arXiv:2304.09381v1 [econ.TH] 19 Apr 2023

党派选区划分的经济学

ANTON KOLOTILIN AND ALEXANDER WOLITZKY

Abstract. 我们研究党派性杰利蝾螈式划区者如何将选民分配到人口均等的选区，以最大化其政党的预期席位份额。划区者面临总体不确定性（其政党将获得多少选票）和特质性选民层面的不确定性（哪些选民会投票给其政党）。我们认为，分组配对式选区划分通常是划区者的最优选择：在这种做法中，较弱选区由单一类型的选民“集中”构成，而较强选区则包含两种选民类型。分组配对式选区划分的最优形式取决于总体不确定性与特质不确定性的相对程度。当特质不确定性占主导时，最优做法是集中反对方选民，并将更有利的选民配对；这一方案类似于传统的“打包与拆分”。当总体不确定性占主导时，最优做法是集中温和派选民，并将极端选民配对；这种“匹配切片”方案在文献中受到了一些关注。我们使用近期美国众议院选举的选区层级选举结果对模型进行估计，结果表明，实践中特质不确定性占主导，集中反对者是最优策略；此外，传统的打包与拆分式选区划分近乎最优。我们探讨了这对选区重划改革和政治极化的影响。在方法上，我们利用了选区操纵——将选民划分到各选区——与信息设计——将世界状态划分为信号——之间的形式联系。

JEL 分类：C78,D72, D82
关键词： 选区划分操纵、打包与拆分、匹配切片、打包与配对、信息 - 选区划分设计

日期：2023年4月20日。首版日期： 2020年9月17日。*Kolotilin*：经济学院，新南威尔士大学商学院。*Wolitzky*：经济系，麻省理工学院。感谢 Nikhil Agarwal、Garance Genicot、Ben Golub、Richard Holden、Gary King、Hongyi Li、Nolan McCarty、Stephen Morris、Ben Olken 和 Ken Shotts，以及在 ASSA、哈佛大学、麻省理工学院、美国国家经济研究局、北京、宾夕法尼亚州立大学、罗切斯特大学、斯坦福大学和华威大学参加研讨会和会议的与会者提出宝贵意见和建议。感谢 Eitan Sapiro-Gheiler 和 Nancy Wang 提供出色的研究协助。Anton Kolotilin 衷心感谢澳大利亚研究理事会探索型早期职业研究奖 DE160100964 以及麻省理工学院斯隆管理学院市场与组织创新项目的支持。Alexander Wolitzky 衷心感谢美国国家科学基金会职业奖 1555071 和斯隆基金会研究员奖 2017-9633 的支持。

1. Introduction

在许多选举制度下，立法选区边界由党派人士划定（Bickerstaff，2020年）。在美国，随着计算机辅助选区划分的兴起（Newkirk，2017），以及各党派为争夺并利用选区划分过程的控制权而展开的激烈行动，选区划分的重要性日益提升。这些趋势最终促成了“2012年大规模选区重划”（McGhee，2020年）：共和党的选区重划多数党项目（REDMAP）此前便已瞄准能够使共和党控制选区重划的州级选举，随后又激进地重新划分了包括密歇根州、俄亥俄州、宾夕法尼亚州和威斯康星州在内的多个州的选区。由此产生的选区划分方案被普遍认为促成了2012年大选的结果：共和党国会议员候选人以49.4%的两党选票赢得了众议院33席的多数优势（McGann,Smith, Latner, and Keena，2016年）。鉴于这些发展——以及最高法院在*Rucho*诉*Common Cause*案（2019年）中的裁决，即党派操纵选区划分不属于联邦法院可裁判的事项，同时选区划分操纵在2020年美国选区重划周期中仍然备受关注（Rakich andMejia，2022）——党派操纵选区划分很可能在未来一段时间内仍将是美国政治的重要特征。

本文研究了党派性选区操纵者（“设计者”）将选民分配到大量人口均等的选区中，以最大化其所属政党的预期席位份额这一问题。[1] 这一问题近似反映了美国许多党派性选区操纵者所面临的实际情况。尤其是，选区必须实现人口均等这一约束至关重要，而且法律对此有严格规定。[2] 在实践中，选区操纵者还面临其他重要约束，例如联邦要求选区必须彼此相连，且不得基于种族进行歧视；以及各种州级限制，例如“紧凑度”要求、尊重县界等政治分区的要求、代表种族或族裔群体或其他利益共同体的要求，等等。尽管这些复杂的附加约束在某些情况下十分重要，但我们认为，它们往往并不像表面上看起来那样具有约束力，而且更适合针对具体情况逐一进行考量。

[1]当然，研究这个问题并不意味着赞同选区划分操纵，正如研究垄断行为并不意味着赞同垄断一样。[2] 在*Karcher*诉*Daggett*案 （1983年）中，最高法院驳回了新泽西州的一项选区划分方案，该方案的人口与均等人口相差不到1%；法院认定，“实际上可以避免的人口差异，即使符合美国宪法第一条第 2 [节的标准，] 也不能没有正当理由。”1

<escape>基础，而非将其作为一般理论分析的一部分。[3] 因此，我们遵循了大量相关文献（下文将对此进行讨论）的做法，聚焦于仅包含人口均等约束的较简单问题。</escape>

当设计者拥有完全信息时，众所周知，这一问题的解决方案是打包与拆分：如果设计者所属政党仅得到规模为 $m < 1/2$ 的少数选民的支撑集，他就会将 $1-2m$ 名反对方选民“集中”到自己得票为零的选区中，并将剩余的 $2m$ 名选民“分散”到自己以 50% 得票率获胜的选区中。[4] 与此不同，我们考虑一种更为一般且更符合现实的情况，即设计者必须在不确定性条件下分配各种类型的选民（或者更贴近现实地说，分配由人口普查区块或投票区等构成的选民群体）。本文旨在刻画这一情境下的最优党派选区划分，比较最优选区划分操纵与简单且符合现实的打包与拆分形式，并探讨其对更广泛的法律与政治经济学问题所产生的一些启示。

概括而言，我们的模型和结果如下。我们假设设计者面临总体不确定性（其政党将获得多少选票）和个体特异性、选民层面的不确定性（哪些选民将投票支持其政党）。总体不确定性由一个一维总体冲击参数化，而选民则由一个一维选民类型参数化，该类型决定了在总体冲击的每个取值下，选民投票支持设计者政党的概率。我们重点关注总体冲击呈单峰分布，且温和派选民比立场更加极端的选民更容易发生摇摆的情形，即他们的投票概率随总体冲击变化的幅度更大。在这种情况下，我们认为，一类我们称之为集中与配对的选区划分方案（这是对打包与拆分策略的推广）通常是设计者的最优选择。在集中与配对的选区划分方案下，设计者创建较弱选区，其中集中安排同一类型的选民（这类似于打包与拆分策略中的集中选区）；同时创建较强选区，其中包含两种类型的选民（这类似于打包与拆分策略中的拆分选区）。

我们进一步表明，打包与配对式选区划分的最优形式取决于总体不确定性和特质不确定性的相对程度。当特质不确定性占主导时，最优做法是将反对方选民集中起来，并将更有利的选民配对

[3]请参见 Friedman 和 Holden （2008年）以进一步讨论这些约束。例如，连续性并不像看起来那么严苛，因为相邻选区可以呈现极不规则的形状。[4]如果设计者获得多数支持，就能赢得所有选区。

选民。这种对手打包与配对 方案（以下简称 POP）与传统的打包与拆分相似。POP 也类似于p-隔离”方案，该方案由Gul 和 Pesendorfer(2010年）提出。在该方案中，反对方选民被隔离开来，而更有利的选民则集中在一起，不像 POP 那样将他们配对。当总体不确定性占主导时，最优做法则是将温和派选民集中起来，并将极端选民配对。这种打包中间派并配对 方案（以下简称 PMP）由Friedman 和 Holden (2008年年）以“匹配切片”之名提出，随后由Cox和Holden (2011年年）应用于选区重划法。因此，打包与配对类别囊括了文献中提出的主要选区划分方案。我们的主要理论贡献是识别出这一类别，并表明该类别中的最优方案由总体不确定性和特质不确定性的相对程度决定。

对这些结果的一种粗略直觉是，当特质不确定性占主导地位时，设计者赢得一个选区的概率大致由该选区的平均选民类型决定，这与带有党派偏好冲击的概率投票模型相同（例如，Hinich 1977、Lindbeck andWeibull 1993）。在单峰总体冲击下，选区均值分布随后可通过隔离反对方选民并合并更多有利选民来实现最优，这与 p-隔离相似。而当总体不确定性占主导地位时，设计者赢得一个选区的概率大致由该选区的中位数选民类型决定，这与具有不确定的中位数幸福点的概率投票模型相同（例如，Wittman1983、Calvert 1985）。此时，选区中位数分布可通过将高于总体中位数和低于总体中位数的选民类型进行配对来实现最优，这与匹配切片相似。然而，我们确定的最优方案（POP 和 PMP）比 p-隔离以及Friedman 和 Holden(2008年)所强调的简单形式的匹配切片更为复杂：POP 对有利选民进行配对，而不是像 p-隔离那样将其合并；PMP 则隔离一段中间选民类型，而不是像最简单形式的匹配切片那样将所有类型进行配对。

正如我们在第6节所讨论的，最优选区划分采取POP还是PMP的形式，对于围绕选区重划的若干政治和法律问题，包括选区重划改革以及选区内及选区间政治极化，都具有重大影响（另见Cox和Holden 2011年）。因此，了解实践中特质不确定性还是总体不确定性更大十分重要。我们使用2016年、2018年和2020年美国众议院选举的选区层级的选举结果来回答这一问题。数据

清楚地表明，特质不确定性远大于总体不确定性。直观而言，这一发现源于一个简单的观察：在实践中，大多数选区投票比例都更接近50比50（高特质不确定性下的投票比例），而不是100比0或0比100（高总体不确定性下的投票比例）。[5]因此，我们预计，实践中的最优选区划分采取POP的形式。不过，我们还注意到，在我们估计的参数下，最优POP方案接近 p隔离。因此，简单的 p隔离方案在实践中很可能近似最优。这一发现有助于解释为什么实际的选区划分操纵通常类似于p隔离，或者是一种更简单的打包与拆分形式，即将不利选民集中起来而非进行隔离，而不是像POP这样更为复杂的方案。

在方法论上，我们确立了选区划分操纵——将选民划分为选区——与信息设计——将世界状态划分为信号——之间的形式联系。我们研究的党派操纵选区划分问题，在数学上等同于一个一般性的贝叶斯说服问题，其中状态是一维的，接收方的行动是一维的，且发送者偏好与状态无关。我们的许多研究结果在这一说服问题的背景下都是新颖的。因此，本文直接为信息设计和选区划分操纵领域作出了贡献；更重要的是，我们确立了这两个主题之间的紧密联系。[6]

1.1. **相关文献**。 关于最优党派选区操纵，最相关的早期论文是Owen and Grofman (1988), Friedman 和 Holden (2008年), 以及 Gul 和 Pesendorfer (2010)。 Owen and Grofman的模型等同于我们模型中选民类型为两种的特殊情形。 Gul 和 Pesendorfer 研究了两位设计者之间的竞争：他们各自掌控某一地区的选区划分，并力求赢得多数席位。[7] 将他们的模型简化为只有一位设计者后，所得模型等同于我们模型中得票率摆动随选民类型线性变化的特殊情形；我们将在第 3.4 节讨论这一特殊情形。 Friedman 和 Holden 考虑的模型与我们的基本相同（尤其是允许非线性摇摆），但他们的主要结论

[5]这一观察还意味着，仅包含两种选民类型或投票区的模型（例如，OwenandGrofman 1988）无法准确近似现实中选区操纵者面临的问题，因为他们必须决定如何分配多种不同类型的投票区。[6]同期发表的 Lagarde 和 Tomala (2021) 和 Gomberg、Pancs 和 Sharma (2023) 的论文也强调了选区划分操纵与信息设计之间的联系，不过所采用的模型较不一般。 Lagarde 和 Tomala 与 Owen and Grofman (1988) 一样，假设只有两种选民类型；Gomberg、Pancs 和 Sharma 则假设不存在总体不确定性。说服文献中与本文最接近的是我们的姊妹论文，Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky (2023)，我们将在后文讨论。[7]Friedman 和 Holden (2020研究了其 2008年 论文中的模型所涉及的设计者竞争。

针对这样一种特殊情形：总体不确定性远大于特质不确定性。相比之下，我们不限制总体不确定性和特质不确定性的相对大小，并通过实证表明，在实践中更相关的情形是特质不确定性占主导地位（即与Friedman 和 Holden强调的情形相反）。

关于选区划分操纵和选区重划的更广泛文献探讨了诸多问题，包括选区划分操纵的地理约束（Sherstyuk，1998；Shotts，2001；Puppe 和 Tasn´adi，2009）、异质性选民投票率下的选区划分操纵（Bouton、Genicot、Castanheira 和 Stashko，2023年）、社会最优选区划分（Gil- ligan 和 Matsusaka，2006；Coate 和 Knight，2007；Bracco，2013年）、选区紧凑度的测量（Chambers 和 Miller，2010；Fryer 和 Holden，2011年；Ely，2022）、选区重划与政策选择的互动（Shotts，2002；Besley 和 Preston，2007）、选区划分操纵的测量（Grof man 和 King，2007；McGhee，2014；Stephanopoulos 和 McGhee，2015；Duchin，2018年；Gomberg、Pancs 和 Sharma，2023年），以及选区重划后果的评估（众多文献包括：Gelman 和 King，1994b；McCarty、Poole 和 Rosenthal，2009；Hayes 和 McKee，2009；Jeong 和 Shenoy，2022）。由于党派操纵选区划分问题与其中许多问题相互交织，我们的分析或许能够促进这些领域的未来研究。

1.2. **概要**。 本文结构如下：第 2 节介绍模型。第 3 节分析若干基准情形。第 4节给出我们的主要理论和数值结果。第 5 节介绍我们的实证结果。第6 节讨论这些结果的政策含义。第 7 节作总结。所有证明均放在附录中。

2. Model

我们考虑一种标准的选举模型，其中选民类型是一维的（用于参数化选民投票支持设计者所属政党的概率），总体不确定性也是一维的（用于参数化设计者的总体得票率）。

选民与得票率。存在一个连续统选民。每位选民都有一个类型$s \in [s, s]$，设计者可以观察到该类型。[8] 选民类型的人口分布记为 F。总体冲击记为 $r \in \mathbb{R}$；其分布记为

[8]在我们的实证实现中， s 将对应于选民居住的选区。5

G。我们假设 F 和 G 足够平滑，且相应的密度 f 和 g 严格为正。[9]

当总体冲击取值为 r 时，类型为 s 的选民投票支持设计者的比例是确定的，记为 $v(s, r) \in [0,1]$。函数 $v(s, r)$ 在我们的分析中起着关键作用。我们假设 $v(s, r)$ 关于 s 严格递增，关于 r 严格递减。因此，选民类型越高，就越支持设计者（也就是说，对于每个 r，他们投票支持设计者的概率都更高）；总体冲击越大，对设计者就越不利（也就是说，每种选民类型投票支持他的概率都会降低）。因此，该模型允许不同选民类型对总体冲击作出幅度不同的“摇摆”，但假设所有类型的摇摆方向相同。我们还施加了技术性假设：$v(s, r)$ 四次可微，并且对所有 s，满足 $\lim_{r\to\infty} v(s, r) = 0$ 以及 $\lim_{r\to-\infty} v(s, r) = 1$。

对得票率函数 $v(s, r)$ 的一种解释是，每位选民都会受到个体特有的“偏好冲击” $t \in \mathbb{R}$，并且当且仅当

$$s - r - t \geq 0.$$

按照这种解释，当偏好冲击分布为 Q 时，我们有

$$v(s, r) = Q(s - r) \text{ for all } (s, r).$$

从数学上说，这种“加性偏好冲击”情形出现于函数 $v(s, r)$ 平移不变时：也就是说，该函数仅取决于差值 $s - r$。在这种情况下，模型由三个分布参数化：F、G 和 Q。然而，将 s、r 和 t 同时乘以同一个常数不会改变模型，因此我们可以将这三个变量之一的方差归一化为 1。因此，不失一般性，我们假设 t 的方差为 1。[11]

因此，设计者面临两种不确定性：总体不确定性（由r表示）和特异性、选民层面的不确定性（由 t 表示；更一般地说，由 $v(s, r)$ 偏离 0 和 1 这两个极值的程度表示）。我们的许多结果都将涉及比较每种不确定性的“量”。

