纽结及其相关 q-级数

Stavros GAROUFALIDIS [a] 和 *Don ZAGIER* [bc]

a) 国际数学中心，南方科技大学数学系，中国深圳电子邮箱：
*stavros@mpim-bonn.mpg.de*网址：
http://people.mpim-bonn.mpg.de/stavros

b) 马克斯·普朗克数学研究所，德国波恩电子邮箱：
*dbz@mpim-bonn.mpg.de*网址：
http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier

c) 国际理论物理中心，的里雅斯特，意大利

收到日期：2023年4月25日，最终定稿日期：2023年10月17日；在线发表日期：2023年11月1日https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.082

摘要。 我们讨论了一个由纽结补空间的 Andersen–Kashaev 态积分的因式分解得到的、定义在上半平面与下半平面中的周期全纯函数矩阵。该矩阵具有显著的解析与渐近性质，并在实数上的矩阵值分段解析函数空间上定义了一个 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-余循环。根据 [arXiv:2111.06645] 的精化量子模性猜想，我们将相应的余循环与来自纽结的 Kashaev不变量（及其矩阵值扩展）的余循环对应起来，并进一步将矩阵值不变量与 Dimofte–Gaiotto–Gukov 的 3D-指标联系起来。该余循环还具有解析延拓性质，从而引出了矩阵值全纯量子模形式的概念。这是多个彼此独立的经验性与理论性发现的故事，所有这些发现都通过三个最简单的双曲纽结加以说明。

关键词： q-级数；Nahm和；纽结；Jones多项式；Kashaev不变量；体积猜想；双曲三维流形；量子拓扑；量子模形式；全纯量子模形式；态积分；3D指标；量子二对数；渐近行为；陈–西蒙斯理论

*2020*年数学主题分类：57N10；57K16；57K14；57K10

arXiv:2304.09377v2 [math.GT] 1 Nov 2023

1 引言

本文是 [32], 的姊妹篇，我们希望讲述一个关于 q级数和纽结量子不变量的故事，我们认为这个故事非常有趣。这个故事始于11年前，当时我们面临一项挑战：计算一个四面体量子自旋网络求值中出现的 $q \to 1$ 处的 q-超几何级数的渐近展开。事实证明，当$q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$ 且 τ 沿正虚轴趋于零时，其渐近行为呈现振荡性（近似振荡值为0.32306）。经过一些尝试，我们发现这种振荡由最简单的双曲纽结（八字纽结）的体积除以 2π给出。双曲纽结的出现有些奇怪，因为无论在欧几里得空间还是双曲三维空间中，这种纽结都与四面体自旋网络（或其补空间）几乎没有关系。这种奇特的巧合还进一步显现：通过数值计算，我们发现渐近展开中的第一项和第二项经过一些简单的归一化后，分别是分子为11和697的有理数。我们在数据库中检索后发现，数字697是双曲纽结渐近展开中的第二个系数，而数字11则是第一个系数。这显然不是偶然！

使用数值方法，我们能够将 4_1 纽结的Kashaev不变量的渐近行为与上述 q-级数的径向渐近匹配到超过100项。

因此，我们的 q级数确实与 4_1纽结的一个不变量相关联。Dimofte– Gaiotto–Gukov 的 3D指标给出了这类纽结不变量（由一对整数索引）的系统性汇集 [11, 12], ，事实上，我们的 q级数可以改写为一个 q超几何和 $G_0(q)$ ，它与 3D指标相关，并且几乎但并不完全等同于所谓的总3D指标。对总3D指标进行一次不合法的（即形式上成立但发散的）计算表明，后者应当等于 $G_0(q)^2$, ，但计算显示二者并不一致。之后，试图确定总3D指标除以 $G_0(q)$ 所得的商，也没有得到任何结果。

与纽结相关的 q-级数的下一个来源是 Andersen–Kashaev 的态积分 [4]。尽管后者是 τ 在割平面 $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$上的解析函数，但物理学文献中早已众所周知（见 [5]），它应当分解为有限个乘积之和，即q-级数与 $\tilde{q}$-级数的乘积，其中 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$ 和 $\tilde{q} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/\tau}$。事实上，Kashaev 和第一作者确实对 4_1 纽结的态积分（以及一般的一维态积分）完成了这一分解，并发现了第二个 q-级数 $G_1(q)$ [27]。此外，经过实验检验， 4_1纽结的总3D指标等于乘积 $G_0(q)G_1(q)$, 这一结论可以得到严格证明。

接下来，我们研究了当 q趋近于单位根 $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$ (对于有理数 α) 时， 4_1 纽结的 q-级数向量 $(G_0(q)\ G_1(q))$ 的渐近行为。这一次，结果并不令人意外：我们发现了一对渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_1)_\alpha}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 和 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_2)_\alpha}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ （分别对应于 4_1 纽结的几何表示及其复共轭），它们出现在量子模性猜想 [32]的一个细化版本中。将态积分中 q接近单位根时的 q 级数和 $\tilde{q}$-级数替换为它们的渐近展开，产生了一个双线性组合，其中包含阶乘发散级数，而这些级数竟然是收敛幂级数！这一现象通过相应幂级数的第 150 个系数的增长率大幅下降得到了生动的体现。

理解了最简单双曲结的情况后，我们观察到了两个新现象。其一是，纽结的 3q级数向量（在单位圆盘内外）以及（-2，3，7）扭结结的 6 q级数向量满足二次关系（对于 4_1 纽结，这些关系是平凡的）。其二是出现了一个层级：（-2， 3， 7）扭结结的层级为 2，这大概与其牛顿多边形具有半整数斜率这一事实有关。

回到 4_1 纽结的情形，其态积分的因式分解启发我们考虑由 q级数组成的向量 $(G_0(q)\ G_1(q))$ 的一个双线性 q 与 $\tilde{q}$ 组合，其中现在 $\tilde{q} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\gamma(\tau)}$ ，且 γ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的一个固定元素（原始态积分对应于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 的情形）。先验地，这个函数仅在 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上解析，但数值计算表明，该函数在割平面 $\mathbb{C}_\gamma$ 上解析。这启发我们将 Andersen–Kashaev 态积分推广为依赖于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中元素 γ 的形式，甚至推广为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 版本的 Faddeev 量子二对数；Kashaev 与作者目前正在合作研究这一课题 [28]。

仔细考察向量（$G_0(q)\ G_1(q)$）在 q趋近于 1 时的渐近行为，可以发现它们由一对渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_1)}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 和 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_2)}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 的线性组合给出。这表明，对向量（$G_0(q)\ G_1(q)$）作适当的线性组合，应当就能渐近等价于上述两个 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 级数之一。然而，这一说法并不正确。事实上，当 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$and τ沿固定射线 $\arg(\tau) = \theta_0$趋于零时，其径向渐近取决于射线；不同射线会呈现形如 $\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}m/\tau}\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 的渐近展开，其中 m a 为非负整数。当 $\arg(\tau) = \pi/2$时，这些指数小修正无法通过数值观测到；然而，当 $\arg(\tau)$ 接近 0 或 π时，确实可以看到这些级数 $\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}m/\tau}\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(2\pi \mathrm{i}\tau)$ 的某个倍数出现，而且更重要的是，这个倍数是一个整数。这一现象已可从态积分的双线性因式分解中窥见：它是若干乘积的有限和，每一项由 q-级数乘以 $\tilde{q}$-级数组成；本研究也观察到了这一现象，并且 Gu–Mari˜no 与第一作者 [22, 23] 的研究对此作了更深入的探讨。这引出了

一个矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} G_0^{(m)}(q) & G_1^{(m)}(q) \\ G_0^{(m+1)}(q) & G_1^{(m+1)}(q) \end{smallmatrix}\right)$，其元素是按整数指标编排的后代 q-级数，其中$G_0^{(0)}(q) = G_0(q)$ 且 $G_1^{(1)}(q) = G_1(q)$。

后代 q-级数的矩阵 $|q| \neq 1$ 导出一个渐近级数矩阵，以及一个矩阵值 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-余循环，其在 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 处的值由后代 Andersen–Kashaev 状态积分矩阵给出，而其在 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$处的值由 [28]的后代状态积分不变量矩阵给出。

两个矩阵值余循环，一个来自 [32]，另一个来自本文，在有理数处相等。这是状态积分在有理点 [26]处的第二个因子分解性质的推论。由此引出了全纯量子模形式这一概念，它是拟模形式的一种推广；其在有理数处以周期函数实现，是 [32] 关注的重点，而其在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$中以周期全纯函数实现，则是本文关注的重点。

本文中将有若干条称为“观察”的论述，它们最初均为经验观察，其中一些现已得到证明，另一些仍属猜想。我们会在每种情况下分别注明。

本文的初稿早在 2012 年就已写成，但之后一直未发表，因为我们不断发现新结果，使得旧版本过时了。在本文中，与 [32] 中研究的微扰级数以及单位根上的函数之间的关系终于变得明晰。这项工作的相关内容见于 [13, 14, 21, 27, 36, 37]。模线性 q-差分方程在 [29] 中首次提出。q 级数值矩阵扩展为多一行多一列的矩阵，使其能够看到平凡的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-表示，这一扩展见于 [24]。关于完整 3D指标（而非本文讨论的总版本）的渐近行为，以及相关的 Turaev–Viro不变量，详尽研究见于 [30]。Ni An 和 Yunsheng Li 在 [1] 中详细研究了与 $(-2,3,7)$-扭结结相关的 6×6 矩阵和 q-级数。

最后，我们提到，这个关于量子纽结不变量（即带环面边界的三维流形）的故事可以延伸到闭双曲3维流形的Witten–Reshetikhin–Turaev情形，而CampbellWheeler在其博士论文中证实了这一点 [51, 52]。

2 q级数如何出现

2.1 量子模性猜想

本节将讲述这样一个颇为有趣的故事：我们纯粹偶然地发现了一个 q级数，其在单位根附近的渐近行为与体积猜想和量子模性猜想中关于 4_1 纽结所产生的发散微扰级数相吻合；随后，一系列进一步的数值实验引出了本文所描述的最终图景。

一个纽结 K 具有两个著名的量子不变量，即（带颜色的）Jones多项式 $J_N^K(q) \in \mathbb{Z}\left[q, q^{-1}\right]$ 以及Kashaev不变量$\langle K \rangle_N \in \mathbb{Q}$（对于 $N \in \mathbb{N}$）。（两者的定义在此略去，因为本文不会用到它们；相关内容可在许多地方找到 [39, 41, 50]。）村上–村上 [48]发现，$\langle K \rangle_N$ 等于 $J_N^K(q)$在 $q = \zeta_N$ 处的取值，这正是我们所需要的公式。对于任意纽结，原则上都可以将其明确写出。例如，

$$\langle 4_1 \rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left|(\zeta_N; \zeta_N)_n\right|^2$$

其中 $(q;\, q)_n := \prod_{j=1}^{n}(1 - q^j)$ 是通常的 q-Pochhammer 符号，$\zeta_N = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/N}$。Kashaev 不变量可以等变地扩展为定义在复单位根上的函数 $\mathbf{J}$。此外，根据 Murakami 和 Murakami 的工作 [48]，对于任意纽结 K，类似定义的不变量 $\mathbf{J}^K(-1/N)$ 等于由 Kashaev [41] 定义的纽结不变量 $\langle K \rangle_N$。

Kashaev 著名的体积猜想指出，对于任意双曲结 K，$\langle K\rangle_N$ 的对数在 CN 当 N 趋于无穷时，渐近等于 C，其中 2π等于纽结的（复化）双曲体积除以 $2\pi\mathrm{i}$。体积猜想已被严格证明的情形寥寥无几，但对于 4_1 纽结，利用欧拉–麦克劳林公式和标准的渐近技巧证明起来相当容易，因为（2.1）中的所有项均为正，因此可以得到精确得多的公式

$$\mathbf{J}^{4_1}\left(-\frac{1}{N}\right) \sim N^{3/2}\widehat{\Phi}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\right) \tag{2.1}$$

其中 $\Phi(h)$ 定义为

$$\widehat{\Phi}(h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}V/h}\Phi(h),$$

其中 V 是该纽结的双曲体积

$$V = \mathrm{Vol}\big(S^3 \setminus 4_1\big) = 2\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{Li}_2\big(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}\big)\right) = 2.0298829\ldots, \tag{2.2}$$

且 $\Phi(h)$ 是具有代数系数的形式幂级数（除一个公因子外，所有系数均属于该纽结的迹域 $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-3}\big)$），其形式为

$$\Phi(h) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j h^j, \qquad A_j = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{1}{72\sqrt{-3}}\right)^j \frac{a_j}{j!} \tag{2.3}$$

其中 $a_j \in \mathbb{Q}$，前几项的值为

j	0	1	2	3	4	5	6	7
a_j	1	11	697	$\frac{724351}{5}$	$\frac{278392949}{5}$	$\frac{244284791741}{7}$	$\frac{1140363907117019}{35}$	$\frac{212114205337147471}{5}$

（2.1）的证明见 [6] 以及 [32]。一个较弱的渐近公式，其中 $\Phi(h)$ 被其常数项 a_0 取代，是 Andersen 和 Hansen 证明的 [3]。

2.2 一个 q-级数 $G_0(q)$

我们完全偶然发现的一个令人惊讶的事实是，这里出现的渐近表达式与单位圆盘中由.....定义的函数的径向渐近之间存在密切联系。

$$G_0(q) = (q;q)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(3n+1)/2}}{(q;q)_n^3} = 1 - q - 2q^2 - 2q^3 - 2q^4 + q^6 + \cdots. \tag{2.4}$$

式（2.4）中的无穷和出现在第一作者关于正则量子自旋网络求值系数稳定性的研究 [21, 节 7]，以及对其在 $q \to 1$ 的渐近行为进行数值研究的过程中，我们通过经验发现了以下结果：

观察 2.1. 我们有

$$G_0\big(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\big) \sim \sqrt{\tau}\big(\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau) - \mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)\big) \tag{2.5}$$

对任意阶成立，其中 τ 当 τ 沿上半平面内部的任意射线趋于 0 时。

为得到这个简单的陈述，我们在 $(q;\ q)_\infty$ 中加入了因子（2.4）。本节中这一观察以及后续观察的证明均在附录中略作说明。接下来，我们通过经验发现了关于 G_0 的另外两个公式。

观察 2.2. 我们有

$$G_0(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{q^{(n+m)(n+m+1)/2}}{(q;q)_n (q;q)_m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n^2}. \tag{2.6}$$

上述方程的一个证明由 S. Zwegers 给出（见附录 A.1）。这些表达式之所以值得关注，是因为它们不同于（2.4）中的原始级数，后者的原点与该 4_1 纽结之间没有明显的联系，而这些级数则与之相关：第一个级数由 T. Dimofte 向我们展示，是他与 Gaiotto 和 Gukov 合作的研究中典型的级数，出现在三角剖分的三维指标 [11, 12, 20] 中；第二个级数则是 Dimofte 和第一作者关于与带尖点三维流形的理想三角剖分相关的 q-级数 [13]中典型的级数。

方程 (2.5) 其实只是一个更大故事的一部分。一方面，幂级数 $\Phi(h)$ 只是第二作者在 [54] 中提出的关于 $J^{4_1}(q)$ 的模性猜想中出现的更一般的渐近级数 $\Phi_\alpha(h)$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) 在 $\alpha = 0$ 处的一个特例，并且在我们先前的论文 [32]中发挥着核心作用。这些渐近级数出现在当 $\tau \to 0$ 位于上半平面中的一个锥内时，$q = e^{2\pi i(\alpha+\tau)}$ 的 $G_0(q)$ 的渐近行为中。我们将在下文第 3.3 节讨论这一点。另一方面，q-级数 $G_0(q)$ 和渐近公式 (2.5) 与 Dimofte–Gaiotto–Gukov 指标以及 Hikami–Kashaev 态积分有关。接下来我们将对此进行解释。

2.3 指标、态积分和第二个 q级数 $G_1(q)$

在描述了 $G_0(q)$ 在单位根处的径向渐近之后，我们的下一步是寻找幂级数 $G_0(q)$ 与 4_1的指标之间的联系。指标是适合理想三角剖分的不变量，其定义见 [11, 12]。关于其收敛性的充要条件已在 [20] 中建立，其拓扑不变性则在 [25], 中得到证明，从而特别导出了对任意纽结 $_K(q)$ 的不变量 Ind K (，见 [25], 方程 (2)；在 $I_K^{\mathrm{tot}}(q)$)中，该不变量记作。指标定义为对格求和的四面体指标函数乘积

$$I_\Delta(m,e) = \sum_{n=\max\{0,-e\}}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)-(n+\frac{1}{2}e)m}}{(q;q)_n (q;q)_{n+e}}.$$

对于 4_1 纽结，在 (0,0) 处的旋转指标（以下简称指标）为

$$\mathrm{Ind}_{4_1}(q) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} I_\Delta(k_1,k_2) I_\Delta(k_2,k_1) = 1 - 8q - 9q^2 + 18q^3 + 46q^4 + 90q^5 + \cdots.$$

人们很自然地会期待 $\mathrm{Ind}_{4_1}(q)$ 与 $G_0(q)$ 之间存在某种关系。将 $\mathrm{Ind}_{4_1}(q)$ 不合法地改写为对整数的四维求和（该求和是发散的），却在重新整理后分解为两个二维求和的乘积，而这两个二维求和分别都等于 $G_0(q)$，这一点增强了这种期待。然而，当我们进行实验时，并未观察到级数 $\mathrm{Ind}_{4_1}(q)$ 与 $G_0(q)^2$ 之间存在任何关系。

寻找 $\mathrm{Ind}_{4_1}(q)$ 与 $G_0(q)$ 之间缺失关系的关键，最终发现涉及与 4_1 纽结 [4] 相关联的 Andersen–Kashaev态积分，以及它的因式分解 [27] ，即表示为 q-级数与 $\tilde{q}$-级数乘积之和。

态积分出现在量子双曲几何中，也出现在由 Kashaev [4, 40], Dimofte [9, 10]及许多其他研究者 [15, 38]的工作所开创的具有复规范群的陈–西蒙斯理论中。其基本构件是 Faddeev 量子二对数，而对带尖点双曲3-流形 M 进行适当的组合理想三角剖分，所得结果是一个全纯函数，通常与理想三角剖分无关，因而是一个拓扑

不变量。下文将使用 Andersen–Kashaev 不变量的态积分，该不变量定义在双曲纽结补空间 [4]上。在我们所采用的规范化中，这个不变量是割平面 $Z_M(\tau)$ 上的一个全纯函数 $\mathbb{C}'$，对于 4_1 纽结，其表达式为（见 [4, 第11节。4]）

$$Z_{4_1}(\tau) = \int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}\varepsilon} \Phi_{\sqrt{\tau}}(x)^2 \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} x^2} \mathrm{d}x, \qquad \tau \in \mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \tag{2.7}$$

