arXiv:2304.09354v2 [math.SG] 8 Apr 2024

不可定向曲面上保面积微分同胚的余伴随轨道

Anton Izosimov*、Boris Khesin† 和 Ilia Kirillov‡

摘要

我们对闭不可定向曲面上的保面积微分同胚群的一般余伴随轨道进行了分类。这完成了 V. Arnold 关于研究二维不可压缩流体不变量的计划。作为一个辅助问题，我们还对不可定向曲面上的简单莫尔斯伪函数在保面积微分同胚作用下进行了分类。

目录

1 I引言 2

2 不可定向流形的几何 5
2.1 定向双覆盖与定向丛.5 2.2 偶型与奇型微分形式.5 2.3 保测微分同胚群、其李代数及李代数的对偶

3 二维中一般位置伪函数的分类 8
3.1 简单莫尔斯伪函数.8 3.2 带对合的黎布图.10 3.3 带对合的测度 Reeb 图. 11 3.4 分类定理的证明.12

4 二维余伴随轨道分类 16
4.1 余伴随轨道与伪函数.16 4.2 带对合的黎布图上的偶循环函数 16 4.3 分类定理的证明.19

A M动机：欧拉方程的哈密顿框架 21
A.1 欧拉方程.21 A.2 涡量与卡西米尔不变量.22

B 不可定向情形中的奇异余伴随轨道 23
B.1 余定向子流形上的 Marsden–Weinstein 辛结构 23 B.2 不可定向流形上的副法线方程.24

*亚利桑那大学数学系，电子邮件：izosimov@math.arizona.edu
†多伦多大学数学系 电子邮件：khesin@math.toronto.edu
‡多伦多大学数学系 电子邮件：kirillov@math.utoronto.ca

1 引言

不可定向流形不具有处处非零的体积形式，但允许存在密度（也称为伪形式）。密度可以被看作这样的最高次形式：沿反定向回路返回同一点后，其符号会发生改变。固定不可定向流形 N 上的一个密度 ρ，并考虑保持 N测度的微分同胚无限维群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$。在本文中，当 N为闭不可定向曲面时，我们研究群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$。我们的第一个主要结果是，对于 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$的作用，给出了这类曲面上一般位置伪函数的分类。第二个结果是对 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$的一般余伴随轨道进行分类。我们还讨论了 Casimir函数（即余伴随作用的不变量），以及带边界的不可定向曲面情形下的类似分类。

我们的研究动机源于流体力学。二维理想流体动力学能够很好地近似描述许多现实世界中的过程（例如，地球大气可以通过二维流体方程得到很好的近似）。自然界中也可以观察到不可定向曲面上的流体力学现象：例如，肥皂膜在金属丝上的运动发生在极小曲面上，而对于形状合适的金属丝，该极小曲面就是一个 M¨obius 带。文献 [5,4, 20] 等研究了不可定向曲面上的流体。此外，保面积微分同胚的余伴随轨道也出现在广义相对论 [8, 16] 中，这与轨道方法所提出的余伴随轨道与表示之间的对应关系有关。

本文给出的分类完成了 V. Arnold 的研究计划，该计划旨在研究保面积微分同胚的余伴随轨道，并于 [3] 启动，以应用于流体动力学稳定性。回顾一下，带边界和不带边界的可定向曲面上的相应问题最近已在 [12, 10, 14] 得到解决。这些分类的核心，是利用带测度 Reeb 图描述函数在保面积微分同胚作用下的轨道。图 Γ_F（称为 Reeb 图）是可定向曲面 M 上函数 F 的水平集的连通分支所构成的集合。F 的临界点对应于图 Γ_F 的顶点，见图1。该图自然地以 F 的取值为参数。对于配备面积形式 μ 的曲面，测度 μ 在图上诱导出一个测度，该测度满足下文讨论的某些性质。

描述不可定向流形 N 上的对象，一种自然的方式是将它们~提升到双覆盖 N 上；该双覆盖是一个定向流形。这个双覆盖带有一个无不动点的反定向对合 $I: N \to N$ 它交换~自然投影 $N \to N$每个纤维中的点。伪函数 F 在一个

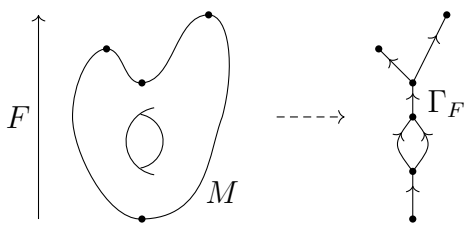

图1：环面上具有两个极大值的高度函数的 Reeb图。

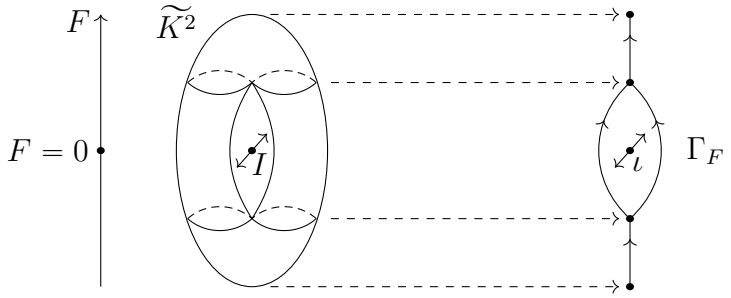

图 2：环面上的高度函数所诱导的克莱因瓶上的伪函数对应的 Reeb图 K^2。环面上的对合 I 和图上的对合 ι 是中心对称。

~不可定向流形 N 上的伪函数，是其双覆盖 N 上关于对合反不变的函数： $F\circ I=-F$。可以用 N~一种自然的方式定义 N上的简单莫尔斯伪函数：它们在 N 双覆盖上的提升必须是具有互异临界值的 Morse 函数。我们的第一个结果是，这类伪函数在所有伪函数中稠密：

定理 1.1。（=**定理 3.3**）紧致不可定向流形上的简单*Morse* 伪函数在所有光滑伪函数的 C^2-拓扑空间中构成一个开且稠密的子集。

我们的下一个结果是对二维简单Morse 伪函数的分类。设 N 是一个闭的（即紧致且无边界的）不可定向曲面，并配备密度 ρ。事实证明，伪函数上的 $\mathsf{Diff}_\rho(N)$ 作用的不变量由其提升到定向双~覆盖 N 后所得到的带测度 Reeb 图给出，并且该图配备了一个对合。

定理 1.2。（=**定理 3.11**）设 N 是一个配备密度 ρ 的闭连通二维不可定向曲面。那么， N 上的简单*Morse* 伪函数（按保面积微分同胚视为等价）与满足 $(N,\ \rho)$ 的带对合的测度 *Reeb* 图的同构类之间存在一一对应关系。

~**例 1.3.** 环面 $T^2=K^2$ 上的高度函数 F 关于中心对称 I 是奇函数，因此在克莱因瓶$K^2=T^2/I,$上诱导出一个伪函数，见图 2。带有一个对合 ι的测度 Reeb 图 Γ_F是克莱因瓶上相应伪函数的完全不变量。

群 $\mathsf{Diff}_\rho(N)$ 在不可定向曲面 N 上的保面积微分同胚的余伴随轨道分类，需要比带对合的测度 Reeb 图更为精细的一组数据。具体而言，李代数 $\mathsf{Vect}_\rho(N)$ 的正则对偶空间 $\mathsf{Vect}_\rho^*(N)$ 的元素是 1-形式陪集 $[\alpha]\in\Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$。对于这样的陪集，可以将其关联到涡量伪函数 $\mathsf{curl}[\alpha]:=\mathrm{d}\alpha/\rho$。因此，相对于保面积微分同胚对这些陪集进行分类，可以看作是对伪函数分类的细化：需要通过所谓的环流函数（下文将对此进行描述）所携带的附加信息，对 $F=\mathsf{curl}[\alpha]$ 的测度 Reeb 图加以扩充。由此，可以用环流图来表述一般余伴随轨道的完整分类。

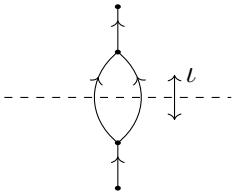

图 3：一个有两个不动点的图的对合 ι。它由关于虚线的对称变换给出。

定理1.4。（=**定理 4.11**）设 N 是一个配备密度 ρ. 的闭连通不可定向曲面，则 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的简单*Morse*余伴随轨道与和 $(N$、$\rho)$ 兼容的环流图的同构类之间存在一一对应关系。

推论1.5。（=**推论 4.13**）设 N 是一个带有密度 ρ的闭连通不可定向曲面。那么，与带有对合 ι 的同一测度 ***Reeb*** 图 Γ 相对应的群$\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的余伴随轨道空间是一个维数为 ***affine space***

$$d = \frac{1}{2}(\#\mathrm{Fix}(\iota) + b_1(N) - 1),$$

其中，$\#\mathrm{Fix}(\iota)$ 是对合 ι 的不动点数量，$b_1(N)$ =维数 $H_1(N;\ \mathbb{R})$ 是 N 的第一贝蒂数。特别地，

$$\frac{1}{2}(b_1(N) - 1) \leqslant d \leqslant b_1(N).$$

注1.6。这里我们遇到了一种全新的现象，这种现象在可定向曲面中并未出现。具体而言，对于可定向曲面 M，相应的维数 d总是$\frac{1}{2}b_1(M)$，即 M的亏格。另一方面，对于不可定向曲面，给定涡量的余伴随轨道空间的维数不仅由曲面的拓扑决定，还取决于有关涡量 Reeb图上的对合群作用的更微妙的信息。

例 1.7 (详情见例 4.15**)**。考虑图 2 所示的竖直放置环面上的高度函数，并将其视为克莱因瓶上的伪函数 K^2. 由于 $b_1(K^2) = 1$ 且 $\#\mathrm{Fix}(\iota) = 0$，与给定图对应的余伴随轨道空间是 0 维的，即该图完全确定了该轨道。

另一方面，考虑置于略微倾斜桌面上的环面上的高度函数。它相对于中心对称仍是奇函数，因此在 K^2 上定义了一个伪函数。相应的 Reeb图如图 3 所示。这里有 $\#\mathrm{Fix}(\iota) = 2$，因此与此类函数对应的 $\mathrm{Diff}_\rho(K^2)$ 的余伴随轨道空间是 1 维的。注意 $b_1(K^2) = 1$，因此克莱因瓶的轨道空间可能的维数只有 0 和 1 d。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们讨论与不可定向流形相关的某些微分几何概念。在第3节中，我们给出不可定向曲面上简单莫尔斯伪函数在保面积变换下的分类。在第4节中，我们获得了泛型的分类。

不可定向曲面的保面积微分同胚群的余伴随轨道。

在附录 A 中，我们介绍这些分类的流体动力学动机。在附录 B 中，我们描述不可定向情形下与涡旋膜相对应的奇异余伴随轨道。具体而言，事实证明，可以在余维 2 的余定向子流形上定义 Marsden–Weinstein 辛结构的一个类比。此外，描述涡旋膜演化的副法线方程在不可定向流形上也有意义。

