arXiv:2304.09326v2 [math.QA] 9 May 2023

q-Onsager代数与量子环面

Owen Goff

摘要

q-Onsager代数记为 O_q，由两个生成元 W_0、W_1和两个称为 q-Dolan-Grady关系的关系定义。最近，Terwilliger引入了 O_q中的一些元素，并称其为交错元素。这些元素记为

$$\{W_{-k}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{W_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{G_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\tilde{G}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}.$$

O_q 中的交错元素通过递归定义。根据构造，它们是 W_0 和 W_1中的多项式。目前尚不清楚如何将这些多项式表示为闭式。

在本文中，我们研究一种代数 T_q，称为量子环面。我们给出 T_q 的一个基，并定义一个代数同态 $p: O_q \mapsto T_q$。在主要结果中，我们用 T_q 的基表示 p-像下 O_q 的交错元素。这些表达式具有我们认为颇具吸引力的闭式形式。

关键词。 q-Onsager 代数； q-Dolan-Grady 关系；量子环面；交错中心扩张。

2020年数学主题分类。主要分类：17B37。次要分类：05E10, 16T20。

1 引言

q-Onsager 代数（记作 O_q）最早出现在代数图论这一主题中 [12, 引理 5.4]。关于 O_q 在代数组合学中的应用，已有许多论文讨论，包括 [10, 11, 13]。近年来，代数 O_q 已应用于统计力学 [1–3,5,7] 以及量子群 [6, 第 2 节.2]。代数 O_q 由生成元 W_0、W_1 以及两个称为 q-Dolan-Grady 关系的关系定义。

我们提到过， O_q 会出现在统计力学中；下面对此展开说明。在 [5, eqn. 4], Pascal Baseilhac 和 Kozo Koizumi 研究具有隐藏

对称性的边界可积系统上的算子时，描述了一个类似于的代数。沿用 [16], ，我们将此代数记为 $\mathcal{O}_q$。该代数由生成元和关系定义。生成元为

$$\{\mathcal{W}_{-k}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\mathcal{W}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\mathcal{G}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}. \tag{1}$$

这些关系见 [7, 定义 3.1], 以及下文的定义 3.5。 $\mathcal{O}_q$ 的名称和记号随着时间推移而有所演变；目前称为 q-Onsager 代数的交错中心扩张，如 [15]所述。方程 (1) 中列出的元素称为 $\mathcal{O}_q$的交替生成元；参见 [15] 和[16]。

受 [5], 启发，Paul Terwilliger 在 [15] 中证明，存在一个代数同构，将 $\mathcal{O}_q$ 映射到 O_q 与以可数多个交换变量构成的多项式代数的张量积。我们将此同构记为 φ，并将这些变量记为$\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$。对于 $i \geq 1$，令 $\mathcal{Z}_i \in \mathcal{O}_q$ 表示$1 \otimes z_i$在 φ下的原像。根据 [16,定义 11.2], ，存在一个代数同态 γ： $\mathcal{O}_q \mapsto O_q$，它将 $\mathcal{W}_0 \mapsto W_0$、 $\mathcal{W}_1 \mapsto W_1$和 $\mathcal{Z}_i \mapsto 0$ 映射为 $i \geq 1$。

γ对 $\mathcal{O}_q$ 交替生成元的像称为 O_q的交错元素。根据构造， O_q 的每个交错元素都是关于W_0 和 W_1的多项式。这些多项式的递归公式已知；见 [15,引理 8.22]。然而，目前尚无这些多项式的闭式。

本文讨论一种代数 T_q，称为量子环面 [9]。代数 T_q 由生成元 x、 y、 x^{-1}、 y^{-1} 以及以下关系定义：

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x, \qquad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y, \qquad xy = q^2yx.$$

It i众所周知，元素 $\{x^iy^j | i, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 T_q的一组基；见 [9, 第 3 页。].

本文引入代数同态 p： $O_q \to T_q$ ，它将$W_0 \mapsto x + x^{-1}$ 和 $W_1 \mapsto y + y^{-1}$映为.....。我们考察 O_q的交错元素在 p下的像。本文的主要目标是用上述基以闭式表示这些 p像。为实现这一目标，我们使用生成函数。我们给出主要结果的两个版本：一个用生成函数表示，另一个则不使用生成函数。本文的主要结果是定理 8.1 和定理 9.1。

本文的结构如下。在第 3–5 节中，我们给出关于 $\mathcal{O}_q$、 O_q 和 T_q的定义和结果。第 6 节介绍生成函数，第 7 节给出记号和公式。第 8 节以生成函数的形式陈述并证明我们的主要结果。第 9 节则不使用生成函数来陈述我们的主要结果。

2 记号

在本文中 本节将介绍一些贯穿全文使用的记号 .

- 设 K 为特征为 0 的域。
- 本文中的所有代数都是结合的、含幺的，且定义在 K 上。
- 对于任意代数中的 u、v，定义 $[u,v]=uv-vu$。我们称 $[u,v]$ 为 u 与 v 的交换子。对于非零的 $r\in K$，定义 $[u,v]_r=ruv-r^{-1}vu$。我们称 $[u,v]_r$ 为 u 与 v 的 r-交换子。
- 固定一个非零的 $q\in K$。
- 令 $\mathbb{N}$ 表示自然数集 $\{0,1,2,\ldots\}$。令 $\mathbb{Z}$ 表示整数集。令 $\mathbb{C}$ 表示复数集。
- 对于 $n\in\mathbb{N}$，定义 $[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$。我们采用文献 [14] 中的记号。
- 代数 $\mathcal{A}$ 的自同构是指从 $\mathcal{A}$ 到其自身的代数同构。
- 代数 $\mathcal{A}$的反代数，记作 $\mathcal{A}^{op}$，是定义在向量空间 $\mathcal{A}$ 上的代数，其乘法满足：对于 a、$b\in\mathcal{A}^{op}$、ab（属于 $\mathcal{A}^{op}$），有 $=ba$（属于 $\mathcal{A}$）。注意，如果 $\mathcal{A}$ 是交换的，那么 $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{op}$。
- 代数 $\mathcal{A}$的反自同构，是指从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}^{op}$的代数同构。换言之，$\mathcal{A}$ 的反自同构是一个 K-线性双射 $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，它反转乘法的顺序：对于所有 a、$b\in\mathcal{A}$，均有 $\alpha(ab)=\alpha(b)\alpha(a)$。

3 q-Onsager 代数

本节中，我们考察 q-Onsager 代数及其交替中心扩张。

定义 3.1. 令 O_q 表示由生成元 W_0、W_1 及以下关系定义的代数

$$[W_0,[W_0,[W_0,W_1]_q]_{q^{-1}}]=-(q^2-q^{-2})^2[W_0,W_1], \tag{2}$$
$$[W_1,[W_1,[W_1,W_0]_q]_{q^{-1}}]=-(q^2-q^{-2})^2[W_1,W_0]. \tag{3}$$