(为方便起见，记 Z_K 为 $Z_{S^3\setminus K}$)，其中 ε为较小的正数，且 $\Phi_{\mathsf{b}}(x)$ 是 Faddeev 的量子对数 [17]

$$\Phi_{\mathsf{b}}(x) = \frac{\left(-q^{1/2}\mathrm{e}^{2\pi \mathsf{b} x}; q\right)_\infty}{\left(-\tilde{q}^{1/2}\mathrm{e}^{2\pi \mathsf{b}^{-1} x}; q\right)_\infty}, \qquad q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}, \qquad \tilde{q} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/\tau}, \qquad \tau = \mathsf{b}^2.$$

众所周知（例如参见 [5, 27]），量子二对数的极点集合结构使我们能够将该积分分解为有限个函数乘积之和，其中函数分别关于上述的 q 和 $\tilde{q}$。这里的结果由以下定理给出。设 $G_1(q)$ 为由下式定义的 q-超几何级数

$$\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon}; q)_\infty^2}{(q; q)_\infty^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{q^{m(m+1)/2} \mathrm{e}^{(m+1/2)\varepsilon}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon}; q)_m^2} = G_0(q) + \frac{\varepsilon}{2} G_1(q) + O(\varepsilon)^2 \tag{2.8}$$

并明确写为

$$\begin{aligned} G_1(q) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m(m+1)/2}}{(q; q)_m^2} \left(\mathcal{E}_1(q) + 2 \sum_{j=1}^{m} \frac{1+q^j}{1-q^j} \right) \\ &= 1 - 7q - 14q^2 - 8q^3 - 2q^4 + 30q^5 + 43q^6 + 95q^7 + 109q^8 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $\mathcal{E}_1$({v2)（“权 1 非模 Eisenstein 级数”）是幂级数

$$\mathcal{E}_1(q) = 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} = 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} d(n) q^n, \qquad d(n) = \text{number of divisors of } n. \tag{2.10}$$

定理 ([27])。当 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ 时，有

$$2\mathrm{i}(\tilde{q}/q)^{1/24} Z_{4_1}(\tau) = \tau^{1/2} G_1(q) G_0(\tilde{q}) - \tau^{-1/2} G_0(q) G_1(\tilde{q}), \tag{2.11}$$

其中 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$ 和 $\tilde{q} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/\tau}$。

$G_0(q)$ 和 $G_1(q)$ 的系数可以利用以下关系轻松计算：

$$G_0(q) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(q), \qquad G_1(q) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(q) T_m(q), \tag{2.12}$$

其中 $T_m(q)$ 和 $R_m(q)$ 由以下递推关系给出：

$$T_m(q) = -\frac{q^m}{(1-q^m)^2} T_{m-1}(q), \qquad R_m(q) = R_{m-1}(q) + 2\frac{1+q^m}{1-q^m}$$

初始条件为 $T_0(1) = 1$ 和 $R_0(q) = \mathcal{E}_1(q)$。例如，我们得到

$$\begin{aligned} G_1(q) = 1 &- 7q - 14q^2 - 8q^3 - 2q^4 + 30q^5 + 43q^6 + 95q^7 + 109q^8 + 137q^9 + 133q^{10} \\ &+ 118q^{11} + 20q^{12} - 64q^{13} - 232q^{14} - 468q^{15} - 714q^{16} - 1010q^{17} - 1324q^{18} \\ &- 1632q^{19} - 1878q^{20} + \cdots - 207821606967484464484714504354799q^{1500} + \cdots. \end{aligned}$$

非常偶然地，当我们比较 $G_0(q)$、$G_1(q)$ 和指标的幂级数展开时，发现了如下结果。

观察 2.3。 三个 q-级数 $G_0(q)$、 $G_1(q)$ 和 $\mathrm{Ind}_{4_1}(q)$ 之间存在如下关系：

$$\mathrm{Ind}_{4_1}(q) = G_0(q)G_1(q). \tag{2.13}$$

方程 (2.13) 的一个证明由 T. Dimofte 告知我们，另一个证明则可由 [23, 第 5 节3]的结果推出。这个观察表明， q-级数 $G_0(q)$ 与 $G_1(q)$ 密切相关。由于我们此前已经发现， $G_0(q)$ 在 $q \to 1$ 时的渐近行为与 (2.1) 中出现的幂级数之间存在联系（观察 2.1），因此对 $G_1(q)$ 在 $q \to 1$时的渐近行为进行类似的数值研究是很自然的。这次实验的结果见下述观察，出乎意料地简单。

观察 2.4。我们有

$$G_1\big(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}}\big(\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau) + \mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)\big) \tag{2.14}$$

to 当 τ 趋于 0 时，在上半平面内部的一个锥形区域内，对 τ 的所有阶均成立。

方程 (2.8) 的右端定义了一列幂级数（每个 ε 的幂对应一个），其中前两个为 $G_0(q)$ 和 $G_1(q)/2$。这类似于 Golyshev 和第二作者 [34, 55],研究的线性微分方程的 ε-变形，也类似于 Jacobi形式理论，其中 ε 扮演 Jacobi变量的角色。 ε-变形与态积分因式分解之间的联系将在下文附录 A.5 中进一步讨论。人们或许会想知道，(2.8) 中 ε^2 (或 ε^k 的系数所给出的 q-级数在 $k \geq 2$) 时，其径向渐近行为是否可由观察 2.1 和 2.4 的某种变体描述。Wheeler [51] 最近发现了一个相关关系。

我们通过经验发现了以下另一种 q级数表示式： G_1它只是对 G_0 在（2.6）中给出的第二个公式稍作修改。

观察 2.5。对于 $|q| < 1$ ，我们有

$$G_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(6n+1)}{(q;q)_n^2}. \tag{2.15}$$

后来在 [23, 第 5 节中证明了这一点。3]。

2.4 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$中的全纯函数

这些 q级数与 G_0 以及 G_1 在方程（2.11）中给出的态积分之间的关系，揭示了 q级数 G_0 和 G_1的另一个方面，即它们可以延拓到单位圆盘 $|q| > 1$之外。这是因为，一方面，态积分满足对称性

$$Z_{4_1}(\tau) = Z_{4_1}\big(\tau^{-1}\big), \qquad \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

（这反过来又源于 Faddeev 量子对数的相应对称性）；另一方面，态积分可以分解为显式的 q-超几何级数，而当 $|q| \neq 1$时，这些级数必然收敛。事实上，方程（2.6）最后一部分中的被加项在将 q 替换为 q^{-1}后保持不变量，因此该方程的公式定义了 G_0 的延拓；对于 $|q| > 1$ ，它满足性质 $G_0\,(q) = G_0\big(q^{-1}\big)$。同样，方程（2.9），结合约定 $E_1\big(q^{-1}\big) = -E_1\,(q)$ 对于 $|q| > 1$, 定义了 G_1 的延拓，并满足性质 $G_1\,(q) = -G_1\big(q^{-1}\big)$。综上，我们有

$$G_0(q) = G_0\big(q^{-1}\big), \qquad G_1(q) = -G_1\big(q^{-1}\big), \qquad q \in \mathbb{C}, \qquad |q| \neq 1$$

并且方程（2.11）对 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 成立。

3 q-级数与微扰级数

本节将进一步讨论我们的 q-级数对 $(G_0(q)\ G_1(q))$ 的三个方面。其一是，它们的渐近展开取决于扇区。这似乎是一般q-超几何级数的一个此前未曾发现的性质，不仅在理论上有趣，在实践中也很有意义，因为为了数值计算渐近展开，我们可以选择只有一个主导渐近项的射线，从而大大简化数值计算。从这个角度来看，当 $q \in [0,1)$ 趋于 1 时的数值渐近行为是一种非常共振的情形。

第二个方面是，阶乘发散级数的双线性组合会给出收敛幂级数。这些双线性组合的灵感来自状态积分的因式分解，并结合了我们的 q-级数的渐近展开；它们还导出了状态积分在有理数处的泰勒级数展开的显式公式，随后这些公式已在 [26]中得到证明。

第三个方面是，我们的 q-级数的渐近分析可以推广到任意复单位根。这并不令人意外；它将当 q 趋近于单位根时，$(G_0(q)\ G_1(q))$ 这一对函数的渐近展开，与第二作者 [54] 的量子模性猜想中的 Kashaev不变量的渐近展开联系起来。

3.1 扇区中全纯函数的渐近行为

由于我们将考虑 q 上关于 $|q| \neq 1$ 的函数，以及满足 $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$ 的 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 的函数，因此我们将用大写字母表示 q 上满足 $|q| \neq 1$ 的函数 $F(q)$，用小写字母表示相应的 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上的函数 $f(\tau) := F\big(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\big)$。例如，我们有

$$g_0(\tau) = G_0\big(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\big), \qquad g_1(\tau) = G_1\big(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\big), \qquad \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

和观察2.1和2.4可以写成以下形式

$$g_0(\tau) \sim \sqrt{\tau}\big(\widehat{\Phi}(2\pi \mathrm{i}\tau) - \mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi \mathrm{i}\tau)\big), \qquad g_1(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}}\big(\widehat{\Phi}(2\pi \mathrm{i}\tau) + \mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi \mathrm{i}\tau)\big) \tag{3.1}$$

当 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 在上半平面的内部某个锥形区域内趋于 0 时。这里我们强调，我们考虑的不仅仅是 $q \to 1$ 沿径向趋于 0 的情形，即令 $\tau = -\epsilon$，其中正实数 ϵ 趋于 0；同时也允许 τ 以固定角度趋于 0。这一点对于实际进行数值实验非常重要，因为通常（本文中也是如此），仅沿虚轴移动时的极限很难辨认，这是因为（2.14）中的两项都是振荡的，且具有相同的数量级，因此会相互干扰。只有当我们$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$允许自己拥有更大的自由度时，才能清晰地观察到数值结构。这两个渐近级数 $\Phi(2\pi\tau)$ 和 $\mathrm{i}\Phi(-2\pi\tau)$ 将上半平面划分为两个扇区 S_1：$\arg(\tau) \in (0, \pi/2]$ 和 S_2：$\arg(\tau) \in [\pi/2, \pi)$；见图1。$\widehat{\ }$在 S_1 的内部，$\Phi(2\pi\tau)$ 在指数意义上占主导地位，而在 S_2 中则相反；在公共射线 $\arg(\tau) = \pi/2$ 上，两个函数均呈现振荡增长。

在固定射线上，方程（3.1）的渐近陈述涉及具有不同增长率的级数组合，乍看之下，（3.1）中被支配级数前的系数似乎没有意义。然而，对 [32, 33]进行精细最优截断后，我们可以对两个发散级数 Φ（$\pm 2\pi \mathrm{i}\tau$）赋予数值意义，其相对误差相对于首项呈指数级而非仅多项式级的小量；这样，我们就能在（3.1）中“看到”这两项。

我们还可以尝试对（3.1）中的两个方程取线性组合，从而得到新的全纯函数 $w^{(\sigma_1)}(\tau)$ 和 $w^{(\sigma_2)}(\tau)$，它们在原点附近的渐近行为分别给出各个完备级数 $\Phi(\pm 2\pi\mathrm{i}\tau)$。具体来说，如果我们定义一个全纯

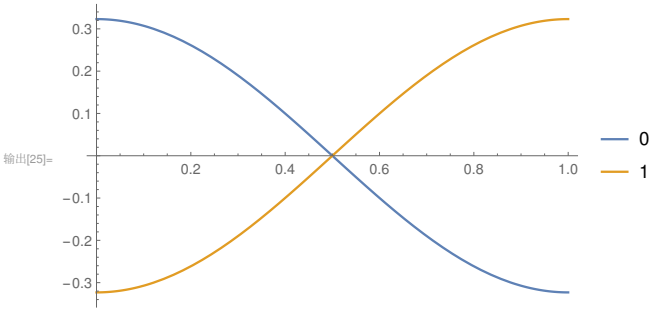

图1. 在 $0 < \theta < 1$ 和 $|\tau|$ 固定时， $\Phi(\pm 2\pi \mathrm{i}\tau)$ 的增长率 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}V/(\pm 2\pi \mathrm{i}\tau))$ 随 $\arg(\tau) = \pi\theta$ 变化的图。0 表示 $+$ 分支，1 表示 $-$ 分支。这些分支在 0.5 处相交，并将区间 (0,1) 划分为两个扇区。

向量值函数 $w(\tau) = \begin{pmatrix} w^{(\sigma_1)} \\ w^{(\sigma_2)}(\tau)\,(\tau) \end{pmatrix}$ 如下

$$w(\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau^{-1/2} g_0(\tau) \\ \tau^{1/2} g_1(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \tau^{-1/2} g_0(\tau) \\ \tau^{1/2} g_1(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w(\tau), \tag{3.2}$$

那么方程 (3.1) 似乎可能意味着渐近陈述

$$w^{(\sigma_1)}(\tau) \sim \widehat{\Phi}(2\pi \mathrm{i}\tau), \qquad w^{(\sigma_2)}(\tau) \sim -\mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi \mathrm{i}\tau) \tag{3.3}$$

在两个象限 S_1 和 S_2中均成立至任意阶。无论如何，从 g 到 w 的转换还带来了其他几个有趣的推论。首先，我们可以得到一个非常简单的指标公式，即

$$\mathrm{Ind}_{4_1}\left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\right) = w^{(\sigma_1)}(\tau)^2 - w^{(\sigma_2)}(\tau)^2$$

(结合方程 (2.13) 和 (3.2))，再结合观察 3.1 ，可得当 τ 沿虚轴趋于零时，三维指标的渐近行为。第二个渐近公式由方程 (2.11) 与观察 2.3 （当 $\tau \to 0$ 时）结合，并利用以下事实$g_0(\tilde{\tau}) \sim G_0(0) = 1$和 $g_1(\tilde{\tau}) \sim G_1(0) = 1$，即为渐近公式

$$-(\tilde{q}/q)^{1/24} Z_{4_1}(\tau) \sim \widehat{\Phi}(-2\pi \mathrm{i}\tau), \qquad \tau \to 0^+.$$

换句话说，态积分 $\tau \to 0$ 以可能的最快速度指数衰减，并且其渐近展开与 $q = 1$处的 Kashaev 不变量的渐近展开在所有阶上都一致。这是态积分的一种体积猜想版本，最近已针对具有适当理想三角剖分的纽结补空间在 [2]中得到证明。

然而，方程（3.3）并不完全成立。相反，我们发现，它在虚轴的一个较大邻域内成立，但当 τ 从非常靠近正实轴或负实轴的位置趋近于 0 时则不成立。更准确地说，我们通过数值计算发现如下结果

观察3.1。 （3.3）中的第一个渐近方程在所有阶上都成立：当 τ 沿着辐角介于 0 和 τ 之间的射线趋近于 0 时；但当辐角更大时则不成立。第二个方程在所有阶上成立的条件是 τ 沿着辐角介于 0.11 和 π之间的射线趋近于 0；但辐角较小时则不成立。

作为示例，对于 $\tau = {}^{-10+}{}_{\mathrm{i}\ 100000}$ 我们得到

$$w^{(\sigma_1)}(\tau) \approx (-3.656 - 4.937\mathrm{i}) \times 10^{-1313}, \qquad \widehat{\Phi}(2\pi i\tau) \approx (4.351 + 2.821\mathrm{i}) \times 10^{-1390},$$
$$w^{(\sigma_2)}(\tau) \approx (-6.057 - 9.343\mathrm{i}) \times 10^{1388}, \qquad -\mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi \mathrm{i}\tau) \approx (-6.057 - 9.343\mathrm{i}) \times 10^{1388},$$

因此，$w^{(\sigma_2)}(\tau)$ 确实渐近接近 $-\mathrm{i}\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)$（事实上，它们的比值在数值上超过 200 位都等于 1），但 $w^{(\sigma_1)}(\tau)$ 与 $\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau)$ 完全不接近。另一方面，$w^{(\sigma_1)}(\tau)$ 与 $w^{(\sigma_2)}(\tau)$ 的比值极其接近 $3\tilde{q}$，其中 $\tilde{q}:=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/\tau}$；修正后的值 $w^{(\sigma_1)}(\tau) - 3\tilde{q}w^{(\sigma_2)}(\tau)$ 现在以超过 200 位的相对精度与 $\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau)$ 重合。换言之，在这一区域内，$w^{(\sigma_1)}(\tau)$ 总是渐近地非常接近 $\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau) + 3\mathrm{i}\,\tilde{q}\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)$，但在直线 $\arg(\tau) = \arctan\left(V/2\pi^2\right) = 0.10247\ldots$ 处存在相变；在此处，这个新近似中的两项与 $\tau \to 0$ 具有相同的数量级。如果继续向左移动，那么在 $\arg(\tau) = \arctan\left(V/4\pi^2\right) = 0.05137\ldots$ 处会出现新的相变，此时需要加入进一步的修正项 $18\tilde{q}^2 w^{(\sigma_2)}(\tau)$；同样地，继续移动时，每当 $\arg(\tau) = \arctan\left(V/2\pi^2 m\right)$，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $\tilde{q}^m\Phi(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 与 $\Phi(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 具有相同的数量级，就会发现相变。例如，在 $\tau = -40+\mathrm{i}\,100000$ 处所需的修正为 $\left(3\tilde{q} + 18\tilde{q}^2 + 99\tilde{q}^3 + 555\tilde{q}^4\right)w^{(\sigma_2)}(\tau)$，这使得 $w^{(\sigma_1)}$ 与 $\widehat{\Phi}(2\pi\mathrm{i}\tau)$ 的相对误差为 10^{-148}，而不加任何修正时得到的巨大误差为 10^{+531}。注意，我们无法通过寻找 $\tilde{q}$-幂级数线性组合来求出 $\tilde{q}$ 中的这些高阶修正，使该线性组合由 $\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 和 $\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 构成并且非常接近 $w^{(\sigma_1)}(\tau)$，$\widehat{\ }$因为即使采用改进的最优截断，我们也无法将 $\tilde{q}^m\Phi(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 计算到所需的精度；但是，由于 $w^{(\sigma_1)}(\tau)$ 和 $w^{(\sigma_2)}(\tau)$ 都以收敛幂级数的形式给出，可以计算到任意所需的精度，因此我们可以找到幂级数 $a = a_\pm(q)$ 的连续各项，使 $w^{(\sigma_1)} - aw^{(\sigma_2)}$ 与 $\widehat{\Phi}(-2\pi\mathrm{i}\tau)$ 在所有阶上都一致，τ 以任意介于 0 和 π 之间的幅角趋近实轴；类似地（通过研究正实轴附近的幂级数），还可以找到另一个 $\mathbb{Z}[[\tilde{q}]]$-幂级数线性组合，由 $w^{(\sigma_1)}$ 和 $w^{(\sigma_2)}$ 构成，并且在整个上半平面内与 $\Phi(2\pi\mathrm{i}\tau)$ 在所有阶上都一致。两个线性组合仅由这些要求确定，但整体表达式仍可乘以一个以 1 开头的 $\tilde{q}$ 中的幂级数。我们将在后面的第4节中说明其原因，以及如何找出 $\tau^{-1/2}g_0$ 和 $\tau^{1/2}g_1$ 的规范 $\mathbb{Z}[[\tilde{q}]]$-线性组合——见下方的方程 (4.3)。