[9]只需分布 F、G和 Q （定义见下文）四次可微即可。我们也会在某些基准情形中考虑离散分布。[10]在我们的实证实现中，$v(s, r)$ 将对应于设计者在选区 s受到冲击 r时的得票率。[11]除第 3.3 节所考察的基准情形外，Q 为退化的。6

选区划分方案。 设计者根据选民的类型 s，将选民分配到一系列人口均等的选区中，从而确定每个选区内 P 的 s 分布。[12] 一个选区由其所包含的选民类型 P 分布 s 来刻画。因此，选区划分方案——它规定具有各类选民类型分布 P的选区的测度——是 $\mathcal{H}$ 定义在 P s的分布之上的分布，其中 s 的人口分布由 F给定：也就是说，$\mathcal{H} \in \Delta\Delta[s, s]$ 并且

$$\int P(s)d\mathcal{H}(P) = F(s) \text{ for all } s.$$

例如，在均匀划分选区下，所有选区都相同， $\mathcal{H}$ 以概率 1 赋值给 $P = F$。在另一极端情形——隔离下，每个选区都完全由一种选民构成， $\mathcal{H}$的支撑集中的每个分布 P 都具有如下形式：对于某个 $s \in [s, s]$， $P = \delta_s$ ，其中 δ_s 表示选民类型 s上的退化分布。

设计者的问题。 只有获得选区选票的多数票，设计者才能赢得该选区。因此，对于选民类型分布为 P 的选区（下文简称"选区 P"），当且仅当 r 满足 $\int v(s, r)dP(s) \geq 1/2$ 时，设计者才能赢得该选区。由于 $v(s, r)$ 随 r 增大而递减，设计者赢得选区 P 当且仅当

$$r \leq r^*(P) := \left\{ r : \int v(s, r)dP(s) = \frac{1}{2} \right\}.$$

我们称一个选区 P' 比另一个选区更弱，当 P如果 $r^*(P') < r^*(P)$ 。请注意，只要设计者赢得一个选区 P，他也会赢得所有较弱选区 P'。因此，我们的模型反映了 Grofman 和 King (2007，第 12 页）所称的"适用于美国及大多数其他民主国家所有选举的一项关键经验概括：选举中的全州或全国性摇摆高度多变且难以预测，但选区的大致排序却高度规律且稳定。"

[12]由于美国的选区划分方案是在州级制定的，我们的连续模型隐含地假设每个州都包含大量选区。显然，与小州的国会选区相比，这一近似对州议会选区和大州的国会选区更为准确。引入对选区数量的整数约束，虽然颇有意义，也更贴近现实，但会大幅增加分析的复杂性，并可能掩盖我们的主要见解。

我们假设设计者使其政党的预期席位份额最大化。[13] 因此，设计者的问题是

$$\max_{\mathcal{H}\in\Delta\Delta[\underline{s},\bar{s}]} \int G(r^*(P))d\mathcal{H}(P)$$
$$\text{s.t.} \int Pd\mathcal{H}(P) = F.$$

该问题包含了Owen and Grofman（1988年）、Friedman 和 Holden （2008年）的党派操纵选区划分问题，以及（在只有一名设计者的情况下）Gul 和 Pesendorfer （2010年）的问题。[14] 它也等价于一个贝叶斯说服问题，其中设计者将先验分布 F 划分为后验分布 P，并通过诱导后验分布G（r^*（P）来获得效用 P。[15]

3. Benchmark Cases

我们首先考虑四种基准情形：

（1）不存在不确定性。（2）存在特质不确定性，但不存在总体不确定性。

（3）存在总体不确定性，但不存在特质不确定性。

（4）两种不确定性都存在，但摇摆幅度关于选民类型呈线性关系 es.

这些情形展示了模型中的关键作用力，并为我们的主要分析奠定基础。仅包含一种不确定性的基准情形，比同时包含两种不确定性的一般情形更容易处理，但它们能很好地表明：当两种不确定性都存在、但其中一种远“大于”另一种时，最优选区划分方案会是什么样子。我们将看到，这种情形在实践中很常见，因为特质不确定性远大于总体不确定性。同样，

[13]参见第 7 节及Kolotilinand Wolitzky (2020年，了解更一般设计者目标的讨论。[14]Gul 和 Pesendorfer (2010) 在总体不确定性之外，还考虑了存在选区层面不确定性的多数主义目标。然而，在以总体冲击的关键值为条件后，Gul 和 Pesendorfer 中的选区层面不确定性与我们模型中的总体不确定性发挥着相同作用。[15]具体而言，设计者的问题等价于状态无关发送者情形下的劝服问题，该问题由Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky(2023年研究，是对Kamenica 和 Gentzkow (2011年) 一般贝叶斯说服问题的特例，其假设状态和接收者的行动均为一维，接收者效用关于其行动超模且凹，发送者效用与状态无关，并随接收者的行动递增。在选区划分操纵的背景下，状态无关的发送者偏好反映了这样一个事实：设计者只关心自己赢得多少个选区，而不直接关心这些选区的构成。

线性摆动情形非常容易处理，也能很好地帮助我们理解更贴近现实的情形：在这种情形下，摇摆幅度会系统性地偏离线性，但偏离程度相对较小。

3.1. 完全信息：打包与拆分。 在完全信息下，最优的选区划分操纵采用一种简单且广为人知的形式。

命题1。 假设不存在不确定性：存在 r^0 使得 $r = r^0$ 确定成立，并且 $v(s, r^0) = \mathbf{1}\{s \geq r^0\}$ 对所有 s均成立。将设计者的“支持者”比例记为 $m = 1 - F(r^0)$。

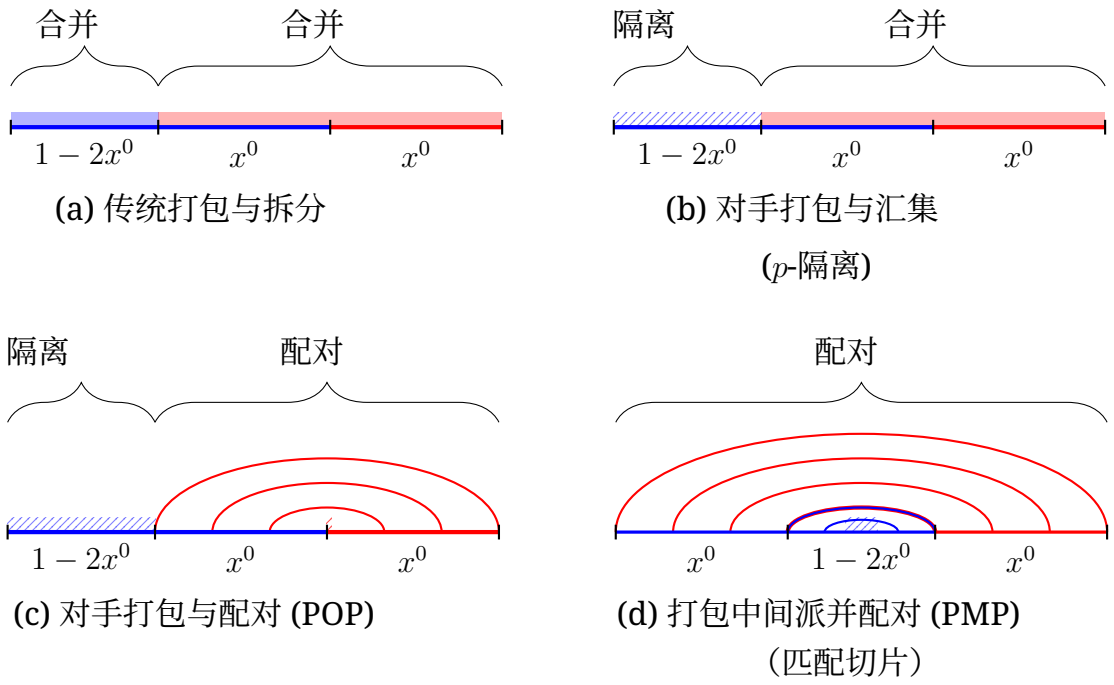
(1)如果 $m \geq 1/2$，则当且仅当选区划分方案所形成的选区的测度为1 ，且$\Pr_P(s \geq r^0) \geq 1/2$时，该方案是最优的。在此方案下，设计者赢得所有选区。

(2) 如果 $m < 1/2$，则当且仅当该方案形成测度为 $2m$ 的“拆分”选区，且$\Pr_P(s \geq r^0) = \Pr_P(s < r^0) = 1/2$，以及测度为 $1 - 2m$ 的“集中”选区，且$\Pr_P(s < r^0) = 1$时，该选区划分方案才是最优的。在此方案下，设计者赢得拆分选区。

案例（1）指出，拥有多数支持的设计者会赢得所有选区（例如，采用均匀划分选区时）。案例（2）指出，拥有少数支持的设计者 $m < 1/2$会在 $2m$ 个选区中获得50%的选票，而在其余 $1 - 2m$个选区中得票为零。我们将案例（2）中的任何最优方案称为打包与拆分。

当 $m < 1/2$ 和选民类型是连续的时，打包与拆分方案有很多种。例如，某些类型的支持者可以只分配到拆分选区的一个子集中，而某些类型的反对者可以只分配到集中选区。这个看似迂腐的观点在我们引入不确定性后将变得重要，因为在少量不确定性下的最优方案会近似某些、但并非全部的打包与拆分方案。

图 1展示了在我们的分析中发挥重要作用的四种打包与拆分方案。面板数据 (a) 展示了我们所称的传统打包与拆分：最强势的反对方选民被合并到一种选区中，其余选民（由支持者和反对者混合组成）则被合并到另一种选区中。面板数据 (b) 与此相同，只是现在每种强势反对方类型都被隔离在一个独立的同质选区中。我们将此方案称为对手打包与汇集。此前 Gul 和 Pesendorfer (2010) 曾研究过这一方案，并将其称为“p-隔离”。面板数据 (c) 与面板数据 (b) 相同，但现在支持方选民类型以负向分类匹配的方式进行配对，形成[9]



(a) 传统打包与拆分

(b) 对手打包与汇集 (p-隔离)

(c) 对手打包与配对 (POP)

(d) 打包中间派并配对 (PMP) （匹配切片）

FIGURE 1. 四种打包与切割类型

注： 在每个面板数据中，横轴表示选民类型的区间s，其中红色选民是支持者，蓝色选民是反对者。设计者赢得红色选区，输掉蓝色选区。实心阴影表示合并；连接两种选民类型的弧线表示配对；斜线阴影表示隔离。

形成不同的选区。我们将这一方案称为对手打包与配对，简称 POP。正如我们将看到的，这一方案在我们的分析中起着核心作用，因为对于现实的参数值，它是最优的；不过，我们也将看到，对于相同的参数，较简单的传统打包与拆分方案以及打包对手并集中方案也近似最优。

最后，我们将面板 (d) 中的方案称为集中温和派并配对，即 PMP。该方案此前曾由 Friedman 和 Holden（2008年）进行研究，他们将其称为“匹配切片”。[16] 我们还将 PMP 的极端形式称为

[16] Friedman 和 Holden 并未强调将一个非平凡区间的中间选民类型隔离在欠匹配切片中的可能性，但他们的结果允许这种可能性；我们将看到，这实际上是典型情况。

其中隔离区域是退化的，因此只有单一选民类型被隔离，这称为负向分类划区。

3.2. **不存在总体不确定性**。接下来，我们考虑存在特质不确定性但不存在总体不确定性的情形。正如我们将看到的，这种情形相当符合现实，因为从经验上看，特质不确定性远大于总体不确定性。

命题2。 假设不存在总体不确定性：存在 r^0 使得$r = r^0$ 以确定的方式成立。

(1) 如果 $\int v(s, r^0)dF(s) \geq 1/2$，那么当且仅当一个选区划分方案产生测度为1的选区，且满足 $\int v(s, r^0)dP(s) \geq 1/2$时，该方案才是最优的。在此方案下，设计者赢得所有选区。

(2) 如果 $\int v(s, r^0)dF(s) < 1/2$，令 s^* 满足 $\int_{s^*}^{s}(v(s, r^0) - 1/2)dF(s) = 0$. 选区划分方案是最优的，当且仅当它创建了测度为 $1 - F(s^*)$ 的拆分选区，其中 $Pr_P(s \geq s^*) = 1$ 且 $\int_{s^*}^{s} v(s, r^0)dP(s) = 1/2$，以及测度为 $F(s^*)$ 的集中选区，其中 $Pr_P(s < s^*) = 1$。在此类方案下，设计者赢得拆分选区。

在情形（1）中，设计者在均匀划分选区下赢得所有选区。在情形（2）中，设计者将所有选民类型 $s > s^*$ 分配到拆分选区，并以恰好 50% 的得票率赢得这些选区，再任意集中其余选民。其直觉是，只有当选区内选民的平均得票率 $v(s, r^0)$超过 50% 时，设计者才能赢得该选区；因此，为了尽可能多地赢得选区，设计者只将高于 s^* 的选民类型分配到拆分选区。鉴于设计者面临的不确定性，这一方案尽可能贴近集中与分割的得票率模式。

命题 2中的最优方案与完全信息最优方案中集中反对者的那些方案相吻合（例如图 1（a）–（c）中的方案）。因此，在存在特质不确定性但不存在总体不确定性的情况下，集中反对者的打包与拆分方案可能是最优的，但集中温和派的方案（例如 PMP）则不可能。在第4 节和5节中，我们将看到，实践中特质不确定性的影响大于总体不确定性。因此，命题 2中的任何最优方案——例如传统的打包与拆分方案——都将被证明对于现实的参数而言是近似最优的。

3.3. **无特质不确定性**。现在我们转而讨论存在总体不确定性但不存在特质不确定性的情形。

命题3。假设不存在特质不确定性：$v(s,r) = \mathbf{1}\{s \geq r\}$ 对所有(s,r)均成立。记总体中位选民类型为 $s^m = F^{-1}(1/2)$。当且仅当对于几乎每个选区 $\mathcal{H} - P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，都存在一种选民类型$s^P \geq s^m$使得$\Pr_P(s = s^P) = \Pr_P(s < s^m) = 1/2$时，选区划分方案才是最优的。在这样的方案下，当且仅当 $r \leq s^P$时，设计者赢得选区 P。

也就是说，对于每一种高于总体中位数的选民类型 s，设计者都会创建一个选区，其中 50% 的选民属于该类型，50% 的选民属于低于中位数的类型。请注意，对于总体不确定性 $r \in$ 的每一种实现（s, s），设计者都会以恰好 50% 的得票率赢得一些选区，并在所有其他选区中获得零票。这正是打包与拆分的得票率模式。

命题的直观解释 3 在选区数量有限 N 时很容易看出。没有特质不确定性时，设计者赢得某个选区的概率由该选区的中位选民类型决定。设计者可能创建的最强选区，是将 $1/(2N$ 个最高选民类型与任意其他选民组合而成：也就是说，不可能创建一个中位选民高于人口分布 $1 - 1/(2N$ 分位数的选区。同样，不可能创建 n 个选区，使得每个选区的中位选民都高于人口分布的$1 - n/(2N$ 分位数。但是，设计者可以逐个创建选区，每次都将剩余选民中 $1/(2N$ 个最高选民与 $1/(2N$ 个低于中位数的选民组合，从而确保 n^{th} 最强选区的中位选民恰好是 $1 - n/(2N$ 分位数。因此，这一方案是最优的。

命题3 中的最优方案是最优完全信息方案的子集。例如，图 1(d) 中的 PMP 方案在 $v(s, r) = \mathbf{1}\{s \geq r\}$时仍然是最优的，$r$ 但此时并非退化的；而图1(a)–(c) 中集中反对者的方案在这种情况下并非最优。这个结果与 Friedman 和 Holden(2008年) 的结论一致：在特质不确定性足够小时，匹配切片是最优的；不过，这一结论还依赖于一些额外假设，我们将在第 4.1 节讨论。[17]

3.4. 线性摆动。我们的最后一个基准案例是，得票率和摇摆幅度关于选民类型呈线性关系。定义这一案例有两种等价的方式。最简单的

[17]请注意，在命题 3中的每个最优方案里，所有类型最高的 s 选民都被分配到同一个选区：用 Friedman 和 Holden的话来说，“最热忱的支持者应当被归在一起。”这正是Friedman 和 Holden 所说“分散从来不是最优的”，并将其发现概括为“有时集中，但绝不分散”时的意思。

定义是，得票率 $v(s,r)$ 关于 s呈线性关系：

$$v(s,r) = \frac{\overline{s}-s}{\overline{s}-\underline{s}}v(\underline{s},r) + \frac{s-\underline{s}}{\overline{s}-\underline{s}}v(\overline{s},r) \quad \text{for all } (s,r).$$