我们称 O_q 为 q-Onsager 代数。

方程 (2) 和 (3) 称为 q-Dolan-Grady 关系。我们定义 O_q 的一个自同构和一个反自同构。

引理3.2。（参见 [16, 引理 3.3]。）存在一个自同构 σ，它将 O_q 映射为

$$W_0\mapsto W_1,\qquad W_1\mapsto W_0.$$

引理 3.3。（参见 [16, 引理 3.4]。）存在一个反自同构 $\dagger$，它将 O_q映射为

$$W_0 \mapsto W_0, \qquad W_1 \mapsto W_1.$$

引理 3.4. 参见引理 3.2 和引理 3.3，我们有 $\sigma \circ \dagger = \dagger \circ \sigma$ 属于 O_q。也就是说，该图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} O_q & \xrightarrow{\dagger} & O_q \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ O_q & \xrightarrow[\dagger]{} & O_q \end{array}$$

证明。沿着图表追踪 W_0 和 W_1。 □

我们回顾 O_q的交错中心扩张。

定义 3.5.（参见 [7, 定义 3.1]）由生成元定义代数 $\mathcal{O}_q$

$$\{\mathcal{W}_{-k}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\mathcal{W}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\mathcal{G}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \qquad \{\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}, \tag{4}$$

以及以下关系。对于 k、$\ell \in \mathbb{N}$,

$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_{k+1}] = [\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_1] = (\tilde{\mathcal{G}}_{k+1} - \mathcal{G}_{k+1})/(q + q^{-1}), \tag{5}$$
$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{G}_{k+1}]_q = [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_0]_q = \rho\mathcal{W}_{-k-1} - \rho\mathcal{W}_{k+1}, \tag{6}$$
$$[\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_1]_q = [\mathcal{W}_1, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}]_q = \rho\mathcal{W}_{k+2} - \rho\mathcal{W}_{-k}, \tag{7}$$
$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{-\ell}] = 0, \tag{8}$$
$$[\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_{\ell+1}] = 0, \tag{9}$$
$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{\ell+1}] + [\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_{-\ell}] = 0, \tag{10}$$
$$[\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{G}_{\ell+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_{-\ell}] = 0, \tag{11}$$
$$[\mathcal{W}_{-k}, \tilde{\mathcal{G}}_{\ell+1}] + [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_{-\ell}] = 0, \tag{12}$$
$$[\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{\ell+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{W}_{\ell+1}] = 0, \tag{13}$$
$$[\mathcal{W}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{\ell+1}] + [\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{W}_{\ell+1}] = 0, \tag{14}$$
$$[\mathcal{G}_{k+1}, \mathcal{G}_{\ell+1}] = 0, \tag{15}$$
$$[\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{\ell+1}] = 0, \tag{16}$$
$$[\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}, \mathcal{G}_{\ell+1}] + [\mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{\ell+1}] = 0. \tag{17}$$

在这些方程中，$\rho = -(q^2 - q^{-2})^{2}$。

代数 $\mathcal{O}_q$ 称为 O_q的交错中心扩张。(4) 中的元素称为 $\mathcal{O}_q$ 的交替生成元。

为记号方便，定义

$$\mathcal{G}_0 = -(q - q^{-1})(q + q^{-1})^2, \qquad \tilde{\mathcal{G}}_0 = -(q - q^{-1})(q + q^{-1})^2.$$

在本节余下部分，我们将说明 O_q 和 $\mathcal{O}_q$ 之间的关系。

命题 3.6。（参见 [3,第 3] 节。）在 $\mathcal{O}_q$ 中，我们有

$$[\mathcal{W}_0,[\mathcal{W}_0,[\mathcal{W}_0,\mathcal{W}_1]_q]_{q^{-1}}] = -(q^2-q^{-2})^2[\mathcal{W}_0,\mathcal{W}_1],$$
$$[\mathcal{W}_1,[\mathcal{W}_1,[\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_0]_q]_{q^{-1}}] = -(q^2-q^{-2})^2[\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_0].$$

我们定义了 O_q 的一个自同构和一个反自同构。我们为 $\mathcal{O}_q$ 定义类似的映射。

引理 3.7。（参见 [15,引理 3.1]。）存在 $\mathcal{O}_q$ 的一个自同构 σ，它将

$$\mathcal{W}_{-k}\mapsto\mathcal{W}_{k+1},\qquad \mathcal{W}_{k+1}\mapsto\mathcal{W}_{-k},\qquad \mathcal{G}_{k+1}\mapsto\tilde{\mathcal{G}}_{k+1},\qquad \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}\mapsto\mathcal{G}_{k+1}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立。

引理 3.8。（参见 [15, 引理 3.2]。）存在 $\mathcal{O}_q$ 的一个反自同构 $\dagger$，它将

$$\mathcal{W}_{-k}\mapsto\mathcal{W}_{-k},\qquad \mathcal{W}_{k+1}\mapsto\mathcal{W}_{k+1},\qquad \mathcal{G}_{k+1}\mapsto\tilde{\mathcal{G}}_{k+1},\qquad \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}\mapsto\mathcal{G}_{k+1}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立。

引理 3.9。此图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_q & \xrightarrow{\dagger} & \mathcal{O}_q\\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma}\\ \mathcal{O}_q & \xrightarrow[\dagger]{} & \mathcal{O}_q\end{array}$$

证明。沿着图表追踪 $\mathcal{O}_q$ 的交替生成元。 □

下面引入一些记号。设 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为两两交换的不定元。令 $K[z_1,z_2,\ldots]$ 表示以 K中的系数构成的 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的多项式代数。

命题 3.10。存在一个代数同构

$$\phi : O_q\otimes K[z_1,z_2,\ldots]\mapsto\mathcal{O}_q$$

使得

$$\phi(W_0\otimes 1)=\mathcal{W}_0,\qquad\qquad \phi(W_1\otimes 1)=\mathcal{W}_1,$$

且这些图表交换：

$$\begin{array}{ccc}O_q\otimes K[z_1,z_2,\ldots] & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_q\\ {\scriptstyle\sigma\otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma}\\ O_q\otimes K[z_1,z_2,\ldots] & \xrightarrow[\phi]{} & \mathcal{O}_q\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}O_q\otimes K[z_1,z_2,\ldots] & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_q\\ {\scriptstyle\dagger\otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\dagger}\\ O_q\otimes K[z_1,z_2,\ldots] & \xrightarrow[\phi]{} & \mathcal{O}_q.\end{array}$$

证明。映射 ϕ 是 [16, 命题 8.8]中定义的同构。这些图表根据 [16, 命题 8.9]交换。 □

定义 3.11. 对于 $i \geq 1$，定义 $\mathcal{Z}_i = \phi(1 \otimes z_i)$。为方便记号，定义 $\mathcal{Z}_0 = (q+q^{-1})^2$。

引理 3.12. 元素

$$\mathcal{W}_0, \qquad \mathcal{W}_1, \qquad \{\mathcal{Z}_i\}_{i=1}^{\infty}$$

生成 $\mathcal{O}_q$。此外，元素 $\{\mathcal{Z}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{O}_q$中是中心的。

证明. 根据命题 3.10，并且由于 $1 \otimes z_i$ 在 $O_q \otimes K[z_1, z_2, \ldots]$ 中对于$i \geq 1$.是中心的 □

定义 3.13. 定义一个代数同态 $\epsilon:\ K[z_1, z_2, \ldots] \mapsto K$，将 $z_i \mapsto 0$ 映射为 $i \geq 1$.