3.2 从发散幂级数到收敛幂级数

将观察2.1 和2.4 与方程（2.11）结合起来，再利用 $Z_{4_1}(\tau)$ 在割平面 $\mathbb{C}'$ 上全纯这一事实，便可得到观察的第三个有趣推论，因为这会对阶乘发散形式幂级数 $\Phi(h) \in \mathbb{R}[[h]]$作出惊人的预测。具体来说，利用（2.11）中给出的态积分的因式分解、每个 $w^{(\sigma_j)}(\tau)$ 都是函数 $\tau^{-1/2}g_0(\tau)$ 和 $\tau^{1/2}g_1$ 的线性组合这一事实，以及 g_0 和 g_1 是1-周期这一事实，我们可以用 w 将态积分重新表示如下：

$$(\tilde{q}/q)^{1/24}Z_{4_1}(\tau) = -w^{(\sigma_1)}(\tau-1)w^{(\sigma_2)}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + w^{(\sigma_2)}(\tau-1)w^{(\sigma_1)}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right). \tag{3.4}$$

态积分在 $\mathbb{C}'$ 中全纯这一事实意味着，(3.4) 的右端在 $\tau = 1$ 附近有一个泰勒展开，其收敛半径为 1。不过，这样做并不充分，因为它只利用了 Z_{4_1} 在圆盘 $|\tau - 1| < 1$中的全纯性。如果我们利用它的全纯性，先在 $\{\mathrm{Re}(\tau) > 0\}$ 中，再在整个 $\mathbb{C}'$中，那么通过作变量替换

$$\tau = 1 + u = \frac{1+v}{1-v} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2, \tag{3.5}$$

它们分别给出了单位 u圆盘、v圆盘和 w圆盘与集合 $\{|\tau-1|<1\}$、$\{\mathrm{Re}(\tau) > 0\}$ 以及 $\mathbb{C}'$之间的双全纯映射，因此我们得到：

推论 3.2。设 $C = V/2\pi = 0.3230659\ldots$和 $\Phi(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ 由 （2.3）给出。以下三个形式幂级数 $Q(u) \in \mathbb{R}[[u]]$、$R(v) \in \mathbb{R}\left[\left[x^2\right]\right]$ 和 $S(w) \in \mathbb{R}\left[\left[w^2\right]\right]$ 定义为

$$Q(u) = \mathrm{e}^{-C}\Phi(2\pi\mathrm{i}u)\Phi\left(-\frac{2\pi\mathrm{i}u}{1+u}\right) - \mathrm{e}^{C}\Phi\left(\frac{2\pi\mathrm{i}u}{1+u}\right)\Phi(-2\pi\mathrm{i}u), \tag{3.6a}$$

$$R(v)=\mathrm{e}^{-C}\Phi\left(\frac{4\pi\mathrm{i}v}{1-v}\right)\Phi\left(-\frac{4\pi\mathrm{i}v}{1+v}\right)-\mathrm{e}^{C}\Phi\left(-\frac{4\pi\mathrm{i}v}{1-v}\right)\Phi\left(\frac{4\pi\mathrm{i}v}{1+v}\right), \tag{3.6b}$$

$$S(w)=\mathrm{e}^{-C}\Phi\left(\frac{8\pi\mathrm{i}w}{(1-w)^2}\right)\Phi\left(-\frac{8\pi\mathrm{i}w}{(1+w)^2}\right)-\mathrm{e}^{C}\Phi\left(-\frac{8\pi\mathrm{i}w}{(1-w)^2}\right)\Phi\left(\frac{8\pi\mathrm{i}w}{(1+w)^2}\right) \tag{3.6c}$$

收敛半径为1。

^请注意，从 (3.4) 得到的原始公式中，本应是 Φ，而不是 Φ，且不会有标量因子 $\mathrm{e}^{\pm C}$；这些因子是指数级大的前因子与指数级小的前因子相消后产生的。这也意味着，三个幂级数 Q、R和 S的系数均属于环 $\mathbb{Q}(\pi、\sqrt{-3}、\mathrm{e}^{C})$。 —

该推论表明，尽管原始幂级数 $\Phi(x$出现在 Kashaev 不变量 $\langle 4_1\rangle_N$ 的渐近展开中时是阶乘发散的，但由（ Q、 R 以及 S ）定义的各个组合 3.6都是收敛半径为 1 的收敛幂级数。以下表格直观地展示了系数的增长情况（取整），其中一部分内容已在 [32,方程 (35) 和 (83)]中给出：

k	0	50	100	150
$[h^k]\Phi(h)$	0.75	$6.7\cdot 10^{71}$	$3.1\cdot 10^{174}$	$7.4\cdot 10^{283}$
$[v^k]Q(v)$	−0.379	0.012	−0.007	0.002
$[u^k]R(u)$	−0.380	−0.037	0.009	−0.001
$[w^k]S(w)$	−0.379	−52068.5	−43932564.0	−75312313899.2

请注意， S的系数尽管远小于 Φ的系数，却远大于 Q 和 R的系数；这并不意味着 S 是这三个级数中最差的一个，实际上它是最好的一个，因为更快的增长反映出这样一个事实：单位 w圆盘对应于态积分的整个全纯域 $\mathbb{C}'$，而不是像另外两个级数那样仅对应于其中的一个子集，因此，该幂级数在整个单位圆上都有本性奇点，而不仅仅是在一两个点上。（这一观察已在 [32] 中提出。）

3.3 $G_0(q)$和 $G_1(q)$在单位根处的渐近行为

观察 2.1 和 2.4 给出了函数 $G_0(q)$ 和 $G_1(q)$ 在 $q=1$ 处的渐近行为，并以级数 $\widehat{\Phi}^{4_1}(h$表示；该级数出现在 Kashaev 不变量在 $q=1$处的渐近行为中。现在，我们利用级数 $\Phi_\alpha^{4_1}(h$，将上述观察推广到所有单位根；这些级数出现在该 4_1 纽结 [32]的 Kashaev 不变量的量子模性定理中。下面简要回顾后者。令

$$\mathbf{J}\colon\ \mathbb{Q}\to\overline{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C}$$

表示 Kashaev 不变量从 4_1 [41]到 $\mathbb{Q}$的延拓，其中 $\mathbf{J}(-1/N)=\langle K\rangle_N$。关于 4_1 纽结的量子模性定理断言，对于每个矩阵 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，我们有

$$\mathbf{J}\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)\sim(cX+d)^{3/2}\widehat{\Phi}_{a/c}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{c(cX+d)}\right)\mathbf{J}(X) \tag{3.7}$$

在 $\mathbb{Q}$ 中，当 $X\to\infty$ 时，关于 $1/X$ 的所有阶渐近展开，其分母有界，其中 $\alpha=a/\ \ c$,

$$\widehat{\Phi}_\alpha(h)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}V/c^2h}\Phi_\alpha(h)$$

且 $\Phi_\alpha(h)$ 是一个具有代数系数的幂级数。 [32] 详细讨论了量子模性猜想的各种改进。由于 $\mathbf{J}$ 是 1- 周期的（即，对于 $\sim\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 有定义），因此级数 $\Phi_\alpha(h)$ 取决于 $\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

幂级数 g_0 和 g_1 的量子模性陈述（3.7）的反射是方程（3.1）的如下扩展，其中我们设 $\tau=\alpha+\varepsilon/c$：

观察 3.3。 对于有理数 $\alpha = a/c$，我们有

$$g_0(\alpha + \varepsilon/c) \sim \sqrt{\varepsilon}\big(\widehat{\Phi}_{-\alpha}(2\pi\mathrm{i}\varepsilon) - \mathrm{i}\widehat{\Phi}_{\alpha}(-2\pi\mathrm{i}\varepsilon)\big), \tag{3.8a}$$

$$g_1(\alpha + \varepsilon/c) \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\big(\widehat{\Phi}_{-\alpha}(2\pi\mathrm{i}\varepsilon) + \mathrm{i}\widehat{\Phi}_{\alpha}(-2\pi\mathrm{i}\varepsilon)\big) \tag{3.8b}$$

在 ε 中的所有阶上，当 $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 在上半平面的内部某个锥中趋于 0 时。

最后，我们将方程（3.8）中给出的渐近展开重新表述为类似于量子模性猜想的形式。考虑向量值全纯函数$g = \left(\begin{smallmatrix} g_0 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right)$，其定义在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$上，其中 g_0 和 g_1 被规定具有权 $-1/2$ 和 $1/2$，并定义相应的向量值“斜线算子”如下：

$$(g|\gamma)(\tau) = \begin{pmatrix} (c\tau+d)^{1/2} g_0(\gamma\tau) \\ (c\tau+d)^{-1/2} g_1(\gamma\tau) \end{pmatrix}$$

对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，其中 $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$如通常一样。于是，方程（3.8a）和（3.8b）可以写成等价形式

观察 3.4。 对于任意 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{SL}_2(Z)$，我们有

$$(g|\gamma)(\tau) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \widehat{\Phi}_{\alpha}^{\cdot}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{c(c\tau+d)}\right), \qquad \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \qquad |\operatorname{Im}(\tau)| \to \infty$$

在 $1/\tau$ 的所有阶数上，其中 $\widehat{\Phi}_{\alpha}^{\cdot}(h) = \left(\begin{smallmatrix} \widehat{\Phi}_{\alpha}(h) & \mathrm{i}(\\ \widehat{\Phi}_{\alpha} & \\ -h) \end{smallmatrix}\right)$.

注意，观察 3.4 有一个推论，它推广了第 3.2 节中给出的推论：对于任意有理数 Φ_a，两个 $\Phi_{-1/\alpha}$-级数与一个 α-级数的两个乘积的线性组合，其收敛半径均为 1，而不再仅限于此前的 $\alpha = 1$。具体细节留给读者自行推导。

3.4 二次关系

现在我们描述使用其他纽结时观察到的一些新现象。纽结 4_1 具有反手性，因此很特殊：一般而言，应预期有一个 r元组，其中包含若干对 q级数，每个半平面上各一组，因此总共有 $2r$ q 个级数。（我们将在后面的第5.4 节看到这个数 r的拓扑意义。）然而，对于 4_1 纽结，四个 q 级数实际上是两个，每个都出现两次，这是由于 4_1 纽结的反手性。另一方面， 5_2 纽结和（-2，3，7）扭结结的因式分解积分分别给出总计 6 个和 12 个q级数。对于每个纽结，这些 q级数的集合都满足一个二次关系；对于 4_1 纽结，这个关系是平凡的。

下面以 5_2 纽结为例说明二次关系。该 5_2 纽结的 Andersen– Kashaev 态积分由 [4,方程（39）]

$$Z_{5_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}\varepsilon} \Phi_{\sqrt{\tau}}(x)^3 \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x^2} \mathrm{d}x, \qquad \tau \in \mathbb{C}'.$$

在 [27]，中，采用与 4_1 情形相同类型的留数计算，可以证明 Z_{5_2} 具有如下分解

$$2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}(\tilde{q}/q)^{1/8} Z_{5_2}(\tau) = \tau h_2(\tau) h_0\big(\tau^{-1}\big) + 2h_1(\tau) h_1\big(\tau^{-1}\big) + \frac{1}{\tau} h_0(\tau) h_2\big(\tau^{-1}\big) \tag{3.9}$$

当 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时，其中

$$h_j(\tau) = (\pm 1)^j H_j^{\pm}\big(\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\tau}\big) \qquad \text{for} \quad \pm \operatorname{Im}(\tau) > 0 \tag{3.10}$$

是在某个半平面内的全纯函数，而$H_j^{\pm}(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ 是系数属于 $1/6\mathbb{Z}$ 的 q 级数，其定义为

$$\begin{aligned}
&\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty^3}{(q;q)_\infty^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m(m+1)}\mathrm{e}^{(2m+1)\varepsilon}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m^3}\\
&\qquad = H_0^+(q)+\varepsilon H_1^+(q)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(H_2^+(q)+\frac{1}{6}\mathcal{E}_2(q)H_0^+(q)\right)+\mathrm{O}(\varepsilon)^3,\\
&\frac{(q;q)_\infty^3}{(q\mathrm{e}^{-\varepsilon};q)_\infty^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n(n+1)/2}\mathrm{e}^{(n+1/2)\varepsilon}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_n^3}\\
&\qquad = H_0^-(q)+\varepsilon H_1^-(q)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(H_2^-(q)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\mathcal{E}_2(q)\right)H_0^-(q)\right)+O(\varepsilon)^3, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

其前几项为

$$\begin{aligned}
H_0^+(q)&=1+q^2+3q^3+6q^4+10q^5+\cdots,\\
H_0^-(q)&=1-q-3q^2-5q^3-7q^4-6q^5+\cdots,\\
H_1^+(q)&=1-3q-3q^2+3q^3+6q^4+12q^5+\cdots,\\
H_1^-(q)&=\tfrac{1}{2}\left(1-9q-21q^2-19q^3-9q^4+54q^5\right)+\cdots,\\
H_2^+(q)&=\frac{5}{6}-5q+\frac{53}{6}q^2+\frac{117}{2}q^3+117q^4+\frac{601}{3}q^5+\cdots,\\
H_2^-(q)&=\frac{1}{6}-\frac{37}{6}q-\frac{17}{2}q^2+\frac{115}{6}q^3+\frac{389}{6}q^4+\cdots,
\end{aligned}$$

其更多性质见附录 A.4。此处，$\mathcal{E}_2(q)=1-24\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{1-q^n()^2}$ 是权为 2 的艾森斯坦级数，而 $(x;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-q^kx\right)$。

该 5_2 纽结的指标由下式给出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{5_2}(q)&=\sum_{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}} I_\Delta(-k_1,k_1-k_2)I_\Delta(-k_1,k_1-k_2-k_3)I_\Delta(2k_1-2k_2-k_3,-k_1)\\
&=1-12q+3q^2+74q^3+90q^4+33q^5-288q^6-684q^7-\cdots.
\end{aligned}$$

根据我们对 [23, 第 5 节3] 中结果的了解，接下来的观察（证明可由这些结果推出）对于 4_1 纽结 的情形是可以预料的。

观察 3.5。 q-级数 H_j 与指标之间的关系为

$$\mathrm{Ind}_{5_2}(q)=2H_1^+(q)H_1^-(q).$$

接下来的观察是在 3 对 q级数之间存在一个二次关系。这一发现出乎意料，纯属偶然。对于 4_1 纽结，这一关系并不可见，因为它会化为恒等式 $G_0(q)G_1(q)-G_1(q)G_0(q)=0$，这是 4_1 纽结具有反手性的结果。

观察 3.6。 q级数 H_j 满足二次关系

$$H_0^+(q)H_2^-(q)-2H_1^+(q)H_1^-(q)+H_2^+(q)H_0^-(q)=0.$$

现在我们讨论该 5_2 纽结的六 q级数。与 4_1 纽结的情形一样，当 $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 沿一条射线趋于零时，$h_j(\tau)$的渐近行为由三个渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma)}(h)$的有理线性组合给出，这些级数出现在量子

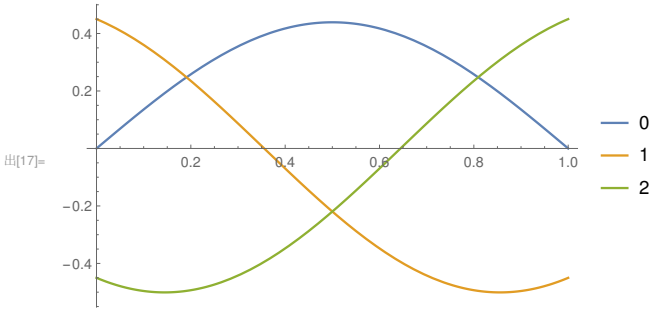

图2。 增长率 Re(Vol$_{\mathbb{C}}(\rho_j)/2\pi i\tau$) $w^{(\sigma_j)}(x)$ 在方程(3.13) 中定义，适用于 $j = 1$、、，其中 arg() 且 *(0,)*。分支在 *0.19*、*0.5*、*0*.81 处相交，并将区间 划分为四个扇区。

纽结的模性猜想 [32], 其中 σ 表示该 5_2 纽结的迹域的三个嵌入之一（判别式为 -23 、由 ξ 与 $\xi^3 - \xi^2 + 1 = 0$生成的三次域）。每个嵌入都对应于纽结补空间的基本群的一个边界抛物型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表示，约定 σ_1、 σ_2 和 σ_3分别表示几何嵌入（对应于 Im(ξ) < 0）、其复共轭以及迹域的实嵌入。当 τ 沿固定的一般射线趋于零时，三个渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(h)$ 的增长率各不相同，从而将上半平面和下半平面分别划分为四个扇区，如图2所示。

与 4_1 纽结的情形一样， [32] 的精细最优截断在每个扇区中$\backsim R$ 找到一个唯一的矩阵 M_R，使得 $h(\tau) \sim M_R\Phi(2\pi i\tau)$ 当 $\tau \in R$ 且 $\tau \to 0$ 时，其中

$$h = \begin{pmatrix} \tau^{-1}h_0 \\ h_1 \\ \tau h_2 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}^{(\sigma_1)} \\ \widehat{\Phi}^{(\sigma_3)} \\ \widehat{\Phi}^{(\sigma_2)} \end{pmatrix}.$$

^利用幂级数 Φ 的 108 个精确系数以及精细最优截断，我们得到了以下结果。

观察 3.7。我们有

$$h(\tau) \sim \begin{cases} N_+\widehat{\Phi}(2\pi i\tau) & \text{when } \arg(\tau) \in (0, 0.19), \\ N_-\widehat{\Phi}(2\pi i\tau) & \text{when } \arg(\tau) \in (-\pi/2, 0), \end{cases} \tag{3.12}$$

其中

$$N_+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/12 & 5/12 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad N_- = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -13/12 & -1/12 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 $N_\pm$求逆后，我们得到一个由 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$上的全纯函数构成的向量 $w = \begin{pmatrix} w^{(\sigma_1)} \\ w^{(\sigma_3)} \\ w^{(\sigma_2)} \end{pmatrix}$

$$w(\tau) = \begin{cases} N_+^{-1}h(\tau) & \text{when } \arg(\tau) \in (0, 0.19), \\ N_-^{-1}h(\tau) & \text{when } \arg(\tau) \in (-\pi/2, 0), \end{cases}$$

以等价形式表示方程 (3.12)

$$w^{(\sigma_j)}(\tau) \sim \widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(2\pi i\tau), \qquad \tau \to 0, \tag{3.13}$$

当 $\arg(\tau) \in (-\pi/2, 0。19) \setminus \{0\}$ 和 $j = 1, 2, 3$。由于函数 h 和 w 通过线性变换相关，因此态积分、指标和二次恒等式可以用函数 w 表示如下：

$$0 = \sum_{j=1}^{3} w^{(\sigma_j)}(\tau) w^{(\sigma_j)}(-\tau), \tag{3.14}$$

$$2Z_{5_2}(\tau) = \sum_{j=1}^{3} w^{(\sigma_j)}(\tau - 1) w^{(\sigma_j)}\left(\tau^{-1} - 1\right), \tag{3.15}$$

$$4\mathrm{Ind}_{5_2}\left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\right) = w^{(\sigma_3)}(\tau) w^{(\sigma_3)}(-\tau) - w^{(\sigma_1)}(\tau) w^{(\sigma_2)}(-\tau) - w^{(\sigma_2)}(\tau) w^{(\sigma_1)}(-\tau).$$