另一种等价定义是，得票率摆动与 s 呈线性关系。为表述这一定义，首先定义当总体冲击从 r' 变为 r 时，选民类型 s 的摆动幅度 。

$$\Delta_s^{r,r'} = v(s,r) - v(s,r').$$

那么我们说，摇摆幅度 $\Delta^{r,r'}$ 与 s 成线性关系

$$\Delta_s^{r,r'} = \rho(s)\Delta_{\underline{s}}^{r,r'} + (1-\rho(s))\Delta_{\overline{s}}^{r,r'} \quad \text{for all } (s,r,r'), \quad \text{where}$$
$$\rho(s) = \frac{v(\overline{s},r)-v(s,r)}{v(\overline{s},r)-v(\underline{s},r)} = \frac{v(\overline{s},r')-v(s,r')}{v(\overline{s},r')-v(\underline{s},r')}.$$

很容易看出，除对 s 进行重新缩放外，得票率是线性的，当且仅当摇摆幅度是线性的。

线性情形包含均匀摆动情形，其中 $\Delta^{r,r'}$ 独立于 s （对每个 r， r'），因此总体冲击对所有选民类型的得票率产生相同的影响。政治学家常假设均匀摆动，以研究给定的选区划分方案在不同选举结果下的表现。[18] 线性情形还包含选民类型为二元的情形（即 $\text{supp}(F) = \{\underline{s}, \overline{s}\}$），以及第 3.2 节讨论的无总体冲击不确定性情形。然而，第3.3节讨论的无个体不确定性情形不可能是线性的，除非选民类型为二元。

线性带来的关键简化在于，赢得一个选区所需的阈值冲击 $r^*(P)$ P 仅取决于选区平均选民类型 $x = \mathbb{E}_P[s]$。因此，在线性条件下，设计者实际上选择的是平均类型的分布 $H(x)$ x，而不是类型分布的分布 $\mathcal{H}(P)$ P。采用这种表述后，约束 $\int P d\mathcal{H}(P) = F$ 简化为要求 H 是 F 的均值保持收缩，我们将其记为 $F \gtrsim H$。[19]

稍微滥用一下记号，当平均选民类型至少为 x时，设计者就赢得该选区，当且仅当 $r \leq r^*(x)$。这一事件发生的概率为

$$U(x) := G(r^*(x)).$$

[18]例如，参见 Katz、King 和 Rosenblatt （2020年）对这一方法的近期讨论。[19]可以通过类比统计学来理解这一点：如果状态 s 服从分布 F 那么存在一种实验，使得关于 s 的后验期望分布 H 当且仅当H 是 F 的均值保持收缩时成立（例如，Blackwell，1953；Kolotilin，2018年）。

我们可以将 U 解释为重新缩放后的总体冲击 z 的分布，其中当平均类型为 x 时，设计者赢得该选区，当且仅当 $z \leq x$。因此，设计者的问题变为

$$\max_{H \in \Delta[\underline{s},\overline{s}]} \int U(x)dH(x)$$
$$\text{s.t. } F \gtrsim H.$$

显然，如果 U 是凹的，那么均匀划分选区是最优的；如果U 是凸的，那么隔离是最优的。然而，一个更现实的假设是， U 是严格 S 形的，因此，用一名更有利的选民替代一名较不有利的选民对赢得某个选区的概率所产生的边际影响，先增大后减小。形式上，这意味着存在一个拐点 $x^i \in [0,1]$ ，使得 U 在 $[0,x^i]$ 上严格凸、在 $[x^i,1]$上严格凹；等价地，重新缩放后的总体冲击 z是单峰的。

我们将看到， U 呈 S 形与打包对手并合并选区划分的最优性密切相关（即 p-隔离，见图1（b）），其中低于某个临界值 s^* 的选民类型会被隔离，而高于 s^* 的选民类型则会被合并到平均选民类型为 $x^* = \mathbb{E}_F[s|s \geq s^*]$的选区中。在临界值为$s^*$ 且合并均值为 $x^* = \mathbb{E}_F[s|s \geq s^*]$的打包对手并合并选区划分下，设计者的预期席位份额为

$$\int_{\underline{s}}^{s^*} U(x)dF(x) + U(x^*)(1 - F(s^*)).$$

最佳的对手打包与汇集方案，是选择 s^* 使该期望最大化。当 s^* 的最优值处于内部时，可由一阶条件刻画：

$$u(x^*)(x^* - s^*) = U(x^*) - U(s^*).^{20}$$

该方程的直观含义是， s^* 的边际增加会提高合并均值，从而使设计者的预期席位份额增加 $u(x^*)(1-F(s^*))dx^*/ds^* = u(x^*)(x^* - s^*)f(s^*)$；但同时会减少汇集选民的质量，从而使设计者的预期席位份额减少 $(U(x^*) - U(s^*))f(s^*)$。一阶条件使边际收益与边际成本相等。见图 2。

当 U 呈严格 S 形时，对手打包与汇集是最优的，这是一个简单的结果。

[20]该方程类似于 Gul 和 Pesendorfer (2010) 的方程 (12)。14

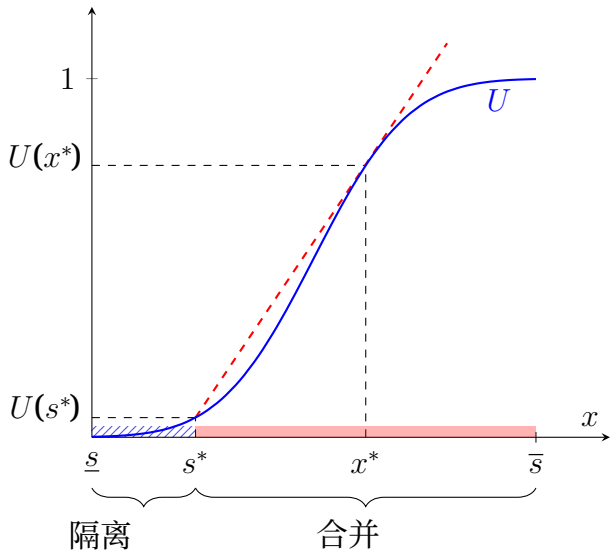


FIGURE 2. 最优打包对手并合并选区划分

命题4. 在线性情形下，若 U 呈严格 S 形，对手打包与汇集的选区划分是最优的，而且所有最优选区划分方案的选区均值分布都相同。

直观地，当 U 呈 S 形时，设计者在合并均值方面是风险偏好型 x 对于$x \in [0, s^*]$，而在 x 对于 $x \in [s^*, 1]$的"平均而言"意义上则是风险厌恶型，因此 s^* 以下的选民被隔离，而 s^* 以上的选民被合并。类似结果已由Gul 和 Pesendorfer (2010)以及在劝说文献中由Kolotilin (2018年)和Kolotilin、Mylovanov 和 Zapechelnyuk (2022)得到确立。

随着总体不确定性消失，最优的打包对手并集中方案将趋近于命题 2 所描述的方案，其中打包选区彼此隔离。[21] 因此，在不存在总体不确定性时，传统打包与拆分（其中集中选区被汇集）、打包对手并集中以及 POP（其中集中选区彼此隔离）都是最优的；但存在少量总体不确定性时，只有后两种方案仍然最优。[22] 请注意，打包对手并集中和 POP 产生相同的选区均值类型分布，因此即使最优均值分布是唯一的，两者也可能同时最优。然而，设计者对.....之间的无差异

[21]注意，随着 G 收敛于阶跃函数 $\mathbf{1}\{r \geq r^0\}$，U 收敛于阶跃函数 $\mathbf{1}\{x \geq x^i\}$，其中 x^i 是下式的解 $v(x^i, r^0) = 1/2$。一阶条件随后简化为 $x^* = x^i$，这为 s^* 给出了与命题 2相同的条件。[22]直观地说，设计者会最优地将集中后的选区分隔开来，使其有相当大的机会赢得这些选区中实力最强的一个。

以相同平均类型创建拆分选区的不同方式，在引入略微非线性摇摆幅度时并不稳健，正如我们将在下一节中展示的那样。

备注1 (均值与中位数)。为什么在线性摇摆幅度和单峰总体冲击下（包括不存在总体不确定性的情形），集中反对者是最优的，而在不存在特质不确定性的情况下，集中温和派是最优的，其直觉在于：前一种情况下，设计者的目标是选区均值分布，后一种情况下，目标是选区中位数。优化单峰总体不确定性下的选区均值分布，需要将反对者集中起来，并在具有相同平均类型的选区中分散温和派和支持者。优化选区中位数分布，则需要将总体中位数以上和以下的选民类型进行匹配。宽泛地说，在实践中，集中反对者还是集中温和派更优，取决于现实更接近线性／依赖均值的情形，还是更接近不存在特质不确定性／依赖中位数的情形。

均值依赖与中位数依赖之间的区别可用于对相关文献的几个分支进行分类。在选区划分操纵研究中，Owen and Grofman (1988)和Guland Pesendorfer (2010) 研究均值依赖的情形，而Friedman and Holden (2008) 研究近似中位数依赖的情形。在选举竞争研究中，Hinich (1977) 和LindbeckandWeibull(1993) 等包含党派偏好冲击的概率- 性投票模型具有均值依赖性，而 Wittman (1983)和Calvert(1985) 等随机中位选民模型具有中位数依赖性。在劝服研究中，Gentzkow and Kamenica (2016)、Kolotilin, Mylovanov, Zapechelnyuk,and Li (2017)、Kolotilin (2018)、Dworczak and Martini (2019) 以及 Kleiner,Moldovanu, and Strack (2021) 研究均值依赖的情形，而 Kolotilin, Corrao, andWolitzky(2023)研究一个一般情形，其中包含均值依赖和分位数（例如中位数）依赖两种情形；Yangand Zentefis (2023) 则研究分位数依赖的情形。

4. General Analysis

现在，我们考察同时存在特质不确定性、总体不确定性以及非线性摇摆幅度的一般情形。我们首先对摇摆幅度施加一个自然的曲率假设，并证明该假设意味着最优选区划分是“严格单峰凹”的，即将更极端的选民分配到较强选区。随后，我们论证最优的严格单峰凹选区划分方案通常采取“打包与配对”的形式：较弱选区彼此隔离，而较强选区恰好由两种选民类型构成。POP

和 PMP 是打包配对方案的典型例子。接下来，我们给出理论和数值结果，划定 POP 或 PMP 实现最优的参数范围。我们发现，当特质不确定性远大于总体不确定性时，POP 最优；当总体不确定性大于特质不确定性时，PMP 最优；而在中间范围内，POP 或 PMP 的混合版本最优。最后，我们观察到，当特质不确定性占据足够明显的主导地位时（正如我们将看到的，这在实践中确实如此），最优 POP 方案与 p- 隔离非常相似，而 p- 隔离和传统的打包与拆分式选区划分也近似最优。

4.1. **易摇摆的温和派与单峰下沉式选区划分**。 第 3.4 节讨论的线性摇摆情形是一个自然的基准，但它会得出一个反事实预测：最“容易摇摆”的选民——弹性评分最高的选民——是具有相应特征的“极端派”。相比之下，选举预测者（想必老练的选区划分操盘者也是如此）会考虑到，温和派选民通常比极端派更容易摇摆。Nathaniel Rakich 和 Nate Silver 在介绍 FiveThirtyEight.com 预测模型中的“弹性评分”时这样说道：“政治立场极端的选民——那些投票给某一政党的概率接近 0% 或 100% 的人 —— 不像中间派选民那样容易摇摆 ”（ Rakich and Silver，2018 年）。我们将在第 5 节提供一些证据支持这一观点。

以下假设将温和派比极端派更容易摇摆这一观点形式化。

假设1（易摇摆的温和派）。 我们有

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial r} \ln\left(\frac{\partial v(s,r)}{\partial s}\right) > 0 \quad \text{for all } s,\, r. \tag{1}$$

为了解假设1为何意味着温和派容易摇摆，请注意，对（1）积分可得，对所有 $s < s' < s''$ 和 $r < r'$，

$$(v(s'',r') - v(s',r'))(v(s',r) - v(s,r)) > (v(s'',r) - v(s',r))(v(s',r') - v(s,r')),$$

或者等价地

$$\Delta_{s'}^{r,r'} > \frac{v(s'',r) - v(s',r)}{v(s'',r) - v(s,r)}\Delta_{s}^{r,r'} + \frac{v(s',r) - v(s,r)}{v(s'',r) - v(s,r)}\Delta_{s''}^{r,r'} \quad \text{for all } s < s' < s'',\, r < r'. \tag{2}$$

回顾一下，线性情形定义为（2）中的等式成立。因此，假设1表明，对于任意一对总体冲击 $r < r'$ 以及任意三个选民类型$s < s' < s''$，当总体冲击从 r' 变为 r时，类型 s' 选民比类型 s 和 s'' 选民更倾向于转向支持设计者（相对于线性情形）。

我们指出假设1的一个等价条件及其推论。

命题5。 以下结论成立：

(1) 在加性偏好冲击情形下，假设*1*成立当且仅当偏好冲击 t的密度 q 严格对数凹：

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(q(t)\right) < 0 \quad for\ all\ t.$$

(2) 假设*1*意味着，对于每个 r， $\partial v(s,r)/\partial r$ 关于 s严格单谷型（即先递减后递增）。

许多常见分布的密度都严格对数凹，包括正态分布、逻辑斯蒂分布和极值分布（例如参见 Bagnoli 和 Bergstrom（2005）的表1），因此命题的第1部分表明，假设1是一项标准性质。命题第2部分中的性质则从另一个角度说明，温和派比极端派更容易成为摇摆群体。例如，对于任意 $s < s' < s''$，该性质意味着（令 $v_r = \partial v/\partial r$）如果 $v_r(s,r) = v_r(s'',r)$，那么 $v_r(s',r) < v_r(s,r) = v_r(s'',r) < 0$（回想 $v_r < 0$），因此类型 s' 比类型 s 和 s''更容易成为摇摆群体。

现在我们证明，假设1意味着每个最优选区划分方案都是“严格单谷型”的，也就是说，越极端的选民会被分配到越强的选区。形式上，如果任意选区 $\mathcal{H}$ is 严格单谷型 if 任意包含两个选民类型 $s < s''$ 的选区 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$ 都强于任何包含介于两者之间的选民类型 $s' \in (s, s'')$ 的选区 $P' \in \text{supp}(\mathcal{H})$，即 $r^*(P') < r^*(P)$。[23] 请注意，如果选区划分是严格单谷型，那么每个选区至多包含两种不同的选民类型。

命题6。 在假设*1*下，每个最优选区划分方案都严格呈单峰型。

[23]形式上，我们称一个选区 P“包含”某种选民类型 s，当且仅当 $s \in \text{supp}(P$。

类似结果已由Friedman 和 Holden (2008年) 证明；在劝服情境中，Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky (2023年) 也得出了类似结果。[24] 为理解其直觉，假设某个选区划分方案划分出两个选区，即选区1和选区2，二者具有相同的阈值总冲击r^*，但选区1完全由温和派组成，而选区2则由左翼和右翼极端派混合组成。在线性摇摆下，两个选区的得票率分布相同。然而，根据假设1，选区1的得票率摇摆幅度大于选区2。因此，在总体冲击接近 r^*的条件下，边际选民在选区2中成为关键选民的可能性高于在选区1中的可能性。于是，设计者可以利用这种不对称性获利：将一些不利选民重新分配到选区1，并将一些有利选民重新分配到选区2，从而削弱温和派占主导的选区1，并强化极端派占主导的选区2。以这种方式打破所有平局，使其有利于极端派选区，会形成严格的单峰选区划分。

命题6表明，在假设1下，设计者绝不应在同一个选区内汇集超过两种选民类型。因此，在图 1所示的方案中，只有 POP 和 PMP 在假设1下可能是最优的（此外，这些方案中更极端的配对选区必须比更温和的选区更强）。具体而言，尽管在摇摆幅度呈线性且总体冲击为单峰时，对手打包与汇集是最优的，但如果温和派的摇摆幅度哪怕只比极端派稍大，那么设计者最好将汇集拆分为不同的选区，每个选区最多包含两种类型，并且更极端的选区严格来说更强。

4.2. **打包与配对式选区划分**。 严格单谷性是选区划分方案的一项重要属性，但许多方案都可能是严格单谷型的。本小节论证，在严格单谷型方案中，聚焦于“打包与配对”式选区划分是自然的；在这种选区划分中，较弱选区彼此隔离，而较强选区恰好由两种选民类型组成。形式化地说，严格单峰凹选区划分方案 $\mathcal{H}$ 是打包与配对式选区划分 当且仅当 $\delta_s \in \text{supp}(\mathcal{H})$ 意味着任何满足 $r^*(P) < r^*(\delta_s)$ 的 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$ 都具有如下形式： $P = \delta_{s'}$，其中某个 $s' < s$。