定义 3.14.（参见 [16, 定义 11.2]。）令 $\gamma:\ \mathcal{O}_q \mapsto O_q$ 表示复合

$$\gamma: \quad \mathcal{O}_q \xrightarrow{\phi^{-1}} O_q \otimes K[z_1, z_2, \ldots] \xrightarrow{id \otimes \epsilon} O_q \otimes K \xrightarrow{x \otimes 1 \mapsto x} O_q,$$

其中 ϕ 来自命题 3.10。

注意，γ 是一个代数同态。

引理 3.15。映射 γ 将

$$\mathcal{W}_0 \mapsto W_0, \qquad \mathcal{W}_1 \mapsto W_1, \qquad \mathcal{Z}_i \mapsto 0, \quad i \geq 1.$$

证明。由定义 3.14 可直接得到。 □

定义 3.16。（参见 [16, 定义 11.5]。）对于 $k \in \mathbb{N}$，定义

$$W_{-k} = \gamma(\mathcal{W}_{-k}), \qquad W_{k+1} = \gamma(\mathcal{W}_{k+1}), \qquad G_{k+1} = \gamma(\mathcal{G}_{k+1}), \qquad \tilde{G}_{k+1} = \gamma(\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}).$$

我们称这些元素为 O_q的交错元素。为方便记号，定义

$$G_0 = -\left(q - q^{-1}\right)\left(q + q^{-1}\right)^2, \qquad \tilde{G}_0 = -\left(q - q^{-1}\right)\left(q + q^{-1}\right)^2.$$

引理 3.17。这些图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_q & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O}_q \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ O_q & \xrightarrow[\sigma]{} & O_q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_q & \xrightarrow{\dagger} & \mathcal{O}_q \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ O_q & \xrightarrow[\dagger]{} & O_q \end{array}$$

证明。沿着每个图表追踪 $\mathcal{W}_0$、$\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{Z}_i$。 □

推论 3.18。取 $k \in \mathbb{N}$. 自同构 σ 将 O_q 映射为

$$W_{-k} \mapsto W_{k+1}, \qquad W_{k+1} \mapsto W_{-k}, \qquad G_{k+1} \mapsto \tilde{G}_{k+1}, \qquad \tilde{G}_{k+1} \mapsto G_{k+1}.$$

O_q 的反自同构 † 将其映射为

$$W_{-k} \mapsto W_{-k}, \qquad W_{k+1} \mapsto W_{k+1}, \qquad G_{k+1} \mapsto \tilde{G}_{k+1}, \qquad \tilde{G}_{k+1} \mapsto G_{k+1}.$$

证明。 沿着引理 3.17 中的图表追踪 $\mathcal{W}_{-k}$、$\mathcal{W}_{k+1}$、$\mathcal{G}_{k+1}$ 和 $\mathcal{G}_{k+1}$。 □

4 量子环面

本节将考察一种称为量子环面的代数，记作 T_q。我们回顾 T_q 的一些性质，并给出向量空间 T_q 的一个基。然后，我们引入代数同态 p: $O_q \mapsto T_q$，并考察 O_q 的交错元素在 p 下的像。

定义 4.1.（参见 [9]。）定义代数 T_q，其生成元为

$$x, y, x^{-1}, y^{-1}$$

且满足以下关系

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x, \qquad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y, \qquad xy = q^2yx. \tag{18}$$

代数 T_q 称为量子环面。

引理 4.2. 在 T_q 中成立以下关系：

$$\begin{aligned} xy &= q^2yx, \\ x^{-1}y &= q^{-2}yx^{-1}, \\ x^{-1}y^{-1} &= q^2y^{-1}x^{-1}, \\ xy^{-1} &= q^{-2}y^{-1}x. \end{aligned}$$

证明。由 (18) 中的关系可直接推出。 □

我们给出向量空间 T_q 的一组基。

引理 4.3。（参见 [9, 第 3] 页。）向量空间 T_q 的一组基由 $\{x^ay^b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 构成。

定义 4.4。对于代数 T_q，定义

$$w_0 = x + x^{-1}, \qquad w_1 = y + y^{-1}. \tag{19}$$

我们描述 w_0 和 w_1 之间的关系。

引理 4.5。在代数 T_q 中，我们有

$$[w_0, [w_0, w_1]_q]_{q^{-1}} = -(q^2 - q^{-2})^2 w_1, \tag{20}$$
$$[w_1, [w_1, w_0]_q]_{q^{-1}} = -(q^2 - q^{-2})^2 w_0. \tag{21}$$

证明。将 (20) 和 (21) 用 x 和 y 表示，再利用引理 4.2 化简所得结果。 □

备注。定义 4.4 和引理 4.5 的一个变体可见于 [4, 式 (30) 以及式 (32) 上方]。

推论 4.6。在代数 T_q 中，我们有

$$[w_0,[w_0,[w_0,w_1]_q]_{q^{-1}}] = -(q^2-q^{-2})^2[w_0,w_1], \tag{22}$$
$$[w_1,[w_1,[w_1,w_0]_q]_{q^{-1}}] = -(q^2-q^{-2})^2[w_1,w_0]. \tag{23}$$

证明。为得到方程 (22)，将 w_0 与方程 (20) 两边分别取交换子。为得到方程 (23)，将 w_1 与方程 (21) 两边分别取交换子。

□

命题 4.7. 存在一个代数同态 $p:\ O_q \mapsto T_q$，其将 $W_0 \mapsto w_0$ 发送到 $W_1 \mapsto w_1$。

证明。推论 4.6 中的关系是 q-Dolan-Grady 关系。 □

定义 4.8. 对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 T_q 的以下元素：

$$w_{-k} = p(W_{-k}), \quad w_{k+1} = p(W_{k+1}), \quad g_{k+1} = p(G_{k+1}), \quad \tilde{g}_{k+1} = p(\tilde{G}_{k+1}). \tag{24}$$

(24) 中的元素称为 T_q 的交错元素。

为方便记号，我们定义

$$g_0 = -\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^2, \qquad \tilde{g}_0 = -\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^2.$$

由于 O_q 由 W_0 和 W_1生成， O_q 的交错元素是关于 W_0 和 W_1的多项式。然而，目前只知道这些多项式的递归公式。对于 T_q，情况则有所不同。我们将用引理 4.3 中给出的 T_q 的基来表示 T_q 的交错元素。这将为 T_q的交错元素提供简洁的闭式。

5 T_q的一个自同构和反自同构

在本节中，我们定义 T_q的一个自同构和一个反自同构。

引理 5.1. 存在 T_q 的一个自同构 τ，它将

$$x \mapsto y^{-1}, \qquad y \mapsto x, \qquad x^{-1} \mapsto y, \qquad y^{-1} \mapsto x^{-1}.$$

证明. 定义

$$x_\tau = y^{-1}, \quad y_\tau = x, \quad (x^{-1})_\tau = y, \quad (y^{-1})_\tau = x^{-1}.$$

直接验证可知， x_τ、 y_τ、$(x^{-1})_\tau$和 $(y^{-1})_\tau$满足 (18) 中的定义关系。

因此，存在一个代数同态 $\tau:\ T_q \to T_q$，它将

$$x \mapsto x_\tau, \qquad y \mapsto y_\tau, \qquad x^{-1} \mapsto (x^{-1})_\tau, \qquad y^{-1} \mapsto (y^{-1})_\tau.$$

注意到 τ^4固定了 x、 y、 x^{-1}和 y^{-1}。因此， τ^4是恒等映射，所以映射 τ是可逆的。故 τ是 T_q的自同构。 □

引理 5.2. 存在一个 T_q 的反自同构 $\ddagger$，它将

$$x \mapsto x^{-1}, \qquad y \mapsto y, \qquad x^{-1} \mapsto x, \qquad y^{-1} \mapsto y^{-1}.$$