就 $\Phi^{(\sigma_j)}$ 级数而言，方程（3.14）和（3.13）蕴含二次恒等式

$$\sum_{\sigma} \Phi^{(\sigma)}(x) \Phi^{(\sigma)}(-x) = 0,$$

（其中我们对 $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$）求和，而方程（3.15）和（3.13）则表明，$Z_{5_2}(\tau)$ 在 $\tau = 1$ 附近且当 τ 时的展开（由（3.5）给出）是一个幂级数

$$\sum_{\sigma} \mathrm{e}^{-C_\sigma} \Phi^{(\sigma)}\left(\frac{2x}{1-x}\right) \Phi^{(\sigma)}\left(-\frac{2x}{1+x}\right)$$

当 $|x| < 1$时收敛。这里，$C_\sigma = \mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(\rho)/(2\pi\mathrm{i})$，其中 $\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(\rho)$ 是相应边界抛物型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示 ρ 的复化体积，该表示来自补空间的 5_2 纽结的基本群。

3.5 更高层级和权空间

本节将描述一种新现象，即纽结的层级，以及权空间具有更高重数的例子。对于（-2，3，7）扭结结，有 6 对 q-级数，并且权空间不是一维的；存在权 0、1 和 2，其维数分别为 1、4 和 1。6 对 q-级数涉及 $q^{1/2}$的整数次幂级数，这意味着层级为 $N = 2$，因此我们应当引入纽结的层级，并推测它与彩色琼斯多项式 [18, 19]的次数的周期性所产生的层级相同。这个 $q^{1/2}$将在第 (2) 的故事中升级为完整的 SL_2（$\mathbb{Z}$）和 $\Gamma(2)$ 理论，见第4节。对于（-2，3，7）纽结，复杂性还在于，这 6 个渐近级数分成两个大小为 3 的伽罗瓦轨道：一个定义在判别式为 -23 的三次域（迹域）上，另一个定义在阿贝尔域 $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$ 上，其判别式为 49。此外，后一个伽罗瓦轨道的 3 个复体积都是 π^2的有理倍数。

为说明这一新现象，我们首先介绍 q级数，用于（-2，3，7）扭结结。（-2，3，7）扭结结的态积分见 [26, 附录 B]。利用 Faddeev 量子对数的函数方程 [26, 方程（78）],并忽略一些前因子，可将态积分表示为

$$Z_{(-2,3,7)}(\tau) = \left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{-\frac{1}{24}} \int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}c_b/2+\mathrm{i}\varepsilon} \Phi_{\sqrt{\tau}}(x)^2 \Phi_{\sqrt{\tau}}(2x - c_b) \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(2x-c_b)^2} \mathrm{d}x, \qquad \tau \in \mathbb{C}' \tag{3.16}$$

其中 ε 为较小的正数，其中 $b = \sqrt{\tau}$和 $c_b = \mathrm{i}_2\left(b + b^{-1}\right)$。利用 [27], 的方法，我们可以将上述态积分表示为 6 q-级数，如下所示。

命题 3.8。我们有

$$2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}(q/\tilde{q})^{1/24}Z_{(-2,3,7)}(\tau) = -\frac{1}{2\tau}h_0(\tau)h_2(\tau^{-1}) + h_1(\tau)h_1(\tau^{-1}) - \frac{\tau}{2}h_2(\tau)h_0(\tau^{-1}) + \frac{1}{\tau}\big(h_3(\tau)h_4(\tau^{-1}) - h_4(\tau)h_3(\tau^{-1}) + h_5(\tau)h_5(\tau^{-1})\big)$$

对于 $\tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，采用与 *(3.10)* 中相同的约定，但将 $(\pm1)^j$ 替换为 $(\pm1)^{\delta_j}$，其中 $(\delta_0,\dots,\delta_5) = (0,1,2,0,0,0)$ 表示 ε-变形次数，并且 $H_j^{\pm}(q)$ 是关于 $q^{1/2}$ 的幂级数，其前几项为

$$\begin{aligned}
H_0^+(q) &= 1+q^3+3q^4+7q^5+13q^6+\cdots,\\
H_0^-(q) &= 1+q^2+3q^3+7q^4+13q^5+\cdots,\\
H_1^+(q) &= 1-4q-8q^2-3q^3+3q^4+\cdots,\\
H_1^-(q) &= 1-4q-5q^2+q^3+7q^4+\cdots,\\
H_2^+(q) &= \frac{2}{3}-6q+6q^2+\frac{242}{3}q^3+200q^4+\cdots,\\
H_2^-(q) &= \frac{5}{6}-10q+\frac{17}{6}q^2+\frac{141}{2}q^3+\frac{971}{6}q^4+\cdots,\\
H_3^+(q) &= q+3q^2-2q^{5/2}+8q^3-8q^{7/2}+\cdots,\\
H_3^-(q) &= q+4q^{3/2}+9q^2+18q^{5/2}+31q^3+\cdots,\\
H_4^+(q) &= 1+4q+12q^2+33q^3+79q^4+\cdots,\\
H_4^-(q) &= \frac{1}{4}-q+\frac{5}{4}q^2-\frac{5}{4}q^3+\frac{15}{4}q^4+\cdots,\\
H_5^+(q) &= q+3q^2+2q^{5/2}+8q^3+8q^{7/2}+\cdots,\\
H_5^-(q) &= q-4q^{3/2}+9q^2-18q^{5/2}+31q^3+\cdots,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

其精确定义和性质见附录 A.6。

由 $(H_0,\dots,H_5)$ 张成的向量空间 $\langle H\rangle$ 具有 (ε-变形) 权重分解

$$\langle h\rangle = W_0\oplus W_1\oplus W_2,\qquad W_0=\langle H_0,H_3,H_4,H_5\rangle,\qquad W_1=\langle H_1\rangle,\qquad W_2=\langle H_2\rangle.$$

存在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在 $\langle H\rangle$ 上的表示 ρ，它在 W_1 和 W_2 上为恒等，并且在 W_0 上的核为 $\Gamma(2)$。因此，ρ 在 W_0 上的作用来自商群 $S_3=\Gamma/\Gamma(2)$ 的表示 ρ'。后者分解为 S_3 的 2 维不可约表示与 S_3 的两个平凡表示的直和。

$(-2,3,7)$ 扭结结的指标由以下表达式给出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{(-2,3,7)}(q) &= \sum_{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}} (-q^{\frac12})^{k_1-2k_2} I_\Delta(2k_2,k_1-2k_2-k_3)\\
&\qquad\times I_\Delta(-k_1+k_2,k_1-2k_2)I_\Delta(k_1-2k_2-2k_3,k_2)\\
&= 1-8q+3q^2+50q^3+58q^4+13q^5-196q^6-456q^7-\cdots.
\end{aligned}$$

观察 3.9。与指标的关系为

$$\mathrm{Ind}_{(-2,3,7)}(q) = H_1^+(q)H_1^-(q)$$

并且满足以下二次关系：

$$\frac12 H_0^+(q)H_2^-(q) - H_1^+(q)H_1^-(q) + \frac12 H_2^+(q)H_0^-(q) - H_3^+(q)H_3^-(q) + H_4^+(q)H_4^-(q) - H_5^+(q)H_5^-(q) = 0.$$

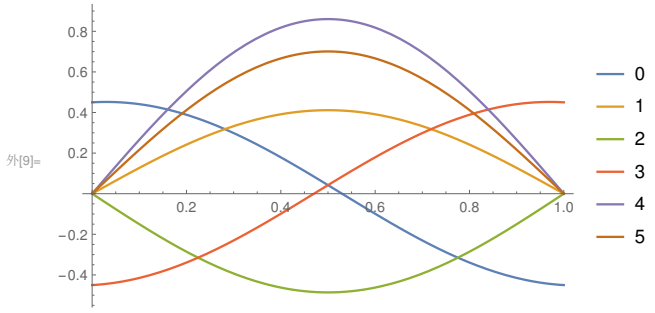

图3。 $w^{(j)}(x)$ 在 $j=0$、……、5 时的增长率 $\mathrm{Re}(\mathrm{Vol}_{\mathbb{C}}(\rho_j)/2\pi\mathrm{i}\tau)$ 图。这里 $\arg(\tau)=\pi\theta$且 $\theta\in(0,\ \pi)$。两个伽罗瓦轨道分别为 1、2、4 和 0、3、5，对应判别式为 49 和 -23 的数域。分支在 0。、0。16、0。19、0。22、0。28、0。5、0。71、0。77、0。81、0。84、1 处相交，并将区间 $[0,1]$ 划分为 10 个扇区。

仅在 4_1 纽结和 5_2 纽结的情形下，当 $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$沿一条射线趋于零时， $h_j(\tau)$ 的渐近行为可表示为量子模性猜想中出现的渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma)}(h)$ 的有理线性组合，该猜想针对的是 $(-2,3,7)$ 纽结 [32]。然而，这个纽结有 6 个边界抛物 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表示，它们分为两个大小为 3 的伽罗瓦轨道；其中一个定义在 $(-2,3,7)$ 扭结结 $\left($的迹域上，也就是判别式为 -23 、由 ξ 生成且满足 $\xi^3-\xi^2+1=0\right)$ 的三次域；另一个则定义在实阿贝尔域 $\mathbb{Q}(2\cos(2\pi/7))$ 上。令 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ 表示迹域的三个嵌入，它们分别对应于 $\mathrm{Im}(\xi)<0$、$\mathrm{Im}(\xi)>0$ 和 $\mathrm{Im}(\xi)=0$；令 $\{\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$ 表示将 $\mathbb{Q}(\eta)$（判别式为 49 的阿贝尔三次域）嵌入 $\mathbb{C}$ 的三个嵌入，分别将 η 映至 $2\cos(2\pi/7)$ 、 $2\cos(4\pi/7)$ 和 $2\cos(6\pi/7)$。当 τ 沿固定的一般射线趋于零时，六个渐近级数 $\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(h)$ 的增长率各不相同，并且每条射线上的增长率排序由图 3 决定。

令 $\widehat{\Phi}_\alpha(h)=\left(\widehat{\Phi}^{(\sigma_j)}(h)\right)_{j=1}^{6}$表示渐近级数向量，并令 $h(\tau)=(h_j(\tau))_{j=0}^{5}$表示 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上权为 $(-1,0,1,-1,-1,-1)$ 的全纯函数向量。和之前一样，若令 $X\to\infty$ 位于一个固定扇区中且 $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，则可将向量 $h|_\gamma(X)$ 的渐近展开 $\widehat{\ }$与渐近级数 $\Phi_\alpha(2\pi\mathrm{i}/(cX+d))$ 拟合，方法是乘以一个矩阵。这里还有一个在 4_1 和 5_2 纽结的情形中不存在的额外微妙之处，即某些 q-级数 $H_j^{\pm}(q)$ 是 $q^{1/2}$中的幂级数，这意味着函数 $h_j(\tau)$ 是 2-周期的，但不是 1-周期的。这意味着决定线性组合的矩阵取决于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 $\Gamma(2)$ 的陪集。

观察 3.10. 当 $X\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 位于正实轴附近的某个扇区内，且 $X\to\infty$ 时，我们有

$$h|_\gamma(X)\sim\rho(\gamma)\begin{pmatrix}0&1&-1&0&-1&-1/2\\0&1&1&0&0&0\\0&2/3&-2/3&0&4/3&1/6\\0&-1&1&0&1&-1/2\\0&0&0&-1/2&-1&0\\2&0&0&-1/2&-1&0\end{pmatrix}\widehat{\Phi}_\alpha\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{cX+d}\right)\tag{3.18}$$

对 $1/X$ 的所有阶均成立。

对方程（3.18）中的矩阵求逆，可以定义渐近级数 $w^{(\sigma)}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$中的全纯提升 $\Phi^{(\sigma)}(h)$ 。这为计算 6 个渐近级数 $\Phi^{(\sigma)}(h)$ 的系数提供了一种实用方法。实际上，对级数 $w^{(\sigma)}$ 在尖点处的值以及级数 $\Phi^{(\sigma)}(h)$ 的伽罗瓦不变量进行数值计算，可将其系数的计算归结为

识别具有指定分母的有理数。我们使用这种方法计算了六个 $\Phi^{(\sigma)}(h)$项，并将结果与 Kashaev 不变量在 [32]的渐近行为进行了比较。

4 从向量值到矩阵值 q-级数

到目前为止，我们利用纽结的态积分，为 $|q| \neq 1$ 定义了一个 q-级数组成的向量，其渐近行为被发现与我们早期论文 [32] 中该纽结的渐近级数 r-向量有关。在本节中，我们报告一项近期发现，即后裔：它将该向量置于一个可逆的 $r \times r$ 矩阵的第一列中，该矩阵由 $|q| \neq 1$的 q-级数组成。事实证明，渐近级数 [32]、q-级数和态积分 [22, 23] 都具有后裔。我们将在第 4.1 节中，以 4_1 纽结为例解释后裔的概念；在该例中，将有无穷多个后裔 $G_0^{(m)}(q)$ 和 $G_1^{(m)}(q)$（q 中的整数系数洛朗级数），其中 m遍历 $\mathbb{Z}$；随后我们将构造矩阵 $Q(q)$，其第二列是 $\frac{1}{2}\left(qG_j^{(1)} - q^{-1}G_j^{(-1)}\right)$，对应于 $j = 0$、1。（我们将在下面的第 5.3 节中解释为何选择这一特定的线性组合。）在第 4.2 节中，我们讨论这些后裔的渐近性质；在第 4.3 节中，我们陈述关于 5_2 纽结的相应结果。

4.1 Descendant q-级数

在本节中，我们将重点讨论 4_1 第一作者 Gu 和 Mari 的工作中的纽结˜，不 [22]（详细证明见 [23, 第 3 节。1]），但采用略有不同的记号。考虑来自 $G_0^{(m)}(q)$ 和 $G_1^{(m)}(q)$ 的 q级数 [22]，其中 m

$$G_0^{(m)}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n+1)/2+mn}}{(q;q)_n^2},$$

$$G_1^{(m)}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n+1)/2+mn}}{(q;q)_n^2} \left(2m + \mathcal{E}_1(q) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1+q^j}{1-q^j}\right),$$

对于 $|q| < 1$ 并推广至 $|q| > 1$ 由 $G_j^{(m)}\left(q^{-1}\right) = (-1)^j G_j^{(m)}(q)$。注意到 $G_j^{(0)}(q) = G_j(q)$ 对于 $j = 0$，1，其中 $G_0(q)$ 和 $G_1(q)$ 分别由式 (2.6) 和式 (2.9) 给出。考虑矩阵

$$w_m(q) = \begin{pmatrix} G_0^{(m)}(q) & G_1^{(m)}(q) \\ G_0^{(m+1)}(q) & G_1^{(m+1)}(q) \end{pmatrix}, \qquad |q| \neq 1.$$

这些函数的性质见 [23, 第 3 节1]。

定理 ([23])。矩阵 $w_m(q)$ 是线性 q-差分方程的一个基本解

$$y_{m+1}(q) - (2 - q^m) y_m(q) + y_{m-1}(q) = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

它的行列式为常数

$$\det(w_m(q)) = 2 \tag{4.2}$$

并满足对称性和正交性

$$w_m\left(q^{-1}\right) = w_{-m}(q) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2} w_m(q) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_m\left(q^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

对所有整数 m 以及对于 $|q| \neq 1$。

后裔级数 $G_j^{(m)}(q)$ 源自“后代态积分”的因式分解

$$Z_{4_1,m,m'}(\tau)=\int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}0}\Phi_{\sqrt{\tau}}(v)^2\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}v^2+2\pi(m\tau^{1/2}-m'\tau^{-1/2})v}\mathrm{d}v,\qquad m,m'\in\mathbb{Z}$$

引入于 [22]。这是关于 $\tau\in\mathbb{C}'$ 的全纯函数；当$m=m'=0$ 时，它与 $Z_{4_1}(\tau)$ 相同，并且可以用 $G_j^{(m)}(q)$ 和 $G^{(m')}{}_j(\tilde{q})$ 的双线性形式表示如下： [22,方程 (69)]:

$$Z_{4_1,m,m'}(\tau)=(-1)^{m-m'+1}\frac{\mathrm{i}}{2}q^{\frac{m}{2}+\frac{1}{24}}\tilde{q}^{\frac{m'}{2}-\frac{1}{24}}\left(\sqrt{\tau}G_0^{(m')}(\tilde{q})G_1^{(m)}(q)-\frac{1}{\sqrt{\tau}}G_1^{(m')}(\tilde{q})G_0^{(m)}(q)\right).$$

（此处 $\tilde{q}=\mathbf{e}(-1/\tau)$ 的含义如常。）这意味着矩阵值函数

$$W_{m,m'}(\tau)=\left(w_{m'}(\tilde{q})^T\right)^{-1}\begin{pmatrix}1/\tau & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}w_m(q)^T,\tag{4.3}$$

最初仅定义在 $\tau\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$上的函数，可全纯地延拓至 $\tau\in\mathbb{C}'$，对所有整数 m以及 m'均成立。关于 5_2 纽结的后裔也有类似的讨论，见 [23, 第 4.1 节k], ，下文第 4.3节将重述相关内容。

4.2 后裔的渐近行为

在 [32], 研究 4_1 纽结的精化量子模性猜想时，我们发现了一个 2×2 渐近级数矩阵

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{\Phi}(x) & \widehat{\Psi}(x)\\ \mathrm{i}\widehat{\Phi}(-x) & -\mathrm{i}\widehat{\Psi}(-x)\end{pmatrix},$$

其中 $\widehat{\Psi}(x)=\mathbf{e}^{C/h}\Psi(x)$，其中 $\Psi(x)$ 是级数

$$\Psi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}B_jx^j,\qquad B_j=\mathrm{i}\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\left(\frac{1}{72\sqrt{-3}}\right)^j\frac{b_j}{j!}$$

其中 $b_j\in\mathbb{Q}$，前几项的值如下

j	0	1	2	3	4	5	6
b_j	-1	37	1511	1211729/5	407317963/5	331484358355/7	1471507944921541/35

自然地，我们研究了其后代全纯块的渐近行为。由于任意连续三项都由递推式（4.1）联系起来，它们的渐近行为也如此。为保持一致并体现对称性，我们研究了 $m=-1,0,1$ 的后代全纯块的渐近行为。自然地，我们预期级数 Ψ 以及级数 Φ 都会出现，事实上，我们发现了由以下定义的 q 级数矩阵的如下渐近行为

$$Q(\tau)=w_0(q)^T\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_0^{(0)}(q) & \frac{1}{2}\left(G_0^{(1)}(q)-G_0^{(-1)}(q)\right)\\ G_1^{(0)}(q) & \frac{1}{2}\left(G_1^{(1)}(q)-G_1^{(-1)}(q)\right)\end{pmatrix},\qquad q=\mathbf{e}(\tau).\tag{4.4}$$

观察 4.1。 当 $\tau\to 0$ 位于上半平面时，我们有

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{\tau} & 0\\ 0 & \sqrt{\tau}\end{pmatrix}Q(\tau)\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\widehat{\mathbf{\Phi}}(2\pi\mathrm{i}\tau).$$