致谢。 A.I. 获得了 NSF 资助项目 DMS-2008021 的支持。B.K. 获得了 NSERC 探索基金的部分支持。作者感谢 Klas Modin 和 Gleb Smirnov 进行的富有成效的讨论。

2 不可定向流形的几何

2.1 定向双覆盖与定向丛

设 N 为一个不可定向流形。我们将其定向双覆盖 $\tilde{N}$ 定义为由点对 $(x, \mathscr{O})$组成的空间，其中 $x \in N$，而 $\mathscr{O}$是切空间 T_xN的一个定向。显然， $\tilde{N}$ 是一个可定向流形。此外，按此方式定义的定向双覆盖 $\tilde{N}$ 是典范定向的：$T_{(x,\mathscr{O})}\tilde{N}$ 的定向由从 T_xN拉回的定向 $\mathscr{O}$ 定义。

设 N 是一个不可定向流形，并且 $\tilde{N}$ 是它的双覆盖。那么存在一个无不动点的反定向对合 I：$\tilde{N} \to \tilde{N}$ 它交换投影 $\tilde{N} \to N$的每个纤维中的点。反过来，设 M 是一个带有无不动点的反定向对合 I的定向连通流形。那么商空间 M / I 是一个不可定向流形，其定向双覆盖与 M规范微分同胚。因此，连通不可定向流形与带有无不动点的反定向对合的连通定向流形之间可以相互转换。本文中我们将交替使用这两种模型。注意，虽然原则上所有内容都可以在双覆盖上完成，但在某些情况下，我们发现直接处理不可定向流形更加方便。

与定向双覆盖密切相关的是定向丛。将定向双覆盖 $\tilde{N} \to N$ 视为一个主 $\mathbb{Z}_2$-丛，定义定向丛为伴随线丛。换言之，给定 N上的一个图册，定向丛由过渡函数 sign$(J(\phi_{\alpha\beta}))$ 给出，其中 $\phi_{\alpha\beta}$是图表之间的过渡映射，而 J 是雅可比行列式。我们将 N 的定向丛记为 $o(N)$。

2.2 偶型与奇型微分形式

偶微分形式和奇微分形式的语言由 de Rham [7]引入。设 N 为一个不可定向流形。微分 k形式的偶类型就是通常的微分 k形式，即 $\bigwedge^k T^*N.$ 的截面。微分 k形式的奇类型也称为伪形式，是由定向丛 $o(N)$扭曲的通常微分形式，即 $\bigwedge^k T^*N \otimes o(N)$的截面。更具体地说，奇形式可定义如下：

定义 2.1。一个奇 k形式 α 在向量空间 V上，为 V的每个定向 $\mathscr{O}$指定一个外 k 形式 $\alpha_{\mathscr{O}}$，并且当定向反转时，该外形式替换为其负形式： $\alpha_{-\mathscr{O}} = -\alpha_{\mathscr{O}}$. 流形 N 上的奇微分 k形式以光滑的方式，为每个切空间 T_xN 指定一个奇 k形式 α 。非零的最高次奇形式称为密度。奇 0-形式称为伪函数。

将流形 N 上的偶（即通常的） k-微分形式记作 $\Omega^k(N)$，将奇 k-形式记作 $\widetilde{\Omega}^k(N)$。

例 2.2。设 (N, g) 是一个维数为 n 的黎曼流形（可定向或不可定向）。则存在一个相应的黎曼密度 $\rho_g \in \Omega^n(N)$，它被定义为唯一的奇 n-形式：对于切空间 T_pN 的一个定向 $\mathscr{O}$ 和其中的一个正交归一基 T_pN，当该基的定向与$\mathscr{O}$ 一致时取值为 $+1$，否则取值为 -1。用局部坐标表示，密度 ρ_g 具有如下形式：

$$\rho_g = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

（注意，在局部我们总能将奇形式写成通常的微分形式，因为局部坐标为定向丛提供了局部平凡化。）

假设 N 不可定向，则 N 上的偶（分别为奇）微分形式与 定向双覆盖 $\widetilde{N}$ 上关于对合 I 为偶（分别为奇）的那些微分形式之间存在一一对应关系：
$\widetilde{N} \to N$:

$$\Omega^k(N) \simeq \Omega^k_{even}(\widetilde{N}) = \{\omega \in \Omega^k(\widetilde{N}) \colon I^*\omega = \omega\},$$
$$\widetilde{\Omega}^k(N) \simeq \Omega^k_{odd}(\widetilde{N}) = \{\omega \in \Omega^k(\widetilde{N}) \colon I^*\omega = -\omega\}.$$

这些同构由经由投影 $\widetilde{N} \to N$ 的拉回给出。请注意，尽管将 N 上的伪形式拉回后得到的是 N 上的伪形式，即 $\bigwedge^k T^*\widetilde{N} \otimes o(\widetilde{N})$ 的一个截面，但 $\widetilde{N}$ 上的典范定向为我们提供了一个处处不为零的截面 $\mathbf{1}$，即 $o(N)$ 的截面（将 $+1$ 赋给正向图册中的每个图册），从而通过 $\omega \mapsto \omega \otimes \mathbf{1}$ 得到微分形式与伪形式之间的一个同一对应。由于将 N 上的伪形式（以及任何其他对象）拉回到 $\widetilde{N}$ 后是偶的，而截面 $\mathbf{1}$ 是奇的，因此我们得到 N 上的伪形式与 $\widetilde{N}$ 上的 奇形式之间的一个同一对应。

例 2.3。任意齐次奇次多项式 $P \in \mathbb{R}[x, y, z]$ 都是单位球面 S^2 上的奇函数，因而在实射影平面 $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2$ 上定义了一个伪函数。同样，任意齐次偶次多项式都在 $\mathbb{RP}^2$ 上定义了一个正则函数。

注意，偶数阶和奇数阶 k-微分形式都可以在紧致的 k 维子流形上积分。要对偶数阶微分形式积分，我们需要子流形具有定向。要对奇数阶微分形式积分，我们需要子流形具有余定向。特别地，只要流形是紧致的，任意密度都可以始终在整个流形上积分（与之相对，体积形式只能在定向流形上积分）。

例2.4。 对于任意（可定向或不可定向）的紧黎曼流形 $(N,\ g)$其对应的黎曼密度的积分都是良定义的（即它不依赖于 N 的定向，也不依赖于是否存在这样的定向）。这个积分就是 N 的黎曼体积，并且是一个正数。

由于在局部可以将奇形式与偶形式相互对应，因此所有对偶形式的标准局部运算都有奇形式的对应运算。特别地，奇 k-形式 α的微分 $\mathrm{d}\alpha$是奇 $(k+1)$-形式，因此有映射 $d\colon\ \widetilde{\Omega}^k(N)\to\widetilde{\Omega}^{k+1}(N)$.同样，对于 N上的任意向量场 v，我们有内积算子 $i_v\colon\ \widetilde{\Omega}^k(N)\to\widetilde{\Omega}^{k-1}(N)$以及李导数 $L_v=di_v+i_vd\colon\ \widetilde{\Omega}^k(N)\to\widetilde{\Omega}^k(N)$。两个相同奇偶性的微分形式的外积是偶形式，而两个不同奇偶性的微分形式的外积是奇形式。特别地，后者意味着，在任意闭的（即紧致且无边界的） n-维流形 N 上，都存在非退化配对 $\widetilde{\Omega}^k(N)\times\Omega^{n-k}(N)\to\mathbb{R}$。对于任意给定奇偶性，关于该配对，恰当 k-形式空间的湮没子（分别地，闭的 k-形式空间的湮没子）是相反奇偶性的闭的 $(n-k)$-形式空间（分别地，恰当 $(n-k)$-形式空间）。这给出了扭曲的庞加莱 ́对偶性

$$\widetilde{H}^k(N;\mathbb{R})\simeq H^{n-k}(N;\mathbb{R})^*,$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$其中 $H^\bullet(N;\ \mathbb{R})$是上链复形 $(\Omega^\bullet(N),d)$的上同调。另有如下同一对应

$$H^k(N;\mathbb{R})\simeq H^k_{even}(\widetilde{N};\mathbb{R}),\quad \widetilde{H}^k(N;\mathbb{R})\simeq H^k_{odd}(\widetilde{N};\mathbb{R}),$$

其中 $H^k_{even}(\widetilde{N};\ \mathbb{R})$和 $H^k_{odd}(\widetilde{N};\ \mathbb{R})$分别是反定向对合在定向双覆盖的上同调 $H^k(\widetilde{N};\ \mathbb{R})$上的作用所对应的 $+1$和 -1特征子空间。用这些术语，扭曲的庞加莱对偶可改写为

$$H^k_{even}(\widetilde{N};\mathbb{R})\simeq H^{n-k}_{odd}(\widetilde{N};\mathbb{R})^*.$$

2.3 保测微分同胚群、其李代数及李代数的对偶

设 N 是一个带有密度（即不消失的顶次伪形式） ρ的闭（即紧致且无边界）不可定向流形。群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 由保测微分同胚组成:

$$\mathrm{Diff}_\rho(N):=\{\Phi\in\mathrm{Diff}(N)\mid\Phi^*\rho=\rho\}.$$

$\widetilde{}$设 N是 N的定向双覆盖。那么，$\mathrm{Diff}_\rho(N)$可识别为$\widetilde{\mathrm{Diff}}_\mu(N)$ 的子群，该子群由定向双覆盖上的保体积微分同胚组成，且这些微分同胚与反定向对合 $\widetilde{}$可交换（ N 上的体积形式 μ 由密度 ρ的拉回构造而成）。

群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的李代数 $\mathrm{Vect}_\rho(N)$ 由无散向量场组成:

$$\mathrm{Vect}_\rho(N):=\{v\in\mathrm{Vect}(N)\mid L_v\rho=0\}.$$

对于任意（偶）1-形式 $\alpha\in\Omega^1(N)$，我们都可以将其与李代数 $\mathrm{Vect}_\rho(N)$ 上的线性泛函 ℓ_α 联系起来，该泛函定义为

$$\ell_\alpha(v):=\int_N(i_v\alpha)\rho$$

（请回忆一下，对整个流形上的密度进行积分是良定义的）　　.