证明。定义

$$x_\ddagger = x^{-1}, \qquad y_\ddagger = y, \qquad (x^{-1})_\ddagger = x, \qquad (y^{-1})_\ddagger = y^{-1}.$$

反代数 T_q^{op}在第 2 节中有说明。根据该说明和（18），T_q^{op}的定义关系为

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x, \qquad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y, \qquad yx = q^2xy.$$

这些关系由 $x_\ddagger$、$y_\ddagger$、$x_\ddagger^{-1}$、$y_\ddagger^{-1}$ 满足。

因此，存在一个代数同态 $\ddagger\colon\ T_q \to T_q^{\mathrm{op}}$，其发送

$$x \mapsto x_\ddagger, \qquad y \mapsto y_\ddagger, \qquad x^{-1} \mapsto (x^{-1})_\ddagger, \qquad y^{-1} \mapsto (y^{-1})_\ddagger.$$

注意到 $\ddagger^2$ 固定 x、y、x^{-1}和 y^{-1}，因此 $\ddagger^2$ 是 T_q的恒等映射。由此可知，$\ddagger$ 是一个双射，因而是 T_q的反自同构。

□

引理 5.3。这些图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} O_q & \xrightarrow{\sigma} & O_q \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T_q & \xrightarrow[\tau]{} & T_q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} O_q & \xrightarrow{\dagger} & O_q \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T_q & \xrightarrow[\ddagger]{} & T_q \end{array}$$

证明。沿着每个图表追踪 W_0 和 W_1。 □

6 一些生成函数

本文的目标是将 T_q 的交错元素写成引理 4.3 中的基。我们使用生成函数来实现这一点。本节定义这些生成函数，并讨论它们的性质。

定义 6.1。（参见 [16, 定义 7.1]。）对于代数 $\mathcal{O}_q$，定义生成函数

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^-(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{W}_{-i} t^i, & \mathcal{W}^+(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{W}_{i+1} t^i, \\ \mathcal{G}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i t^i, & \tilde{\mathcal{G}}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}_i t^i. \end{aligned} \tag{25}$$

定义 6.2。（参见 [16, 定义 12.1]。）对于代数 O_q，定义生成函数

$$\begin{aligned} W^-(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} W_{-i} t^i, & W^+(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} W_{i+1} t^i, \\ G(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} G_i t^i, & \tilde{G}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{G}_i t^i. \end{aligned} \tag{26}$$

定义 6.3。对于代数 T_q，定义生成函数

$$\begin{aligned} w^-(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} w_{-i} t^i, & w^+(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} w_{i+1} t^i, \\ g(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i t^i, & \tilde{g}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{g}_i t^i. \end{aligned} \tag{27}$$

回忆定义 3.14 中的代数同态 γ。

引理 6.4。映射 γ 将式 (25) 中的生成函数映射为式 (26) 中的生成函数，如下所示。

$argument\ in\ \mathcal{O}_q$	$\mathcal{W}^-(t)$	$\mathcal{W}^+(t)$	$\mathcal{G}(t)$	$\tilde{\mathcal{G}}(t)$
$image\ in\ O_q$	$W^-(t)$	$W^+(t)$	$G(t)$	$\tilde{G}(t)$

证明。根据定义 3.16。 □

回忆命题 4.7 中的代数同态 p。

引理 6.5。映射 p 将式 (26) 中的生成函数映射为式 (27) 中的生成函数，如下所示。

$argument\ in\ O_q$	$W^-(t)$	$W^+(t)$	$G(t)$	$\tilde{G}(t)$
$image\ in\ T_q$	$w^-(t)$	$w^+(t)$	$g(t)$	$\tilde{g}(t)$

证明。根据定义 4.8。 □

接下来，我们用生成函数表示关系 (5)–(17)。

引理 6.6。（参见 [16,引理 7.2]。）以下关系在代数中成立

$\mathcal{O}_q$.

$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}^+(t)] = [\mathcal{W}^-(t), \mathcal{W}_1] = t^{-1}(\tilde{\mathcal{G}}(t) - \mathcal{G}(t))/(q + q^{-1}), \tag{28}$$
$$[\mathcal{W}_0, \mathcal{G}(t)]_q = [\tilde{\mathcal{G}}(t), \mathcal{W}_0]_q = \rho\mathcal{W}^-(t) - \rho t\mathcal{W}^+(t), \tag{29}$$
$$[\mathcal{G}(t), \mathcal{W}_1]_q = [\mathcal{W}_1, \tilde{\mathcal{G}}(t)]_q = \rho\mathcal{W}^+(t) - \rho t\mathcal{W}^-(t), \tag{30}$$
$$[\mathcal{W}^-(s), \mathcal{W}^-(t)] = 0, \qquad [\mathcal{W}^+(s), \mathcal{W}^+(t)] = 0, \tag{31}$$
$$[\mathcal{W}^-(s), \mathcal{W}^+(t)] + [\mathcal{W}^+(s), \mathcal{W}^-(t)] = 0, \tag{32}$$
$$s[\mathcal{W}^-(s), \mathcal{G}(t)] + t[\mathcal{G}(s), \mathcal{W}^-(t)] = 0, \tag{33}$$
$$s[\mathcal{W}^-(s), \tilde{\mathcal{G}}(t)] + t[\tilde{\mathcal{G}}(s), \mathcal{W}^-(t)] = 0, \tag{34}$$
$$s[\mathcal{W}^+(s), \mathcal{G}(t)] + t[\mathcal{G}(s), \mathcal{W}^+(t)] = 0, \tag{35}$$
$$s[\mathcal{W}^+(s), \tilde{\mathcal{G}}(t)] + t[\tilde{\mathcal{G}}(s), \mathcal{W}^+(t)] = 0, \tag{36}$$
$$[\mathcal{G}(s), \mathcal{G}(t)] = 0, \qquad [\tilde{\mathcal{G}}(s), \tilde{\mathcal{G}}(t)] = 0, \tag{37}$$
$$[\tilde{\mathcal{G}}(s), \mathcal{G}(t)] + [\mathcal{G}(s), \tilde{\mathcal{G}}(t)] = 0. \tag{38}$$

在这些方程中， $\rho = -(q^2 - q^{-2})^2$。我们将注意力转向 O_q。

引理 6.7。以下方程在代数 O_q 中成立。

$$[W_0, W^+(t)] = [W^-(t), W_1] = t^{-1}(\tilde{G}(t) - G(t))/(q + q^{-1}), \tag{39}$$
$$[W_0, G(t)]_q = [\tilde{G}(t), W_0]_q = \rho W^-(t) - \rho t W^+(t), \tag{40}$$
$$[G(t), W_1]_q = [W_1, \tilde{G}(t)]_q = \rho W^+(t) - \rho t W^-(t), \tag{41}$$
$$[W^-(s), W^-(t)] = 0, \qquad [W^+(s), W^+(t)] = 0, \tag{42}$$
$$[W^-(s), W^+(t)] + [W^+(s), W^-(t)] = 0, \tag{43}$$
$$s[W^-(s), G(t)] + t[G(s), W^-(t)] = 0, \tag{44}$$
$$s[W^-(s), \tilde{G}(t)] + t[\tilde{G}(s), W^-(t)] = 0, \tag{45}$$
$$s[W^+(s), G(t)] + t[G(s), W^+(t)] = 0, \tag{46}$$
$$s[W^+(s), \tilde{G}(t)] + t[\tilde{G}(s), W^+(t)] = 0, \tag{47}$$
$$[G(s), G(t)] = 0, \qquad [\tilde{G}(s), \tilde{G}(t)] = 0, \tag{48}$$
$$[\tilde{G}(s), G(t)] + [G(s), \tilde{G}(t)] = 0. \tag{49}$$