为简化起见，在本节余下部分，我们仅考虑加性偏好冲击情形，并假设偏好冲击密度严格对数凹

[24]假设1等价于 Friedman 和 Holden的“信息性信号性质”。Friedman 和 Holden 假设选区的数量有限，且中位数和众数 Q重合。 Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky (2023年) 在一个更一般的模型中给出了单峰谷性的充分条件，该模型允许设计者偏好依赖于状态。19

且关于 0 对称。对称性假设带来一个方便的推论：赢得打包选区所需的阈值冲击 $P = \delta_s$ 仅为 $r^*(P) = s$。

我们首先证明，任何打包与配对方案 $\mathcal{H}$ 都可以用一种简单的方式描述。首先，存在一个分岔点$r^b \in [s, s]$，使得当$r^*(P) \leq r^b$ 时，选区 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$会被打包；当 $r^*(P) > r^b$ 时，则会被配对。因此，分岔点将打包选区与配对选区分隔开来。其次，选民被分配到配对选区的方式由一个递减函数 s_1 和一个递增函数 s_2 描述；对于每个配对选区P，选区 P中的两种选民类型分别为 $s_1(r^*(P))$和 $s_2(r^*(P)) > s_1(r^*(P))$。因此，较强的配对选区包含更多极端选民，这是单峰谷性所要求的。

命题7。对于任意打包配对式选区划分方案 $\mathcal{H}$，存在一个分岔点$r^b \in [s, s]$、一个递减函数 $s_1 : (r^b, s] \to [s, r^b)$，以及一个递增函数$s_2 : (r^b, s] \to (r^b, s]$，满足 $s_1(r) < r < s_2(r)$，使得对于每个 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，都有$\text{supp}(P) = \{r^*(P)\}$，当 $r^*(P) \leq r^b$时；而当$r^*(P) > r^b$时，$\text{supp}(P) = \{s_1(r^*(P)) \; s_2(r^*(P))\}$。

分组配对式选区划分的例子包括隔离、POP、PMP 和负向分类划区。请注意，隔离和负向分类划区分别代表极端的打包配对方案：前者将所有选民类型隔离开来，后者仅将单一类型隔离开来。我们首先给出这些极端选区划分方案达到最优的条件。

命题8。如果 G 是凹的，则负向分类划区是唯一最优的；如果 G “充分凸”，即存在一个常数 $c > 0$，使得当 $g'(r)/g(r) \geq c$ 对所有 r 成立时，隔离是唯一最优的。

这一结论第一部分的直觉如下。首先，任何从不将任意两种选民类型分开的严格单谷型选区划分方案，都是负向匹配。因此，只需证明：若 G 是凹的（且偏好冲击密度严格对数凹且对称），那么设计者将任意两种选民类型分开并非最优$s < s'$。为此，假设设计者将一些类型为s 的选民与类型为s'的选民合并。此变化对设计者在类型为 s 的选民中预期席位份额的边际影响为

$$G(s') - G(s),$$

也就是说，当一名类型为s 的选民从弱势选区 δ_s 转入优势选区 $\delta_{s'}$时，赢得其所在选区的概率有所提高。另一方面，此变化对设计者在类型为s' 的选民中预期席位份额的边际影响为

$$\frac{Q(s-s')-\frac{1}{2}}{q(0)}g(s').$$

这是因为第一项是赢得强选区时阈值冲击的边际效应，其中利用隐函数定理（以及$Q(0) = 1/2$）根据方程计算 $\rho = 0$ 处的 $dr/d\rho$

$$\rho Q(s-r)+(1-\rho)Q(s'-r)=\frac{1}{2},$$

第二项是总体冲击在$r^*(\delta_{s'}) = s'$处的密度。最后，两种效应之和为正，因为

$$\frac{G(s')-G(s)}{g(s')}\geq s'-s>\frac{\frac{1}{2}-Q(s-s')}{q(0)},$$

其中，第一个不等式源于G的凹性，第二个不等式源于 Q 在（$-\infty$， $0]$ ）上的对称性和严格凸性（这源于 q的严格对数凹性）。

该结果第二部分的直觉是，如果 G 充分凸，那么对于任意两个选民类型 s 和 s'，我们有

$$\frac{G(s')-G(s)}{g(s')}\leq\frac{Q(s'-s)-\frac{1}{2}}{q(0)},$$

根据与上述类似的逻辑，这意味着设计者将任意两个选民类型分开而不是将其合并是最优的。

命题8 表达了这样的直觉：凹性 G 有利于合并（在严格单谷性条件下，这表现为对类型进行配对，而不是合并类型区间），而凸性 G 则有利于隔离。在现实情况下，若 G 呈严格 S 形（即总体冲击呈单峰形），那么除非两个政党极不对称，否则隔离和负向分类划区都不是最优的。[25]

[25]命题9 可与Friedman 和 Holden （2008年）的命题1相比较。Friedman 和 Holden 表明，当特质不确定性足够小时，PMP（“匹配切片”）是最优的，但他们的讨论集中于负向分类划区这一极端情形，即只有单一选民类型被单独划分。命题9 表明，当总体冲击的分布为单峰且两个政党对称时，这一极端情形永远不会出现。21

命题9。 如果 G 呈严格 S 形，且拐点为 $r^*(F)$，那么隔离和负向分类划区都不是最优的。

直观很简单。根据命题 8，设计者更倾向于合并拐点 $r^*(F)$ 以上的任意两种选民类型，因此隔离是次优的。此外，对于任何负向分类划区，都存在彼此接近的选民类型，它们在一个选区 P中 $r^*(P) < r^*(F)$ 配对，但设计者更倾向于将这类选民类型隔离开来。

由于 G 的凸性有利于隔离，而 G 的凹性有利于配对，并且自然可以假设 G 呈S形（先凸后凹），因此一个自然的猜想是，分组配对式选区划分（先隔离，再配对）是最优的。对于 G 和 Q 均服从正态分布这一特殊情形，我们可以通过数值方法验证这一猜想（参数范围极广）。以下命题陈述了这一结果，并给出了分组配对式选区划分成为唯一最优方案的一般充分条件。

命题10. 若不存在满足以下条件的$s \leq \underline{s} < r < s' \leq s'' \leq \bar{s}$

$$\begin{aligned} G(r) + \lambda(r)\left(Q(s-r) - \tfrac{1}{2}\right) \geq G(s) \quad and \\ G(r) + \lambda(r)\left(Q(s-r) - \tfrac{1}{2}\right) \geq G(s'') + \lambda(s'')\left(Q(s-s'') - \tfrac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\lambda(r) = \frac{g(r)(Q(s'-r)) - Q(s-r))}{\left(Q(s'-r) - \frac{1}{2}\right)q(s-r) - \left(Q(s-r) - \frac{1}{2}\right)q(s'-r)} \quad and \quad \lambda(s'') = \frac{g(s'')}{q(0)},$$

那么每个最优选区划分方案都是打包与配对的。此外，当 Q 是标准正态分布，且 G 是标准差为γ^{-1}的中心正态分布时，不存在 $\gamma \in \{.1, .2, \ldots, 99.9, 100\}$ 和 $s < r < s' \leq s''$满足 s，r，s'，$s'' \in \{-5, -4.9, \ldots, 4.9, 5\}$ 使得(3)成立。

条件（3）可解释如下。对于任意（严格单谷型）的非打包与配对方案，存在 $s < r < s' \leq s''$，使得选民类型 $s < s'$ 在一个选区 P中与 $r^*(P) = r \in (s, s')$ 配对，而选民类型 s''则被分隔开来。根据与命题8类似的逻辑，如果（3）中的第一个不等式不成立，设计者更倾向于将少数类型-s 选民从选区 P中分隔出来；如果（3）中的第二个不等式不成立，设计者则更倾向于将少数类型-s 选民从选区 P 转移到选区 $\delta_{s''}$。因此，如果不存在满足（3）的 $s < r < s' \leq s''$，那么任何最优方案都必须采用打包与配对。

4.3. **应集中反对者还是温和派?** 在为分组配对式选区划分提供了一些论据之后，我们分析的最后一部分将比较两种关键的分组配对形式——POP 和 PMP——以及这些选区划分方案的混合版本。我们将遇到的 POP 和 PMP 的混合版本属于一类我们称为“Y型选区划分”的选区划分方案。形式上，如果存在一个正数 $\varepsilon > 0$，使得一个打包配对方案 $\mathcal{H}$ 是*Y*型选区划分，则

(1) 对所有 $r \in [r^b - \varepsilon, r^b + \varepsilon]$（其中 r^b 是分岔点），都存在$P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，使得 $r^*(P) = r$。(2) 满足 $r^*(P) \in [r^b - \varepsilon, r^b]$ 的选区 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$是隔离的（即，$\text{supp}(P) = \{r^*(P)\}$）。(3) 满足 $r^*(P) \in (r^b, r^b + \varepsilon]$ 的选区 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$是配对的（即，$\text{supp}(P) = \{s_1(r^*(P)),\ s_2(r^*(P))\}$ 对于某个 $s_1(r^*(P)) < s_2(r^*(P))$）。(4) 描述配对选区中选民类型的函数 s_1 和 s_2 是二阶可微的，并满足 $\lim_{r \downarrow r^b} s_1'(r) = \lim_{r \downarrow r^b} s_2'(r)$。[26]

我们将看到，Y型选区划分包含混合POP，其中存在$\hat{s} \in (s,\ r^b)$，使得 $[s, \hat{s})$中的选民类型始终被分隔，而$(\hat{s},\ r^b)$中的类型有时被分隔、有时被配对；同时也包含混合PMP，其中存在$\hat{s} \in (s,\ r^b)$，使得 $[s, \hat{s})$中的类型始终被配对，而$(\hat{s},\ r^b)$中的类型有时被分隔、有时被配对。（相较之下，回顾一下，在POP下存在$\hat{s} \in (s,\ r^b)$，使得 $[s, \hat{s})$中的类型始终被分隔，而$(\hat{s},\ r^b)$中的类型始终被配对；而在PMP下存在$\hat{s} \in (s,\ r^b)$，使得 $[s, \hat{s})$中的类型始终被配对，而$(\hat{s},\ r^b)$中的类型始终被分隔。）我们将给出理论结果和数值结果，表明当特质不确定性远大于总体不确定性时，POP是最优的；当总体不确定性大于特质不确定性时，PMP是最优的；而在中间范围内，Y型选区划分（尤其是混合POP或混合PMP）是最优的。

我们首先讨论 POP、PMP 和 Y型选区划分与所有打包与配对方案集合之间的关系。POP 和 PMP 都是纯选区划分方案，因为每种选民类型 s都被分配到单一选区 P：形式上，对于每个 $s \in [s, s]$，都存在唯一的$P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，使得 $s \in \text{supp}(P)$。它们并非仅有的纯选区划分方案：例如，打包与配对方案可以将临界值 s_0 以下的选民类型隔离，并

[26]可微性条件用于命题11的证明中。该条件或许可以去掉。23

在临界值 s_0以上的选民类型中匹配切片（也可以包含一个中间隔离区域）。然而，POP 和 PMP 是这类方案中最简单的，因为它们只涉及一个非退化的选民类型隔离区间。据我们所知，不存在任何参数能使更复杂的纯打包与配对方案达到最优。

相比之下，Y型选区划分方案是混合型的，因为恰好低于分岔点的选民类型 s 有时会被隔离，有时则会与更高的类型配对。有些出人意料的是，我们将看到，这类方案在一系列参数范围内是唯一最优的，尽管选民类型是连续的。虽然并非每一种集中并配对的混合方案都是 Y型选区划分方案，但我们将看到，至少在数值分析中，最优方案总是呈现出我们所考察的三种形式之一。

我们希望得到 POP、PMP 和 Y型选区划分达到最优的普遍充要条件。遗憾的是，这似乎极具挑战性，因为最优选区划分的形式受难以分析的全局约束驱动。相反，我们提出了一个看似较为有限的结果：如果 Y型选区划分是最优的，那么特质不确定性与总体不确定性的比值必须处于一个中间范围内。然而，从数值结果来看，该结果实际上刻画了三种选区划分形式何时达到最优：至少在总体冲击和特质冲击均服从正态分布的情况下，我们关于 Y型选区划分最优性的必要条件也近似是充分的；当特质不确定性与总体不确定性的比值低于（相应地，高于）Y型选区划分达到最优的范围时，PMP（相应地，POP）是最优的。

为便于比较总体不确定性和特质不确定性的大小，分布 G 和 Q 应具有相同的形状。因此，我们假设存在一个参数 $\gamma > 0$ ，使得对所有 r， $G(r) = Q(\gamma r)$。由此，参数 γ衡量特质冲击的标准差（已归一化为1）与总体冲击的标准差（等于 γ^{-1}）之比。以下是我们的关键结果。

命题11。 如果*Y*型选区划分是最优的，那么 $r^b = 0$ 和 $\gamma \in (1, \sqrt{1+\sqrt{3}} \approx \overline{1}.65]$。

命题的证明11通过推导最优选区划分涉及在 r 处出现分岔点的三个必要条件（这些条件基于线性规划对偶性），然后证明这些条件意味着该分岔点

必须与拐点重合，并且特质不确定性与总体不确定性的比值必须处于中间范围。第一个条件（附录B中的方程（12））表示，将略低于和略高于 r的选民类型进行配对是最优的。第二个条件（方程（13））表示，将略低于 r的选民类型进行隔离是最优的。第三个条件（方程（14））表示，每个选区中有利选民和不利选民的比例 P with $r^*(P) = r'$ 略高于 r 时，实际上会产生所需的临界值 r'。直观地说，要使围绕 r配对相近选民类型成为最优， G在 r处必须是弱凹的；而要使将略低于r的选民类型隔离成为最优， G 在 r处必须是弱凸的。因此，分岔只能发生在 G的拐点处，该点根据对称性等于0。此外，如果我们从Y型选区划分最优的参数出发并增加总体不确定性，那么最终将始终隔离略低于0的选民类型，而不再将其与更高选民类型配对；此时，最优选区划分变为PMP（分岔点低于0）。另一方面，如果我们从Y型选区划分最优的参数出发并降低总体不确定性，那么最终将始终把略低于0的选民类型与更高选民类型配对，而不再将其隔离；此时，最优选区划分变为POP（分岔点高于0）。下面我们将讨论从PMP到POP的转变机制，随着 γ 增加而发生。

如果我们假定条件 $\gamma \in (1, 1.65)$ 对于 Y型选区划分达到最优既是必要条件也是充分条件，那么上述直觉表明：

(1) 当 $\gamma \leq 1$ 时，PMP 是最优的。

(2) 当 $\gamma \in (1, 1.65)$ 时，Y型选区划分是最优的。

(3) 当 $\gamma \geq 1.65$ 时，POP 是最优的。

图 3 给出了数值解，验证了这一启发式判断。图中， Q 是标准正态分布， G 是标准差为 γ^{-1}的中心正态分布，而 F 是在 $[-1, 1]$上的均匀分布。[27] 选民类型位于 x轴上，而各选民类型所分配到的选区获胜所需的阈值冲击位于 y轴上。（因此，打包选区位于 45° 线上，而配对选区则跨越 45° 线。）对于混合选区划分方案（即 Y型选区划分，图中的

[27]更准确地说，我们用一个有限维线性规划来近似设计者的问题，然后使用 Gurobi Optimizer 求解。我们的近似设定为： s 在 $\{-1, -.99, \ldots, .99, 1\}$ 上服从均匀分布，且设计者受限于只能创建满足 $r^*(P) \in \{-1, -.99, \ldots, .99, 1\}$ 的选区 P。