定义 2.5。 若存在线性泛函 ℓ，则称 $\mathrm{Vect}_\rho(N)\to\mathbb{R}$ 为正则的，且存在 $\alpha\in\Omega^1(N)$ 使得 $\ell=\ell_\alpha$。将正则泛函空间记为 $\mathrm{Vect}_\rho^*(N)$。

命题 2.6。 正则泛函 $\mathrm{Vect}_\rho^*(N)$ 空间同构于 $\Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$ 的陪集空间，即 *1*-形式模恰当 *1*-形式的空间。

证明。 根据正则泛函的定义，我们有一个满射向量空间同态 $\Omega^1(N)\to\mathrm{Vect}_\rho^*(N)$，由 $\alpha\mapsto\ell_\alpha$. 给出。我们需要证明，其核是恰当（偶）1-形式空间。为此，将 $\ell_\alpha(v)$ 改写为

$$\ell_\alpha(v)=\int_N\alpha\wedge i_v\rho.$$

由于 v 是任意的无散向量场， $i_v\rho$ 是任意的闭奇 $(n-1)$-形式。因此，映射 $\alpha\mapsto\ell_\alpha$ 的核是在配对 $\Omega^1(N)\times\tilde{\Omega}^{n-1}(N)\to\mathbb{R}$ 下闭奇 $(n-1)$-形式的湮没子，即恰当偶1-形式空间，证毕。

□

群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 在正则对偶 $\mathrm{Vect}_\rho(N)^*=\Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$ 上的余伴随作用，与微分同胚在1-形式（的陪集）上的自然作用相一致：

$$\mathrm{Ad}^*_\Phi[\alpha]=[\Phi^*\alpha],$$

其中， $\Phi\in\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 是保测微分同胚， $\alpha\in\Omega^1(N)$ 是一个1-形式。本文着重于对该作用的所有一般轨道进行分类。注意，这些轨道也可以解释为 $\mathrm{Vect}_\rho^*(N)$ 上的李-泊松结构的辛叶。

3 二维中一般位置伪函数的分类

3.1 简单Morse伪函数

我们首先回顾莫尔斯函数和简单莫尔斯函数的标准定义。

定义 3.1。 设 N 为一个光滑流形。若光滑函数 $F\colon N\to\mathbb{R}$ 的所有临界点均为非退化的，则称其为莫尔斯函数。若莫尔斯函数 $F\colon N\to\mathbb{R}$ 的所有临界值均互不相同，则称其为简单。

下面我们为伪函数提出类似的概念。

定义 3.2. 设 N 是一个不可定向流形。

- 若伪函数 $F\in\tilde{\Omega}^0(N)$ 在定向双覆盖 $\tilde{N}$ 上的提升 $\tilde{F}\in\Omega^0_{odd}(\tilde{N})$ 是一个莫尔斯函数，则称其为 $Morse$。
- 如果其提升 $\tilde{F}\in\Omega^0_{odd}(\tilde{N})$ 是简单的Morse，那么伪函数 $F\in\tilde{\Omega}^0(N)$ 就是简单 *Morse*。后者尤其意味着 0 不是 F 的临界值（如果存在一个满足 $F=0$ 的临界点，那么它在反转定向的对合下的像会在相同的零水平集上给出另一个临界点）。

光滑伪函数空间 $\tilde{\Omega}^0(N)$ 可与奇光滑函数空间 $\Omega^0_{odd}(\widetilde{N})$ $\widetilde{N} \to \mathbb{R}$等同。

考虑空间 $\tilde{\Omega}^0(N) \simeq \Omega^0_{odd}(\widetilde{N})$ 上的 C^2拓扑，该拓扑由空间 $\Omega^0(\widetilde{N})$上全体光滑函数的 C^2拓扑诱导，其中 $\Omega^0(\widetilde{N})$是定义在 $\widetilde{N}$上的全体光滑函数构成的空间。

定理 3.3. 在 N 上的简单*Morse*伪函数，在 C^2拓扑下构成光滑伪函数空间中的一个开稠密子集。

证明基于以下版本的 Whitney 嵌入定理 m:

引理 3.4（关于将无不动点对合实现为对跖映射）。设 M 是一个配备了无不动点对合 $I\colon M \to M$. 的紧致光滑 n维流形。那么存在一个嵌入 $\Phi\colon M \to V$, 其中 V是一个维数为 $2n(2n+1)$的向量空间，使得以下图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & V \\ \downarrow{\scriptstyle I} & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{Id}} \\ M & \xrightarrow{\Phi} & V, \end{array}$$

其中 $-\mathrm{Id}\colon V \to V$ 是对跖映射 $x \mapsto -x$。换言之，任意紧致流形上的无不动点对合都可以实现为对跖映射的限制。

注 3.5. 虽然向量空间 V的确切维数与我们的目的无关，但我们注意到，将引理 3.4 给出的嵌入与投影到适当子空间的投影复合，可以将 V的维数降至 $2n+1$（如弱惠特尼定理所示）。

引理 *3.4* 的证明. 根据惠特尼定理，存在一个嵌入 $\Phi_1\colon M \to W$，其中 W 是维数为 $2n$的向量空间。

我们将其扩展为一个嵌入

$$\Phi_2\colon M \to W \oplus W, \quad \Phi_2(x) := (\Phi_1(x), \Phi_1(I(x))).$$

于是下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_2} & W \oplus W \\ \downarrow{\scriptstyle I} & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ M & \xrightarrow{\Phi_2} & W \oplus W \end{array}$$

其中， $W \oplus W$ 上的对合 P为 $(x, y) \mapsto (y, x)$. 此外，由于对合 I 没有不动点，像 $\Phi_2(M)$ 与对角线$\Delta \subset W \oplus W$. 不相交。现在，考虑映射

$$\Psi\colon W \oplus W \to W \oplus (W \otimes W), \quad \Psi(x, y) := (x - y, (x - y) \otimes (x + y)).$$

容易看出， Ψ 在对角线 Δ之外是单浸入。因此，由于 M是紧致的，映射 $\Psi \circ \Phi_2\colon M \to W \oplus (W \otimes W)$ 是一个嵌入。

此外，我们有 $\Psi \circ P = -\Psi$，因此下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Phi_2} & W \oplus W & \xrightarrow{\Psi} & W \oplus (W \otimes W) \\ \downarrow{\scriptstyle I} & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{Id}} \\ M & \xrightarrow{\Phi_2} & W \oplus W & \xrightarrow{\Psi} & W \oplus (W \otimes W). \end{array}$$

取 $V \coloneqq W \oplus (W \otimes W)$ 和 $\Phi \coloneqq \Psi \circ \Phi_2$ 即完成证明。 □

定理 *3.3* 的证明。 显然， N 上的简单莫尔斯伪函数在所有光滑伪函数构成的空间中形成一个开子集，因此我们只需证明它是稠密的。首先证明所有（不一定是简单的）Morse 伪函数构成的集合是稠密的。也就是说，这等价于证明任意奇函数 $f \in \Omega^0_{odd}(\widetilde{N})$ 都可以用奇 Morse 函数逼近。由引理 3.4 可知，我们可以~假设 N 嵌入在向量空间 V 中，且反定向对合由对跖映射 $x \mapsto -x$ 给出。取一个奇函数 $f \in \Omega^0_{odd}(\widetilde{N})$，并考虑函数族 $F_\ell \coloneqq f + \ell$，其中 $\ell \in V^*$。注意，该函数族中的所有函数相对于对跖映射都是奇函数。此外，根据 [19, 定理 8.1, 1]，这类函数族中的几乎所有函数都是 Morse 函数，因此确实可以找到一个与 f. 任意接近的奇 Morse 函数

第二步是证明，在 N 上的简单莫尔斯伪函数在所有莫尔斯伪函数构成的空间中稠密。为此，请注意，针对函数的相应论证 [15, 命题 1.2.12] 是局部的：可以在临界点邻域内扰动给定的莫尔斯函数，从而稍微改变其临界值。但在局部可以将定向丛 $o(N)$ 平凡化，因此可将伪函数与函数等同起来。因此，同样的论证也适用于伪函数，从而证明该定理。

□

3.2 带对合的里布图

下面我们将按照保面积微分同胚对闭连通非定向二维曲面上的简单莫尔斯伪函数进行分类。这等价于对四元组 (M, I, ω, F) 进行辛分类，其中

- M 是一个带有辛形式 ω的闭连通曲面；
- $I\colon\ M \to M$ 是一个无不动点反辛对合；
- $F \in \Omega^0_{odd}(M)$ 是一个在 I作用下反对称的简单莫尔斯函数。

暂时考虑定义在闭合连通可定向曲面 M 上的任意简单莫尔斯函数 F。将 F-水平集定义为 F. 的某个水平集的一个连通分支。非临界 F-水平集微分同胚于圆。曲面 M 是若干 F-水平集的并集，这些水平集构成一个带奇点的叶状结构。该叶状结构的基空间赋予商拓扑后，同胚于一个有限连通图 Γ_F（见图1，其中给出了环面上的一个莫尔斯函数 F），其顶点对应于 F. 的临界值。该图 Γ_F 称为函数 F 的***Reeb***图（也称为克朗罗德图 [17, 1]）。记 π 为投影 $M \to \Gamma_F$.。定义在 M 上的函数 F 下降为Reeb图 Γ_F上的函数 f。此外，假设 Γ_F 带有定向也很方便：各条边均沿 f. 递增的方向定向。可以

通过以下公式从闭合连通可定向曲面的Reeb图恢复其拓扑： $b_1(M) = 2b_1(\Gamma_F)$, 其中 $b_1(.)$: = 维数是第一贝蒂数。

现在重新考虑一个简单莫尔斯函数 F ，它在对合 I 下是反对称的。

在这种情况下， I 下降为一个对合 ι: $\Gamma_F \to \Gamma_F$，满足 $\iota^* f = -f$ （见图 2）。注意，对合 ι 不一定没有不动点。

定义 3.6。 一个带对合的 ***Reeb*** 图 (Γ, ι, f) 是一个配备了对合 ι: $\Gamma \to \Gamma$ 以及连续函数 f : $\Gamma \to \mathbb{R}$的有向连通有限图 Γ ，并满足以下性质:

(i) Γ 的每个顶点均为 1 价或 3 价;

(ii) 函数 f 在 ι 的作用下是反不变的，即 $\iota^* f = -f$;

(iii) f 沿着 Γ的每条边严格递增;

(iv) f 在 Γ 的顶点处取互不相同的非零值。

3.3 带对合的测度黎布图

在本节中，我们讨论带对合的测度Reeb 图的概念。回顾一下，我们考虑四元组 (M, I, ω, F) ，其中 (M, ω) 是一个闭的连通辛曲面， I: $M \to M$ 是一个无不动点反辛对合，并且 $F \in \Omega^0_{odd}(M)$ 是一个在 I 的作用下反对称的简单莫尔斯函数。

自然投影映射 π: $M \to \Gamma_F$ 在图 Γ_F. 上诱导出一个测度 $\mu := \pi_* \omega$ 根据 [12, 命题 3.4], ，测度 μ 在 [10, 定义 3.5]的意义下是 对数光滑的（简而言之，这意味着该测度在所有边的内部点以及 1-价顶点处光滑，而在 3-价顶点处具有对数奇点）。此外，该测度关于对合 ι: $\Gamma_F \to \Gamma_F$.是不变的。