证明。将映射 γ 应用于关系 (28)–(38)。 □

现在我们将注意力转向 T_q。

引理 6.8。以下方程在代数 T_q 中成立。

$$[w_0, w^+(t)] = [w^-(t), w_1] = t^{-1}(\tilde{g}(t) - g(t))/(q + q^{-1}), \tag{50}$$
$$[w_0, g(t)]_q = [\tilde{g}(t), w_0]_q = \rho w^-(t) - \rho t w^+(t), \tag{51}$$
$$[g(t), w_1]_q = [w_1, \tilde{g}(t)]_q = \rho w^+(t) - \rho t w^-(t), \tag{52}$$
$$[w^-(s), w^-(t)] = 0, \qquad [w^+(s), w^+(t)] = 0, \tag{53}$$
$$[w^-(s), w^+(t)] + [w^+(s), w^-(t)] = 0, \tag{54}$$
$$s[w^-(s), g(t)] + t[g(s), w^-(t)] = 0, \tag{55}$$
$$s[w^-(s), \tilde{g}(t)] + t[\tilde{g}(s), w^-(t)] = 0, \tag{56}$$
$$s[w^+(s), g(t)] + t[g(s), w^+(t)] = 0, \tag{57}$$
$$s[w^+(s), \tilde{g}(t)] + t[\tilde{g}(s), w^+(t)] = 0, \tag{58}$$
$$[g(s)\ \ g(t)] = 0, \qquad [\tilde{g}(s)\ \ \tilde{g}(t)] = 0, \tag{59}$$
$$[\tilde{g}(s), g(t)] + [g(s), \tilde{g}(t)] = 0. \tag{60}$$

证明。将映射 p应用于关系 (39)–(49)。 □

7 生成函数 $\omega(t)$

在本节中，我们将引入一个稍后会派上用场的函数 .

定义 7.1。定义生成函数

$$\omega(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} \left(\frac{t}{q + q^{-1}}\right)^{2i}.$$

注意， $\omega(0) = 1$。

备注：函数 $\omega(t)$ 是以下内容的幂级数展开：

$$\left(1 - \frac{4t^2}{(q + q^{-1})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

然而，我们不会利用这一事实。

定义

$$T = \frac{q + q^{-1}}{qt + q^{-1}t^{-1}}, \qquad S = \frac{q + q^{-1}}{qt^{-1} + q^{-1}t}. \tag{61}$$

根据 [15]，我们将 T 和 S 表示为幂级数：

$$T = (q + q^{-1}) \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} q^{2\ell+1} t^{2\ell+1}, \qquad S = (q + q^{-1}) \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} q^{-(2\ell+1)} t^{2\ell+1}. \tag{62}$$

引理 7.2. 以下恒等式成立：

$$\omega(T) = \frac{1 + q^2 t^2}{1 - q^2 t^2}, \qquad \omega(S) = \frac{1 + q^{-2} t^2}{1 - q^{-2} t^2}. \tag{63}$$

证明。我们首先验证 (63) 中左侧的方程。由 (61) 和定义 7.1 可得

$$\omega(T) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{qt + q^{-1}t^{-1}} \right)^{2i}.$$

回顾牛顿二项式定理的一个特殊情形 [8,定理 5.5。1], 该定理指出，对于任意整数 a,

$$(1+z)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} z^j,$$

其中定义

$$\binom{a}{j} = \frac{a(a-1)\cdots(a-j+1)}{j!}.$$

容易验证

$$\binom{-a}{j} = (-1)^j \binom{a+j-1}{j}.$$

我们将 $(1+q^2t^2)^{-1}\omega(T)$ 表示为关于 t 的幂级数。我们有

$$\begin{aligned}
(1+q^2t^2)^{-1}\omega(T) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} \frac{(qt)^{2i}}{(1+q^2t^2)^{2i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} q^{2i}t^{2i} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{2i+j}{j} q^{2j}t^{2j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2i}{i} q^{2n}t^{2n} \binom{n+i}{n-i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{2n}t^{2n}
\end{aligned}$$

其中

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2i}{i} \binom{n+i}{n-i}. \tag{64}$$

我们断言，对于所有 $n \geq 0$ 都有 $c_n = 1$。设 n 已给定，并考虑表达式

$$\psi(x) = (1-x)^{-n-1} (1-x)^n. \tag{65}$$

我们将用两种方法计算 x^n 的系数。首先，注意到

$$\psi(x) = (1-x)^{-n-1} (1-x)^n = (1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

因此， $\psi(x)$中 x^n 的系数等于 1。

其次，我们利用牛顿二项式定理展开 (65)。有

$$\psi(x) = (1-x)^{-n-1}(1-x)^n = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s+i} \binom{n+i}{i} \binom{n}{s-i}. \tag{66}$$

在 (66) 右侧的双重求和中， x^n 的系数为

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \binom{n+i}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2i}{i} \binom{n+i}{n-i}. \tag{67}$$

(67) 的右侧与 (64) 的右侧相同，因此等于c_n。由此，我们证明了 $c_n = 1$, 该断言得证。根据该断言，我们有

$$(1+q^2t^2)^{-1}\omega(T) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}t^{2n} = \frac{1}{1-q^2t^2}.$$

我们验证了 (63) 左侧的方程。(63) 右侧的方程也可类似地验证。

□

8 第一个主要结果

回顾定义 6.3 中的生成函数。本节中，我们将这些生成函数表示为引理 4.3 中给出的 T_q 的基。现在陈述我们的第一个主要结果。

定理 8.1。在代数 T_q中,

$$w^-(t) = \omega(t)\left(x + x^{-1}\right), \tag{68}$$
$$w^+(t) = \omega(t)\left(y + y^{-1}\right), \tag{69}$$
$$g(t) = \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(t(qx^{-1}y + qxy^{-1}) - q - q^{-1}\right), \tag{70}$$
$$\tilde{g}(t) = \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(t(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}) - q - q^{-1}\right). \tag{71}$$

定理 8.1 将在本节末尾证明。

定义 8.2。在代数 $\mathcal{O}_q$中，定义

$$\mathcal{Z}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{Z}_i \left(q + q^{-1}\right)^i t^i,$$

其中 $\mathcal{Z}_i$ 来自定义 3.11。

我们给出关于 $\mathcal{Z}(t)$ 的两个引理。回顾式 (61) 中的 S、 T，以及定义 3.14 中的同态 γ。

引理 8.3. 映射 γ 将 $\mathcal{Z}(t) \mapsto (q+q^{-1})^2$。

证明. 根据引理 3.15， $\gamma(\mathcal{Z}_i) = 0$ 对于 $i \geq 1$。回顾定义 3.11， $\mathcal{Z}_0 = (q+q^{-1})^2$。结论得证。 □