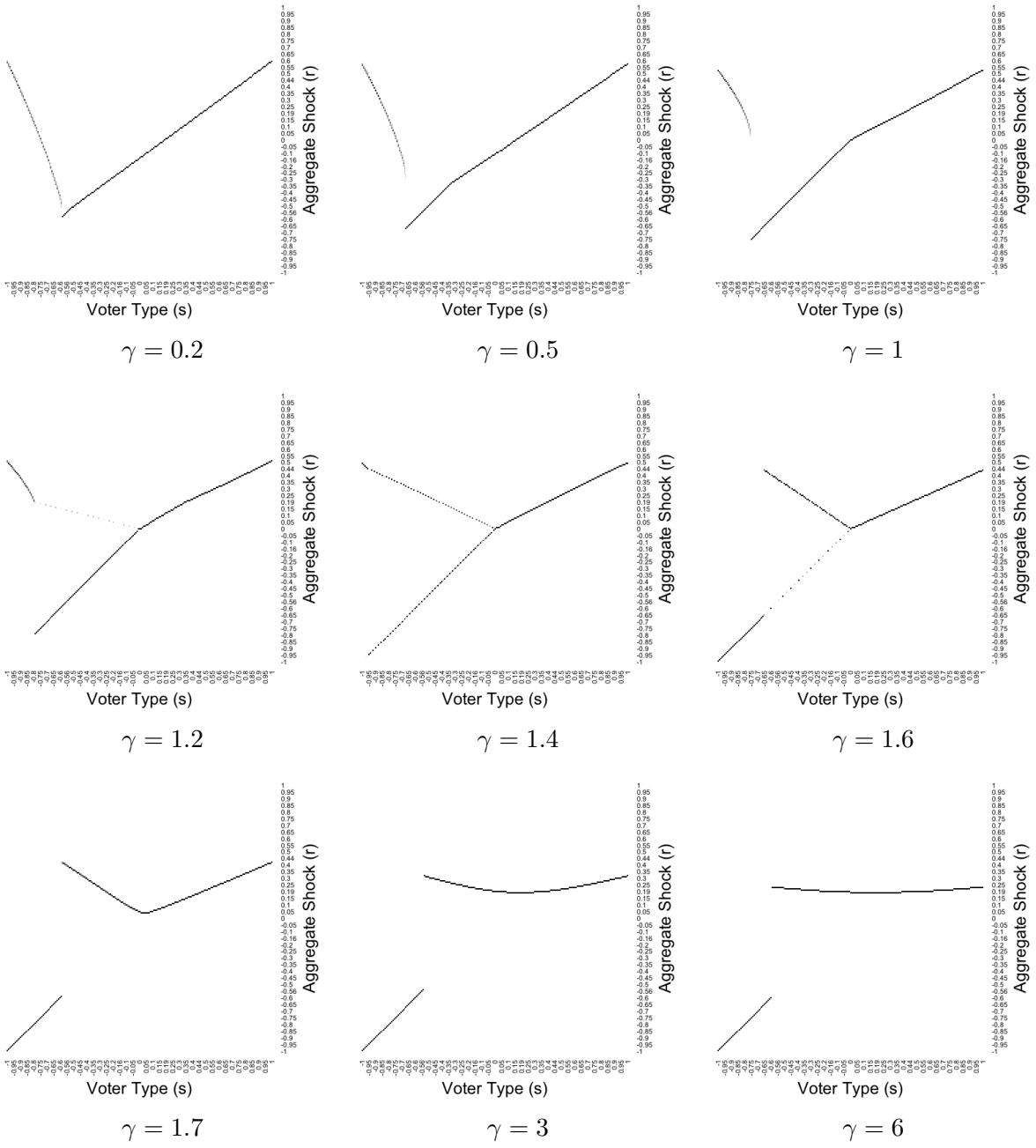
中间一行），阴影深浅表示某一选民类型被分配到各选区的概率。我们可以看到，最优选区划分恰好呈现出猜想所述的形式：当 $\gamma \in \{0.2, 0.5, 1\}$时，PMP 最优；当 $\gamma \in \{1.2, 1.4, 1.6\}$时，Y型选区划分最优；当 $\gamma \in \{1.7, 3, 6\}$时，POP 最优。图中 γ 的最高值为 $\gamma = 6$，这是最接近我们实证估计的取值。当 $\gamma = 6$时，POP 仍然最优，但此时与 p隔离十分相似。因此，在我们将看到的经验相关参数范围内， p隔离近似最优。

我们可以直观地说明，随着 γ 增加，最优选区划分如何以及为何会从PMP转变为POP，如图3所示。在此过程中，我们还会提及最优PMP和POP方案的一些其他特征，并描述Y型选区划分机制下混合PMP向混合POP的转变。

首先，回想一下两个极端情形： γ接近0（几乎没有特质不确定性），以及 γ 非常大（几乎没有总体不确定性）。当 γ 接近0时，PMP是最优的；此外，当 F 像图3那样关于0对称时，几乎所有选民都会配对，因此最优选区划分近似于负向匹配，这意味着分岔点低于0，且配对选区之间 $r^*(P)$的取值范围很大。[28] 当 γ 非常大时，POP是最优的；此外， p隔离近似最优，这意味着分岔点高于0，且配对选区之间 $r^*(P)$的取值范围非常小。[29] 现在，当 γ 从0向1增加时，配对选区之间 $r^*(P)$的取值范围会缩小（因为可能出现的总体冲击范围缩小），而集中选区的比例会增加。当 γ 达到1时，集中具有 $s = 0$（即 G的拐点）的选民成为最优选择。由于集中拐点以上的选民不可能是最优选择，因此，一旦 γ超过1，将略高于0且有利程度较高的选民与少数有利程度稍低的选民配对，就成为最优选择。此时，选区划分呈现混合PMP的形式。

随着 γ 进一步增至高于 1，配对选区中 $r^*(P)$的取值范围继续缩小。这意味着“Y”的右臂趋于平缓，即s_2'增加，从而使分配到 $r^*(P)$为正但数值较小的选区中的有利选民质量增加。为了使这些选区中的 $r^*(P)$保持较小，还必须将更多不利选民分配到这些选区，以抵消这一影响；这可以通过分配更多.....来实现

[28]最优 PMP 方案的另一个性质是，“Y”的左臂在分岔点处无限陡峭，即 $\lim_{r \downarrow r^b} s_1'(r) = 0$。[29]最优 POP 方案的另一个性质是，在分岔点处配对是平滑的，即 $\lim_{r \downarrow r^b} s_1'(r) = -\infty$ 且 $\lim_{r \downarrow r^b} s_2'(r) = \infty$。



$\gamma = 0.2$ $\gamma = 0.5$ $\gamma = 1$

$\gamma = 1.2$ $\gamma = 1.4$ $\gamma = 1.6$

$\gamma = 1.7$ $\gamma = 3$ $\gamma = 6$

FIGURE 3. 随着 γ 变化的最优选区划分

注：当 $\gamma \in \{0.2, 0.5, 1\}$ 时，最优选区划分方案为 PMP；当 $\gamma \in \{1.2, 1.4, 1.6\}$ 时，采用 Y 型选区划分（具体而言，$\gamma \in \{1.2, 1.4\}$ 时采用混合PMP，$\gamma = 1.6$ 时采用混合POP）；当 $\gamma \in \{1.7, 3, 6\}$ 时，采用 POP。我们在第 γ 节中对 5 的实证估计高于 6。

更多“混合型不利选民”被分配到配对选区，而非集中选区；与此同时，分配给每个混合选区区间的不利选民类型范围实际上在缩小，即 Y形图的左臂变得更陡。[30] 在某个时点，Y形图的右臂变得比左臂平缓，以至于最极端的左翼选民找不到可与之配对的右翼选民；此时这些选民被隔离：这一时点标志着从混合PMP转变为混合POP，在$\gamma = \sqrt{2} \approx 1.41$ 时发生，如图3所示。[31] 随着 γ 进一步增大，越来越多的混合型不利选民被分配到配对选区，直至所有此类选民都被分配到配对选区；此时，最优选区划分变为POP，且分岔点变为正值。这发生在 $\gamma \approx 1.65$时。最后，随着 γ 继续增大并超过1.65， $r^*(P)$在配对选区中的范围继续缩小，而最优POP方案越来越接近 p隔离。

注释 2 (**传统打包与拆分的近似最优性**)。 我们在此结束对这一情形的讨论，并指出，对于我们将看到的、与实际情况相关的参数范围，最优 POP方案与 p-隔离相似；事实上，p-隔离和传统的打包与拆分式选区划分都近似最优。我们在第 γ 5 节中对 γ 的中心估计值在6 以上，而且大多数州都在 10 以上。图 3 显示，对于这些参数，POP方案是最优的，而最优 POP方案与 p-隔离相似。此外，对于图 3 所用的参数（其中 s 的标准差固定在我们将看到的现实水平，而 γ^{-1}——即 r的标准差——会变化），我们计算得出，对于任何 γ值，设计者在最优选区划分方案下的预期席位份额都不会比其在最优传统打包与拆分方案下的预期席位份额高出 1.4% 以上；对于任何高于 5 的 γ 值，差距也不会超过 0.1%。[32] 例如，当 $\gamma = 6$最优预期席位份额约为 .7087，而最优传统

[30]命题11的证明表明，对于所有充分小的正 r， $|s_1'(r)|$ 随γ 递减（即左臂变得更陡），而 $s_2'(r)$随 γ 递增（即右臂变得更平坦）。_[31]转折点$\gamma = \sqrt{2}$ 定义为使$\lim_{r\downarrow 0} |s_1'(r)| = \lim_{r\downarrow 0} s_2'(r)$成立的 γ 的唯一取值。图中的 $\gamma = 1.4$ 面板展示了转折发生前不久的一个点。[32]Friedman 和 Holden（2008年，第129页）以及Cox和Holden（2011年，第571页）给出了一个总体不确定性较大（$\gamma = 1/\sqrt{2} \approx 0.71$）且 s 的标准差较大（等于3，而我们对该参数的经验估计为0.63）的例子，在该例中，设计者的预期席位份额在匹配切片下比在传统打包与拆分下高出20%以上。这表明，当 r 和 s 的标准差都（不现实地）较大时，最优选区划分相对于传统打包与拆分的优势可能显著高于1.4%的上限；该上限是通过改变 r 的标准差，同时将 s 的标准差固定在现实水平上而得到的。

打包与拆分方案的预期席位份额约为 .7082。[33] 这一结果的直观解释是，实践中的总体不确定性较小（相对于特质不确定性以及选民/选区类型的范围 s而言），因此，第 3.2节讨论的无总体不确定性情形——在该情形下，传统打包与拆分恰好是最优方案——相当符合现实。

5. Estimation

我们论证了，最优选区划分的形式取决于设计者所面临的总体不确定性与特质不确定性的数量比较，尤其取决于上一节引入的参数 γ （即特质不确定性与总体不确定性的比率，或者等价地说，总体冲击 r 的标准差的倒数；回顾一下，特质冲击 t 的标准差被标准化为 1）。现在，我们利用近期美国众议院选举的选区层级的选举结果估计 γ ，同时也为我们的一些关键理论假设提供实证支持。我们首先介绍数据和实证模型，然后展示一些简单的汇总统计学结果和图表，最后估计 γ。

5.1. **数据与实证模型**。 我们的数据是2016年、2018年和2020年的美国众议院选举的选区层级的选举结果，这些数据最近由 Baltz等人 (2022)进行了标准化处理并免费公开。对于每个投票区 n 和选举 $t \in\{2016, 2018, 2020\}$，我们观察到两党选票总数 k_{nt} 以及共和党候选人在两党选票中的得票率 v_{nt}。[34] 这些数据是重复横截面，而不是面板数据，因为没有一种通用方法可以匹配不同选举中的投票区（例如，选区边界经常发生变化； Baltz等人 2022，第6页）。我们剔除了在2016年、2018年或2020年的任何一次选举中属于无竞争的众议院选举的所有选区（这剔除了全部选区的25%）。[35] 此外，在三次选举中的每一次，我们都剔除

[33]当 $\gamma = 2$ （一个不现实的低值）时，相应的预期席位份额为。5392 和。5357。当 $\gamma = 15$ （接近我们的中心估计值）时，它们为。8488 和。8485。[34]“投票区”是州内最小的选举报告单位，通常对应于所有选民在同一投票站投票的地理区域。缅因州和新泽西州仅在镇级别报告选举结果，因此对于这些州， n 按镇而非投票区建立索引。此外，对于一些名义上的第三党候选人替代正式民主党或共和党候选人参选的选举，我们会将该候选人手动重新标记为民主党候选人或共和党候选人。例如，在纽约州，我们将劳动家庭党候选人重新归类为民主党候选人，并将保守党候选人重新归类为共和党候选人。[35]保留这些选区会使我们对 γ的估计产生偏差，因为相关的得票率针对的是有竞争的选举，而如果这些选区存在竞争，其得票率将不同于 0 或 1。对于仅有一两次无竞争选举的选区，仅保留其存在竞争的选举29

总票数少于50张的投票区（这剔除了全部选票的0.13%），以及共和党得票率为0或1的投票区（这进一步剔除了0.015%的选票）。

为将模型应用于这些数据，我们假设设计者掌握选区层面的选民信息。这一假设是合理的，因为这是能够获得选举数据的最细层级。由于模型中的选民类型 s 反映了设计者可获得的信息，我们因此假设同一投票区 n 内的所有选民类型都相同 s_n。我们还假设投票区相对较大（在数据中，剔除总票数少于 50 票或得票率为 0 或 1 的投票区后，每个投票区的平均票数为 789，标准差为 1,399），且特质偏好冲击服从正态分布，因此设计者在选举 t 中于投票区 n 的得票率为

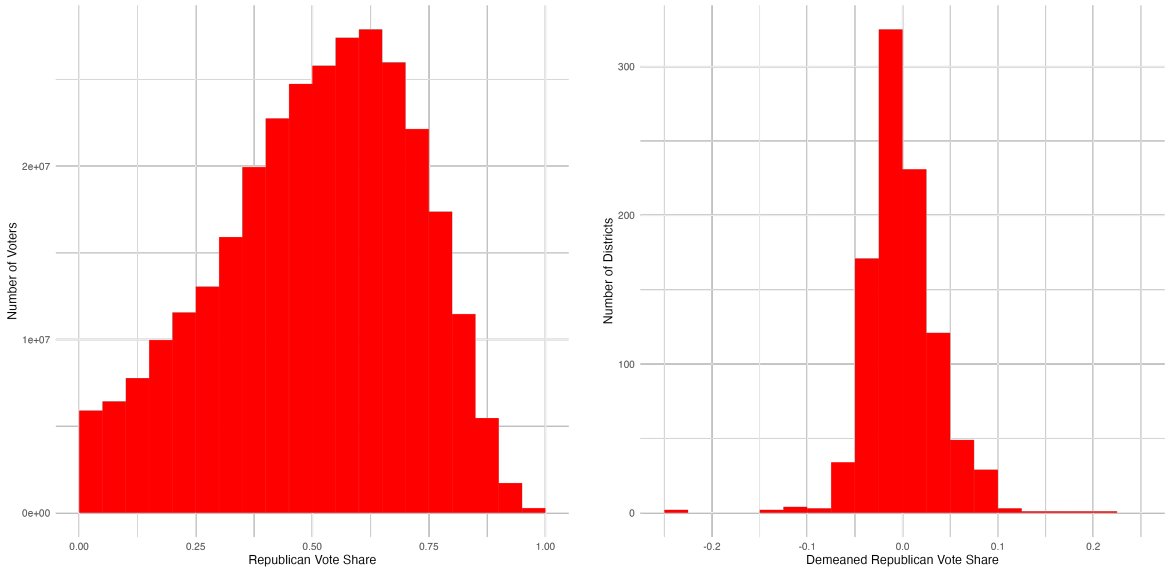
$$v(s_n, r_t) = \Phi\left(s_n - r_t\right),$$

其中 Φ 为标准正态累积分布函数。

尽管我们的估计依赖于偏好冲击服从正态分布这一假设，但需要指出的是，我们的估计对这一假设相当不敏感：因为我们将发现 γ 非常大，偏好冲击分布在相关范围内近似均匀，因此，指定任何平滑的偏好冲击分布，都会使我们的估计几乎不变。

5.2. **描述性图表与汇总统计**。 我们首先展示一幅直方图（图 4(a)），显示美国有多少选民居住在共和党得票率为 v 的选区中，分箱边界为 $\{0, .05, \ldots, .95, 1\}$，并对选举 $t \in \{2016, 2018, 2020\}$取平均。直方图显示， v_{nt} 的分布是单峰的，质量中有很大比例（74%）位于 $v \in [.25, .75]$。这一模式对我们的模型有两个简单但重要的含义。首先，选民/选区类型的分布远非双峰：类型构成一个连续统，质量大多“集中在中间”。选择如何将投票区划分为选区的设计者必须

也会使我们对 γ的估计产生偏差，因为这会扭曲对各次选举间摇摆幅度的估计。剔除无竞争选区可能会使我们对选民类型 s的分布 F 的估计产生偏差，因为无竞争选区的情况可能更为极端；不过，对于我们估计γ这一主要目标而言，这种偏差无关紧要。