定义 3.7。 带对合的测度 Reeb 图 (Γ, ι, f, μ) 是一个配备了对合不变的对数光滑测度 μ 的带对合 Reeb 图(Γ, ι, f) ι。

定义 3.8。 映射 $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 若是拓扑图的同构，并将 Γ_1 中的所有对象映射到Γ_2中的对应对象，即 $\phi \circ \iota_1 = \iota_2 \circ \phi$、 $\phi^* f_2 = f_1$和 $\phi_* \mu_1 = \mu_2$，则称其为带对合的测度 Reeb 图 同构 $(\Gamma_1, \iota_1, f_1, \mu_1)$ 与 $(\Gamma_2, \iota_2, f_2, \mu_2)$ 之间的同构。

以下定义摘自 [12] ，无论是否存在对合，该定义都有意义:

定义 3.9。 若满足以下条件，则称测度 Reeb 图 (Γ, ι, f, μ) 与辛曲面 (M, ω) 相容

$$2b_1(\Gamma) = b_1(M), \quad \int_\Gamma \mathrm{d}\mu = \int_M \omega$$

（其中 $b_1(.)$ 表示第一贝蒂数）。

对于具有密度 $\rho \in \tilde{\Omega}^2(N)$的不可定向曲面 N，如果测度 Reeb图 (Γ, ι, f, μ) 与 (N, ρ) 兼容，即与 (N, I, ω)兼容，那么我们称其为兼容 的，其中 $\tilde{N}$是 N 的定向双覆盖，辛形式 $\omega \in \Omega^2(\tilde{N})$是 ρ的拉回，而 I是 N上的对合，满足 $N / I = N$。更具体地说，兼容条件可表述如下:

定义 3.10。 测度 Reeb 图 $(\Gamma、\ \iota、\ f、\ \mu)$ 与配备密度 ρ的非可定向曲面 N 相容，当且仅当

$$b_1(\Gamma) = b_1(N), \quad \int_\Gamma \mathrm{d}\mu = 2\int_N \rho.$$

3.4 分类定理的证明

这里我们证明关于非可定向曲面上的伪函数的以下分类结果:

定理 3.11。 设 N 是一个配备了密度（非退化最高次伪形式） ρ的闭连通不可定向曲面。那么，在面积保持微分同胚意义下考虑的 N上的简单莫尔斯伪函数，与兼容于 $(N,\ \rho)$的带对合的带测度 ***Reeb*** 图的同构类之间存在一一对应关系。

等价地，更详细地说，该定理可以表述如下。

定理 3.12。 设 (M, ω) 是一个闭的连通辛曲面，并带有一个无不动点反辛对合 I: $M \to M$。则在 M 上的奇（即在 I 下反对称）简单莫尔斯函数（视为相差与 I 可交换的辛微分同胚）与兼容于 M 的带对合的黎布图的带测度同构类之间，存在一一对应关系。换言之，以下陈述成立。

i）设 $F, G \in \Omega^0_{odd}(M)$ 是两个奇简单莫尔斯函数。那么以下条件等价:

> *a*）存在一个辛微分同胚 $\Phi: M \to M$，使得 $\Phi \circ I = I \circ \Phi$ 且 $\Phi_* F = G$。
> *b*）与 F 和 G 相关联的带对合的测度 ***Reeb*** 图同构。

此外，与 F和 G 相关联的带对合的测度 ***Reeb*** 图之间的任意同构，都可以提升为一个辛微分同胚 $\Phi: M \to M$，使得 $\Phi \circ I = I \circ \Phi$ 且 $\Phi_* F = G$。

ii）对于每个与 (M, ω) 相容的带对合的测度 ***Reeb*** 图 (Γ, ι, f, μ)，都存在一个奇简单莫尔斯函数 $F \in \Omega^0_{odd}(M)$，使得相应的带对合的测度 ***Reeb*** 图与 (Γ, ι, f, μ)同构。

证明。 我们从第 (i) 部分开始。(a) $\Rightarrow$ (b) 由函数的测度 Reeb 图的定义立即得出。为证明 (b) $\Rightarrow$ (a)，我们将说明，任意一个与 F 和 G 相关的带对合的黎布图之间的同构，都可以提升为一个辛微分同胚 $\Phi: M \to M$，使得

$\Phi \circ I = I \circ \Phi$ 和 $\Phi_* F = G$。设 $\phi\colon \Gamma_F \to \Gamma_G$ 是一个带对合的测度 Reeb 图之间的同构。根据 [12, 定理 3.11(i)], ，它可以提升为一个辛微分同胚 $\Phi\colon M \to M$，使得 $\Phi_* F = G$。我们需要证明，可以选择 Φ使其与对合 I可交换。思路是任取一个 Φ，再将其与一个适当的"剪切流"从右侧复合。

在 F 的每一条等值线上，所需的剪切流不过是沿哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 平移一段距离，而平移量取决于所在的等值线。为求出每条等值线上所需的平移量，考虑交换子

$$\Psi := [I, \Phi^{-1}] = I \circ \Phi^{-1} \circ I \circ \Phi. \tag{1}$$

该映射 Ψ 是辛的，并且保持每个 F-水平集不变。令 E 为 Γ_F 中包含满足 $f = 0$ 的点的开边之并。再令 π 为 $M \to \Gamma_F$ 的投影。于是， $M_0 := \pi^{-1}(E)$ 是由正则 F-水平集叶状分解而成的开圆柱之并。对于定义在 E 上的任意光滑函数 ψ（其中我们使用函数 f 来定义 E 的图册），记 $S_\psi\colon M_0 \to M_0$ 为如下定义的一个辛同胚：每个点 $x \in M_0$ 沿着哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 的轨线运动时间 $\psi(\pi(x))$ 。

引理 3.13。存在一个光滑函数 $\psi\colon E \to \mathbb{R}$，它是奇函数（即 $\iota^*\psi = -\psi$）并满足 $\Psi|_{M_0} = S_\psi$，其中 $\Psi|_{M_0}$ 是交换子映射(1) 在 M_0上的限制。

证明。由于 Ψ 是辛的，并保持每个 F 水平集，因此存在某个（事先不一定是奇的）光滑函数 $\psi\colon E \to \mathbb{R}$，使得 $\Psi|_{M_0} = S_\psi$。此外，注意到由于哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 是偶的，我们有

$$S_\psi \circ I = I \circ S_{\iota^*\psi}. \tag{2}$$

此外，由映射 Ψ 的定义可得 $I \circ \Psi = \Psi^{-1} \circ I$，因此，由于$\Psi|_{M_0} = S_\psi$，我们得到

$$I \circ S_\psi = S_{-\psi} \circ I = I \circ S_{-\iota^*\psi},$$

这意味着 $S_{\psi + \iota^*\psi}$ 是单位映射。现在，令 $t\colon E \to \mathbb{R}$ 为如下定义的光滑函数：对于每个 $x \in E$，它等于圆 $\pi^{-1}(x)$上哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 的周期。于是，由于 $S_{\psi+\iota^*\psi}$ =Id，我们有

$$\lambda := \frac{\psi + \iota^*\psi}{t}$$

是 E 上的一个连续整数值函数，即 $H^0(E$ 的一个元素； $\mathbb{Z})$。此外，由于周期函数 t 是偶函数，函数 λ 也具有相同性质，即 $\lambda \in H^0_{even}(E\ ;\ \mathbb{Z})$。考虑由 $\eta \mapsto \eta + \iota^*\eta$ 给出的映射 $H^0(E;\ \mathbb{Z}) \to H^0_{even}(E;\ \mathbb{Z})$。该映射的像由满足以下条件的整系数上链 $\eta \in H^0_{even}(E;\ \mathbb{Z})$ 构成：它们在 E 中所有被 ι 固定的边上都取偶数值。我们断言 λ 具有这一性质，因此属于该映射的像。事实上，每条被 ι 固定的边 e 都有一个点 x_e，其在投影 $\pi\colon M \to \Gamma_F$ 下的原像是一个被 I 固定的 F-水平集 γ_e（该 x_e 是 e 上满足 $F = 0$ 的唯一点）。由于 I 没有不动点，因此 I 在该水平集上的限制必定是沿向量场 $\omega^{-1}dF$ 的半周期平移。同样， I 在相应的 G-水平集 $\Phi(\gamma_e)$ 上的限制是沿 $\omega^{-1}dG$ 的半周期平移。但是，由于微分同胚 Φ 将哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 映射为哈密顿向量场 $\omega^{-1}dG$，因此交换子 Ψ 在 F-水平集 γ_e 上是.....

单位元。因此， $\psi(x_e)$ 必须是 $T(x_e)$的整数倍，这就要求 $\lambda(e)$为偶数。所以我们确实有 $\lambda = \eta + \iota^*\eta$，其中某个 $\eta \in H^0(E;\ \mathbb{Z})$，并将 ψ 替换为 $\psi - \eta t$ 后，就得到一个具有所需性质的函数。 □

回到定理的证明，设 $m < 0$ 为一个实数，使得对于任意边 $e \in E$，都有 $\inf_{x\in e} f(x) < m$。再设 $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个奇光滑函数，当 $x < m$时其值为 -1。定义光滑函数 $\xi\colon E \to \mathbb{R}$ 如下：$\xi := \frac{1}{2}(1 + \zeta \circ f)\psi$. 那么， ξ在 E 中各边的下端点（即 $f < 0$ 所在处）附近等于 0，并且满足

$$\xi - \iota^*\xi = \psi \tag{3}$$

~处处于 E 中。令 $\Phi := \Phi \circ S_{-\xi}$. 这是一个将 F 推送至 G 的辛同胚 $M_0 \to M_0$。此外，

$$[I, \widetilde{\Phi}^{-1}] = I \circ \widetilde{\Phi}^{-1} \circ I \circ \widetilde{\Phi} = I \circ S_\xi \circ \Phi^{-1} \circ I \circ \Phi \circ S_{-\xi}$$
$$= S_{\iota^*\xi} \circ I \circ \Phi^{-1} \circ I \circ \Phi \circ S_{-\xi} = S_{\iota^*\xi} \circ S_\psi \circ S_{-\xi} = \mathrm{Id},$$

~其中第三个等式由 (2) 得出，最后一个等式由 (3) 得出。因此， Φ 与 I对易。此外，由于 $\xi = 0$ 在 E中边的下端点附近，因此可以通过在 M_-中设定 $\Phi := \Phi$，将 ~ ~Φ 光滑地延拓到 $M_- := (M\backslash M_0) \cap \{F < 0\}$。进一步地，由于 Φ在 M_0中与 I对易，因此可以通过在 M_+中设定 $\Phi := I\Phi I$，将其光滑地延拓到 $M_+ := (M\backslash M_0) \cap \{F > 0\}$~ ~ ~。这样，我们就得到了将 Φ 延拓到整个 M的延拓。它是辛的，与 I对易，并将 F 映射到 G，正如所需。因此，定理的第 (i) 部分得证。