引理 8.4。（见 [15, 定义 8.4]。）在代数 $\mathcal{O}_q$ 中，

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(t) = t^{-1}ST\mathcal{W}^-(S)\mathcal{W}^+(T) + tST\mathcal{W}^+(S)\mathcal{W}^-(T) - q^2ST\mathcal{W}^-(S)\mathcal{W}^-(T) \\ - q^{-2}ST\mathcal{W}^+(S)\mathcal{W}^+(T) + (q^2-q^{-2})^{-2}\mathcal{G}(S)\tilde{\mathcal{G}}(T).\end{aligned} \tag{72}$$

证明。令 $\mathcal{Z}^c(t)$ 表示方程（72）右侧的表达式。我们使用（62）中的幂级数展开 S 和 T。这些展开式的常数项均为零，因此 $t^{-1}ST$ 可以写成关于 t 的幂级数。于是 $\mathcal{Z}^c(t)$ 是一个幂级数，我们将其表示为

$$\mathcal{Z}^c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{Z}_i^c (q+q^{-1})^i t^i.$$

对于 $i \geq 1$，映射 ϕ 根据引理 9.3], 将 $1 \otimes z_i \mapsto \mathcal{Z}_i^c$ 映射为 [15, ，因此 $\mathcal{Z}_i^c = \mathcal{Z}_i$。根据引理 8.18], ，我们有 $\mathcal{Z}_0^c = (q+q^{-1})^2 = \mathcal{Z}_0$。由这些观察可知，$\mathcal{Z}^c(t) = \mathcal{Z}(t)$，结论得证。 □

推论 8.5。在代数 O_q 中，

$$\begin{aligned}\left(q+q^{-1}\right)^2 = t^{-1}STW^-(S)W^+(T) + tSTW^+(S)W^-(T) - q^2STW^-(S)W^-(T) \\ - q^{-2}STW^+(S)W^+(T) + \left(q^2-q^{-2}\right)^{-2} G(S)\tilde{G}(T).\end{aligned} \tag{73}$$

证明。引理 8.3 和 8.4 的直接推论。 □

推论 8.6。在代数 T_q中，

$$\begin{aligned}\left(q+q^{-1}\right)^2 = t^{-1}STw^-(S)w^+(T) + tSTw^+(S)w^-(T) - q^2STw^-(S)w^-(T) \\ - q^{-2}STw^+(S)w^+(T) + \left(q^2-q^{-2}\right)^{-2} g(S)\tilde{g}(T).\end{aligned} \tag{74}$$

证明。对方程（73）的两边应用 p。 □

定理 8.1 的证明。由 [15, 引理 8.22], 可知，在 $\mathcal{O}_q$中存在一组唯一的生成函数，

$$\mathcal{W}_c^-(t), \qquad \mathcal{W}_c^+(t), \qquad \mathcal{G}_c(t), \qquad \tilde{\mathcal{G}}_c(t) \tag{75}$$

它们满足方程（28）–（38）、方程（72）以及以下条件

$$\mathcal{W}_c^-(0) = \mathcal{W}_0, \qquad \mathcal{W}_c^+(0) = \mathcal{W}_1. \tag{76}$$

将 $\rho \circ \gamma$ 应用于（75）和（76），可知在 T_q中存在一组唯一的生成函数，

$$w_c^-(t), \qquad w_c^+(t), \qquad g_c(t), \qquad \tilde{g}_c(t),$$

满足方程（50）–（60）、方程（74）以及以下条件

$$w_c^-(0) = w_0, \qquad w_c^+(0) = w_1. \tag{77}$$

我们将展示这一唯一解。下文中，我们定义

$$w_c^-(t), \qquad w_c^+(t), \qquad g_c(t), \qquad \tilde{g}_c(t)$$

依次为方程（68）–（71）的右端。

由于 $\omega(0) = 1$，这些候选项满足（77）。因此，只需证明这些候选项满足方程（74）和（50）–（60）。

我们从（74）开始。我们断言，在代数 T_q 中，

$$\begin{aligned}\left(q+q^{-1}\right)^2 = {} & t^{-1}STw_c^-(S)w_c^+(T) + tSTw_c^+(S)w_c^-(T) - q^2STw_c^-(S)w_c^-(T) \\ & - q^{-2}STw_c^+(S)w_c^+(T) + \left(q^2-q^{-2}\right)^{-2} g_c(S)\tilde{g}_c(T).\end{aligned} \tag{78}$$

为证明这一点，我们利用（61）和（63）计算方程（68）–（71），得到以下方程:

$$w_c^-(S) = \frac{1+q^{-2}t^2}{1-q^{-2}t^2}\left(x+x^{-1}\right), \tag{79}$$

$$w_c^+(S) = \frac{1+q^{-2}t^2}{1-q^{-2}t^2}\left(y+y^{-1}\right), \tag{80}$$

$$w_c^-(T) = \frac{1+q^2t^2}{1-q^2t^2}\left(x+x^{-1}\right), \tag{81}$$

$$w_c^+(T) = \frac{1+q^2t^2}{1-q^2t^2}\left(y+y^{-1}\right), \tag{82}$$

$$g_c(S) = \frac{(q+q^{-1})^2(q-q^{-1})(1+q^{-2}t^2)}{(1-q^{-2}t^2)(qt^{-1}+q^{-1}t)}\left(qxy^{-1}+qx^{-1}y-qt^{-1}-q^{-1}t\right), \tag{83}$$

$$\tilde{g}_c(T) = \frac{(q+q^{-1})^2(q-q^{-1})(1+q^2t^2)}{(1-q^2t^2)(qt+q^{-1}t^{-1})}\left(q^{-1}xy+q^{-1}x^{-1}y^{-1}-qt-q^{-1}t^{-1}\right). \tag{84}$$

为验证（78），我们利用方程（79）–（84）计算其右端的表达式。至此，我们已验证（78），进而验证了（74）。方程（50）–（60）可以直接验证。读者可参阅附录 A，了解更多细节。

至此，我们已验证候选函数满足（50）–（60）和（74），证明至此完成。□

9 第二个主要结果

在本节中，我们利用定理 8.1 中的公式，将 T_q 的交错元素表示为引理 4.3 中给出的 T_q 的基。

在本节中， j 是一个自然数。下面是我们的第二个主要结果。

定理 9.1。在下表中，我们将 T_q 的交错元素表示为 T_q 的基，其中使用了引理 4.3。对于 $k \in \mathbb{N}$,

	情形 $k = 2j$	情形 $k = 2j+1$
w_{k+1}	$\binom{2j}{j}(q+q^{-1})^{-2j}(y+y^{-1})$	0
w_{-k}	$\binom{2j}{j}(q+q^{-1})^{-2j}(x+x^{-1})$	0
g_k	$-\binom{2j}{j}(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{2-2j}$	$\binom{2j}{j}q(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{1-2j}(xy^{-1}+x^{-1}y)$
$\tilde{g}_k$	$-\binom{2j}{j}(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{2-2j}$	$\binom{2j}{j}q^{-1}(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{1-2j}(xy+x^{-1}y^{-1})$

证明。我们从 $\tilde{g}_k$ 开始。将（71）右侧的 $\omega(t)$ 展开，得到

$$\tilde{g}(t) = \left(q^2-q^{-2}\right)\left(t(q^{-1}xy+q^{-1}x^{-1}y^{-1})-(q+q^{-1})\right)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2i}{i}\frac{t^{2i}}{(q+q^{-1})^{2i}}. \quad (85)$$