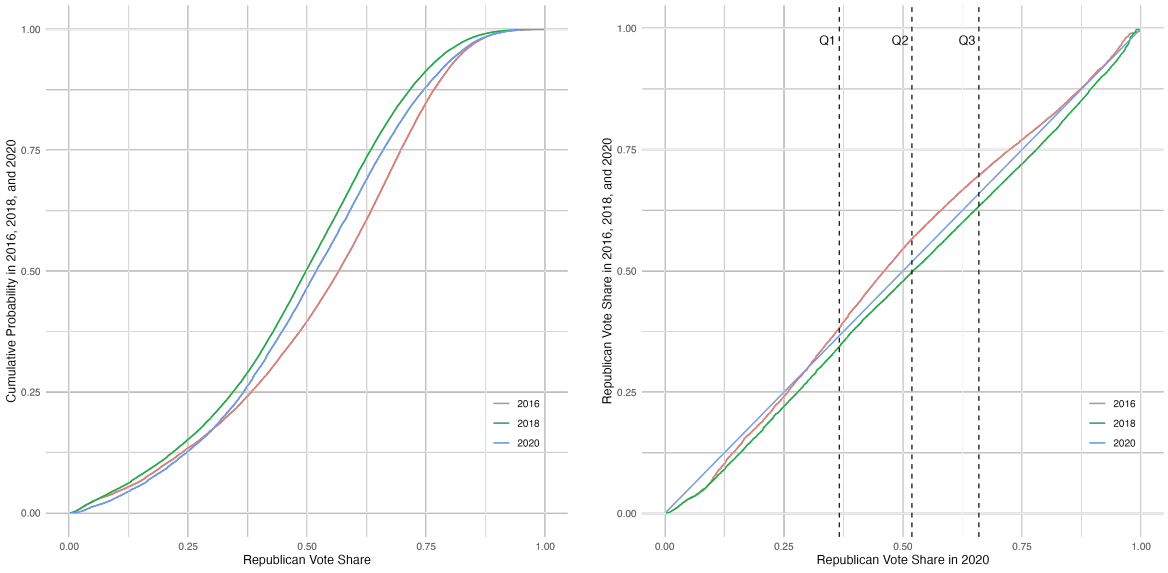
(a) 选区得票份额　　(b) 选区得票摆动

FIGURE 4. 投票区得票份额与选区得票摆动的分布

因此可以像我们的模型中那样，决定如何分配一个类型连续统。[36] 其次，与总体不确定性相比，特质不确定性似乎很大。为说明这一点，请注意，如果特质不确定性极大，图 4(a) 将显示在 $v = 1/2$处的退化分布；而如果总体不确定性极大，则会显示一个双峰分布，全部质量分别集中在 0 和 1。前一种情况是更好的近似，因为图 4(a) 中的实际分布是单峰的，74% 的质量位于 $v \in [.25, .75]$。虽然我们将在下一小节中对 γ 进行定量估计，但这一观察已经暗示了我们的发现：γ 远大于 1。

接下来，我们展示另一张直方图（图4(b)），它显示了在我们考察的三次选举中，选区层面的共和党得票率偏离其均值 x 时，各个（选区，选举）组合的数量，分组边界为 $\{-.25, -.225, \ldots, .225, .25\}$。[37]这张直方图以另一种方式表明总体冲击较小：

[36]实际上，最小的“可划分选区单元”不是投票区，而是人口普查区块，这是美国人口普查局汇总完整数据的最小地理单元。不过，投票区或人口普查区块中的选民人数大致相近（通常约为 1,000 人，但差异相当大），因此我们认为，假设设计者划分的是投票区而非人口普查区块，不会造成太大损失。[37]由于各次选举之间的投票区无法匹配，因此该直方图按选区层级编制。31



(a) 累积分布函数

(b) 归一化累积分布函数

FIGURE 5. 2016年、2018年和2020年的选区得票份额累积分布函数和归一化累积分布函数

注：左侧面板显示了2016年、2018年和2020年选区的得票率经验累积分布函数，记作 $J_t(v)$，其中 $t \in \{2016, 2018, 2020\}$。右侧面板显示了曲线 $J_{2016}^{-1}(J_{2020}(v))$、$J_{2018}^{-1}(J_{2020}(v))$ 和 $J_{2020}^{-1}(J_{2020}(v)) = v$，以及 $J_{2020}(v)$ 的第一、第二和第三分位数。

分布呈中心单峰形态，大部分质量（57%）位于 $x \in [-.025, .025]$。相比之下，如果总体冲击较大，我们将再次得到一个双峰分布，所有质量都远离0。

最后，我们考察每次选举中得票率的经验分布 v_{nt} 在各投票区之间 n（按每个投票区的投票数加权）t。这显示在图 5（a）中。每次选举的S形曲线再次表明，大多数投票区的得票率都相对接近 $1/2$。曲线的排序（除下文讨论的得票率最低的投票区外）反映了这样一个事实：在2016年、2018年和2020年这几次选举中，2018年是民主党表现最好的一年，2016年是共和党人表现最好的一年，而2020年居中。

我们可以利用这些曲线来评估我们的关键假设是否符合现实：温和派比极端派更容易转变立场（假设1）。图 5(b) 将图 5(a) 按2020年的经验得票份额分布进行归一化。因此，在图 5(b) 中，

蓝色曲线是 45° 直线；红色曲线表示对于给定2020年共和党得票率的选区而言，其2016年共和党得票率；绿色曲线则表示2018年的对应曲线。[38] 根据我们的假设——包括假设1——红色曲线应当是凹的，且处处位于蓝色曲线上方；绿色曲线应当是凸的，且处处位于蓝色曲线下方，而这些凹性/凸性特征反映了假设1。图5 显示，在我们的数据中，情况并非完全如此，因为对于最左侧的选区（少数选区，其位置远在得票份额分布的最低四分位数范围内，如图所示），绿色和红色曲线"过低"。我们认为，这种对假设1的小幅偏离，可能反映了共和党人在2020年于城市选区表现异常强劲，这在很大程度上是由于西班牙裔选票明显转向共和党人（例如，Igielnik、Keeter和Hartig 2021，Kolko和Monkovic 2021）。当然，这类人口群体特定冲击超出了我们的模型范围，但可在未来的研究中加以探讨。总体而言，我们认为图5 可以用我们的假设（包括假设1）与2020年城市地区意外转向共和党人这两方面的共同作用来解释。

5.3. **的估计值** γ。现在，在假设总体冲击和特质冲击均服从正态分布的条件下，我们估计关键参数 γ 。由于美国的选区划分方案是在州级制定的，我们分别针对每个美国州估计 γ。不失一般性，我们将偏好冲击分布的方差标准化为 1，因此$Q = \Phi$，即标准正态累积分布函数；总体冲击分布 G 则为以零为中心、标准差为 γ^{-1}的正态累积分布函数。回顾第4.3 节的理论和数值结果：当 $\gamma \leq 1$时，PMP 为最优；当 $\gamma \in (1,1.65)$时，Y型选区划分为最优；当 $\gamma \geq 1.65$时，POP 为最优。因此，一个值得关注的关键问题是，我们对 γ的估计值落在哪个区域。

我们使用矩估计法估计 γ。回顾一下，v_{nt} 是选区 n 在选举 t 中共和党所获两党选票的份额。令 $w_{nt} = \Phi^{-1}(v_{nt})$ 表示标准正态分布中相应的分位数。接下来，定义

$$w_t = \frac{\sum_n k_{nt} w_{nt}}{\sum_n k_{nt}} \quad \text{and} \quad w = \frac{\sum_t w_t}{T},$$

其中，求和符号 n 遍历给定状态中的所有投票区。因此，w_t 是该州各投票区 w_{nt} 的平均值，并按各投票区的投票数加权

[38]严格来说，由于我们无法匹配不同选举中的投票区，红色曲线表示：与具有给定2020年共和党得票率的投票区处于得票率分布相同分位数的投票区，其2016年共和党得票率；绿色曲线同理。

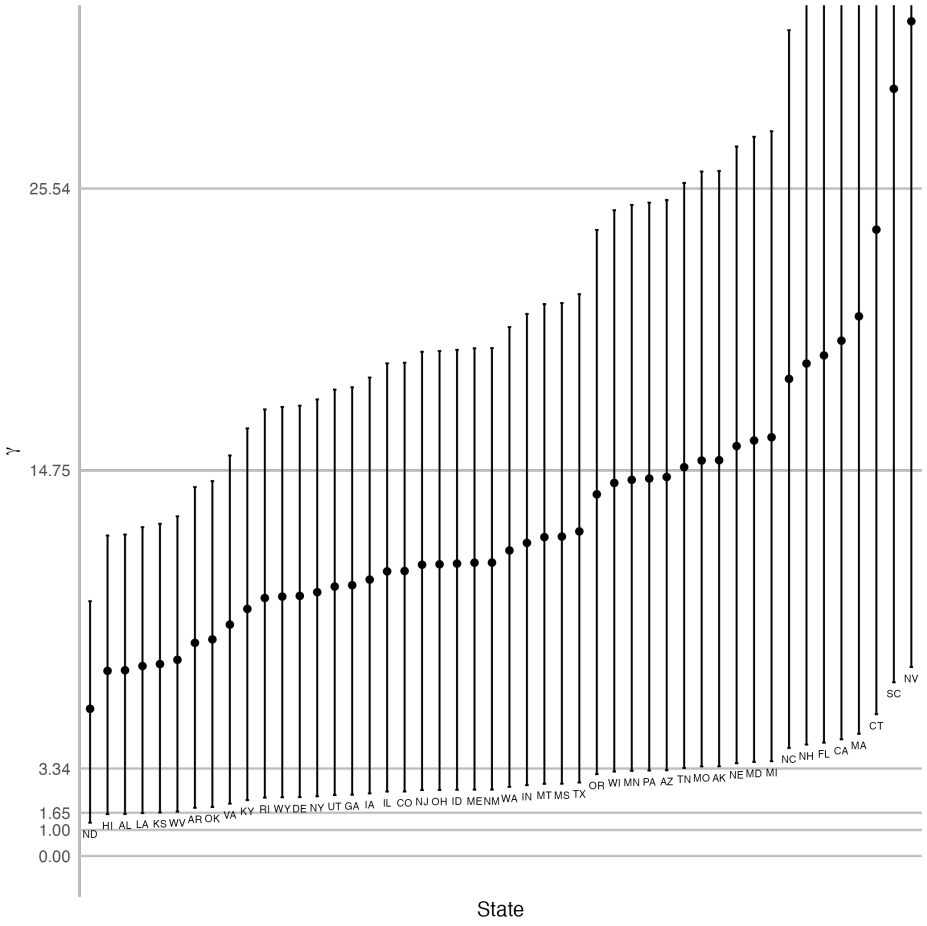


FIGURE 6. 按状态划分的 γ 点估计值和90%置信区间

注：对于 $\gamma \geq 1.65$，POP 是最优的。整个美国的 γ 点估计值和 90% 置信区间分别为 14.75 和 $[3.34,25.54]$。

选区；而 w 是 w_t 在各次选举 t中的平均值。由此很容易证明，γ 的无偏一致估计量为

$$\widehat{\gamma} = 1 \Big/ \sqrt{\frac{\sum_t (w_t - w)^2}{T-1}},$$

并且，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，γ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{T-1}(\alpha/2)}{T-1}}\widehat{\gamma} \leq \gamma \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{T-1}(1-\alpha/2)}{T-1}}\widehat{\gamma}.$$

图6展示了此次估计的结果。该图显示了每个州的 γ 90%置信区间。置信区间极宽，因为我们34

仅有三次选举的数据，即 $T = 3$。不过，很明显， γ的中心估计值，以及几乎所有州90%置信区间的下界，都远高于1.65这一临界值。任何州的 γ 最低估计值为5.63； γ 的平均估计值（按各州选区数量加权）为14.32，而当我们估计 γ 在美国整体范围内的值时，相应的估计值为14.75。这些估计值都远高于1.65这一临界值。此外，即使在$T = 3$的情况下，除北达科他州（下端点为1.28）、夏威夷州（1.6）、阿拉巴马州（1.61）和路易斯安那州（1.65）外，所有州90%置信区间的下端点都高于1.65。我们预计，如果将数据集扩展到纳入2012年和2014年选举的结果（从而涵盖在2010年选区划分方案下举行的全部五次国会选举），这些州的90%置信区间下端点也会超过1.65。[39] 因此，数据清楚地表明，在实际中， γ 远高于1.65，至少对绝大多数州如此，而且很可能对所有州都如此。结合第4.3节的结果，这有力地证明，对于现实参数，最优杰利蝾螈式划分由 POP 给出。[40]

我们对 γ 的估计非常高，以至于 POP 显然优于 PMP，是最优方案；而最优 POP 方案与 p隔离非常相似，且 p隔离和传统的打包与拆分式选区划分都近似最优。（回想图3，当 p时，POP 已经接近 $\gamma = 6$隔离。）这一结果可以解释，为何实际的选区操纵方案通常类似于 p隔离或传统的打包与拆分，而非 POP。

[39]2012年和2014年的选区层级的选举结果由Ansolabehere、Palmer和Lee（2014）汇编，但其完整性和标准化程度不如我们使用的Baltz等人（2022）的数据；后者仅涵盖2016年、2018年和2020年。[40]虽然这与确定最优选区划分的定性形式无关，但我们也可以估计 F 选民类型 s的分布。在国家层面，F 的均值估计值（计算为 w）非常接近0，而 F 的标准差估计值（计算为$\sqrt{\sum_{n、t} k_{nt}（w_{nt} - w_t）^2 / \sum_{n、t} k_{nt}）}$为0.63。这些数值与图3中的数值相似。不过需要注意的是，这些估计值可能因剔除无竞争选举而产生偏差（不同于我们对 γ的估计，在剔除任何一组选区后仍保持无偏）。我们还注意到，我们对 γ 的估计值与州级 F 的标准差之间的相关系数（按各州选区数量加权）很小（$-.28$），这与在固定Q 和 F 的情况下， $G（r）$中的 γ 发生变化一致，如图3所示。相比之下，对于另一种规范化方式，在固定 G和 F的情况下， $Q（t）：= G（t/\gamma）$，我们对 γ 的估计值与 F 的标准差之间的加权相关系数很大（.79）；这与在固定 G 和 F的情况下 γ 发生变化不一致。

6. Discussion: Why Does the Form of Gerrymandering Matter?

多年来，选区操纵一直是美国政治中的一大关切，并与若干重要的政治和法律问题相关。本节将简要讨论我们的结果对最优党派操纵选区划分形式可能产生的影响，尤其是选区操纵者究竟会选择最优地集中反对者还是温和派，以及这些结果对若干更广泛议题的意义。我们聚焦于两个方面：选区划分法规和限制如何影响党派代表性，以及选区划分操纵如何影响政治竞争和两极分化。

6.1. **选区划分限制对党派代表性的影响**。 美国州及联邦选举法长期以来一直认识到选区划分操纵可能带来的危害，因此通过各种方式对选区划分操纵加以限制。在联邦层面，关键法律包括《第十四修正案》的平等保护条款和《1965年投票权法》。这些法律不仅被解释为禁止不利的种族性选区划分操纵，而且被解释为明确要求各州划定选举区，使种族或族裔少数选民要么构成多数（即所谓的“少数族裔占多数选区”），要么构成足够大的少数群体，从而有较强机会选出其所选择的候选人；这一过程可能需要与部分多数选民结成联盟（通常称为“少数族裔机会选区”）（例如，Canon2022）。此类选区的设立在提升20世纪70年代以来州议会和美国国会中的黑人代表人数方面发挥了重要作用，尤其是在美国南部（Grofman和Handley 1991、Cox和Holden 2011）。然而，少数族裔占多数选区和少数族裔机会选区对总体党派 影响长期以来一直是激烈争论的问题。一些观察人士认为，这些选区实际上集中安置了坚定的民主党支持者，因此类似于共和党最优选区划分方案的一个组成部分。1994年共和党接管美国众议院后，这一问题达到高潮；许多记者和政治学家认为，1990年选区重划周期中少数族裔占多数选区的设立，是导致这一结果的部分原因。然而，其他观察人士对这一叙述提出了质疑（例如参见Cox和Holden 2011 及其中的参考文献、Cameron、Epstein和O’Halloran 1996、Washington2012）。

继 Cox和Holden (2011年)的研究之后，我们认为，要求设立多数族裔占多数选区或少数族裔机会选区，究竟可能增加还是减少共和党代表席位，很大程度上取决于最优党派操纵选区划分是集中反对者还是温和派。纵观