现在我们来证明 (ii)。证明分为四个步骤：(1) 构造一个函数 F，定义在辛曲面上，其带测度的 Reeb 图已给定，并且在反辛映射 I_1 （它不一定是对合）下反不变；(2) 对 I_1 作修改，使其成为一个对合，记为 I_2；(3) 通过与适当的德恩扭转复合，将 I_2 变为一个无不动点的对合 I_3；(4) 找到一个辛同胚，使 I_3 与 I 共轭，从而得到具有所需性质的函数。

步骤 *1.* 根据 $[12,$ 定理 3.11(ii)$]$, ，存在一个（不一定是奇函数的）简单莫尔斯函数 $F\colon M \to \mathbb{R}$，其（不带对合的）带测度 Reeb 图为 (Γ, f, μ)。再考虑定义在辛曲面 $(M, -\omega)$上的简单莫尔斯函数 $-F$。后一个函数的带测度 Reeb 图为 $(\Gamma, -f, \mu)$。因此，对合 ι 是 F 与 $-F$ 的带测度 Reeb 图之间的同构，故根据 $[12,$定理 3.11(i)$]$, ，它可提升为一个微分同胚 $I_1\colon M \to M$，使得 $I_1^*F = -F$和 $I_1^*\omega = -\omega$。

第 *2* 步。考虑在第（i）部分的证明中定义的集合 M_0 上 I_1^2 的限制。它是保持 F 等值面的辛微分同胚，因此可写为 S_j，其中 j 是适当的光滑函数：$E \to \mathbb{R}$。此外，我们断言 j 可以取为偶函数。证明与引理 3.13 类似：由于映射 I_1^2 与 I_1 交换，而后者是 ι 的一个提升，因此必有

$$\lambda := \frac{j - \iota^*j}{t} \in H^0(E; \mathbb{Z}).$$

此外， λ 是奇函数，因此对于某个 $\eta \in H^0(E,$ 可以将其写成 $\eta - \iota^*\eta$；$\mathbb{Z})$（与由 $\eta \mapsto \eta + \iota^*\eta$给出的映射 $H^0(E;\ \mathbb{Z}) \to H^0_{even}(E;\ \mathbb{Z})$ 不同，该映射

$H^0(E;\ \mathbb{Z}) \to H^0_{odd}(E;\ \mathbb{Z})$ 给出的 $\eta \mapsto \eta - \iota^*\eta$ 是满射）。因此，可以用 $j - \eta t$ 替换 j，使函数变为偶函数。

现在考虑函数 $\xi\colon E \to \mathbb{R}$，它由 $\xi := \frac{1}{2}(1 + \zeta \circ f)j$ 定义，其中 $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是第（i）部分的证明中的一个函数。于是 $\xi + \iota^*\xi = \psi$，因此 $I_2 := I_1 \circ S_{-\xi}$ 是一个对合 $M_0 \to M_0$：

$$I_2^2 = I_1 \circ S_{-\xi} \circ I_1 \circ S_{-\xi} = S_{-\iota^*\xi} \circ I_1^2 \circ S_{-\xi} = S_{-\iota^*\xi} \circ S_\psi \circ S_{-\xi} = \mathrm{Id}.$$

此外，I_2 是反辛的，并将 F 映到 $-F$。还要注意，在 E 中各边下端点的原像附近，I_2 与 I_1 重合，因此可以通过在该区域内令 $I_2 := I_1$，将其延拓为 M_-。类似地，在 M_+ 中令 $I_2 := I_1^{-1}$。这样便得到一个反辛对合 $I_2\colon M \to M$，它将 F 映到 $-F$。

步骤 *3.* I_2 的不动点集是若干个 F-层的并，每个层都投影到 ι 的一个不动点。因此，I_2 的不动点集是有限多个圆的并。要证明这类不动点可以消去，只需证明我们可以消去一个不动圆。具体做法是将 I_2 与该圆上的一个德恩扭转复合。具体而言，要消去一个不动圆 $\pi^{-1}(x_0)$，其中 $x_0 \in \Gamma$ 是 ι 的一个不动点，且 $\pi\colon M \to \Gamma_f$ 是投影，考虑包含 x_0 的 Γ 的边 e。令 $t\colon e \to \mathbb{R}$ 为如引理 3.13 中所定义的周期函数：对于每个 $x \in e$，它等于哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 在圆 $\pi^{-1}(x)$ 上的周期。由于对合 I_2 保持哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$，周期函数 t 是偶函数：$\iota^*t = t$。定义函数 $\eta\colon e \to \mathbb{R}$，使得 $\eta := \frac{1}{2}(1 + \zeta \circ f)t$，其中 $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如上所述。于是 $\eta + \iota^*\eta = t$，因此映射 $I_2 := I_2 \circ S_\eta$，通过在 $\pi^{-1}(e)$ 之外令 $\widetilde{I}_2 :=$Id 而延拓到整个 M 后，仍是一个对合：

$$\widetilde{I}_2^2 = I_2 \circ S_\eta \circ I_2 \circ S_\eta = S_{\iota^*\eta+\eta} = S_t = \mathrm{Id}.$$

此外，与 I_2 一样，对合 I_2 是反辛的，并将 F 映到 $-F$。除此之外，它的不动圆比 I_2 少。如此继续下去，最终得到一个反辛的无不动点对合 I_3，使得 $I_3^*F = -F$。

步骤 *4.* 由不可定向曲面的 Moser定理 [6, 第 4894] 页可知，对于某个辛微分同胚 Φ，有 $I_3 = \Phi I \Phi^{-1}$。但此时，Φ^*F 是关于 I 反不变的函数，其带对合的测度 Reeb 图就是给定的图。因此，定理 3.12（从而定理 3.11）得证。 □

注 3.14. </style}上述关于伪函数在保面积微分同胚作用下的不变量的描述，可以推广到带边界的不可定向曲面，参见。回顾一下，在带边界的情形中，简单莫尔斯函数 F 必须满足以下条件：a) F 的所有临界点都是非退化的；b) F 在边界 ∂N 上没有临界点；c) F 在边界 ∂N 上的限制是一个莫尔斯函数；d) F 的所有临界值与其限制 $F|_{\partial N}$ 的所有临界值互不相同。

一个<style id='1'>伪函数 F 在带边界的不可定向曲面 N 上是简单~$Morse$ 的，当且仅当其提升 F 到定向双覆盖 N 后是简单Morse。此类伪函数 F 的Reeb~图（定义为 F的Reeb图）同时包含~实边（对应于 F-水平集与圆微分同胚）和虚线边~（对应于 F-水平集与线段微分同胚）。该图~带有由 N的对合诱导的对合。图上的对合不能在虚线边上具有不动点，因为曲面 N 上相应的无不动点~对合不能将线段映射到自身。

4 二维余伴随轨道的分类

4.1 余伴随轨道与伪函数

设 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 为由赋有密度 ρ 的不可定向曲面 N 上的保面积微分同胚构成的群。本节将对 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 在其正则对偶空间 $\mathrm{Vect}^*_\rho(N) = \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$ 上的余伴随作用的一般轨道进行分类。回顾一下，该作用与通过拉回定义的自然作用一致。

考虑映射

$$\mathrm{curl}\colon \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N) \to \widetilde{\Omega}^0(N),$$

由涡量伪函数*vorticity* 定义

$$\mathrm{curl}[\alpha] := \frac{\mathrm{d}\alpha}{\rho}.$$

由于 $\mathrm{d}(\alpha + \mathrm{d}f) = \mathrm{d}\alpha$，该映射在陪集上定义良好。此外，映射 curl 是到伪函数空间 $\widetilde{\Omega}^0(N)$ 的满射，因为$H^2(N;\ \mathbb{R}) = 0$。最后，注意到映射 curl 是 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$-等变的。换言之，对于任意 $\Phi \in \mathrm{Diff}_\rho(N)$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N) & \xrightarrow{\Phi^*} & \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{curl}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{curl}} \\ \widetilde{\Omega}^0(N) & \xrightarrow{\Phi^*} & \widetilde{\Omega}^0(N). \end{array}$$

定义 4.1。若陪集 $[\alpha] \in \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$ 的 $\mathrm{curl}[\alpha]$ 是一个简单莫尔斯函数，则称其为简单 *Morse* 。若某个（从而每个）陪集 $[\alpha] \in \mathcal{O}$ 都是简单Morse，则称余伴随轨道 $\mathcal{O}$ 为简单 *Morse* 。

对于每个简单Morse陪集 $[\alpha] \in \Omega^1(N)/\mathrm{d}\Omega^0(N)$，都可以关联一个带对合的测度 Reeb 图 $\Gamma_{\mathrm{curl}[\alpha]}$ 。如果两个简单Morse陪集 $[\alpha]$和 $[\beta]$属于同一个余伴随轨道，那么相应的 Reeb 图是同构的。

逆命题则更加微妙。事实上，假设陪集 $[\alpha]$和 $[\beta]$具有同构的 Reeb 图。根据定理 3.11，存在一个保面积微分同胚 Φ ，使得 $\Phi^*\mathrm{curl}[\beta] = \mathrm{curl}[\alpha]$. 。因此，1-形式 $\Phi^*\beta - \alpha$ 是闭的。由于该 1-形式不一定是恰当的，陪集 $[\alpha]$ 和$[\beta]$不一定属于同一个余伴随轨道。尽管如此，我们可以得出结论：对应于同一个带对合的测度 Reeb 图的余伴随轨道空间是有限维的，其维数至多为 $\dim\ H^1(N;\ \mathbb{R})$.