我们考察 (85) 中 t^k 的系数，得到以下方程:

$$\tilde{g}_k = -\binom{2j}{j}\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^{2-2j} \qquad \text{for } k=2j, \quad (86)$$

$$\tilde{g}_k = \binom{2j}{j}\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^{1-2j}\left(q^{-1}xy+q^{-1}x^{-1}y^{-1}\right) \text{ for } k=2j+1. \quad (87)$$

展开 (70) 右侧的 $\omega(t)$，可得

$$g(t) = \left(q^2-q^{-2}\right)\left(t(qxy^{-1}+qx^{-1}y)-(q+q^{-1})\right)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2i}{i}\frac{t^{2i}}{(q+q^{-1})^{2i}}. \quad (88)$$

我们考察 (88) 中 t^k 的系数，得到以下方程:

$$g_k = -\binom{2j}{j}\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^{2-2j} \qquad \text{for } k=2j, \quad (89)$$

$$g_k = \binom{2j}{j}\left(q-q^{-1}\right)\left(q+q^{-1}\right)^{1-2j}\left(qxy^{-1}+qx^{-1}y\right) \quad \text{for } k=2j+1. \quad (90)$$

将（69）右侧的 $\omega(t)$ 展开，我们得到

$$w^+(t) = \left(y+y^{-1}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2i}{i}\frac{t^{2i}}{(q+q^{-1})^{2i}}. \quad (91)$$

我们考察（91）中 t^k 的系数，并得到以下方程:

$$w_{k+1} = \binom{2j}{j}\left(q+q^{-1}\right)^{-2j}\left(y+y^{-1}\right) \qquad \text{for } k=2j, \quad (92)$$

$$w_{k+1} = 0 \qquad \text{for } k=2j+1. \quad (93)$$

将 $\omega(t)$ 在（68）的右侧展开，得到

$$w^-(t) = \left(x + x^{-1}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} \frac{t^{2i}}{(q+q^{-1})^{2i}}. \tag{94}$$

我们考察 (94) 中 t^k 的系数，并得到以下方程:

$$w_{-k} = \binom{2j}{j} \left(q + q^{-1}\right)^{-2j} \left(x + x^{-1}\right) \qquad \text{for } k = 2j, \tag{95}$$

$$w_{-k} = 0 \qquad \text{for } k = 2j+1. \tag{96}$$

□

我们以一条评论结束本节。由定理 9.1 中给出的表可知， T_q 的每个交错元素都是以下九个元素的线性组合:

$$1, \quad x, \quad y, \quad x^{-1}, \quad y^{-1}, \quad xy, \quad xy^{-1}, \quad x^{-1}y, \quad x^{-1}y^{-1}.$$

上述元素线性无关。因此， T_q 的交错元素包含于 T_q的9维子空间中。

附录 A：定理 8.1 证明的详细内容

本附录阐明定理 8.1 的证明中的一些细节。我们旨在证明，(68)–(71)中的生成函数满足(50)–(60)中的关系。

为简化论证，我们利用自同构 τ 将 T_q 映射为

$$w^+(t) \mapsto w^-(t), \qquad w^-(t) \mapsto w^+(t), \qquad g(t) \mapsto \tilde{g}(t), \qquad \tilde{g}(t) \mapsto g(t).$$

我们分别考察 (50)–(60)。

- We show that $[w_0, w^+(t)] = [w^-(t), w_1]$.
  根据定义 4.4，我们有

$$\begin{aligned}[w_0, w^+(t)] &= [w_0, \omega(t)(y + y^{-1})] = \omega(t)[x + x^{-1}, y + y^{-1}] \\ &= [\omega(t)(x + x^{-1}), w_1] = [w^-(t), w_1].\end{aligned}$$

- 我们证明 $[w^-(t)\ w_1] = \frac{\tilde{g}(t) - g(t)}{t(q+q^{-1})}$.

  我们有

$$\begin{aligned}t^{-1}\frac{\tilde{g}(t) - g(t)}{q + q^{-1}} &= t^{-1}\frac{(q^2 - q^{-2})t\omega(t)(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1} - qxy^{-1} - qx^{-1}y)}{q + q^{-1}} \\ &= (q - q^{-1})\omega(t)(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1} - qxy^{-1} - qx^{-1}y) \\ &= \omega(t)[w_0, w_1] \\ &= [w^-(t), w_1].\end{aligned}$$

- 我们证明 $[w_0, g(t)]_q = \rho w^-(t) - \rho t w^+(t)$。
  我们有

$$\begin{aligned}[w_0, g(t)]_q &= qw_0g(t) - q^{-1}g(t)w_0 \\ &= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(q(x + x^{-1})(tqxy^{-1} + tqx^{-1}y - q - q^{-1})\right. \\ &\quad \left. -q^{-1}(tqxy^{-1} + tqx^{-1}y - q - q^{-1})(x + x^{-1})\right) \\ &= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left((tq^2y + tq^2x^{-2}y + tq^2y^{-1} + tq^2x^2y^{-1}\right. \\ &\quad - q^2x - q^2x^{-1} - x - x^{-1}) - (tq^{-2}y + tq^{-2}y^{-1} \\ &\quad \left. +tq^2x^{-2}y + tq^2x^2y^{-1} - x - x^{-1} - q^{-2}x - q^{-2}x^{-1})\right) \\ &= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(q^2 - q^{-2}\right)\left(ty + ty^{-1} - x - x^{-1}\right) \\ &= -\left(q^2 - q^{-2}\right)^2\left(w^-(t) - tw^+(t)\right) \\ &= \rho w^-(t) - \rho t w^+(t).\end{aligned}$$

- 我们证明 $[w_1, \tilde{g}(t)]_q = \rho w^+(t) - \rho t w^-(t)$。
  对上述方程应用 τ 自同构。

• 我们证明 $[\tilde{g}(t)\ w_0]_q = \rho w^-(t) - \rho t w^+(t)$。我
们有

$$\begin{aligned}
[\tilde{g}(t), w_0]_q &= q\tilde{g}(t)w_0 - q^{-1}w_0\tilde{g}(t) \\
&= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(q(tq^{-1}xy + tq^{-1}x^{-1}y^{-1} - q - q^{-1})(x + x^{-1})\right. \\
&\quad \left. -q^{-1}(x + x^{-1})(tq^{-1}xy + tq^{-1}x^{-1}y^{-1} - q - q^{-1})\right) \\
&= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left((tq^2y + tq^{-2}x^2y + tq^2y^{-1} + tq^{-2}x^{-2}y^{-1}\right. \\
&\quad -q^2x - q^2x^{-1} - x - x^{-1}) - (tq^{-2}y + tq^{-2}y^{-1} \\
&\quad \left. +tq^{-2}x^{-2}y^{-1} + tq^{-2}x^2y - x - x^{-1} - q^{-2}x - q^{-2}x^{-1})\right) \\
&= \left(q^2 - q^{-2}\right)\omega(t)\left(q^2 - q^{-2}\right)\left(ty + ty^{-1} - x - x^{-1}\right) \\
&= -\left(q^2 - q^{-2}\right)^2\left(w^-(t) - tw^+(t)\right) \\
&= \rho w^-(t) - \rho t w^+(t).
\end{aligned}$$