注意，方程（4.2）意味着 det（Q（τ）） $=2$ 对所有 τ 均成立，结合上述结果，$\widehat{}$可得函数 $\mathbf{\Phi}$（x）满足

$$\det(\widehat{\mathbf{\Phi}}(x)) = 1$$

以及正交性

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}(-x)\widehat{\mathbf{\Phi}}(x)^t = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 5_2 纽结的情形

考虑线性 q差分方程

$$y_m(q) - 3y_{m+1}(q) + \big(3 - q^{2+m}\big)y_{m+2}(q) - y_{m+3}(q) = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{4.5}$$

在 [23, 第 3 节中，2], 已证明它有一个由下列矩阵的列给出的基本解组

$$w_m(q) = w_m^{5_2}(q) = \begin{pmatrix} H_0^{(m)}(q) & H_0^{(m+1)}(q) & H_0^{(m+2)}(q) \\ H_1^{(m)}(q) & H_1^{(m+1)}(q) & H_1^{(m+2)}(q) \\ H_2^{(m)}(q) & H_2^{(m+1)}(q) & H_2^{(m+2)}(q) \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \qquad |q| \neq 1, \tag{4.6}$$

其中对于 $|q| < 1$

$$\begin{aligned}
H_0^{(m)}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}, \\
H_1^{(m)}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}\big(1 + 2n + m - 3\mathcal{E}_1^{(n)}(q)\big), \\
H_2^{(m)}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}\left((1 + 2n + m - 3\mathcal{E}_1^{(n)}(q))^2 - 3\mathcal{E}_2^{(n)}(q) - \frac{1}{6}\mathcal{E}_2(q)\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
H_0^{(-m)}(q^{-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}, \\
H_1^{(-m)}(q^{-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}\left(\frac{1}{2} + n + m - 3\mathcal{E}_1^{(n)}(q)\right), \\
H_2^{(-m)}(q^{-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)+nm}}{(q;q)_n^3}\left(\left(\frac{1}{2} + n + m - 3\mathcal{E}_1^{(n)}(q)\right)^2 - 3\mathcal{E}_2^{(n)}(q) - \frac{1}{12}\mathcal{E}_2(q)\right)
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}_k^{(n)}(q)$ 在下方的方程（A.16）中定义。注意，当 $m = 0$ 时，$H_j^{(0)}(q^{\pm 1}) = H_j^{\pm}(q)$ 中的 $H_j^{\pm}(q)$ 是纽结（3.11）的六个级数，它们出现在其态积分的因式分解中。

定理 ([23])。 由 $w_m(q)$ 定义的函数 (4.6) 是线性q差分方程 (4.5) 的一个基本解，且其行列式为常数

$$\det(w_m(q)) = 2,$$

满足正交性

$$\frac{1}{2}w_{m-1}(q)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}w_{-m-1}\big(q^{-1}\big)^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&3-q^{m}\end{pmatrix}\tag{4.7}$$

以及

$$\frac{1}{2}w_{m}(q)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}w_{\ell}\big(q^{-1}\big)^{T}\in\mathrm{SL}\big(3,\mathbb{Z}\big[q^{\pm}\big]\big)$$

对于所有整数 m、ℓ，以及对于 $|q|\neq 1$。

级数 $H^{(m)}(q)$（对于 $|q|\neq 1$）出现在 5_2 纽结的后代态积分的因式分解中

$$Z_{5_2,m,m'}(\tau)=\int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}0}\Phi_{\sqrt{\tau}}(v)^3\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v^2+2\pi(m\tau^{1/2}-m'\tau^{-1/2})v}\mathrm{d}v,\qquad m,m'\in\mathbb{Z},\qquad \tau\in\mathbb{C}'$$

的 [22]。它是关于 $\tau\in\mathbb{C}'$ 的全纯函数，且当 $Z_{5_2}(\tau)$时与 $m=m'=0$ 相同，并且可用 $H^{(m)}(q)$双线性地表示如下：

$$\begin{aligned}Z_{5_2,m,m'}(\tau)=(-1)^{m-m'+1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}}{2}q^{\frac{m}{2}}\tilde{q}^{\frac{m'}{2}}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{8}}\\ \times\Big(\tau h_2^{(m)}(\tau)h_0^{(m')}\big(\tau^{-1}\big)+2h_1^{(m)}(\tau)h_1^{(m')}\big(\tau^{-1}\big)+\frac{1}{\tau}h_0^{(m)}(\tau)h_2^{(m')}\big(\tau^{-1}\big)\Big),\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中

$$h_j^{(m)}(\tau):=(-1)^jH_j^{(m)}\big(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\big),\qquad \tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

对于 $j=0$，1、2 和 $m\in\mathbb{Z}$。由此可知，矩阵值函数

$$W_{m,m'}(\tau)=\big(w_{m'}(\tilde{q})^T\big)^{-1}\begin{pmatrix}\tau^{-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&\tau\end{pmatrix}w_m(q)^T$$

定义于 $\tau=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，其元素由后代态积分给出（至多相差一个前因子（4.8），因此扩展为关于 $\tau\in\mathbb{C}'$ 的全纯函数，其中所有整数 m和 m'均成立。利用这一点，对于 $m=-1$ 和 $m'=0$，以及正交关系（4.7），可知我们能够在区域 R 内用后代态积分表示 Φ（τ）的博雷尔和，因此也可将其表示为关于 $\tau\in\mathbb{C}'$ 的全纯函数，如下所示。

5 纽结的矩阵值余循环

在本节中，我们将前几节的观察推广至矩阵值解析函数，它们自然地在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$上的矩阵值分段解析函数集合上诱导出一个余循环。此外，我们猜想（并在 4_1, 的情形下证明）这个余循环限制在有理数上时，恰好与我们先前工作 [32], 中的余循环一致，从而自然地将两项工作联系起来，并引出矩阵值全纯量子模形式这一概念。

5.1 等变态积分

我们回到 4_1 纽结。根据方程（2.7）对态积分进行因式分解，并用一对（$g_0(\tau)$ $g_1(\tau)$表示，这促使我们考虑以下函数：

$$Z_{4_1}(\gamma;\tau) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{q}/q)^{1/24}\big((c\tau+d)^{-1/2}g_0(\tau)g_1(\gamma(\tau)) - (c\tau+d)^{1/2}g_1(\tau)g_0(\gamma(\tau))\big) \tag{5.1}$$

对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的元素 γ，以及 $\tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，其中现在 $\tilde{q}$ 表示 $\mathbf{e}(\gamma\tau)$。先验地说，该函数对自变量的任何实数值都没有定义。然而，通过实验（观察函数在竖直趋近实点时的渐近行为），我们发现如下结论。

观察 5.1。对于每个 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，函数 $Z_{4_1}(\gamma;\tau)$ 可延拓至割平面 $\mathbb{C}_\gamma := \mathbb{C}\setminus\{\tau \mid c\tau+d \le 0\}$。

为了解释并证明这一观察，我们引入了一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 版本的态积分，它使用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 版本的 Faddeev 量子对数 $($，后一个函数对应于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right))$，并满足五边形恒等式。这种量子二对数的函数性质意味着相应的态积分可以延拓到 $\mathbb{C}_\gamma$，而其因式分解除初等因子外，与 $Z_{4_1}(\gamma;\tau)$ 的函数一致，其中考虑的是 4_1 纽结。这一内容见于我们目前与 Kashaev 的合作研究 [28], ，其中尤其给出了上述观察的证明。

5.2 矩阵值余循环

态积分 $Z_{4_1}(\tau)$ 只是一个 2×2 矩阵的一个分量，该矩阵与矩阵 $W_{0,\,0}(\tau)$ 密切相关，后者在方程（4.3）中定义；类似地，等变态积分（5.1）除去初等因子后，只是一个 2×2 矩阵值函数的分量

$$W_\gamma(\tau) = Q(\gamma\tau)^{-1}\,\mathrm{diag}\big((c\tau+d)^{-1},1\big)Q(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{5.2}$$

观察 5.1 现在可推广为如下陈述：函数 W_γ 可从上、下半平面全纯地延拓到 $\mathbb{C}_\gamma$。它在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上的限制是那里的一个矩阵值全纯余循环，这意味着它满足

$$W_{\gamma\gamma'}(\tau) = W_\gamma(\gamma'\tau)W_{\gamma'}(\tau) \tag{5.3}$$

这是因为作为（5.2）中间因子出现的对角矩阵是一个余循环，因此函数 $\gamma \mapsto W_\gamma$ 是一个“扭曲余边界”。如果 W_γ 延拓到整个平面，那么通过连续性，这个余循环性质就会自动延拓到实线。然而，这并不完全奏效，因为 W_γ 不能延拓到整个实线，而只能延拓到其中的一个子集，即满足 $cx+d>0$的 x 集合，其中取决于 γ。为了解决这个问题，我们从 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 转到其商 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$，并定义一个 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-余循环 $\gamma \mapsto W^{\mathbb{R}}_\gamma$,–其值属于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$上的分段解析可逆矩阵值函数群，定义为

$$W^{\mathbb{R}}_{\overline{\gamma}}(x) = W_\gamma(\tau)\big|_{\tau=x} \qquad \text{for} \quad cx+d>0, \tag{5.4}$$

注意到，对于任意元素 γ of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 和 $x \in \mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$，我们都可以将 γ提升为唯一的元素 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，使得 $cx+d$ 为正。当然，$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上的新余循环无论如何都不再是余边界。但这反而是额外的好处，而非缺陷，因为非平凡的上同调类比平凡的上同调类更有趣。

在论文 [32] 中，我们还在以下对象上发现了一个分段解析函数的余循环 $\mathbb{R}$，其定义完全不同，是通过广义 Habiro 类函数在有理数附近的渐近行为来给出的。这两个余循环最终被证明在 4_1 纽结的情形下相同，而对一般情形则是一个猜想。下面我们将对此展开讨论。

5.3 两个余循环一致

现在我们证明，余循环（5.4）与我们先前论文中的余循环 [32] 在该 4_1 纽结的情况下一致。

我们首先回顾一下 [32, 第 7 节1] 中定义在 $\mathbb{Q}$ 上的周期函数 $J = J^{(4_1)}$ </style}。

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_{1,1}(x) & J_{1,2}(x) \\ J_{2,1}(x) & J_{2,2}(x) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{1,1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{c}\sqrt[4]{3}} \sum_{Z^c=\zeta_6} \prod_{j=1}^{c} |1-q^jZ|^{2j/c}, \\
J_{2,1}(x) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{c}\sqrt[4]{3}} \sum_{Z^c=\zeta_6^{-1}} \prod_{j=1}^{c} |1-q^jZ|^{2j/c}, \\
J_{1,2}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt[4]{3}} \sum_{Z^c=\zeta_6} \left(Zq - Z^{-1}q^{-1}\right) \prod_{j=1}^{c} |1-q^jZ|^{2j/c}, \\
J_{2,2}(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{c}\sqrt[4]{3}} \sum_{Z^c=\zeta_6^{-1}} \left(Zq - Z^{-1}q^{-1}\right) \prod_{j=1}^{c} |1-q^jZ|^{2j/c}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $q = \mathbf{e}(x)$ 和 $c = \mathbf{denom}(x)$ 是 x的分母。（实际上，[32], 中定义并记作 $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(4_1)}$ 的周期函数是一个 3×3 矩阵，其第一列为 $(100)^T$，底部的 2×2 部分为 J，但我们只会用到其中这一部分。）矩阵 J定义了一个余循环 [32,第 5]节

$$W_\gamma^{\mathrm{Hab}}(x) = J(\gamma x)^{-1}\,\mathrm{diag}\big(\mathrm{e}^{C\lambda_\gamma(x)}, \mathrm{e}^{-C\lambda_\gamma(x)}\big) J(x), \tag{5.7}$$

其中 C 是 $1/2\pi$ 乘以八字结的体积， $\gamma \mapsto \lambda_\gamma$ 是 [32]中方程（24）定义的 $\mathbb{Q}$值余循环

$$\lambda_\gamma(x) := \frac{1}{\mathrm{den}(x)^2\big(x-\gamma^{-1}(\infty)\big)} = \frac{c}{s(cr+ds)} = \pm\frac{c}{\mathrm{den}(x)\mathrm{den}(\gamma x)}.$$

[32], 的一个主要发现是，尽管这一结果通常只是猜想，但对 4_1 纽结已得到证明：这个余边界能够从 $\mathbb{Q}\backslash\{-d/c\}$ 平滑延拓到 $\mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$。（实际上，在 [32] 中只讨论了一个稍弱的说法，即 $\mathbb{Q}$ 上的函数关于 $x-x_0$ 具有任意阶的幂级数展开，其中自变量 x 趋近于一个固定的有理数 x_0; 而更强的光滑性甚至实解析性，则被提及为本文结果的推论。）

下一个定理将我们论文 [32]中的余循环与当前论文中的余循环联系起来，并阐明了这两篇论文之间的关联。

定理 5.2. 余循环 $W^{\mathbb{R}}$和 W_{Hab}重合。

由于 $\mathbf{SL_2(\mathbb{Z})}$ 由 $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 生成，而所考虑的两个函数都是余循环，且在 T 上平凡，并且二者在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上连续，因此只需证明该等式即可。

$$W_S^{\mathrm{Hab}}(x) = W_S(x) \qquad \text{for} \quad x \in \mathbb{Q}^*.$$

该恒等式的证明见附录A.3，其中使用了正有理点处态积分的“因式分解”（即由关于 $\tau\in\mathbb{Q}$ 和 $-1/\tau$ 的函数构成的向量的双线性表达式）

由 Kashaev和第一作者建立 [26], 类似于态积分的“因式分解”当 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 第一作者和 Kashaev 的 [27]。态积分的这两个“因式分解”性质，一个在上半平面中，另一个在正有理数中，是彼此独立的（因为我们不知道如何从一个性质推导出另一个性质），但又密切相关。

5.4 矩阵值全纯量子模形式

我们相信，我们一直在描述的关于 4_1 纽结的结果将适用于所有双曲纽结（可能需要遵守引言中关于一般纽结的特征簇行为所作的免责声明 [32] ）。其中一部分内容，即“后代”函数矩阵和因子分解公式（4.8），已经针对 5_2 纽结在 [22] 中完成，并在第4.3节进行了描述；另一部分内容，即渐近行为（观察4.1的类比），也针对同一个纽结在 [30]中完成。对于（-2，3，7）扭结结，我们只完成了其中一部分，即关于该纽结的矩阵 $W_S(\tau)$ 左上部分应有的形式，这部分内容见第3.5节。我们尚未对其他任何纽结进行相应的计算，但预期的模式已经十分清晰，下面将对此加以说明。这些例子还将引出“矩阵值全纯量子模形式”这一新概念；我们预计，这一概念在与量子拓扑无关的领域中也会引起兴趣。

对于每个双曲结，我们将赋予各种 $r \times r$ 矩阵，其中 r 是非平凡边界抛物 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示的数量。（其中一些，或许全部，都可以扩展为大小为 $r+1$ 的方阵，同时包括平凡表示，正如 [32]和 [51], 中所讨论的那样；但我们在此不展开说明。那些较大的矩阵在其中以粗体字母表示，而这里我们将使用非粗体名称加以区分。）其中一些将是周期函数（定义在 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$上），但相应的余边界具有这样的性质：它们导出同一个余循环 W_γ，其值属于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上分段解析函数构成的可逆矩阵群。定义在 $\mathbb{Q}$ 上的周期函数，要么是广义 Habiro 函数 $\mathbf{J}^{(K)}(\alpha)$，要么是上一篇论文 [32],中的相关幂级数矩阵 $\Phi(\alpha)$；而 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$中的矩阵值函数则是本文研究的函数 $Q = Q^K(\tau)$。它们具有以下性质及相互关系：

(i) 矩阵 $Q = Q^K$ 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 中全纯且周期，并在无穷远处亚纯；这意味着，它的每个元素在上半平面中都是 $q = \mathbf{e}(\tau)$ 的某个有理次幂的幂级数，而在下半平面中则是 q^{-1} 的幂级数。我们还有“权” $k = (k_1, \ldots\ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$，以及一个表示 $\rho\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$，它通过某个整数 N 的 $\Gamma(N)$ 分解（该整数称为纽结的层级），二者相容，具体来说，映射

$$\gamma \mapsto j_\gamma(\tau) := \rho(\gamma)\,\mathrm{diag}\left((c\tau+d)^{k_i}\right) \qquad \text{for} \quad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的余循环。（表示 ρ 是一个次要的技术细节，因 (-2，3，7)-扭结结中出现 [32]而产生；但对于 4_1 和 5_2 纽结而言，这一细节并无影响，可以忽略。）关键性质——正是这一性质表明 Q 是一个全纯量子模形式——是矩阵值函数

$$W_\gamma(\tau) = Q(\gamma\tau)^{-1} j_\gamma(\tau) Q(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

从 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 全纯延拓到 $\mathbb{C}_\gamma$ 对于每个 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，正如我们在上面对$4_1$ 纽结所看到的那样。该映射自动满足方程（5.3），因此导出一个 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-余循环 $w^{\mathbb{R}}$，其值属于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上的可逆分段解析矩阵值函数环，所用公式与之前的公式（5.4）相同。

(ii) 其次，我们为纽结 K 关联一族 $\alpha \mapsto \Phi_\alpha(h)$ 矩阵，其指标由数 $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$）（或等价地，由单位根）给出；这些矩阵正是人们猜想存在、并且在某些情况下已在 [32] 中进行了大量数值检验的广义 Habiro 不变量。这些矩阵的元素是形式变量 h 的完备幂级数，其中“完备”意味着它们属于 $\mathrm{e}^{v/h}\mathbb{C}[[h]]$ （对于某个 v）；事实上，该量只取决于元素所在的矩阵列，并且将是适当的复化双曲体积。我们将 $\Phi_\alpha(h)$ 视为某个 $\widehat{}$形式函数 Φ 在 $x = \alpha + \mathrm{i}\hbar$ 处的值，该函数定义在所有有理点 α 的无穷小邻域中。群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 作用于此类形式函数构成的空间上，因此我们再次得到一个余边界 $\widehat{\Phi}(\gamma x)^{-1}\Phi_\gamma(x)$；事实证明，该余边界会变成 γ 和实变量 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\gamma^{-1}(\infty)\}$ 的光滑函数 $W_\gamma^{\mathrm{Hab}}(x)$。（更精确的表述见 [32,方程（78）]。）因此，这个新函数当然是一个余循环，而猜想中的一般性结论是：它恰好与 $W^{\mathbb{R}}$ 重合。它与我们在第 5.3 节中对 4_1 纽结所作论述的关系是：如果我们将完备幂级数值矩阵$\asymp\Phi_\alpha(h)$写成左侧的一个真正幂级数值矩阵 $\Phi_\alpha(h)$ 与一个对角矩阵的乘积，该对角矩阵的元素为 e^{V_j/c^2h}（$j = 1, \dots, r$，$c =$分母(α)），然后定义 $J(\alpha)$ 为该矩阵的常数项 $\Phi_\alpha(0)$，那么通过方程（5.7）的显然类比，我们又得到一个余边界。后者现在是一个取值于 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 的有理数函数，并且再次连续延拓为之前的同一个光滑余循环 W_γ。正是后一陈述直接推广了上面的定理 5.2；但我们想强调的是，同一个余循环 $\gamma \mapsto W_\gamma$ 在比其最初定义所在的 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上的分段实解析函数空间更大的三个空间中，都变得平凡（即变成余边界）。我们可以将这三个平凡化（（分别由 Q、$\widehat{\Phi}$ 和 J）给出）视为同一对象在不同空间中的实现，这类似于动机在不同定义的上同调群中的各种实现。