4.2 带有对合的 Reeb 图上的偶循环函数

为了获得群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的简单余伴随轨道的完备不变量集，我们将上一节讨论的所有对象提升到 N 的定向双覆盖$\widetilde{\ }$ $M = N$ 。该定向双覆盖是一个辛曲面，具有辛形式 ω 和无不动点反辛对合 I。我们的目标是

将简单莫尔斯陪集 $\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$ 按偶（即与I对易的）辛微分同胚分类。为此，我们采用了 [12] 中引入的环流函数概念。

考虑一个简单莫尔斯陪集 $[\alpha]\in\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$。那么 $F:=\mathrm{d}\alpha/\omega$ 是 M 上的奇简单莫尔斯函数。令 Γ 为 F 水平集的集合。回想一下，这个集合具有带对合的测度 Reeb 图 ι 的结构，而这类图可在保面积微分同胚意义下对伪函数进行分类。为对轨道进行分类，我们在 Γ 上定义一种附加结构。

令 $\pi{:}M\to\Gamma$ 为自然投影。取任意一点 x，它位于 Γ 的某条边 e 的内部。则 $\pi^{-1}(x)$ 是 M 中的一条闭曲线 C。它由哈密顿向量场 $\omega^{-1}dF$ 自然定向。α 在 C 上的积分不会因将 α 改为一个函数微分而改变。因此，我们得到一个函数 $\mathscr{C}\colon\Gamma\backslash V(\Gamma)\to\mathbb{R}$，其定义为

$$\mathscr{C}(x)=\oint\limits_{\pi^{-1}(x)}\alpha$$

其定义在图 Γ 的顶点集 $V(\Gamma)$ 之外。

命题 4.2。函数 $\mathscr{C}$ 具有以下性质。

i) 假设 x，y 是 Γ的一条边 e 上的两个内部点。那么

$$\mathscr{C}(y)-\mathscr{C}(x)=\int\limits_x^y f\mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

ii) 设 v 是 Γ的一个顶点。那么 $\mathscr{C}$ 在 v处满足基尔霍夫规则：

$$\sum_{e\to v}\lim\nolimits_{x\xrightarrow{e}v}\mathscr{C}(x)=\sum_{e\leftarrow v}\lim\nolimits_{x\xrightarrow{e}v}\mathscr{C}(x)\,,$$

其中，$\sum_{e\to v}$ 表示对指向顶点 v的边求和，$\sum_{e\leftarrow v}$表示对从 v指出的边求和，而 $x\xrightarrow{e}v$ 表示$x\in\Gamma\backslash V(\Gamma)$ 沿着 e趋于 v。

iii) 函数 $\mathscr{C}$ 关于 Γ上的对合 ι 是偶的。

证明。前两个性质无论是否存在对合 [12]都成立。最后一个性质成立，是因为形式 α 和向量场 $\omega^{-1}dF$ 都是偶的。

□

定义 4.3. 设 (Γ,ι,f,μ) 是一个带对合的测度 Reeb 图。任何满足命题 4.2 中所列性质的函数 $\mathscr{C}\colon\Gamma\backslash V(\Gamma)\to\mathbb{R}$ 都称为偶循环函数。赋有偶循环函数的带对合的测度 Reeb 图称为带对合的环流图 $(\Gamma,\iota,f,\mu,\mathscr{C})$。

两个带对合的环流图同构，当且仅当它们作为带对合的测度 Reeb 图同构，且它们之间的同构保持环流函数不变。

上文将带对合的环流图 $\Gamma_{[\alpha]}:=(\Gamma,\iota,f,\mu,\mathscr{C})$ 与任意简单莫尔斯陪集 $[\alpha]\in\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$ 相关联。

注 4.4。 注意，环流图上的函数 f 可以根据环流函数 $\mathscr{C}$ 恢复，因为式 (4) 蕴含 $f = \mathrm{d}\mathscr{C}/\mathrm{d}\mu$。

以下结果描述给定带对合的测度 Reeb 图上偶循环函数所构成的空间。

命题 4.5. 带对合的测度 *Reeb* 图 (Γ, ι, f, μ) 上的偶循环函数空间是一个仿射空间，其对应的向量空间为 $H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R}) := \{\lambda \in H_1(\Gamma;\,\mathbb{R}) \mid \iota_*\lambda = -\lambda\}$。

证明. 根据定义，若函数 $\mathscr{C}\colon \Gamma\backslash V(\Gamma) \to \mathbb{R}$ 满足某些非齐次线性方程，则称其为偶循环函数。因此， Γ 上的偶循环函数集合确实是一个仿射空间。我们先证明它非空。为此，注意到由于 f 是奇的，我们有 $\int_\Gamma f\mathrm{d}\mu = 0$，所以根据 [12, 命题 4.5(i)]，测度 Reeb 图 (Γ, f, μ) 存在一个环流函数 $\mathscr{C}$。此外，通过考虑平均函数 $\frac{1}{2}(\mathscr{C} + \iota^*\mathscr{C})$，可以使后者成为偶函数。因此，偶循环函数空间是一个相容非齐次线性方程组的解空间，这意味着相应的向量空间是关联齐次方程组的解空间。该解空间由偶函数 $\xi\colon \Gamma\backslash V(\Gamma) \to \mathbb{R}$ 组成，这些函数在每条边上均为常数，并且在每个顶点处满足基尔霍夫定律。对于该解空间中的每个元素 ξ，考虑 Γ 上的一个 1-链 $\lambda(\xi) := \sum \xi|_e \cdot e$，其中求和遍历 Γ的所有边。于是， ξ 上的基尔霍夫方程等价于 $\lambda(\xi)$ 为一个圈，即 $\lambda(\xi) \in H_1(\Gamma;\mathbb{R})$。此外，由于对合 ι 会反转边的定向， ξ 为偶函数当且仅当$\lambda(\xi)$为奇函数。因此， Γ 上偶循环函数仿射空间所对应的向量空间确实是 $H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R})$，证毕。

□

推论 4.6。 带对合的测度 *Reeb* 图上的偶循环函数空间的维数 d 由 $(\Gamma,\ \iota,\ f,\ \mu)$ 给出

$$d = \dim H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(\#\mathrm{Fix}(\iota) + b_1(\Gamma) - 1), \tag{5}$$

其中，$\#\mathrm{Fix}(\iota)$ 表示 ι的不动点个数，而 $b_1(\Gamma) = \dim H_1(\Gamma,\mathbb{R})$ 表示 Γ的第一贝蒂数。特别地，

$$\frac{1}{2}(b_1(\Gamma) - 1) \leqslant d \leqslant b_1(\Gamma). \tag{6}$$

证明。 根据霍普夫迹公式，我们有

$$\begin{aligned}\#\mathrm{Fix}(\iota) &= 1 - \dim H_1^{even}(\Gamma;\mathbb{R}) + \dim H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R}) \\ &= 1 - \dim H_1(\Gamma;\mathbb{R}) + 2\dim H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R}),\end{aligned}$$

因此得证。 □

注 4.7。 另一种表示该维数的方式是 $d = b_1(\Gamma) - b_1(\Gamma/\iota)$。事实上，这是因为奇类构成投影$H_1(\Gamma$的核； $\mathbb{R}) \to H_1(\Gamma/\iota,\mathbb{R})$。

注 4.8。 不等式 $d \leqslant b_1(\Gamma)$ 成立，因为空间 $H_1^{odd}(\Gamma;\ \mathbb{R})$ 是 $H_1(\Gamma;\ \mathbb{R})$的子空间。该不等式也等价于 $\#\mathrm{Fix}(\iota) \leqslant b_1(\Gamma) + 1$。

后者成立是因为集合 $\{f=0\}$ 将 Γ 分成两个连通分支，因此至多包含 $b_1(\Gamma)+1$ 个点，而不动点集 $\mathrm{Fix}(\iota)$ 是 $\{f=0\}$的子集。

容易看出，除了 $0 \leqslant \#\mathrm{Fix}(\iota) \leqslant b_1(\Gamma)+1$ 和 $(\iota) \equiv b_1(\Gamma)+1 \mod 2$ 之外，$\#\mathrm{Fix}(\iota)$ 的数量没有其他限制，因此满足 (6) 的所有整数维数 d 都可以出现。

例 4.9。假设图 Γ 是一棵树。那么 $\dim H_1^{odd}(\Gamma;\mathbb{R})=0$，因此 Γ 上存在唯一的偶循环函数。

例 4.10。假设 $b_1(\Gamma)=1$。那么不等式 (6) 表明，Γ 上偶循环函数空间的维数 d 为 0 或 1。此外，根据公式 (5)，当且仅当 Γ 上的对合 ι 没有不动点时，$d=0$。引言中的图 2 展示了一个这样的对合示例。至于 $d=1$ 的情形，它对应于两个不动点，见图 3。

4.3 分类定理的证明

本节的主要结果是关于不可定向曲面上保测微分同胚群的一般余伴随轨道的如下分类：

定理 4.11。设 N 是一个配备密度 ρ. 的闭连通不可定向曲面。那么，$\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的简单莫尔斯余伴随轨道与兼容于 (N,ρ) 的循环图同构类一一对应。

图与不可定向曲面的相容性按照定义 3.10 中的方式理解。由于循环图也是一种测度 Reeb 图（具有额外的结构），因此该定义同样适用。

这一分类的一个等价且更为详细的表述，可以通过相应的定向双覆盖来给出，我们将对其进行证明：

定理 4.12。设 (M,I,ω) 是一个闭的连通辛曲面，配备一个无不动点反辛对合 I。在陪集空间 $[\alpha]\in\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$ 上，偶辛同胚（即与 I 对易的辛同胚）作用的一般轨道，与兼容于 M 的循环图（按同构类计，见定义 *3.9*）一一对应。换言之，以下陈述成立：

i) 对于两个简单莫尔斯陪集 $[\alpha],[\beta]\in\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$，以下条件等价：

- *a)* 存在一个偶辛同胚 Φ；
- *b)* 与陪集 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$ 对应的循环图 $\Gamma_{[\alpha]}$ 和 $\Gamma_{[\beta]}$ 同构。

ii) 对于每个与 (M,ω) 相容的循环图 $(\Gamma,\iota,f,\mu,\mathscr{C})$，存在一个简单莫尔斯陪集 $[\alpha]\in\Omega^1_{even}(M)/\mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$，使得 $\Gamma_{[\alpha]}=(\Gamma,\iota,f,\mu,\mathscr{C})$。

证明。 我们先证明第 (i) 部分。蕴含关系 (a) $\Rightarrow$(b) 由构造可得，因此只需证明 (b) $\Rightarrow$ (a)。根据定理 3.12，只需考虑 $\mathrm{d}[\alpha] = \mathrm{d}[\beta] = F\omega$ 的情形，并证明：如果由陪集 $[\alpha], [\beta]$ 给出的 F 的图 Γ 上的环流函数相同，那么存在一个偶辛微分同胚$\Phi \in \mathrm{Diff}_\omega(M)$，使得 $\Phi^*[\beta] = [\alpha]$。考虑 $\xi := [\alpha] - [\beta]$。于是 $\xi \in H^1_{even}(M)$。此外，由于 $[\alpha]$和 $[\beta]$的环流函数一致，可知上同调类 ξ 在 F-水平集上的周期为零。因此，根据 [12, 引理 4.8], ，存在一个光滑函数 $G \in \Omega^0(M)$，使得 1-形式 $GFdF$ 是闭的，且其上同调类为 ξ。（该引理说明，存在 $H \in \Omega^0(M)$，使得 HdF 是闭的，且其上同调类为 ξ。此外， H 可被 $\Omega^0(M)$ 中的 F 整除，因此我们只需令 $G := H/F$。）此外，由于上同调类 ξ 是偶的，不失一般性，我们可以假设 G 也是偶的，即 $G \in \Omega^0_{even}(M)$ （否则，将 G 替换为$\frac{1}{2}(G + I^*G)$）。

考虑偶辛向量场 $X := G\omega^{-1}dF$。那么，对于 Φ_t of$X$ 的流，我们有

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*[\beta] = \Phi_t^* L_X[\beta] = \Phi_t^*[i_X F\omega] = [GFdF] = \xi.$$