• 我们证明, $[g(t)\ w_1]_q = \rho w^+(t) - \rho t w^-(t)$。
将上述方程应用 τ 自同构。

• 我们证明, $[w^-(s)\ w^-(t)] = 0.$
我们有

$$[w^-(s), w^-(t)] = \omega(s)\omega(t)[x + x^{-1}, x + x^{-1}] = 0.$$

• 我们证明, $[w^+(s)\ w^+(t)] = 0.$
我们有

$$[w^+(s), w^+(t)] = \omega(s)\omega(t)[y + y^{-1}, y + y^{-1}] = 0.$$

• 我们证明 $[w^-(s)\ w^+(t)] + [w^+(s)\ w^-(t)] = 0.$
我们有

$$\begin{aligned}
[w^-(s), w^+(t)] = \omega(s)\omega(t)[x + x^{-1}, y + y^{-1}] &= -\omega(s)\omega(t)[y + y^{-1}, x + x^{-1}] \\
&= -[w^+(s), w^-(t)].
\end{aligned}$$

• 我们证明 $s[w^-(s)\ g(t)] + t[g(s)\ w^-(t)] = 0.$
我们有

$$\begin{aligned}
s[w^-(s), g(t)] &= (q^2 - q^{-2})s\omega(s)\omega(t)\left[x + x^{-1}, t(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1}\right] \\
&= (q^2 - q^{-2})st\omega(s)\omega(t)[x + x^{-1}, qxy^{-1} + qx^{-1}y] \\
&= -(q^2 - q^{-2})t\omega(t)\omega(s)\left[s(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1}, x + x^{-1}\right] \\
&= -t[g(s), w^-(t)].
\end{aligned}$$

• 我们证明 $s[w^+(s)\ \tilde{g}(t)] + t[\tilde{g}(s)\ w^+(t)] = 0.$
对上一个方程的两边分别应用 τ。

• 我们证明 $s[w^-(s)\ \tilde{g}(t)] + t[\tilde{g}(s)\ w^-(t)] = 0$.我们有

$$\begin{aligned} s[w^-(s), \tilde{g}(t)] &= (q^2 - q^{-2})s\omega(s)\omega(t)\left[x + x^{-1}, t(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}) - q - q^{-1}\right] \\ &= (q^2 - q^{-2})st\omega(s)\omega(t)[x + x^{-1}, q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}] \\ &= -(q^2 - q^{-2})t\omega(t)\omega(s)[s(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}) - q - q^{-1}, x + x^{-1}] \\ &= -t[\tilde{g}(s), w^-(t)]. \end{aligned}$$

• 我们证明 $s[w^+(s)\ g(t)] + t[g(s)\ w^+(t)] = 0$. 对前一个方程的两边应用 τ。

• 我们证明 $[g(s)\ g(t)] = 0$.
我们有

$$\begin{aligned} [g(s), g(t)] &= (q^2 - q^{-2})^2\omega(s)\omega(t)\left[s(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1},\right. \\ &\quad \left. t(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1}\right] \\ &= (q^2 - q^{-2})^2st\omega(s)\omega(t)[qxy^{-1} + qx^{-1}y, qxy^{-1} + qx^{-1}y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

• 我们证明 $[\tilde{g}(s)\ \tilde{g}(t)] = 0$.
对前一个方程的两边应用 τ

• 我们证明 $[\tilde{g}(s)\ g(t)] + [g(s)\ \tilde{g}(t)] = 0$.我们有

$$\begin{aligned} [\tilde{g}(s), g(t)] &= (q^2 - q^{-2})^2\omega(s)\omega(t)\left[s(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}) - q - q^{-1},\right. \\ &\quad \left. t(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1}\right] \\ &= (q^2 - q^{-2})^2st\omega(s)\omega(t)[q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}, qxy^{-1} + qx^{-1}y] \\ &= -(q^2 - q^{-2})^2\omega(s)\omega(t)\left[s(qxy^{-1} + qx^{-1}y) - q - q^{-1},\right. \\ &\quad \left. t(q^{-1}xy + q^{-1}x^{-1}y^{-1}) - q - q^{-1}\right] \\ &= -[g(s), \tilde{g}(t)]. \end{aligned}$$

我们现已验证方程（50）–（60），因此论证已经完成 .

致谢

作者目前是威斯康星大学麦迪逊分校的一名研究生。他由衷感谢自己的研究导师 Paul Terwilliger 教授提供了本文所用的许多资源，并提出了富有见地的意见，使本文的表达更加清晰流畅。

参考文献

[1] P. Baseilhac. 量子可积模型中的变形的 Dolan-Grady 关系。《核物理 B》709 (2005), 491–521, arXiv:hep-th/0404149.[2] P. Baseilhac, S. Belliard. 广义 q-Onsager 代数与边界仿射 Toda 场论。《Lett. Math. Phys.》93 (2010), 213–228, arXiv:0906.1215.[3] P. Baseilhac, S. Belliard. q-Onsager 代数的一组优美基,arXiv:1704.02950.[4] P. Baseilhac, K. Koizumi. 具有量子边界自由度的半直线上 Sine-Gordon 量子场论。《核物理 B》649 (2003), 491–510, arXiv:hep-th/0208005.[5]P. Baseilhac, K. Koizumi. 量子可积模型的一种新型（无限）维代数。《核物理 B》720 (2005), 325–347, arXiv:math-ph/0503036.[6] P. Baseilhac, S. Kolb. q-Onsager 代数的辫群作用与根向量。《Transform. Groups》25 (2020), 363–389, arXiv:1706.08747v3.[7] P. Baseilhac, K. Shigechi. 一种新的流代数与反射方程。《Lett. Math. Phys.》92 (2010), 47–65, arXiv:0906.1482.[8] R. Brualdi.《组合学导论》第五版，Pearson/Prentice Hall，Upper Saddle River，2009.[9] A. Gupta. 量子 Laurent 多项式上的模。《J. Aust. Math. Soc.》91 (2011), 323–341.[10] T. Ito. TD 对与 q-Onsager 代数。《Sugaku Expositions》32 (2019), 205–232.[11] T. Ito, K. Tanabe, P. Terwilliger. 与 P-和 Q-多项式关联方案有关的一些代数。载于《Codes and association schemes》（新泽西州皮斯卡塔韦，1999），167–192，DIMACS 离散数学与理论计算机科学丛书第 56 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2001.[12] P. Terwilliger. 关联方案的子构成代数（第三部分）。《J. Algebraic Combin.》2 (1993), 177–210.[13] P. Terwilliger. 两个推广 q-Serre 关系与 Dolan-Grady 关系的关系。载于《Physics and Combinatorics 1999》（名古屋），379–398，World Scientific Publishing，River Edge，新泽西州，2001, arXiv:math.QA/0307016.[14] P. Terwilliger. 关于 q-Onsager 代数的一个猜想。《核物理 B》966 (2021年) 115391，26 页， arXiv:2101.09860。

[15] P. Terwilliger。 q-Onsager 代数的交错中心扩张。《数学物理通讯》387（2021年），1771–1819， arXiv:2103.03028v1。

[16] P. Terwilliger。 q-Onsager 代数及其交错中心扩张。《核物理 B》975（2022年），论文编号 115662，共 37 页， arXiv:2106.14041v1。

Owen Goff 威斯康星大学数
学系 林肯大道 480 号 麦迪逊，
威斯康星州 53706-1388，美
国 电子邮箱：
ogoff@wisc.edu