(iii) 最后，从某种意义上说，令人相当惊讶的是，余循环 W 不仅由完备幂级数值矩阵值函数 $\alpha \mapsto \Phi_\alpha$ 作为其余边界所确定，反过来还通过渐近性质唯一地确定了该函数。

$$W_\gamma(X)^{-1} \sim \widehat{\Phi}_{\gamma(\infty)}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{c(cX+d)}\right).$$

我们一直在讨论的这些矩阵还具有若干其他有趣的性质，其中一些列举如下，不分先后。

正交性。 存在一个矩阵 $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$，使得

$$Q(-\tau)^t B Q(\tau) = I. \tag{5.8}$$

q-全纯性。 这一性质曾在以下文献中针对 Habiro型矩阵不变量进行讨论 [32]，而其 q-级数类比（方程 (4.1) 是其特例）则是 [29]的出发点。

幺模性。 在我们考察过的情形中，所讨论的所有矩阵都是幺模的。我们不知道一般情况下是否也应期待这一性质。

双线性。 性质（5.8）表明， W 可以用 Q 的元素表示为双线性形式：

$$W_\gamma(\tau) = (Q|_{\varepsilon\gamma\varepsilon})^t(\varepsilon\tau)BQ(\tau),$$

其中 $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$。

泰勒级数。 余循环性质 W_γ 使人们能够计算光滑函数 W_γ 在每个有理点处的泰勒级数展开，并将其双线性地表示为$\widehat{}$矩阵 Φ，正如 [32, 命题52]中所做的那样。

6 总结

本文讨论了2×2矩阵 Q 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$上的周期函数的性质，该矩阵与 4_1 纽结相关（见方程（4.4））。另一方面，在我们的姊妹论文 [32],中，我们构造了一个3×3矩阵 Q^+，其元素是 $\mathbb{Q}$ 上的周期函数（见方程（5.5））。Wheeler [51]使用 Q （带有一列无趣的列向量（1，0，0）^{t} 和一行有趣的行向量）对我们的2×2矩阵进行了扩展，所使用的是 ε-变形级数（2.8）。

与纽结相关的矩阵 Q 的 q级数的另一方面，似乎与$\widehat{}$阶乘发散级数在复Borel平面中的复苏，即解析延拓 $\Phi(h)$有关。事实上，正如第一作者、Gu 和 Mari$\widetilde{}$no [22, 23]所发现的，矩阵 Q 似乎完整地描述了这一解析延拓问题。解析延拓问题中所谓的 Stokes常数是整数，乘以 $\tilde{q}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/\tau}$ 的整数次幂后，构成具有整数系数的幂级数，而这些幂级数正是矩阵 $Q(-1/\tau$。这种处理渐近级数复苏的方法，与 Kontsevich–Soibelman [43, 44, 45, 46, 47]抽象提出的方法相似。

从用于定义态积分的数据可以清楚地看出，所提出的全纯量子模形式不仅与纽结相关，而且更一般地，也与 [32], 中引入的适当半辛矩阵相关，或者与通常称为 K_2拉格朗日量的组合构造相关。

此处出现的拟议量子全纯模形式$\widehat{}$很可能对应于 $Z(h)$和 $Z(q)$这两个配分函数；这正是 Gukov 及其合作者 [16, 35, 36, 37]针对一般 3维流形的持续研究计划所预言的。

在本文中，我们不研究不变量对 Jacobi变量的依赖性，而是将其留待后续研究。 [23]中给出了一个这类不变量的例子，其中 Jacobi变量对应于纽结补空间子午线的 Holonomy。

A 补充内容与证明

在本附录中，我们给出一些观察的证明，尤其是关于 4_1纽结的观察；这些观察见第2节和第3节。

A.1 q级数恒等式

我们首先证明方程（2.6）中的两个恒等式，这是 Sander Zwegers 向我们传达的。我们将使用恒等式（A.17）以及

$$\frac{1}{(q)_m(q)_n}=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s=m,s+t=n}}\frac{q^{rt}}{(q)_r(q)_s(q)_t}, \tag{A.1}$$

例如可在以下位置找到 [53], 其中我们将（q）$_n$ = （q; q）$_n$简写为。如果我们使用（A.17）对 m求和，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n\geq 0}(-1)^{m+n}\frac{q^{\frac{1}{2}m^2+mn+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n}}{(q)_m(q)_n}\\ &\quad=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{q^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}}{(q)_n}(q^{n+1})_\infty=(q;q)_\infty\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{q^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}}{(q)_n^2}.\end{aligned}$$

方程（A.1）与 $m=n$ 给出

$$\frac{1}{(q)_n^2}=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s=n,s+t=n}}\frac{q^{rt}}{(q)_r(q)_s(q)_t}=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s=n}}\frac{q^{r^2}}{(q)_r^2(q)_s},$$

因此

$$\sum_{m,n\geq 0}(-1)^{m+n}\frac{q^{\frac{1}{2}m^2+mn+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n}}{(q)_m(q)_n}=(q;q)_\infty\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s=n}}\frac{q^{r^2}}{(q)_r^2(q)_s}$$

这也可以写成

$$(q;q)_\infty\sum_{r,s\geq 0}(-1)^{r+s}\frac{q^{\frac{3}{2}r^2+rs+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}s}}{(q)_r^2(q)_s}.$$

对 s 求和并利用（A.17），结合 $x=q^r$，我们得到这等于

$$(q;q)_\infty\sum_{r\geq 0}(-1)^r\frac{q^{\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{2}r}}{(q)_r^2}(q^{r+1})_\infty=(q;q)_\infty^2\sum_{r\geq 0}(-1)^r\frac{q^{\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{2}r}}{(q)_r^3}.$$

这就完成了（2.6）的证明。 ■

A.2 单位根处的渐近行为

为了比较本文的结果与 [32], 的结果，我们需要了解我们的 q-级数在单位根附近的渐近行为。这并非本文的主题，我们也不会详加讨论；不过，为了说明这种方法，我们证明观察2.1 ，给出两个 q-级数 $G_0(q)$ 和 $G_1(q)$ 的渐近行为（至任意阶）；它们与 4_1 纽结在 $q=1$处相关。为此，我们将使用方程（ $G_0(q)$ 第二部分中给出的公式（2.6）。

为了求出 $G_0(q)$ 的渐近行为，我们使用 [53, 第 54–55]页所述的“Meinardus技巧”。方程（2.6）中的任一恒等式都可用于此处，但由于第一种会导出二重积分而非单重积分，我们只使用第二种。根据方程（$G_0(q)$ 的第二种表示（见方程（2.6））以及标准展开式

$$\frac{1}{(x;q)_\infty}:=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n},\qquad q,x\in\mathbb{C},\qquad |q|<1,$$

我们得到积分表示

$$(q;q)_\infty G_0(q)=\text{c.t.}\left(\frac{\Theta_q(x)}{(x;q)_\infty^2}\right)=\int_{\mathrm{i}\varepsilon+\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\frac{\Theta_q(\mathbf{e}(u))}{(\mathbf{e}(u);q)_\infty^2}\,\mathrm{d}u,$$

其中 $\varepsilon>0$ 为一个较小的正数，“c.t.”表示关于 x的“常数项”，而 $\Theta_q(x)$定义为

$$\Theta_q(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}x^{-n},\qquad q,x\in\mathbb{C},\qquad |q|<1.$$

由 Jacobi theta函数的变换律 $\theta(\tau,u)=\sqrt{\mathrm{i}/\tau}\mathbf{e}\big(-u^2/\mathrm{i}\tau\big)\theta(-1/\tau,u/\tau)\theta(\tau,u)\ =\mathbf{e}(\tau/8+u/2)\Theta_q(\mathbf{e}(u))$ 可得

$$\Theta_q(\mathbf{e}(u))=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\sum_{\lambda\in u-\frac{1+\tau}{2}+\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left(\frac{\lambda^2\tilde{\tau}}{2}\right),\qquad q=\mathbf{e}(\tau),\qquad \tilde{\tau}=-1/\tau.$$

将其代入 $G_0(q)$ 的积分表示，并按通常方式展开，可得

$$\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}G_0(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\int_{\mathrm{i}\varepsilon+\mathbb{R}} \frac{\mathbf{e}\left(\frac{\tilde{\tau}}{2}\left(u-\frac{1+\tau}{2}\right)^2\right)}{(\mathbf{e}(u);q)_\infty^2}\,\mathrm{d}u.$$

现在，我们将驻相法应用于这个积分：变形积分路径，使其经过被积函数导数为零的点，然后在该点附近按高斯积分展开，从而得到所需的渐近展开。我们使用标准（且简单）的展开式

$$\frac{1}{(x;\mathrm{e}^{-h})_\infty} = \exp\left(\frac{\mathrm{Li}_2(x)}{h} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{x}{1-x}\frac{h}{12} + \mathrm{O}\left(h^2\right)\right), \qquad h\to 0,$$

其中 $\mathrm{Li}_2(x)$ 是二对数函数，由此可知，被积函数的对数具有如下形式的渐近展开：$\sum_{n=-1}^{\infty} A_n(u)h^n$，其中

$$A_{-1}(u) = -2\pi^2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\mathrm{Li}_2(\mathbf{e}(u)).$$

函数 $A_{-1}(u)$ 在 $u=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}$ 处有两个局部极大值。对每个局部极大值进行细致分析（此处略去细节），即可重现渐近展开（2.5）中的两个项。利用方程（2.15），也可以对 $G_1(q)$ 在 $q=1$处的级数渐近行为进行类似分析。关于 $q=1$ $(q=\mathrm{e}^{-h},\ h\searrow 0)$ 的上述分析只是概述，不过按照 [31]中讨论的类似思路，可以将其扩展到 $q=\zeta\mathrm{e}^{-h}$ 的情形。最后要提到的是，原则上，我们给出的 5_2 公式也可以用来计算这种情形下的渐近行为，但我们尚未这样做。

A.3 4_1 纽结的两个矩阵值余循环一致

本节给出定理 5.2 的证明。首先说明为何在方程 $Q(q)$ 中，为 q-级数选取矩阵 4_1，其中给出了4.4 纽结；这里使用了定义在有理数上的矩阵值函数 $\mathbf{J}$，它来自 [32, 方程 (95)]，其第一行为 $1, J_0(x)$，以及 $\frac{1}{2}(qJ_1(q) - q^{-1}J_{-1}(q))$，当 $q=\mathbf{e}(x)$ 时，其中

$$J_m(q) = \sum_{n=0}^{\infty}(q;q)_n\left(q^{-1};q^{-1}\right)_n q^{mn}$$

是由 Habiro 环中元素构成的一个序列，其指标为整数 m，并满足线性 q-差分方程

$$J_{m+1}(q) - (2-q^m)J_m(q) + J_{m-1}(q) = 1, \qquad m\in\mathbb{Z}. \tag{A.2}$$

由此可知，$\mathbf{J}$ 的第一行构成了由 $\mathbb{Q}[q^{\pm}]$ 张成的 $\{J_m(q)|m\in\mathbb{Z}\}$-模的一组基。递推式 (A.2) 是方程 (4.1 的非齐次类比，而上文 $\mathbf{J}$ 的第一行解释了为何矩阵 (4.4) 的第二列如此选取。

接下来注意，矩阵 J （5.6）中的元素可以写成如下形式

$$J_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{c\sqrt{-3}}}\sum_{Z^c=\zeta_6}\mathcal{D}_q(Z)\mathcal{D}_{q^{-1}}\left(Z^{-1}\right),$$
$$J_{2,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{c\sqrt{-3}}}\mathrm{i}\sum_{Z^c=\zeta_6^{-1}}\mathcal{D}_q(Z)\mathcal{D}_{q^{-1}}\left(Z^{-1}\right),$$

$$
\begin{aligned}
J_{1,2}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{c\sqrt{-3}}} \sum_{Z^c=\zeta_6} \left(q^{n+1} - q^{-n-1}\right) \mathcal{D}_q(Z) \mathcal{D}_{q^{-1}}\left(Z^{-1}\right), \\
J_{2,2}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{c\sqrt{-3}}} \mathrm{i} \sum_{Z^c=\zeta_6^{-1}} \left(q^{n+1} - q^{-n-1}\right) \mathcal{D}_q(Z) \mathcal{D}_{q^{-1}}\left(Z^{-1}\right),
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

其中 $c = \mathrm{den}(x)$，且 $q = \mathbf{e}(x)$，其中 $\mathcal{D}_\zeta(x)$ 是循环量子对数函数 $D_\zeta(x)$ 的重整化版本，其定义如下

$$
\mathcal{D}_\zeta(x) = \mathrm{e}^{-1/2s(a,c)} D_\zeta(x), \qquad D_\zeta(x) = \mathrm{e}^{-1/2s(a,c)} \exp\left(\sum_{j=1}^{c-1} \frac{j}{c} \log\left(1 - \zeta^j x\right)\right)
$$

当 $\zeta = \mathbf{e}(a/c)$ 时，其中 $s(a,\ c)$ 是 Dedekind 和 [49]，其中对数在负实轴上的割线之外取主值，在割线上则取左右极限的平均值。循环量子对数函数出现在 Faddeev 量子对数在单位根处的展开式中（例如参见 [26, 42]），并且在定义与 Bloch 群元素相关联的近单位元时发挥着关键作用 [8]。

采用第 5.3 节的记号，(5.6) 中的 2×2 矩阵 J 的行列式为 1，因此其逆矩阵为 $J^{-1} = \left({}^{J_2}, {}_2\ {}_{-J_1}, {}_{-J_2}\ {}_1\ {}_{J_1}\ {}^2, {}_{,1} \right)$。由于 $\lambda_S(\alpha) = {}^1\ \mathrm{den}(\alpha)\mathrm{num}(\alpha)$ [32, ~~第 3.1]~~ 节（其中 $\mathrm{num}(\alpha)$ 和 $\mathrm{den}(\alpha) > 0$ 分别表示一个有理数的分子和分母），可知当 $\gamma = S$ 时，余循环 (5.7) 为

$$
\begin{aligned}
W_S^{\mathrm{Hab}}(\alpha) = &\begin{pmatrix} J_{2,2}(-1/\alpha) & -J_{1,2}(-1/\alpha) \\ -J_{2,1}(-1/\alpha) & J_{1,1}(-1/\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{C}{\mathrm{den}(\alpha)\mathrm{num}(\alpha)}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{C}{\mathrm{den}(\alpha)\mathrm{num}(\alpha)}} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} J_{1,1}(\alpha) & J_{1,2}(\alpha) \\ J_{2,1}(\alpha) & J_{2,2}(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

对于 α 一个正有理数，且 $C = V/(2\pi) = 0.32\ldots$ 满足 V 如式 (2.2) 所示。另一方面，方程 (2×2 的矩阵 $Q(\tau)$ 的行列式为 1，且当 $\gamma = S$ 时，方程 (5.4) 的余循环为

$$
W_S^{\mathbb{R}}(\tau) = \begin{pmatrix} Q_{2,2}(-1/\tau) & -Q_{1,2}(-1/\tau) \\ -Q_{2,1}(-1/\tau) & Q_{1,1}(-1/\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1,1}(\tau) & Q_{1,2}(\tau) \\ Q_{2,1}(\alpha) & Q_{2,2}(\tau) \end{pmatrix}. \tag{A.5}
$$

这与态积分的因式分解（2.11）意味着，$W_S^{\mathbb{R}}(\tau)_{\sigma_2,\ \sigma_1}$ 等于态积分 $Z_{4_1}(\tau)$，相差一个由包含 $(q/\tilde{q})^{1/24}$、单位根、有理数和 τ 的平方根的初等因子构成的乘积。

为了识别这两个余循环（A.4）和（A.5），我们使用第一作者和 Kashaev 在正有理点处的态积分的一种“因式分解”性质（即，关于 $\tau \in \mathbb{Q}$和 $-1/\tau$的函数向量的双线性表达式） [26], ，这与第一作者和 Kashaev 在 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时态积分的“因式分解”类似 [27]。态积分的这两种因式分解性质彼此相关，但我们不知道如何从一种推导出另一种。还请注意， [26] 中的定理 1.1 证明了所有正有理数处的一维态积分都具有所需的因式分解性质，这涵盖了全部三个纽结（即 4_1，5_2 和（-2，3，7）扭结结）以及我们感兴趣的所有后代态积分。

我们需要证明，对于所有正有理数 α，都有

$$
W_S(\alpha) = W_S^{\mathrm{Hab}}(-\alpha). \tag{A.6}
$$

我们将重点关注上述等式中 $(\sigma_2,\ \sigma_1)$ 个元素的相等性，此时 $W_S(\alpha) \doteq Z_{4_1}(\alpha)$，其中 $\doteq$ 表示在相差初等因子的意义下相等。该证明也匹配

这些初等因子，而且同样适用于上述方程中剩余的三个元素，因为它们都由后裔态积分给出。

记 $\alpha = M/N$ 其中 M 和 N 为固定的互素正整数，并令 $C = V/(2\pi)$，其中 $V = 2.02\ldots$ 是 4_1 纽结的体积。在 [26, 定理 1。1], 中已证明

$$Z_{4_1}(M/N) = \zeta_{24MN}^{5-6N+3(M+N+1)^2}\big(\mathrm{e}^{-\frac{C}{MN}}\zeta_{MN}^{-1}P_{M/N}(z_+,\theta_N^+,\theta_M^+)G_{M,N}(\theta_N^+,\theta_M^+) - \mathrm{e}^{\frac{C}{MN}}\zeta_{MN}P_{M/N}(z_-,\theta_N^-,\theta_M^-)G_{M,N}(\theta_N^-,\theta_M^-)\big), \tag{A.7}$$

其中

$$z_+ = \mathbf{e}(1/6), \qquad \theta_N^+ = \mathbf{e}(1/(6N)), \qquad \theta_M^+ = \mathbf{e}(1/(6M)),$$
$$z_- = \mathbf{e}(5/6), \qquad \theta_N^- = \mathbf{e}(5/(6N)), \qquad \theta_M^- = \mathbf{e}(5/(6M)),$$

$D_\zeta(x) = \prod_{k=1}^{c-1}\left(1-\zeta^k x\right)^{k/c}$其中 ζ是一个 c次单位根， $\zeta_N = \mathbf{e}(1/N)$,

$$P_{M/N}(z_+,\theta_N^+,\theta_M^+) = \frac{1}{\sqrt{-3}}\frac{(1-z_+)^{2+1/M+1/N+1/(2MN)}}{(1-\theta_N^+)^2(1-\theta_M^+)^2 D_{\zeta_N^M}(\theta_N^+)^2 D_{\zeta_M^N}(\theta_M^+)^2}$$

and

$$G_{M,N}(\theta_N^+,\theta_M^+) = \frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{k=0}^{MN-1}\frac{1}{\left(\zeta_N^M\theta_N^+;\zeta_N^M\right)_{Pk}\left(\zeta_N^{-M}(\theta_N^+)^{-1};\zeta_N^{-M}\right)_{Pk}} \times \frac{1}{\left(\zeta_M^N\theta_M^+;\zeta_M^N\right)_{Qk}\left(\zeta_M^{-N}(\theta_M^+)^{-1};\zeta_M^{-N}\right)_{Qk}}$$