特别地， Φ_1 of V 的时间-1 流将 $[\beta]$ 映射到 $[\alpha]$，正如所需。

现在证明第 (ii) 部分。根据定理 3.12，存在一个奇简单莫尔斯函数 $F \in \Omega^0_{odd}(M)$，其带对合的测度 Reeb 图为 (Γ, ι, f, μ)。我们需要证明，从陪集 $[\alpha] \in \Omega^1_{even}(M) / \mathrm{d}\Omega^0_{even}(M)$（满足 $\mathrm{d}\alpha = F\omega$）构成的仿射空间到 Γ 上的偶循环函数空间的映射是满射；该映射将一个陪集 $[\alpha]$映射到相应的环流函数 $\mathscr{C}_{[\alpha]}$。为此，考虑相应的向量空间映射 $H^1_{even}(M;\ \mathbb{R}) \to H_1^{odd}(\Gamma;\ \mathbb{R})$，它将一个类 $[\beta] \in H^1_{even}(M;\ \mathbb{R})$ 映射到一个链 $\sum \beta(e)e$，其中 $\beta(e)$ 是将 β 在投影 $\pi\colon M \to \Gamma$ 下的 e 中任意内部点的原像上积分所得的值。在通过（扭曲的）Poincar´e 对偶性作如下识别 $H^1_{even}(M; \mathbb{R}) \simeq H_1^{odd}(M;\ \mathbb{R})$ 后，该向量空间映射变为投影 $\pi_*\colon H_1^{odd}(M;\ \mathbb{R}) \to H_1^{odd}(\Gamma;\ \mathbb{R})$, 它是满射。因此，仿射空间之间的映射 $[\alpha] \mapsto \mathscr{C}_{[\alpha]}$ 也是满射。定理得证。

□

推论 4.13。 设 N 是一个配备密度 ρ 的闭连通不可定向曲面。那么，与相同测度 ***Reeb*** 图 $(\Gamma,\ \iota,\ f,\ \mu)$ 相对应的群 $\mathrm{Diff}_\rho(N)$ 的余伴随轨道空间是一个维数为

$$d = \dim H_1^{odd}(\Gamma; \mathbb{R}) = \frac{1}{2}(\#\mathrm{Fix}(\iota) + b_1(N) - 1),$$

其中，$\#\mathrm{Fix}(\iota)$ 是 ι 的不动点数， $b_1(N) =$维数 $H_1(N,\ \mathbb{R})$ 是 N 的第一贝蒂数。特别地,

$$\frac{1}{2}(b_1(N) - 1) \leqslant d \leqslant b_1(N).$$

注意，对于可定向曲面 M，相应的维数 d 总是$\frac{1}{2}b_1(M)$, 即 M 的亏格。

例 4.14。 考虑实射影平面 $\mathbb{RP}^2$. 第一同调群$H_1(\mathbb{RP}^2;\ \mathbb{R})$ 是平凡的。因此，在这种情况下，一般余伴随轨道与带对合的测度 Reeb 图之间存在一一对应关系，这与例 4.9 一致。

例 4.15。 这里我们详细阐述引言中的例 1.7。图 2 所示的环面上的函数在克莱因瓶上定义了一个伪函数K^2. 有 $b_1(K^2) = 1$，而对合 ι 没有不动点。因此，在这种情况下，与给定的带对合的测度 Reeb 图相对应的余伴随轨道空间是 0 维的，即该图完全确定了该轨道，就像例 4.14 中一样。

现在考虑一个放置在水平桌面上的甜甜圈，并令 F 为其表面上的高度函数，将其归一化，使甜甜圈的中心对称点位于高度 0 处。于是， F 关于中心对称是奇函数。此外，尽管 F 不是莫尔斯函数（其临界点是退化的，并且组成两个圆），我们仍然可以考虑相应的图 Γ_F，将其定义为由 F-层集构成并赋予商拓扑的集合；该图还带有一个由甜甜圈的中心对称诱导的对合 ι。从拓扑上看，图 Γ_F 是一个圆，而对合ι 由轴对称给出，并且有两个不动点。现在考虑对 F 的一个小的奇莫尔斯扰动（例如，考虑甜甜圈放置在略微倾斜的桌面上时的高度函数）。于是， F 的每个临界圆都会分裂成两个莫尔斯临界点，所得的带对合的图如图 3 所示：由连续性可知，图上的对合仍有两个不动点。这样得到的环面上的函数又可以被看作克莱因瓶 K^2 上的一个伪函数。根据推论 4.13，与这类函数相对应的 $\mathrm{Diff}_\rho(K^2)$ 的余伴随轨道空间是 1 维的；相比之下，在“直立环面”上，高度函数的轨道空间维数为 0。注意，对于克莱因瓶而言，0 和 1 是轨道空间仅有的可能维数，参见例 4.10。

附录 A 动机：欧拉方程的哈密顿框架

A.1 欧拉方程

研究保测度微分同胚群的余伴随轨道分类，主要是为了描述理想流体动力学欧拉方程的第一积分。考虑一种无黏不可压缩流体，它充满一个紧致的、可能不可定向的 n 维黎曼流形 M，该流形带有黎曼密度形式 ρ。充满M 的无黏不可压缩流体的运动由流体动力学欧拉方程支配

$$\partial_t u + \nabla_u u = -\nabla p$$

该方程作用于 M中流体流动的无散速度场 u。这里， $\nabla_u u$ 表示场 u 沿自身的黎曼协变导数，而函数 p则由无散条件确定，但相差一个加法常数。

Arnold [2] 表明，欧拉方程可以被视为群 $\mathrm{Diff}_\rho(M) := \{\phi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \phi_*\rho = \rho\}$ 上测度保持微分同胚的测地流方程，其中所用的右不变度量在单位元处由流体速度场的 L^2-范数给出。该测地描述为欧拉方程蕴含了如下哈密顿框架。考虑李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}(M) =$的正则对偶空间 $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Vect}_\rho^*(M)$

$\{u \in \mathsf{Vect}(M) \mid L_u \rho = 0\}$上的无散向量场 M。这个对偶空间可自然地描述为陪集空间$\mathsf{Vect}_\rho^*(M) = \Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M)$，其中$\Omega^k(M)$是 M上的光滑 k-形式空间。对于 M上的 1-形式 α，其 1-形式陪集是

$$[\alpha] = \{\alpha + df \mid f \in C^\infty(M)\} \in \Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M)\,.$$

陪集与无散向量场之间的配对为

$$[\alpha](u) := \int_M \alpha(u)\,\rho$$

对于任意场 $u \in \mathsf{Vect}_\rho(M)$ （注意，对于不可定向流形 M，该积分仍然定义良好，因为它是函数 $\alpha(u)$关于密度伪形式ρ的积分）。由于对于任意恰当 1-形式 α 和任意 $u \in \mathsf{Vect}_\rho(M)$，后一个积分都为零，因此该配对在陪集上定义良好。群 $\mathsf{Diff}_\rho(M)$在对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用，是通过保测微分同胚对 M 上的（陪集中的）1-形式进行坐标变换给出的。

流形 M上的黎曼度量 $(\,,)$ 允许通过所谓的惯性算子来识别李代数及其正则对偶：给定 M 上的向量场 u，定义 1-形式 $\alpha = u^\flat$ 为其与速度场 u的逐点内积：$u^\flat(v) := (u, v)$ 对所有 $v \in TM$成立。将欧拉方程改写为关于 1-形式 $\alpha = u^\flat$ 的形式后，对于 M上的适当函数 P，它变为 $\partial_t \alpha + L_u \alpha = -dP$。用 1-形式 $[\alpha]$的陪集表示时，对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的欧拉方程写成

$$\partial_t [\alpha] + L_u [\alpha] = 0\,. \tag{7}$$

$\mathfrak{g}^* = \mathsf{Vect}_\rho^*(M)$ 上的后一个欧拉方程事实证明是一个哈密顿方程，其哈密顿泛函由流体的动能给出。哈密顿算子由李代数的余伴随作用 ad_u^* 给出；对于微分同胚群，这对应于李导数：$\mathsf{ad}_u^* = L_u$。对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上相应李-泊松结构的辛叶是相应群 $\mathsf{Diff}_\rho(M)$的余伴随轨道，详见 [2, 3]。余伴随作用的所有不变量，也称为卡西米尔不变量，都是欧拉方程关于任意选择黎曼度量的第一积分。

A.2 涡量与卡西米尔不变量

将涡量 2-形式 $\xi := \mathrm{d}u^\flat$ 引入为 1-形式 $\alpha = u^\flat$ 在M 上的微分，并注意到，对于陪集 $[\alpha]$，涡量恰当 2-形式是良定义的：同一陪集中的 1-形式 α具有相同的涡量 $\xi = \mathrm{d}\alpha$。用 ξ表示时，欧拉方程（7）呈现为涡量（或亥姆霍兹）形式

$$\partial_t \xi + L_u \xi = 0,$$

这意味着涡量形式由流体流动输运（或“冻结于”流体流动之中）（开尔文定理）。将涡量 ξ 定义为恰当 2-形式 $\xi = \mathrm{d}u^\flat$，对于任意维数的流形 M，无论其是否具有可定向性 M，都是有意义的。

在本文中，我们考虑维数为 2 的不可定向流形情形。在此背景下，流体的涡量可以视为涡量伪函数 $F = \mathrm{d}u^\flat/\rho,$ ，其中 ρ 是黎曼面积形式。由于涡量伪函数 F 随流输运，因此可以定义卡西米尔不变量，从而推广

可定向曲面上的涡量平方积分概念，即在曲面 M上对 F 的所有矩。在不可定向情形下，只考虑偶数矩

$$I_k(F) := \int_M F^k \, \rho, \ k = 0, 2, 4, \ldots$$

这些量是良定义的，因为伪函数的偶次幂是函数，可以对其进行密度积分。

要得到一组完整的卡西米尔不变量（$\mathrm{Diff}_\rho(M)$作用的不变量），需要分别对Reeb图的每条边计算类似的积分，参见 [11]。此外，若 $H^1(M, \rho) \neq 0$，还需要在上述定义的矩之外补充能够确定环流函数的不变量。从流体力学的角度看，这些不变量可视为流体环流，即沿 M上适当定义的闭路对 1-形式$\alpha = u^\flat$进行积分。

附录B 不可定向情形中的奇异余伴随轨道

假设 M 是一个闭的、可能不可定向的流形，且满足 $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$。那么， M上无散向量场的代数的正则对偶 $\mathrm{Vect}_\rho^*(M)$ 可识别为 M上恰当 2-形式的空间 $d\Omega^1(M)$。$\mathrm{Diff}_\rho(M)$ 在此空间上的余伴随作用由 2-形式的拉回给出。这里，我们将这一作用扩展到奇异恰当 2-形式（德拉姆流），特别是扩展到形如 δ_P的形式，其中 $P \subset M$ 是零调的余维二闭子流形。在流体力学中，形如 δ_P 的涡量在二维对应点涡，在高维对应涡旋膜。

