[X]$ 整闭 II》，J. Pure Appl. Algebra，1989，61：49-52。[11] T. G. Lucas，《克鲁尔环、Pr ¨ufer v-乘法环与有限分式环》，《落基山数学杂志》，2005，35：1251-1326。[12] Y. Quentel，《关于环的极小谱的紧致性》，《法国数学会通报》，第99卷（1971），第265-272页。[13] F. G. Wang、H. Kim，《 w-内射模与 w-半遗传环》，《韩国数学会杂志》，51(3)（2014），509-525。[14] F. G. Wang、H. Kim，《交换环及其模基础》，新加坡：Springer，2016。[15] F. G. Wang、R. L. McCasland，《强莫里整环上的 w-模》，Comm. Algebra，25(4)（1997），1285-1306。[16] F. G. Wang、L. Qiao，《交换环的 w-弱整体维数》，Bull. Korean Math. Soc.，52(4)（2015），1327-1338。[17] F. G. Wang、L. Qiao，《Nagata 环与模的两个应用》，J. Algebra Appl. 19(6)（2020），2050115，共15页。[18] F. G. Wang、D. C. Zhou、D. Chen，《交换环的有限分式环的模论刻画》，《交换代数杂志》，14(1)（2022），141-154。[19] F. G. Wang、D. C. Zhou、H. Kim、T. Xiong、X. W. Sun，《每个 Pr ¨ufer 环的有限直射维数都不小于二》，Comm. Algebra，48(12)（2020），5311-5320。[20] H. Y. Yin、F. G. Wang、X. S. Zhu、Y. H. Chen，《交换环上的 w-模》，《韩国数学会杂志》，48(1)（2011），207-222。[21] X. L. Zhang，《 Q_0-Pr ¨ufer v-乘法环的一个同调刻画》，Int. Elec- tron. J. Algebra，32（2022），228-240。

[22] X. L. Zhang, W. Qi，关于 τ_q-平坦性与 τ_q-相干性的研究，即将在 J. Algebra Appl. 上发表, https://arxiv.org/abs/2111.03417。[23] X. L. Zhang, G. C. Dai, X. L. Xiao, W. Qi，强Pr¨ufer环上的半正则平坦模，《吉林大学学报（理学版）》，60(6)（2022年），1308-1316。（中文）
[24] D. C. Zhou, H. Kim, F. G. Wang, D. Chen，交换环上的一种新半星运算及其应用，Comm. Algebra，48 (9)（2020年），3973-3988。Xiaolei Zhang
School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo255049, China电子邮箱：zxlrghj@163.com

Ning Bian

School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo255049, China电子邮箱地址：ningbian@sdut.edu.cn
Refat Abdelmawla Khaled AssaadDepartment of Mathematics, Faculty of Science, University Moulay Ismail Mek-nes, Box 11201, Zitoune, Morocco电子邮箱地址：refat90@hotmail.comWei Qi (Corresponding Author)
School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China电子邮箱地址：qwrghj@126.com