且 P和 Q是整数，其中 $MP+NQ=1$ ($G_{M,N}$与 P和 Q的选择无关)。同样，我们可以定义 $P_{M/N}(z_+,\theta_N^+,\theta_M^+)$ 和 $G_{M,N}(\theta_N^-,\theta_M^-)$。定义

$$S_{\sigma_1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N\sqrt{-3}}}\frac{1}{|D_{\zeta_\alpha}(\theta_N^+)|^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{|(\zeta_\alpha\theta_N^+;\zeta_\alpha)|^2},$$
$$S_{\sigma_2}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N\sqrt{-3}}}\frac{1}{|D_{\zeta_\alpha}(\theta_N^-)|^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{|(\zeta_\alpha\theta_N^-;\zeta_\alpha)|^2},$$

其中 N是 α 的分母，而 $\lambda(x)$ 是 [32, 第 3 节1]中的调节函数。将量子阶乘从分母移至分子，并利用方程（A.3），可得

$$S_{\sigma_1}(\alpha) = \mathrm{e}^{\lambda(\alpha)C}J_{1,1}(\alpha), \qquad S_{\sigma_2}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\lambda(\alpha)C}J_{2,1}(\alpha).$$

引理 A.1. 对于每个满足 $\alpha > 0$ 的 $\alpha \in \mathbb{Q}$，除一个前因子外，我们有

$$Z_{4_1}(\alpha) = \mathrm{e}^{-C/(MN)}J_{1,1}(-1/\alpha)J_{2,1}(\alpha) - \mathrm{e}^{C/(MN)}J_{1,1}(\alpha)J_{2,1}\left(-\alpha^{-1}\right). \tag{A.8}$$

证明。 设 $\alpha = M/N$其中 M， N与之前一样为互素正整数。在 [26],中观察到，当 $M=1$ 时，我们可以选择 $P=1$ 和 $Q=0$，然后 $P_{1/N}$ 和 $G_{1,\ N}$ 与 θ_M^+无关，并且由下式给出

$$P_{1/N}(z_+,\theta_N^+) = \frac{1}{\sqrt{-3}}\frac{(1-z_+)^{1+3/(2N)}}{(1-\theta_N^+)^2 D_{\zeta_N}(\theta_N^+)^2}$$

and

$$G_{1,N}(\theta_N^+) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(\zeta_N \theta_N^+; \zeta_N)_k (\zeta_N^{-1} (\theta_N^+)^{-1}; \zeta_N^{-1})_k}.$$

现在， [26, 引理 22] 的证明给出了以下因式分解： N

$$G_{M,N}(\theta_N^+, \theta_M^+) = G_{1,N}(\theta_N^+) G_{M,1}(\theta_M^+),$$

遗憾的是， [26]中并未明确陈述这一点。使用 [26, 引理 2.2], 的记号，关键观察是，在 [26, 定理 1.1], 的语境下，我们有 $g_N^+(x;\, q_+) = g_N^-(y;\, q_-) = (-x)^A (1-x)^B = 1$，这意味着 $g_{k+N}^+(x_+;\, q_+) = g_k^+(x_+;\, q_+)$ 以及 $g_{k+N}^-(x_-;\, q_-) = g_k^-(x_-; q_-)$。结合方程 (A.7) 以及调节函数 λ 满足 $\lambda(x) - \lambda(-1/x) = 1/(\mathsf{den}(x)\mathsf{num}(x))$ 这一事实（其中 $\mathsf{num}(x)$ 和 $\mathsf{den}(x) > 0$ 分别表示有理数的分子和分母），即可完成该引理的证明。■

另一方面，方程（A.4）表明

$$W_S^{\mathrm{Hab}}(\alpha)_{\sigma_2,\sigma_1} = \mathrm{e}^{-C/(MN)} J_{1,1}(-1/\alpha) J_{2,1}(\alpha) - \mathrm{e}^{C/(MN)} J_{1,1}(\alpha) J_{2,1}(-\alpha^{-1}). \tag{A.9}$$

由此以及前一个引理可完成（σ_2， σ_1）项的证明（A.6）。 ■

我们可以说，方程（A.9）和（A.8）在形式上相同。

更一般地，在 [26] 对一维态积分的求值

$$Z_{A,B}(\tau) = \int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}\epsilon} \Phi_{\mathsf{b}}(x)^B \mathrm{e}^{-A\pi \mathrm{i} x^2} \mathrm{d}x, \qquad \tau = \mathsf{b}^2 \in \mathbb{C}'$$

给出了有理点处的结果，其中 A 和 B 是整数，且满足 $B > A > 0$。沿用 [26, 第 1.3], 节的记号，固定一对互素的正整数 M 和 N，并定义

$$\mathsf{b} = \sqrt{M/N}, \qquad \mathsf{s} = \sqrt{MN}$$

and

$$\mathrm{g}(z) = (-z)^A (1-z)^{-B} \in \mathbb{Q}\big[z^{\pm 1}\big]$$

and

$$\mathcal{S} = \big\{ w \mid \mathrm{g}\left(\mathrm{e}^{2\pi \mathsf{s} w}\right) = 1,\, 0 < \mathsf{s}\,\mathrm{Im}(w) - \lambda < 1 \big\},$$

其中 λ 是满足以下条件的一般实数

$$-(M+N)/2 < \lambda < 0.$$

注意，如果 $w \in \mathcal{S}$，那么 $\mathrm{e}^{2\pi \mathsf{s} w}$ 是一个代数数，并固定选取 N 次根和 M 次根。对于 $\alpha = M/N$ 和 $w \in \mathcal{S}$，定义

$$S_w(\alpha) = \frac{(1-z)^{\frac{B}{2N} + \lambda(\alpha)\frac{B}{4}}}{\sqrt{N z g'(z)}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda(\alpha) B}{2\pi \mathrm{i}} R(z)}}{D_{\zeta_\alpha}(\theta^+)^B} \sum_{k \bmod N} (-\theta^+)^{Ak} \frac{\zeta_\alpha^{\frac{A}{2}k(k+1)}}{(\zeta_\alpha \theta^+; \zeta_a)_k^B},$$

其中 $R(z)$ 是 Rogers dilogarithm，并令 $S(\alpha) = (S_w(\alpha))_{w \in \mathcal{S}}$ 和 $S^{\mathrm{op}}(\alpha) = (S_w(\alpha))_{w \in \mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ 然后，利用因式分解（A.3）和 [26,定理 1。1], 可写成

$$Z_{A,B}(\alpha) = p_\alpha S^{\mathrm{op}}(-\alpha)^t S\big(\alpha^{-1}\big) = p_\alpha \sum_{w \in \mathcal{S}} S_w(-\alpha) S_{\overline{w}}\big(\alpha^{-1}\big),$$

其中 $p_\alpha = \mathbf{e}\big((B + 3A(M+N+1)^2 - 6MN)/(24MN)\big)$。

A.4 纽结 5_2 的六个 q-级数

该 q级数是 5_2 纽结的六个 q超几何和及其 ε形变给出的（见（3.11））， 这使得我们能够像计算（ 4_1 ）中给出的 5_2 纽结 q的系数那样， 高效地递归计算其系数。具体而言， 这六个 q级数为

$$H_j^+(q) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(q) p_m^{(j)}(q), \qquad H_j^-(q) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(q) P_m^{(j)}(q), \qquad j = 0,1,2 \tag{A.10}$$

with

$$t_m(q) = \frac{q^{m(m+1)}}{(q;q)_m^3}, \qquad T_m(q) = \frac{(-1)^m q^{m(m+1)/2}}{(q;q)_m^3}, \tag{A.11}$$

and

$$p_m^{(0)}(q) = 1, \qquad p_m^{(1)}(q) = \frac{1+3\mathcal{E}_1(q)}{4} + \sum_{j=1}^{m} \frac{2+q^j}{1-q^j},$$

$$p_m^{(2)}(q) = p_m^{(1)}(q)^2 - \frac{3+\mathcal{E}_2(q)}{24} + \sum_{j=1}^{m} \frac{3q^j}{(1-q^j)^2},$$

$$P_m^{(0)}(q) = 1, \qquad P_m^{(1)}(q) = \frac{3\mathcal{E}_1(q)-1}{4} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1+2q^j}{1-q^j},$$

$$P_m^{(2)}(q) = P_m^{(1)}(q)^2 - \frac{\mathcal{E}_2(q)-3}{24} + \sum_{j=1}^{m} \frac{3q^j}{(1-q^j)^2}.$$

这里 $\mathcal{E}_1(q)$ 和 $\mathcal{E}_2(q)$ 分别是由 (2.10) 和$\mathcal{E}_2(q) = 1 - 24\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$，定义的权 1 和权 2 艾森斯坦级数。由于 t_m、~~T_m~~、 $p_m^{(j)}$和 $P_m^{(j)}$均可通过至多 O(1) 次运算由其前一项得到， 因此我们可以利用公式 (A.10) 高效地计算 $H_j^{\pm}$的数千个系数。

注 A.2。我们的记号 $(p_m^{(0)}, p_m^{(1)}, p_m^{(2)})$, $(P(0)_m, P(1)_m, P(2)_m)$, (H_0^+, H_1^+, H_2^+), (H_0^-, H_1^-, H_2^-) 与第 . . 节中记为 $(p_{3,m}, p_{2,m}, p_{1,m})$, $(P_{1,m}, \frac{1}{2}P_{2,m}, -P_{3,m})$, $(g_3, g_2, g_1 + \frac{1}{6}\mathcal{E}_2 g_3)$, – – $(G_1 \ \frac{1}{2}G_2 \ -G_3 - \frac{1}{6}\mathcal{E}_2 G_1)$ [27, 1 4] 3 9 [27, 1 8], , 的量相同。结合上述记号转换， 我们的公式 (.) 与推论 . 一致， 并运用了拟模性

$$E_2(\widetilde{\tau}) = \tau^2 E_2(\tau) - \frac{6i\tau}{\pi}$$

关于 $E_2(\tau) := \mathcal{E}_2(e^{2\pi i\tau})$ （参见 [7, 命题 6]） 。另请注意， 若我们对 $|q| > 1$ 按 $\mathcal{E}_k(q) = -\mathcal{E}_k(q^{-1})$ $(k = 1, 2)$ 定义函数 $\mathcal{E}_1(q)$ 和 $\mathcal{E}_2(q)$， 则 $T_m(q) = t_m(q^{-1})$ 且 $P_m^{(j)}(q) = (-1)^j p_m^{(j)}(q^{-1})$。由此可知， 上述两个 q-超几何公式对 $|q| \neq 1$ 均收敛， 并且它们之间的关系为

$$H_j^-(q) = (-1)^j H_j^+(q^{-1}), \qquad j = 0, 1, 2.$$

A.5 ε-变形与态积分的因式分解

本节将进一步探讨取自 [27] 的态积分因式分解证明与差分/微分方程的 ε变形之间的联系。虽然通过留数定理， 态积分的因式分解中只会出现有限个 q级数，

其 ε变形会导出一列 q级数，其中包含更多信息，正如 Wheeler 最近的发现 [51]。考虑一维态积分

$$\Psi_{A,A+\widetilde{A}}(\tau)=\int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}\varepsilon}\Phi_{\sqrt{\tau}}(x)^{A+\widetilde{A}}\mathrm{e}^{-A\pi\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x,\qquad z\in\mathbb{C}'$$

由 [27]（在该文献中记作 $\mathcal{I}_{A,A+\widetilde{A}}(\sqrt{z})$）给出，适用于正整数 $A,A>0$。下面按照 [27] 及其记号，简要回顾其因式分解。由于 $A,A>0$，可知该积分绝对收敛。当 $\tau=b^{1/2}$ 位于上半平面) 时，其思路是将积分轮廓向上移动，并收集被积函数极点处的留数。量子二对数是关于 x 的亚纯函数，其极点为

$$x_{m,n}=c_b+\mathrm{i}bm+\mathrm{i}b^{-1}n=\mathrm{i}b\left(m+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{i}b^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right),\qquad m,n\in\mathbb{N}.$$

$\Phi_b(x)$ 的拟周期性

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_b(x+c_b+\mathrm{i}b)}{\Phi_b(x+c_b)}&=\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{2\pi bx}},\\ \frac{\Phi_b\left(x+c_b+\mathrm{i}b^{-1}\right)}{\Phi_b(x+c_b)}&=\frac{1}{1-\tilde{q}^{-1}\mathrm{e}^{2\pi b^{-1}x}}=-\frac{\tilde{q}\mathrm{e}^{-2\pi b^{-1}x}}{1-\tilde{q}\mathrm{e}^{-2\pi b^{-1}x}}\end{aligned}$$

意味着

$$\begin{aligned}\Phi_b(x+x_{m,n})&=\Phi_b(x+c_b)\frac{1}{\mathrm{i}(q\mathrm{e}^{2\pi bx};q\mathrm{i})_m}\frac{(-1)^n\tilde{q}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi b^{-1}xn}}{\mathrm{i}(\tilde{q}\mathrm{e}^{-2\pi b^{-1}x};\tilde{q}\mathrm{i})_n}\\&=\Phi_b(x+c_b)\frac{1}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m}\frac{(-1)^n\tilde{q}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathrm{e}^{\tilde{\varepsilon}n}}{\left(\tilde{q}\mathrm{e}^{\tilde{\varepsilon}};\tilde{q}\right)_n},\end{aligned}\tag{A.12}$$

其中 $q=$ $x=$ $(\ ^{2\pi b(x+c_b}\ q)_\infty/(\ ^{2\pi b^{-1}\ x-c_b}\ \tilde{q})_\infty$ $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}b^2}$、$\tilde{q}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}b^{-2}}$、$\varepsilon=2\pi bx$ 和 $\tilde{\varepsilon}=-2\pi b^{-1}x$。此外，公式 $\Phi_b(\,)\,\mathrm{e}$)；e()；意味着

$$\Phi_b(x+c_b)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi b^{-1}x}}\frac{\left(q\mathrm{e}^{2\pi bx};q\right)_\infty}{\left(\tilde{q}\mathrm{e}^{2\pi b^{-1}x};\tilde{q}\right)_\infty}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}}}\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}{(\tilde{q}\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}};\tilde{q})_\infty}.\tag{A.13}$$

合并后，我们得到一个解耦的乘积

$$\Phi_b(x+x_{m,n})=\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}{(\tilde{q}\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}};\tilde{q})_\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\tilde{\varepsilon}/2}-\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}/2}}\frac{(-1)^n\tilde{q}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})\tilde{\varepsilon}}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m(\tilde{q}\mathrm{e}^{\tilde{\varepsilon}};\tilde{q})_n}\tag{A.14}$$

以及一个同样解耦的指数项

$$\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(x+x_{m,n})^2}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{8}}q^{\frac{m(m+1)}{2}}\tilde{q}^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{m+n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{4\pi}+\varepsilon(m+\frac{1}{2})-\tilde{\varepsilon}(n+\frac{1}{2})}.\tag{A.15}$$

当 $\mathrm{Im}(\tau)<0$ 时，类似的计算同样成立，结果如下。

定理 A.3 ([27])。对于 $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，我们有

$$\Psi_{A,A+\widetilde{A}}(\tau)=2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}A}{2}}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\frac{A}{8}}$$

$$\times \operatorname{Res}_{x=0}\left(F_{A,\widetilde{A}}(q,\varepsilon)F_{\widetilde{A},A}(\tilde{q},\tilde{\varepsilon})\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{4\pi}}\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty^{A+\widetilde{A}}}{(\tilde{q}\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}};\tilde{q})_\infty^{A+\widetilde{A}}}\frac{1}{(\mathrm{e}^{\tilde{\varepsilon}/2}-\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}/2})^{A+\widetilde{A}}}\right),$$

其中

$$F_{A,\widetilde{A}}(q,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{Am}\frac{q^{A\frac{m(m+1)}{2}}\mathrm{e}^{A\varepsilon(m+\frac{1}{2})}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m^{A+\widetilde{A}}}.$$

我们可以将 $F_{A,\widetilde{A}}(q,\varepsilon)$ 视为 Jacobi变量 ε的函数，也可以视为 ε的幂级数，其系数是 q 中的有理函数；这些系数可以通过将 $(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m$ 展开为 ε的幂级数来计算。为此，回顾 q-级数 $\mathcal{E}_\ell^{(m)}(q)$ [27, 方程（29）]

$$\mathcal{E}_\ell^{(m)}(q)=\sum_{s=1}^{\infty}s^{\ell-1}\frac{q^{s(m+1)}}{1-q^s}=\sum_{s\geq 1,n>m}s^{\ell-1}q^{sn}=\sum_{s\geq 1}\sigma_{\ell-1}^{(m)}q^s,\quad \sigma_{\ell-1}^{(m)}=\sum_{d|s,s/d>m}d^{\ell-1}. \tag{A.16}$$

下一个引理包含在 [27, 命题 2.2] 中。为完整起见，我们在此陈述并证明它。

引理 A.4。我们有

$$\frac{1}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m}=\frac{1}{(q;q)_m}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}\cdot\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathcal{E}_\ell^{(m)}(q)\frac{\varepsilon^\ell}{\ell!}\right).$$

证明。由 $(qx;q)_\infty=(qx;q)_\infty/(q^{m+1}x;q)_\infty$，可得

$$\frac{1}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m}=\frac{1}{(q;q)_m}\frac{(q;q)_m}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m}=\frac{1}{(q;q)_m}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}\cdot\frac{(q^{m+1}\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}.$$

最后，

$$\frac{(q^{m+1}\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}=\prod_{n>m}\frac{1-q^n\mathrm{e}^{\varepsilon}}{1-q^n}$$

这意味着

$$\log\left(\frac{(q^{m+1}\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty}\right)=\sum_{n>m}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}q^{nj}(1-\mathrm{e}^{j\varepsilon})=-\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^\ell}{\ell!}\sum_{j>0}j^{\ell-1}\sum_{n>m}q^{nj}.$$

对 $n>m$ 中的几何级数求和即可得到结果。 ■

利用上述方法，我们可以概述命题 3.8 的证明，该命题将（-2，3，7）扭结结的态积分表示为 q-级数与 $\tilde{q}$-级数的乘积之和。

A.6 （-2，3，7）扭结结的十二个 q-级数

在本节中，令

$$f(x)=\Phi_b(x)^2\Phi_b(2x-c_b)\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(2x-c_b)^2}$$

表示（3.16）的被积函数，它是一个亚纯函数，在自然数 m，$n\in\mathbb{N}$ 对应的位置 $x_{m/2,\,n/2}$ 有极点。当 m 和 n 为偶数时，这些极点为三阶极点；否则为一阶