B.1 余定向子流形上的 Marsden–Weinstein 辛结构

设 N 为一个闭的不可定向流形。鉴于该配对

$$\Omega^k(N) \times \widetilde{\Omega}^{n-k}(N) \to \mathbb{R},$$

自然可以将奇异 k形式（等价地，次数为$n-k$的德拉姆流）定义为作用于 $\widetilde{\Omega}^{n-k}(N)$ 上的连续（在适当意义下）泛函。特别地，对于一个余维 2 的余定向闭子流形 $P \subset N$，存在一个奇异 2-形式δ_P，其在次数为 $n-2$ 的伪形式 ω 上的值由 $\int_P \omega$给出。

命题 B.1。流 δ_P 是闭的。此外，如果 P 是一个边界，那么δ_P 是恰当的。

证明。闭流是指在恰当伪形式上取值为零的流。由不可定向流形上的斯托克斯定理可知， δ_P显然具有这一性质。此外，如果$P = \partial Q$，那么对于任意次数为 $n-2$ 的闭伪形式 ω，都有 $\int_P \omega = \int_Q d\omega = 0$，因此 δ_P是恰当的。 □

我们将 $P \,\mathrm{in}\, N$ 中余定向的闭的零调和的余维 2 子流形称为涡旋膜。所有涡旋膜构成的空间在 P 处的切空间

在 N 中可自然地识别为 P 的法丛的光滑截面空间。设 V 和 W 是这样的一对截面。假设 N 配备了密度 ρ。

定义 B.2。 在广义 *Marsden–Weinstein* 辛结构上的膜空间定义为

$$\omega_P^{\mathrm{MW}}(V,W) := \int_P i_V i_W \rho.$$

由于 P是余定向的，且 ρ是N维空间上的 $n=$次伪形式，因此内积 $i_V i_W \rho$ 是 P上的良定义 $n-2$次伪形式。因此，它可以在 P上积分，相应的积分也是良定义的。可以看出，它在法向量场 V和 W上是斜对称且非退化的。正如我们将在下文看到的，它还是闭的，因此在膜的空间上定义了一个辛结构。

回想一下，每个涡旋膜 $P \subset N$ 都会产生一个奇异恰当 2-形式δ_P。因此，可以将涡旋膜的空间 P （等价地，对应微分形式的空间 δ_P）视为 $\mathsf{Diff}_\rho(N)$ 的一个奇异余伴随轨道。$\mathsf{Diff}_\rho(N)$ 在涡旋膜上的作用，正是微分同胚在子流形上的自然作用。因此，由于涡旋膜的空间是一个余伴随轨道，它具有一种自然的（Kirillov–Kostant）辛结构。

命题 B.3。 *Marsden–Weinstein* 辛结构 ω^{MW} 与 *Kirillov–Kostant* 辛结构 ω^{KK}重合。

证明。 假设 $P=\partial Q$。那么 $\delta_P = d\delta_Q$，其中 δ_Q 是一个奇异 1-形式，它与次数为 $n-1$ 的伪形式 ω 的配对由 $\int_Q \omega$给出。设 v、 w 是散度为零的向量场，它们在 P的法丛上的限制分别为给定的两个截面V、 W。注意，由于 $\mathsf{Diff}_\rho(N)$ 在膜上的余伴随作用是微分同胚在子流形上的自然作用，相应的 $\mathsf{Vect}_\rho(N)$无穷小作用恰好就是限制：$\mathsf{ad}^*_v\delta_P = V$、$\mathsf{ad}^*_w\delta_P = W$。因此，我们有

$$\omega^{KK}_{\delta_P}(V,W) = \omega^{KK}_{\delta_P}(\mathrm{ad}^*_v\delta_P, \mathrm{ad}^*_w\delta_P) := \langle d^{-1}\delta_P,\ [v,w]\rangle$$
$$= \langle \delta_Q,\ [v,w]\rangle = \int_N \delta_Q \wedge i_{[v,w]}\rho = \int_Q i_{[v,w]}\rho = \int_P i_v i_w \rho = \omega^{MW}_{\delta_P}(V,W).$$

注意，对于无散向量场 v 和 w，它们的交换子满足单位元 $i_{[v,w]}\rho = d(i_v i_w \rho)$，这意味着倒数第二个等式。 □

B.2 不可定向流形上的副法线方程

现在，假设流形 N 配备了黎曼度量。在此情形下， N 中涡旋膜的辛流形上存在一个自然的哈密顿流。

定义 B.4. 通过取膜 P （即余定向的余维 2 闭子流形）的 $(n-2)$-黎曼体积，来定义一个哈密顿函数：

$$H(P) = \mathrm{volume}(P) = \int_P \mu_P,$$

其中， μ_P 是通过将 N上的度量限制到 P 上所定义的体积伪形式。再一次，密度 μ_P 的积分是良定义的，因为 P 是 N的余定向子流形。

定理 B.5。 在任意维数下， $n \geqslant 3$ 对于 *codimension 2* 膜上的哈密顿量 H 以及 *Marsden–Weinstein* 辛 ω^{MW} 结构，其哈密顿向量场为

$$v_H(p) = C \cdot J(\mathbf{MC}(p)) ,$$

其中， C 是取决于 N几何的常数， J 是 P的每个（定向）法空间中的正$\pi/2$ 旋转算子，而 $\mathbf{MC}(p)$ 是点 p处 P 的平均曲率向量。

回顾一下，对于维数为 ℓ 的光滑子流形P，平均曲率向量 $\mathbf{MC}(p) \in N_pP$ 是在 p处第二基本形式的归一化迹，即将迹除以 ℓ。等价地，向量 $\mathbf{MC}(p) \in N_pP$ 是在 P 中经过点 p 的测地线的曲率向量的平均值，该平均值是在 T_pP 中这些测地线所有可能的单位切向量组成的球面 $S^{\ell-1}$ 上取平均得到的。

证明。 上述定理对任意黎曼流形 N 都成立，无论其是否定向。对于定向流形，这一结论已在 [13, 18, 9] 中得到。然而，该论证是局部的，因此对任意 N 都有效。证明思路如下。众所周知，平均曲率向量指向流形体积最快减小的方向，即它们使场 $\mathbf{MC}(p) = -\mathrm{grad}\, H(p)$。此外，Marsden–Weinstein 辛结构实际上就是法平面 N_pP 上对所有 $p \in P$ 取平均所得的辛结构。因此，要由梯度场得到斜梯度场$v_H(p) = -J\mathrm{grad}\ H(p)$，需要在每个法平面中对几乎复结构应用算子 J，证毕。

□

定义 B.6。 膜上的副法向（或斜平均曲率）流 $P \subset N$ 由方程给出

$$\partial_t P(p) = -J(\mathbf{MC}(p)) .$$

注意，斜平均曲率流不会拉伸子流形 P，而是使其各点沿垂直于平均曲率的方向移动。特别地，子流形 P 的体积 $H(P)$ 在这一演化下保持不变，这正是应有的结果，因为它是相应动力学的哈密顿函数。

对于维数 $n = 3$ ，平均曲率向量是曲线 γ 的曲率向量 $k \cdot \mathbf{n}$：$\mathbf{MC} = k \cdot \mathbf{n}$，而斜平均曲率流变为副法线方程：

$$\partial_t \gamma = -J(k \cdot \mathbf{n}) = k \cdot \mathbf{b} = \gamma' \times \gamma'',$$

whe其中，最后一个等式在 γ 的弧长参数化 θ 下成立： $\gamma' := \partial\gamma/\partial\theta$.

注 B.7. 回想一下，可以将所有对象提升到自然定向的~双覆盖 N上，该双覆盖带有一个无不动~ ~点的反定向对合。于是 P 便产生其定向覆盖 $P \subset N$；可以将不可定向情形中的奇异涡量视为可定向情形中的奇异涡量，且它们在反定向对合下等变。这样一来，就可以通过相应双覆盖上的等变版本，重新表述膜上的副法线流。

参考文献

[1] G. Adelson-Welsky 和 A. Kronrode. 关于具有偏′导′数′的连续函数的水平集。苏联科学院院报′（苏联），49(4):235–237，1945年。[2] V. Arnold. 关于无穷维李群的微分′几何′及其在′理想流体动力学中的应用。傅里叶研究所年刊，16(1):319–361，1966年。[3] V. Arnold 和 B. Khesin. 流体动力学中的拓扑方法，第 125 卷。Springer，1998年，第二版：2021年。[4] N. Balabanova. 不可定向曲面上点涡的哈密顿方法 II：克莱因瓶。*arXiv:2202.06175*，2022年。[5] N. Balabanova 和 J. Montaldi. 不可定向曲面上点涡的哈密顿方法 I：莫比乌斯带。*arXiv:2202.06160*，2022年。[6] M. Bruveris、P. Michor、A. Parusi´ński 和 A. Rainer. 带角流形上的 Moser定理。美国数学会会刊，146(11):4889–4897，2018年。[7] G. De Rham. 可微流形：微分形式、流与调和形式，第 266 卷。Springer Science & Business Media，2012年。[8] W. Donnelly、L. Freidel、S.F. Moosavian 和 A.J. Speranza. 引力边缘模、余伴随轨道与流体动力学。高能物理学杂志，2021年(9):1–63，2021年。[9] S. Haller 和 C. Vizman. 非线性格拉斯曼流形作为余伴随轨道。《数学年刊》，329:771–785，2003年。[10] A. Izosimov 和 B. Khesin. 二维欧拉方程定常解的刻画。国际数学研究论文集，2017年(24):7459–7503，2016年。[11] A. Izosimov 和 B. Khesin. 二维流体动力学中卡西米尔不变量的分类。《莫斯科数学杂志》，17(4):699–716，2017年。[12] A. Izosimov、B. Khesin 和 M. Mousavi. 曲面上辛同胚的余伴随轨道与理想流体动力学。傅里叶研究所年刊，66(6):2385–2433，2016年。[13] B. Khesin. 涡旋膜上的辛结构与动力学。《莫斯科数学杂志》，12(2):413–434，2012年。[14] I. Kirillov. 曲面辛同胚群的余伴随轨道分类。国际数学研究论文集，2023年(7):6219–6251，2023年。

[15] L. Nicolaescu. 莫尔斯理论导论。Springer，2007。

[16] R. Penna. SDiff(S^2) 与轨道方法。《数学物理学杂志》，61:012301，2020。[17] G. Reeb. 关于完全可积的 Pfaff形式或数值函数的奇点。《法国科学院院刊》。巴黎，222:847–849，1946年。[18] B. Shashikanth. $\mathbb{R}^4$中的涡旋动力学。《数学物理学杂志》，53:3103–3135，2012年。[19] A.R. Shastri. 微分拓扑基础。CRC出版社，2011年。[20] J. Vanneste. 莫比乌斯带上的涡旋动力学。《流体力学杂志》，923，2021年。