1990年代（Cox和Holden称之为“打包与拆分共识”）的传统观点认为，最优选区划分操纵会集中反对者，因此，要求设立多数族裔占多数选区、并将强大的民主党支持者集中其中，很可能会增加共和党代表席位。[41] 基于 Friedman 和 Holden (2008年)的分析，Cox和Holden (2011年)通过主张最优选区划分由PMP给出，对这一共识提出质疑；因此，PMP会集中温和派，而非反对者。由于PMP方案不会设立集中强大民主党支持者的选区，Cox和Holden认为，要求设立此类选区会排除PMP，因此可能减少共和党代表席位。

我们同意Cox和Holden 的观点，即最优选区划分是集中反对者还是温和派，可能是决定建立多数票—少数选区或少数族裔机会选区的要求会增加还是减少总体共和党代表席位的重要因素。然而，Cox和Holden关于PMP在实践中是最优方案的论点，隐含地假设了Friedman 和 Holden (2008年)所研究的低个体不确定性情形具有代表性。例如，Cox和Holden 写道：“然而，在选民类型多样的世界中，不存在任何可信的非裔美国选民分布，能够使共和党选区划分机构最优地建立非裔美国选民占绝对多数的选区。在该模型中，集中自己的反对者从来都不是最优策略”（第574页）。相反，我们的结果表明，从经验上看，特质不确定性远大于总体不确定性；在这种情况下，POP是最优的（传统的打包与拆分式选区划分也近似最优），因此，共和党人确实会从集中强势民主党选民中获益。因此，通过分析一个允许选民类型多样、但不限制特质不确定性与总体不确定性相对大小的一般模型，我们可以让数据决定实践中哪种选区划分方案是最优的；我们发现，在现实的参数下，POP是最优的。总体而言，我们的结果支持传统的“打包与拆分共识”——共和党人会从集中强势民主党选民中获益——而不是Cox和Holden基于在某些参数值下集中温和派具有最优性的质疑。

当然，即使 POP 是最优的，因此以共和党最优的方式集中实力雄厚的民主党选民有利于共和党人，但要求划分多数族裔选区或少数族裔机会选区，在实践中是否有利于共和党人，

[41]少数族裔机会选区是否会引发类似问题，取决于这些选区中坚定的民主党支持者所占比例（Lublin、Handley、Brunell 和 Grofman，2020年）。37

仍是一个实证问题。要求划分大量民主党多数票相对微弱的选区，显然可能损害共和党人的利益。此外，正如Shotts （2001）所强调的，任何选区划分约束都会在共和党人掌控选区划分的州对其造成一定程度的不利影响。总的来说，我们认为，了解党派最优的不受约束的选区划分形式，有助于评估对选区划分施加的限制（例如《投票权法》所规定的限制）可能产生的影响，但这应作为实证分析的补充，而非替代。

6.2. **选区划分操纵对政治竞争和两极分化的影响**。
另一个争论领域涉及选区划分操纵对选举竞争强度（例如，“竞争性”选区的比例或现任优势的程度）以及政治极化的影响。大众舆论常将竞争减少、两极分化加剧归咎于选区划分操纵。尽管学术文献普遍对选区划分操纵在解释竞争和两极分化的整体长期趋势方面发挥重大作用这一说法持怀疑态度（例如，Gelman 和 King（1994a）、Abramowitz、Alexander 和 Gunning（2006）、McCarty、Poole 和 Rosenthal（2009）、Friedman 和 Holden（2009）），仍有一些研究发现了此类影响（例如，Cottrell（2019）、Kenny、McCartan、Simko、Kuriwaki 和 Imai（2022）），这一问题仍存在争议。

无论选区划分操纵对竞争和两极分化的整体影响如何，这些影响的性质很可能取决于选区划分操纵的形式。粗略地说，在右翼设计者的操纵下，POP（以及 p-隔离和传统打包与拆分）会形成少数几个强烈左倾的选区和许多略微右倾的选区，左倾选区与右倾选区之间存在一个“间隙”。形式上，在 POP 下，选民类型隔离区间内某个选区 $r^*(P$的 P 最高值，总是低于配对选民类型区间内某个选区 $r^*(P$的最低值（例如，见图3中的最后三个面板）。POP 也使各选区内的极化程度相对较低，因为拆分选区中选民类型最低的人是“温和派”，而不是极左翼人士。相比之下，PMP 会形成一系列从左倾到右倾的选区——形式上，对于某些 $\{r$ ，集合 $r = r^*(P)$ 是一个区间（例如，见图3中的前三个面板）——且与 POP 相比，左倾选区的倾向性没那么极端。PMP 下的选区内极化程度也高于 POP，至少就以下意义而言：在 PMP 下被归为同一选区的选民类型，其最大跨度

大于 POP 下的跨度（因为在 PMP 下，这一跨度达到可能的最大值，而在 POP 下则严格小于最大值）。

我们的模型并未涵盖任何针对选区划分的内生政治反应，例如选区划分对哪些政治人物竞选公职以及他们所采取的平台立场的影响。考虑到这一点，我们可以对上述 POP（或 p分散—隔离或传统打包与拆分）和 PMP 的特征对于政治竞 $r^*(P$争与两极分化的影响提出一些初步推论。首先，阈值冲击 $r^*(P)$ 的分布在 POP 下存在间隔、而在 PMP 下不存在，这表明打包与拆分方案可能导致立法机构更加两极分化：集中选区会选出左翼代表，而拆分选区会选出倾向右翼的代表。以这种方式集中反对者可能加剧两极分化，这一可能性长期以来一直是政治和法律领域所关注的问题（例如，见 Cox和Holden 2011，第 595 页）。Coate和Knight(2007)、Besley和Preston (2007) 以及Bracco (2013) 构建了具有这一特征的模型。相比之下，PMP 可能导致两极分化程度较低的立法机构。其次，POP 可能导致更多“缺乏竞争的”、极左选区。通常，人们认为创建缺乏竞争的选区是选区划分方案中不利于社会的特征，但 Buchler(2005) 和 Brunell (2008) 持有相反观点。最后，如果选民能够从与其代表在意识形态上更为接近中获益，如 Besley和Preston(2007) 以及Gomberg、Pancs和Sharma(2023) 所述，那么 POP 下较低的选区内部两极分化可能具有社会有益性。最优选区划分对政治过程和结果的这些影响，以及其他影响，都可以在一个将选区划分之外政治竞争的其他方面内生化的模型中得到更全面的研究。这是未来研究的一个有前景方向。

7. Conclusion

本文构建了一个简单而一般的最优党派选区划分操纵模型。我们的核心观点包含四个方面。第一，打包与配对式选区划分——即对传统打包与拆分式选区划分的推广——通常是选区操纵者的最优选择。第二，打包与配对的最优形式取决于选区操纵者面临的总体不确定性和特质不确定性的相对大小：特质不确定性占主导时，打包反对方选民；总体不确定性占主导时，则打包温和派选民。第三，从实证来看，实践中特质不确定性占主导，因此我们预计打包反对派并配对（POP）式选区划分是最优的。这一发现还表明，未来关于选区划分操纵（以及更广泛意义上的选举竞争）的研究，其相关参数范围应为特质不确定性远大于总体不确定性的情形。

第四，估计得出的特质不确定性非常大，以至于最优POP方案与一种更简单的打包对手并集中方案十分相似：在该方案中，有利选民被全部集中在一起，而非像POP方案那样配对；此外，传统的打包与拆分式选区划分也近似最优，因为在这种方案中，较不有利的选民同样被全部集中在一起，而不是彼此分开。这一最后的观察可以解释，为何实践中会采用传统的打包与拆分式选区划分方案。

在方法论上，我们建立并利用了选区划分操纵与信息设计之间的紧密联系。我们证明，一般的党派操纵选区划分模型等价于一个一般的贝叶斯说服问题，其中世界状态和接收者行动都是一维的，且发送者偏好不随状态变化。这个共同框架涵盖了Owen and Grofman (1988)、 Friedman 和 Holden (2008年) 和 Gul 和 Pesendorfer(2010的重要早期研究，并使我们能够开展更一般且更贴近现实的分析，同时纳入多样的选民类型和非线性的得票率摆动，而不必限制总体不确定性与特质不确定性的相对大小。

我们希望我们的模型能够为选区重划各个方面的未来研究提供参考。我们提出几个未来研究方向。

首先，我们假设设计者最大化其政党的预期席位份额。假设设计者的效用关于其政党的席位份额是非线性的，或许更符合现实，例如，他可能特别看重赢得多数席位。我们在本论文的早期版本中考察了这种情况（Kolotilin and Wolitzky，2020年）。尽管非线性的设计者效用带来了一些新的复杂性，但它也强化了本文的核心观点：如果设计者的效用关于其政党的席位份额呈S形（例如，他特别看重赢得多数席位），那么即使在存在均匀总体冲击的线性摆动情形下，对手打包与汇集仍是严格最优的（而在这种情形下，具有线性效用的设计者对所有选区划分方案都无差异）。

其次，我们假设所有选民始终投票，或者至少投票率始终相同（两者等价）。若能将异质性投票率纳入分析，将会很有意思。Bouton、Genicot、Castanheira 和 Stashko 的一项最新研究Bouton, Genicot, Castanheira, andStashko（2023年）考察了具有二元党派类型的选民（如 Owen andGrofman 1988）

以及连续的“投票率类型”，用于刻画选民之间固定的投票率异质性。另一种刻画可变投票率异质性的模型，则可以保留一维选民类型，但假设选民在对政党几乎无差别时会弃权。比较这些模型将会很有意思，因为在实践中，投票率异质性既有固定来源（例如教育、种族），也有可变来源（例如，几乎无差别的选民投票较少）。

第三，我们的分析得出一个稳健的预测：在更有利于设计者所属政党的选区中，选区内极化程度应更高。对此预测进行实证检验将很有意义。

后续问题包括：该模型对政治竞争及由此产生的政策选择有何启示？模型的比较静态结论是什么——例如，哪些因素决定了集中选区和拆分选区的比例？[42] 该模型对选区划分操纵应如何测度和规制有何启示？更好地理解最优党派操纵选区划分的形式，有助于研究这些问题及相关问题。

References

Abramowitz, A. I., B. Alexander, and M. Gunning(2006年)：“现任优势、选区重划与美国众议院选举中竞争的衰退”，《政治学杂志》，68，75–88。Ansolabehere, S., M. Palmer, and A. Lee (2014)：“选区级选举数据”，哈佛*Dataverse*。Bagnoli, M., and T. Bergstrom (2005年)：“对数凹概率及其应用”，《经济理论》，26(2)，445–469。Baltz, S., et al. (2022)：“美国选区级选举结果”，《科学数据》，9(651)。Besley, T., and I. Preston (2007)：“选举偏差与政策选择：理论与证据”，《经济学季刊》，122，1473–1510。Bickerstaff, S.(2020年)：《全球选区划分操纵》。施普林格。Blackwell, D. (1953)：“实验的等价比较”，《数学统计年鉴》，24，265–272。Bouton, L., G. Genicot, M. Castanheira, and A. Stashko(2023年)：“当投票率存在差异时的选区划分操纵”，乔治城大学。Bracco, E.(2013年)：“具有内生政党纲领的最优选区划分”，《公共经济学杂志》，104，1–13。Brunell, T.(2008年)：《重新划分选区与代表制：为什么竞争性选举不利于美国》。劳特里奇。

[42] Kolotilinand Wolitzky(2020年）分析了二元选民类型下的比较静态。41

Buchler, J. (2005年): “竞争、代表与选区重划：反对竞争性国会选区的理由”, 《理论政治学杂志》, 17, 431–463。Calvert, R. L.(1985): “多维投票模型的稳健性：候选人动机、不确定性与趋同”, 《美国政治学杂志》, 29(1), 69–95。Cameron, C., D. Epstein, and S. O'Halloran (1996): “少数族裔占多数选区能否最大化国会中的实质性黑人代表？”, 《美国政治学评论》, 90, 794–812。Canon, D. (2022): “种族与选区重划”, 《政治学年度评论》, 25, 509–528。Chambers, C. P., and A. D. Miller (2010): “怪异度测量”, 《政治学季刊》, 5, 27–44。Coate, S., and B. Knight (2007): “社会最优选区划分：理论与实证探索”, 《经济学季刊》, 122, 1409–1471。Cottrell, D. (2019): “利用计算机模拟测量选区划分操纵对美国国会选举竞争的影响”, 《立法研究季刊》, 44, 487–514。Cox, A. B., and R. R. Holden (2011): “重新思考种族与党派选区划分操纵”, 《芝加哥大学法律评论》, 78, 553–604。Duchin, M. (2018): “杰利蝾螈式划分指标：如何测量？基准是什么？”, 塔夫茨大学。Dworczak, P., and G. Martini(2019): “最优劝服的简单经济学”, 《政治经济学杂志》, 127(5), 1993–2048。Ely, J. (2022): “选区划分操纵的切蛋糕解法”, 西北大学。Friedman, J. N., and R. Holden (2009): “现任者连任率上升：这与选区划分操纵有什么关系？”, 《政治学杂志》, 第593–611页。（2020年）: “竞争环境中的最优选区划分操纵”, 《经济理论通报》, 第1–21页。Friedman, J. N., and R. T. Holden (2008): “最优选区划分操纵：有时集中，但绝不分散”, 《美国经济评论》, 98(1), 113–44。Fryer, R. G., and R. Holden (2011): “政治选区划分方案的紧凑度测量”, 《法律与经济学杂志》, 54, 493–535。Gelman, A., and G. King (1994a): “通过立法选区重划促进民主”, 《美国政治学评论》, 88, 541–559。（1994b）: “评估选举制度与选区重划方案的统一方法”, 《美国政治学杂志》, 38, 514–554。Gentzkow, M., and E. Kamenica (2016): “贝叶斯说服的罗斯柴尔德-斯蒂格利茨方法”, 《美国经济评论》论文与会议录, 106, 597–601。Gilligan, T. W., and J. G. Matsusaka (2006): “选区重划的公共选择原则”, 《公共选择》, 129, 381–398。

Gomberg, A., R. Pancs, and T. Sharma(2023)：《选举选区划分》，《国际经济评论》，即将出版。Grofman, B., and L. Handley (1991)：《〈投票权法〉对南方州议会黑人代表权的影响》，《立法研究季刊》，16，111–128。Grofman, B., and G. King (2007)：《LULAC诉Perry案后，党派对称性作为党派操纵选区划分司法检验标准的未来》，《选举法期刊》，6，2–35。Gul, F., and W. Pesendorfer (2010)：《策略性选区重划》，《美国经济评论》，100(4)，1616–1141。Hayes, D., and S. C. McKee(2009)：《选区重划的参与效应》，《美国政治学杂志》，53，1006–1023。Hinich, M. J. (1977)：《空间投票中的均衡：中间选民结果是人为产物》，《经济理论杂志》，16(2)，208–219。Igielnik, R., S. Keeter, and H. Hartig(2021)：《拜登2020年胜选背后》，皮尤研究中心。Jeong, D., and A. Shenoy (2022)：《党派操纵选区划分的目标与影响：来自立法不连续性的证据》，《经济学与统计学评论》，即将出版。Kamenica, E., and M. Gentzkow (2011)：《贝叶斯说服》，《美国经济评论》，101，2590–2615。Katz, J., G. King, and E. Rosenblatt (2020)：《以选区为基础的民主制度中党派公平性的理论基础与实证评估》，《美国政治学评论》，114，164–178。Kenny, C., C. McCartan, T. Simko, S. Kuriwaki, and K. Imai(2022)：《广泛存在的党派操纵选区划分在全国范围内大多相互抵消，却降低了选举竞争》，哈佛大学。Kleiner, A., B. Moldovanu, and P. Strack (2021)：《极值点与主序：经济学应用》，《计量经济学》，89(4)，1557–1593。Kolko, J., and T. Monkovic(2021)：《转向支持或反对特朗普的变化幅度最大的地区》，《纽约时报》，https://www.nytimes.com/2020/12/07/upshot/trump-election-vote-shift。Kolotilin, A.(2015)：《说服实验设计》，《博弈与经济行为》，90，215–226。(2018)：《最优信息披露：线性规划方法》，《理论经济学》，13，607–636。Kolotilin, A., R. Corrao, and A. Wolitzky (2023)：《非线性偏好下的说服》，麻省理工学院。Kolotilin, A., T. Mylovanov, and A. Zapechelnyuk(2022)：《作为最优说服的审查》，《理论经济学》，17(2)，561–585。Kolotilin, A., T. Mylovanov, A. Zapechelnyuk, and M. Li(2017)：《对拥有私人信息的接收者进行说服》，《计量经济学》，85，1949–1964。Kolotilin, A., and A. Wolitzky (2020)：《党派操纵选区划分的经济学》，麻省理工学院。