极点。首先，我们计算三阶极点 $x_{m,\ n}$ 的贡献。利用$2x_{m,\ n}-c_b=x_{2m,\ 2n}$，（A.14）、（A.15）以及 η函数的模变换

$$\frac{(q;q)_\infty}{(\tilde{q};\tilde{q})_\infty}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\frac{1}{24}}b^{-1},$$

由此可得

$$\begin{aligned}f(x+x_{m,n})&=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(2x+x_{2m,2n})^2}\Phi_b(x+x_{m,n})^2\Phi_b(2x+x_{2m,2n})\\&=\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{\pi}}}{b^3(1-\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}})^2\big(1-\mathrm{e}^{-2\tilde{\varepsilon}}\big)}F(q,\varepsilon)\tilde{F}(\tilde{q},\tilde{\varepsilon})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}F(q,\varepsilon)&=\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m(2m+1)}\mathrm{e}^{\varepsilon(4m+1)}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_{2m}},\\\widetilde{F}(q,\varepsilon)&=\frac{(q;q)_\infty^3}{(q\mathrm{e}^{-\varepsilon};q)_\infty^2\big(q\mathrm{e}^{-2\varepsilon};q\big)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}\mathrm{e}^{\varepsilon(2n-1)}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_n^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_{2n}}.\end{aligned}$$

由此可知，三阶极点的贡献

$$2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{4}}\mathrm{Res}_{x=0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{\pi}}}{b^3(1-\mathrm{e}^{-\tilde{\varepsilon}})^2\big(1-\mathrm{e}^{-2\tilde{\varepsilon}}\big)}F(q,\varepsilon)\tilde{F}(\tilde{q},\tilde{\varepsilon})\right)$$

于态积分。展开后，态积分中的贡献可表示为

$$\mathrm{e}^{\frac{-\pi\mathrm{i}}{4}}\left(*\tau H_0^+(q)H_2^-(\tilde{q})+*H_1^+(q)H_1^-(\tilde{q})+\frac{*}{\tau}H_2^+(q)H_0^-(\tilde{q})+\frac{*}{2\pi\mathrm{i}}H_0^+(q)H_0^-(\tilde{q})\right),$$

其中 $*$ 是容易计算的有理数。

接下来，我们计算一阶极点的贡献。回忆

$$f(x+x_{m/2,n/2})=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(2x+x_{m,n})^2}\Phi_b(x+x_{m/2,n/2})^2\Phi_b(2x+x_{m,n}).$$

当 (m n $x+x_{m/2\,n/2}$ $x=0$ $\Phi_b\ 2x+,)$ 不同时为 $x_{m\,n}$ $x=0$ $x_{(2m+m'/2\ 2n+n'/2}=x_{m\,n}+\ m'b/2+\ n'b^{-1}/2$ 偶数时，$\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(2x+x_{m,n})^2}\Phi_b(\,,)^2$ 在 处正则，而 (,) 在 处有一阶极点。注意，对于 (m',n') =(1, 0)、(0, 1) 和 (1, 1)，) ,( ) , i i。方程 (A.12) 和 (A.13) 连同将 x 替换为 $\mathrm{i}m'b/2+\mathrm{i}n'b^{-1}/2$，可推出当 (m',n') =(1, 0) 时，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(x_{(2m+1)/2,2n/2})^2}\Phi_b\big(x_{(2m+m')/2,(2n+n')/2}\big)^2\\&\quad=-\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{8}}q^{(2m+1)(m+1)}\frac{\big(q^{3/2};q\big)_\infty^2}{\big(q^{3/2};q\big)_m^2}\frac{\tilde{q}^{-n^2}}{(-1;\tilde{q})_\infty^2(-\tilde{q};\tilde{q})_n^2}\end{aligned}$$

and

$$\mathrm{Res}_{x=0}\Phi_b(2x+x_{2m+1,2n})=*\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\frac{1}{24}}\frac{\tilde{q}^{n(2n+1)}}{(q;q)_{2m+1}(\tilde{q};\tilde{q})_{2n}},$$

其中 $*$是一个与 b无关的常数。同样，我们可以处理 $(m',\ n')$ =(0，1) 和 (1，1) 的情形。根据下文给出的六个 q-级数（单位圆内外）的定义，

其前几项见式（3.17），上述计算完成了命题 3.8的证明。

对于 $|q|<1$ and $k=0$，1，2，级数 $H_k^+(q)$ 和 $H_k^-(q)$ 分别定义为

$$\begin{aligned}
&\frac{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_\infty^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{m(2m+1)}\mathrm{e}^{\varepsilon(4m+1)}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_m^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_{2m}}\\
&\qquad=H_0^+(q)+\varepsilon H_1^+(q)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(H_2^+(q)+\frac{1}{3}\mathcal{E}_2(q)H_0^+(q)\right)+O(\varepsilon)^3,\\
&\frac{(q;q)_\infty^3}{(q\mathrm{e}^{-\varepsilon};q)_\infty^2\big(q\mathrm{e}^{-2\varepsilon};q\big)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}\mathrm{e}^{\varepsilon(2n+1)}}{(q\mathrm{e}^{\varepsilon};q)_n^2\big(q\mathrm{e}^{2\varepsilon};q\big)_{2n}}\\
&\qquad=H_0^-(q)+\varepsilon H_1^-(q)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(H_2^-(q)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathcal{E}_2(q)\right)H_0^-(q)\right)+O(\varepsilon)^3,
\end{aligned}$$

其中

$$H_j^+(q)=\sum_{m=0}^{\infty}t_m(q)p_m^{(j)}(q),\qquad H_j^-(q)=\sum_{m=0}^{\infty}T_m(q)P_m^{(j)}(q),\qquad j=0,1,2$$

with

$$t_m(q)=\frac{q^{m(2m+1)}}{(q;q)_m^2(q;q)_{2m}},\qquad T_n(q)=\frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n^2(q;q)_{2n}},$$

（不要与（A.11）混淆）且

$$\begin{aligned}
&p_m^{(0)}(q)=1,\qquad p_m^{(1)}(q)=4m+1-2E_1^{(m)}(q)-2\mathcal{E}_1^{(2m)}(q),\\
&p_m^{(2)}(q)=p_m^{(1)}(q)^2-2\mathcal{E}_2^{(m)}(q)-4\mathcal{E}_2^{(2m)}(q)-\frac{1}{3}\mathcal{E}_2(q),\\
&P_n^{(0)}(q)=1,\qquad P_n^{(1)}(q)=2n+1-2\mathcal{E}_1^{(n)}(q)-2\mathcal{E}_1^{(2n)}(q),\\
&P_n^{(2)}(q)=P_n^{(1)}(q)^2+12\mathcal{E}_2^{(0)}-\frac{1}{2}-2\mathcal{E}_2^{(n)}(q)-4\mathcal{E}_2^{(2n)}(q)+\frac{1}{3}\mathcal{E}_2(q).
\end{aligned}$$

其余针对 $|q|<1$ 和 $k=4$，5，6 的级数 $H_k^+(q)$ 和 $H_k^-(q)$ 分别定义为

$$\begin{aligned}
H_3^+(q)&=\frac{\big(q^{3/2};q\big)_\infty^2}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{(2m+1)(m+1)}}{\big(q^{3/2};q\big)_m^2(q;q)_{2m+1}},\\
H_3^-(q)&=\frac{(q;q)_\infty^2}{\big(q^{-1/2};q\big)_\infty^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+2)}}{\big(q^{3/2};q\big)_n^2(q;q)_{2n+1}},\\
H_4^+(q)&=\frac{(-q;q)_\infty^2}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{(2m+1)m}}{(-q;q)_m^2(q;q)_{2m}},\\
H_4^-(q)&=\frac{(q;q)_\infty^2}{(-1;q)_\infty^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(-q;q)_n^2(q;q)_{2n}},\\
H_5^+(q)&=\frac{\big(-q^{3/2};q\big)_\infty^2}{(q;q)_\infty^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{(2m+1)(m+1)}}{\big(-q^{3/2};q\big)_m^2(q;q)_{2m+1}},\\
H_5^-(q)&=\frac{(q;q)_\infty^2}{\big(-q^{-1/2};q\big)_\infty^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+2)}}{\big(-q^{3/2};q\big)_n^2(q;q)_{2n+1}}.
\end{aligned}$$

请注意，上述 q-超几何级数在 $|q| \neq 1$ 时收敛，并满足以下对称性

$$H_0^+(q^{-1}) = H_0^-(q), \qquad H_1^+(q^{-1}) = -H_1^-(q), \qquad H_2^+(q^{-1}) = H_2^-(q),$$
$$H_3^+(q^{-1}) = -H_4^-(q), \qquad H_4^+(q^{-1}) = H_4^-(q), \qquad H_5^+(q^{-1}) = -H_5^-(q).$$

注 A.5. 尽管表面看来如此，$H_0^+(q)(q;\,q)_\infty^2$ (以及 $H_0^-(q)(q;q)_\infty^2$ 和其他 10q-级数) 一样，都是秩为 3 的 Nahm和。事实上，使用

$$(q;q)_\infty^2 T_m(q) = \frac{q^{m(2m+1)}}{(q;q)_m}\left(q^{m+1};q\right)_\infty\left(q^{2m+1};q\right)_\infty$$

结合恒等式

$$(qx;q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}x^k}{(q;q)_k} \tag{A.17}$$

可得

$$(q;q)_\infty^2 H_0^+(q) = \sum_{k,l,m}(-1)^{k+l}\frac{q^{\frac{1}{2}(k^2+l^2+4m^2+2km+4lm)+\frac{1}{2}(k+l+2m)}}{(q;q)_k(q;q)_l(q;q)_m}.$$

致谢

作者谨向 Tudor Dimofte、Gie Gu、Rinat Kashaev、Marcos Mari˜no 和 Sander Zwegers 致谢，感谢他们的意见，以及匿名审稿人对稿件的认真审阅。

参考文献

[1] An N., Li Y.，《关于(−2,3,7)-扭结结的量子模性猜想》，准备中。[2] Andersen J.E., Garoufalidis S., Kashaev R.，《KLV态积分的体积猜想》，准备中。[3] Andersen J.E., Hansen S.K.，《八字结手术的量子不变量的渐近行为》，*J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006)，479–548，arXiv:math.QA/0506456。[4] Andersen J.E., Kashaev R.，《量子 Teichm¨uller 理论导出的拓扑量子场论》，*Comm. Math. Phys.* **330** (2014)，887–934，arXiv:1109.6295。[5] Beem C., Dimofte T., Pasquetti S.，《三维全纯块》，*J. High Energy Phys.* **2014** (2014)，第12期，177，119页，arXiv:1211.1986。[6] Bettin S., Drappeau S.，《双曲纽结量子不变量的模性与值分布》，*Math.Ann.* **382** (2022)，1631–1679，arXiv:1905.02045。[7] Bruinier J.H., van der Geer G., Harder G., Zagier D.，《模形式入门》，*Universitext*，施普林格，柏林，2008。[8] Calegari F., Garoufalidis S., Zagier D.，《Bloch群、代数 K-理论、单位与Nahm猜想》，*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **56** (2023)，383–426，arXiv:1712.04887。[9] Dimofte T.，《通过3d-3d对应研究层级为 k 的复Chern–Simons理论》，*Comm. Math. Phys.*339 (2015)，619–662，arXiv:1409.0857。[10] Dimofte T.，《复Chern–Simons理论的微扰与非微扰方面》，*J. Phys. A* **50**(2017)，443009，25页，arXiv:1608.02961。[11] Dimofte T., Gaiotto D., Gukov S.，《三维流形与三维指标》，*Adv. Theor. Math. Phys.* **17** (2013)，975–1076，arXiv:1112.5179。

[12] Dimofte T., Gaiotto D., Gukov S., 《以三维流形为标记的规范理论》, *Comm. Math. Phys.* **325** (2014), 367–419, arXiv:1108.4389。[13] Dimofte T., Garoufalidis S., 《粘合方程的量子内涵》, *Geom. Topol.* **17** (2013), 1253–1315, arXiv:1202.6268。[14] Dimofte T., Garoufalidis S., 《量子模性与复Chern–Simons理论》, *Commun. Number* ( ), – *Theory Phys.* **12** 2018 1 52, 1511 05628 arXiv: . .[15] Dimofte T., Gukov S., Lenells J., Zagier D., 《复规范群的微扰陈 – 西蒙斯理论的精确结果》, *Commun. Number Theory Phys.* **3** (2009), 363–443, arXiv:0903.2472。[16] Ekholm T., Gruen A., Gukov S., Kucharski P., Park S., Su-lkowski P., 《大 $\widehat{Z}$ 时：从曲线计数到量子模性》, *Comm. Math. Phys.* **396** (2022), 143–186, arXiv:2005.13349。[17] Faddeev L., 《离散海森堡–外尔群与模群》, *Lett. Math. Phys.* **34** (1995), 249–254, arXiv:hep-th/9504111。[18] Garoufalidis S., 《 q -全纯 *Electron. J. Combin.* **18** 2011 4, 23 1005 4580 序列的次数是一个二次拟多项式》, ( ), 页数, arXiv: . .[19] Garoufalidis S., 《纽结的琼斯斜率》, *Quantum Topol.* **2** (2011), 43–69, arXiv:0911.3627。[20] Garoufalidis S., 《理想三角剖分的三维指标与角结构（附录由Sander Zwegers撰写）》, *Ramanujan J.* **40** (2016), 573–604, arXiv:1208.1663。[21] Garoufalidis S., 《量子纽结不变量》, *Res. Math. Sci.* **5** (2018), 11, 17页, arXiv:1201.3314。[22] Garoufalidis S., Gu J., Mari˜no M., 《量子纽结不变量的复苏结构》, ( ), – arXiv: . .[23] Garoufalidis S., Gu J., Mari˜no M., 《复Chern–Simons理论中的孔雀图案与复苏》, ( ), 页数, arXiv: . .[24] Garoufalidis S., Gu J., Mari˜no M., Wheeler C., 《平凡平坦联络处陈–西蒙斯理论的复苏》, arXiv:2111.04763。[25] Garoufalidis S., Hodgson C.D., Rubinstein J.H., Segerman H., 《带尖点双曲3-流形的1-有效三角剖分与指标》, *Geom. Topol.* **19** (2015), 2619–2689, arXiv:1303.5278。[26] Garoufalidis S., Kashaev R., 《在有理点处计算态积分》, *Commun. Number Theory Phys.* ( ), – **9** 2015 549 582, 1411 6062 arXiv: . .[27] Garoufalidis S., Kashaev R., 《从态积分到 q- 级数》, *Math. Res. Lett.* **24** (2017), 781–801, arXiv:1304.2705。[28] Garoufalidis S., Kashaev R., Zagier D., 《模量子对数与三维流形不变量》, 准备中。[29] Garoufalidis S., Wheeler C., 《模 q-全纯模》, arXiv:2203.17029。[30]Garoufalidis S., Wheeler C., 《周期、亚纯三维指标与Turaev–Viro不变量》, arXiv:2209.02843。[31] Garoufalidis S., Zagier D., 《Nahm和在单位根处的渐近行为》, *Ramanujan J.* **55** (2021), 219–238, arXiv:1812.07690。[32] Garoufalidis S., Zagier D., 《纽结、微扰级数与量子模性》, arXiv:2111.06645。[33] Garoufalidis S., Zagier D., 《阶乘发散级数的渐近行为》, 预印本, 2022。[34] Golyshev V.V., Zagier D., 《皮卡格秩为一的Fano三维簇的伽马猜想证明》, *Izv. Math.* **80** (2016), 24–49。[35] Gukov S., Manolescu C., 《纽结补空间的二元级数》, *Quantum Topol.* **12** (2021), 1–109, arXiv:1904.06057。[36] Gukov S., Mari˜no M., Putrov P., 《复Chern–Simons理论中的复苏》, arXiv:1605.07615。[37] Gukov S., Pei D., Putrov P., Vafa C., 《BPS 谱与 3 *J. Knot Theory Ramifications* -流形 **29** 2020 2040003, 85 1701 06567 不变量》, ( ), 页数, arXiv: . .[38] Hikami K., 《由纽结不变量导出的双曲结构》, *Internat. J. Modern Phys. A* **16** (2001), 3309–3333, arXiv:math-ph/0105039。[39] Jones V.F.R., 《辫群的赫克代数表示与链环多项式》, *Ann. of Math.* **126** (1987), 335–388。

[40] Kashaev R.、Luo F.、Vartanov G.，《带形状三角剖分上的 Turaev–Viro 型拓扑量子场论》，*Ann. Henri* ( )，– *Poincaré* **17** 2016 1109 1143, 1210 8393 arXiv: . .[41] Kashaev R.M.，《由量子二对数构造的链环不变量》，*Modern Phys. Lett. A* **10**(1995)，1409–1418，arXiv:q-alg/9504020。[42] Kashaev R.M.、Mangazeev V.V.、Stroganov Yu.G.，《Baxter–Bazhanov 模型中的星—方与四面体方程》，*Internat. J. Modern Phys. A* **8** (1993)，1399–1409。[43] Kontsevich M.，《关于复苏的讲座》，2020年7月20日和2020年8月21日。[44] Kontsevich M.、Soibelman Y.，《动机 Donaldson–Thomas 不变量：结果概要》，载于《镜像对称与热带几何》，*Contemp. Math.*，第527卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年，55–89，arXiv:0811.2435。[45] Kontsevich M.、Soibelman Y.，《上同调 Hall 代数、指数型 Hodge 结构与动机 Donaldson–Thomas 不变量》，*Commun. Number Theory Phys.* **5** (2011)，231–352，arXiv:1006.2706。[46] Kontsevich M.、Soibelman Y.，《Donaldson–Thomas 不变量、可积系统与镜像对称中的墙穿越结构》，载于《同调镜像对称与热带几何》，*Lect. Notes Unione Mat.*，第 *Ital.* 15, 2014, 197 308, 1303 3253 Springer 卷，瑞士占姆，– arXiv: . .[47] Kontsevich M.、Soibelman Y.，《墙穿越公式中的解析性与复苏》，*Lett. Math. Phys.* **112** (2022)，2，56页，arXiv:2005.10651。[48] Murakami H.、Murakami J.，《彩色 Jones 多项式与纽结的单纯体积》，*Acta Math.* ( )，– **186** 2001 85 104, 9905075 arXiv:math.GT/ 。[49] Rademacher H.，《关于 Dedekind 和的理论》，*Math. Z.* **63** (1956)，445–463。[50] Turaev V.G.，《Yang–Baxter 方程与链环不变量》，*Invent. Math.* **92** (1988)，527–553。[51]Wheeler C.，《双曲三维流形的模 q-差分方程与量子不变量》，博士论文，波恩大学，2023年，见 https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz: 5-70573。[52] Wheeler C.，《闭双曲三维流形的量子模性》，arXiv:2308.03265。[53] Zagier D.，《二对数函数》，载于《数论、物理与几何前沿》第二卷，施普林格，柏林，2007年，3–65。[54] Zagier D.，《量子模形式》，载于《数学量子》，*Clay Math. Proc.*，第11卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年，659–675。[55] Zagier D.，《Friedrich Hirzebruch 的生平与工作》，*Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **117** (2015)，93–132。