Lagarde, A., and T. Tomala (2021)：《党派操纵选区划分的最优性与公平性》，《数学规划》，第1–37页。Lindbeck, A., and J. Weibull (1993)：《代议制民主中的政治均衡模型》，《公共经济学杂志》，51，195–209。Lublin, D., L. Handley, T. Brunell, and B. Grofman(2020)：《非多数族裔少数群体选区中的少数群体成功：寻找"最佳点"》，《种族、族裔与政治》，5，275–298。McCarty, N., K. T. Poole, and H. Rosenthal(2009)：《选区划分操纵会导致两极分化吗？》，《美国政治学杂志》，53，666–680。McGann, A. J., C. A. Smith, M. Latner, and A. Keena(2016)：《美国的选区划分操纵：众议院、最高法院与人民主权的未来》。剑桥大学出版社。McGhee, E. (2014)：《衡量单一选区选举制度中的党派偏差》，《立法研究季刊》，39(1)，55–85。(2020)：《党派操纵选区划分与政治学》，《政治学年度评论》，23，171–185。Newkirk, V. R. (2017)：《选区重划如何演变为一场技术军备竞赛》，《大西洋月刊》，10月28日。Owen, G., and B. Grofman (1988)：《最优党派选区划分》，《政治地理学季刊》，7(1)，5–22。Puppe, C., and A. Tasnádi (2009)：《地理约束下的最优选区重划：为何"集中与分散"行不通》，《经济学快报》，105，93–96。Rakich, N., and E. Mejia (2022)：《选区重划让民主党失去了众议院吗？》，
https://fivethirtyeight.com/features/redistricting-house-2022/。Rakich, N., and N. Silver (2018)：《选举动态：弹性最大（和最小）的州与选区》，
https://fivethirtyeight.com/features/election-update-the-house-districts-that-swing-the-most-and-least-with-the-national

Sherstyuk, K. (1998)："如何操纵选区划分：形式分析"，《公共选择》，95，27–49。Shotts, K. W. (2001)："多数族裔—少数族裔选区规定对党派操纵选区划分的影响"，《美国政治科学杂志》，第120–135页。（2002）："选区划分操纵、立法机构构成与国家政策结果"，《美国政治科学杂志》，第398–414页。Stephanopoulos, N. O., and E. M. McGhee (2015)："党派操纵选区划分与效率差距"，《芝加哥大学法律评论》，82，831–900。Washington, E. (2012)："黑人占多数的选区会限制黑人代表吗？1990年选区重划案例"，《法律与经济学杂志》，55，251–274。Wittman, D.(1983)："候选人动机：替代理论综述"，《美国政治科学评论》，77(1)，142–157。Yang, K. H., and A. Zentefis (2023)："一阶随机占优区间的极值点：理论与应用"，耶鲁大学。

Appendix: Proofs

鉴于我们的模型与第2节所述的一类贝叶斯说服问题等价，命题1、2、4和6可由劝说文献中的既有结果推出。对于这些结果，为求完整，我们既提供相关文献的出处，也给出（大体上）自成一体的证明。相比之下，命题3、5和7–11 对于劝说和选区划分操纵两方面的文献而言都是新的。我们将完整证明这些结果。

Appendix A. Proofs for Section 3

命题 *1*的证明。 这一结果是标准的（例如，参见 Owen 和 Grof- man 1988中的图1）。情形（1）是显然的，因为如果设计者创建了测度为1的选区，使其满足 $\Pr_P(s \geq r^0) \geq 1/2$，则设计者赢得所有选区；否则会输掉具有正测度的选区。对于情形（2），注意到由于设计者赢得一个选区 P 当且仅当 $\Pr_P(s \geq r^0) \geq 1/2$，因此，一个选区划分方案可以由关于 H 的分布 $x = \Pr_P(s \geq r^0)$ H 来描述。设计者对任意可行的 H 的效用为

$$\int \mathbf{1}\left\{x \geq \tfrac{1}{2}\right\} dH(x) \leq \int 2x dH(x) = 2m, \tag{4}$$

其中，不等式成立是因为对于所有 $x \in [0,1]$，$\mathbf{1}\{x \geq 1/2\} \leq 2x$；等式成立是因为根据迭代期望定律，对于任意可行的 H，$\int x dH(x) = m$。因此，任何创建测度为 $2m$ 的拆分选区，且满足 $\Pr_P(s \geq r^0) = 1/2$，以及测度为 $1 - 2m$ 的集中选区，且满足 $\Pr_P(s < r^0) = 1$ 的方案，都是最优的。此外，任何其他方案都会产生正测度的选区，使得 $\Pr_P(s \geq r^0) \notin \{0, 1/2\}$（即 $\text{supp}(H) \not\subseteq \{0, 1/2\}$），因此，式（4）中的不等式是严格的，因为 $\mathbf{1}\{x \geq 1/2\} = 2x$ 当且仅当 $x \in \{0, 1/2\}$。所以，任何此类方案都是次优的。□

命题2的证明。该命题可由 Kolotilin（2015）中引理1和引理C1的证明推出。情形（1）显然成立：如果设计者创建满足 $\int v(s, r^0) dP(s) \geq 1/2$ 的选区，其测度为1，那么他将赢得所有选区；否则，他会输掉正测度的选区。对于情形（2），注意到由于 $v(s, r^0)$ 关于 s可微且严格递增，我们可以将 s 重新定义为 $v(s, r^0)$，使重新定义后的 s在 $[s, \bar{s}]$上具有全支撑密度，且 $0 \leq s < \bar{s} \leq 1$。假设 $s > 1/2$，否则结果显然成立。由于 $\mathbb{E}_F[s] < 1/2$，存在唯一的 $s^* \in (s, \bar{s})$

满足 $\mathbb{E}_F[s|s \geq s^*] = 1/2$。定义

$$\overline{U}(x) = \begin{cases} 0, & x < s^*, \\ \frac{x-s^*}{1-2s^*}, & x \geq s^*. \end{cases}$$

由于设计者在 P iff $\mathbb{E}_P[s] \geq 1/2$ 时赢得一个选区，因此其在一个方案 $\mathcal{H}$ 下的预期席位份额为

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}\left\{\mathbb{E}_P[s] \geq \tfrac{1}{2}\right\} d\mathcal{H}(P) &\leq \int \overline{U}(\mathbb{E}_P[s]) d\mathcal{H}(P) \leq \iint \overline{U}(s) dP(s) d\mathcal{H}(P) \\ &= \int \overline{U}(s) dF(s) = \int_{s^*}^{\overline{s}} \frac{s-s^*}{1-2s^*} dF(s) = 1 - F(s^*), \end{aligned} \tag{5}$$

其中，第一个不等式成立是因为对于所有 x， $\mathbf{1}\{x \geq 1/2\} \leq U(x)$；第二个不等式成立是因为 U是凸的;¯第一个等式成立是因为 $\int P dH(P) = F$；最后一个等式成立是因为 $\mathbb{E}_F[s|s \geq s^*] = 1/2$。因此，一个方案 $\mathcal{H}$ 是最优的，当且仅当对于所有 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，我们有：(i) $\mathbb{E}_P[s] \leq s^*$ 或 $\mathbb{E}_P[s] = 1/2$ （否则，(5) 中的第一个不等式是严格的）；以及 (ii) 当 $\mathbb{E}_P[s] < s^*$时，$\text{supp}(P) \subset [s, s^*]$，当 $\mathbb{E}_P[s] = 1/2$¯时，$\text{supp}(P) \subset [s^*, s]$（否则，(5) 中的第二个不等式是严格的）。这意味着， $\mathcal{H}$包含测度为 $F(s^*)$ 的选区 P，其中 $\Pr_P(s < s^*) = 1$；还包含测度为 $1 - F(s^*)$ 的选区 P，其中 $\Pr_P(s \geq s^*) = 1$，并且 $\mathbb{E}_P[s] = 1/2$. □

命题3的证明。对于选区划分方案 $\mathcal{H}$，定义 H as $H(r) = \Pr_{\mathcal{H}}(r^*(P) \leq r)$，对所有 r 均成立。因此，当实现的总体冲击为 r 时，设计者赢得的选区测度为 $1 - H(r_-)$。对于每个实现值 r，当且仅当某选区包含的类型为 $s \geq r$ 的选民测度至少为 $1/2$ 时，设计者才能赢得该选区 P （即 $\Pr_P(s \geq r) \geq 1/2$）。由于类型为 $s \geq r$ 的选民在人口中的测度为 $1 - F(r)$，设计者至多赢得测度为 $2(1 - F(r))$ 的选区，因此 $1 - H(r_-) \leq 2(1 - F(r))$。由于设计者至多能赢得测度为 1 的选区，任何可行的 H 均满足 $H(r_-) \geq H^*(r)$，其中

$$H^*(r) = \begin{cases} 0, & \text{if } r \leq s^m, \\ 1 - 2(1 - F(r)), & \text{if } r > s^m. \end{cases}$$

因此，对于任何可行的 H ，设计者的预期席位份额为

$$\int (1 - H(r_-))\, dG(r) \leq \int (1 - H^*(r))\, dG(r),$$

若严格不等式成立，则 $H(r_-) > H^*(r)$ 对某个 r 成立（因此在某个区间 (r, r') 上成立，其中 $r' > r$，由 H^* 的连续性以及 H的单调性可知），因为 $G(r)$ 是严格

随 r 增加。因此，当且仅当选区划分方案 $\mathcal{H}$ 诱导出 H^*时，该方案是最优的；这意味着 $\mathcal{H}$–几乎每个选区 P 都满足：设计者当且仅当总体冲击不超过 r 时赢得该选区，且 $\mathbf{Pr}_P(s=r) = \mathbf{Pr}_P(s<s^m) = 1/2$。□

命题的证明 4。 该命题由 Kolotilin、Mylovanov 和 Zapechelnyuk (2022中的定理1推出。证明与命题2的证明类似。最有趣的情况是存在一个内部临界值 s^* 和合并均值 $x^* = \mathbb{E}_F[s \geq s^*]$满足 $u(x^*)(x^* - s^*) = U(x^*) - U(s^*)$。如图 2所示，这样的 s^* 是唯一的。定义

$$\overline{U}(x) = \begin{cases} U(x), & x < s^*, \\ U(x^*) + u(x^*)(x - x^*), & x \geq s^*. \end{cases}$$

设计者在方案 $\mathcal{H}$ 下的预期席位份额是

$$\begin{aligned} \int U(\mathbb{E}_P[s])d\mathcal{H}(P) &\leq \int \overline{U}(\mathbb{E}_P[s])d\mathcal{H}(P) \leq \iint \overline{U}(s)dP(s)d\mathcal{H}(P) \\ &= \int \overline{U}(s)dF(s) = \int_0^{s^*} U(x)dF(x) + U(x^*)(1 - F(s^*)), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，第一个不等式根据 $U \leq U$ 成立，第二个不等式根据 U 的凸性成立，第一个等式根据 $\int PdH(P) = F$ 成立，第二个等式根据 s^*、x^* 和 U 的定义成立。因此，方案 $\mathcal{H}$ 是最优的，当且仅当对于所有 $P \in \mathrm{supp}(\mathcal{H})$，我们有：(i) $\mathbb{E}_P[s] \leq s^*$ 或 $\mathbb{E}_P[s] = x^*$（否则（6）中的第一个不等式是严格不等式），以及 (ii)$P = \delta_{\mathbb{E}_P[s]}$ 如果 $\mathbb{E}_P[s] < s^*$ 且 $\mathrm{supp}(P) \subset [s^*, s]$ 如果 $\mathbb{E}_P[s] = x^*$ （否则（ 6 ）中的第二个不等式是严格不等式）。这意味着，由临界值为 s^* 的对手打包并合并选区划分所诱导的选区均值分布是唯一最优的。□

Appendix B. Proofs for Section 4

我们先提出一个引理，概括Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky (2023年）的一些关键结果。

引理 1. 存在一个有界可测函数 $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对于任意最优选区划分方案 $\mathcal{H}$，以下结论均成立：

(1) 对于所有 P、$P' \in \mathrm{supp}(\mathcal{H})$ 以及所有 $s \in \mathrm{supp}(P)$，都有

$$G(r^*(P)) + \lambda(r^*(P))\left(v(s, r^*(P)) - \tfrac{1}{2}\right) \geq G(r^*(P')) + \lambda(r^*(P'))\left(v(s, r^*(P')) - \tfrac{1}{2}\right).$$

(2) 对于所有 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，都有

$$\lambda(r^*(P)) = -\frac{g(r^*(P))}{\int \frac{\partial v(s,r^*(P))}{\partial r} dP(s)}.$$

(3) 对于任意非退化的 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，$\lambda$ 在 $r^*(P)$处存在导数 $\lambda'(r^*(P))$，且对所有 $s \in \text{supp}(P)$均满足，

$$g(r^*(P)) + \lambda(r^*(P))\frac{\partial v(s, r^*(P))}{\partial r} + \lambda'(r^*(P))\left(v(s, r^*(P)) - \tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

直观地说，$\lambda(r^*(P))$ 是约束 $\int v(s, r^*(P))dP = \frac{1}{2}$ 的乘数。引理的第 2 部分指出，$\lambda(r^*(P))$ 等于设计者提高 $r^*(P)$ 的边际效用（即 $g(r^*(P))$）与放宽约束 $\int v(s, r^*(P))dP = \frac{1}{2}$时 $r^*(P)$ 的增速（根据隐函数定理，该速率等于 $-1/\int \frac{\partial v}{\partial r}(s,r^*(P))\, dP(s)$）的乘积。引理的第 1 部分指出，设计者将一名类型为 s 的选民分配到选区 P，以使 $G(r^*(P)) + \lambda(r^*(P))\left(v(s, r^*(P)) - \frac{1}{2}\right)$最大化。第 3 部分指出，对于所有非退化的 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$ 和所有 $s \in \text{supp}(P)$，该最大化问题关于 r 的一阶条件均成立。

证明。任何选区划分方案 $\mathcal{H}$ 都会诱导出选民类型 s 与阈值总冲击 r 的联合分布 $\pi_{\mathcal{H}}$，在低于该阈值时，设计者会赢得一个包含选民类型 s的选区。具体而言，记 $r = r^*(\delta_s)$ 和 $r = r^*(\delta_s)$，则 $\mathcal{H}$ 诱导出的分布 $\pi_{\mathcal{H}}$ 为

$$\pi_{\mathcal{H}}(S, R) := \int_{P: r^*(P) \in R} P(S) d\mathcal{H}(P) \quad \text{for all measurable } S \subset [\underline{s}, \overline{s}] \text{ and } R \subset [\underline{r}, \overline{r}].$$

《Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky（2023年）的附录B构造了一个适当的有界可测函数 $\lambda: [r, r] \to \mathbb{R}$，并将集合 Γ 定义为

$$\Gamma := \{(s, r) \in [\underline{s}, \overline{s}] \times [\underline{r}, \overline{r}] : \sup_{\tilde{r} \in [\underline{r}, \overline{r}]} \{G(\tilde{r}) + \lambda(\tilde{r})\left(v(s, \tilde{r}) - \tfrac{1}{2}\right)\} = G(r) + \lambda(r)\left(v(s, r) - \tfrac{1}{2}\right)\}.$$

此外，他们定义

$$R_\Gamma := \{r \in [\underline{r}, \overline{r}] : (s, r) \in \Gamma \quad \text{for some } s \in [\underline{s}, \overline{s}]\},$$
$$\Gamma_r := \{s \in [\underline{s}, \overline{s}] : (s, r) \in \Gamma\} \quad \text{for all } r \in [\underline{r}, \overline{r}].$$

他们的定理 7 的第 1 部分表明，集合 Γ 是紧致的，并且满足

$$\min \Gamma_r \le s^*(r) \le \max \Gamma_r \quad \text{for all } r \in R_\Gamma, \tag{7}$$

其中，$s^*(r)$ 由 $v(s^*(r), r) = 1/2$ 定义。此外，同一结果还表明

$$\text{supp}(\pi_{\mathcal{H}}) \subset \Gamma \quad \text{for each optimal } \mathcal{H}. \tag{8}$$

此外，Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky 定义集合 $\Gamma^* \subset \Gamma$ 使得

$$\Gamma_r^* = \begin{cases} \{s^*(r)\}, & r \in R_\Gamma \text{ and } s^*(r) \in \{\min \Gamma_r, \max \Gamma_r\}, \\ \Gamma_r, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \text{for all } r \in [\underline{r}, \overline{r}].$$

他们的定理 7 的第 2 部分表明，如果 $\Gamma_r^* = \{s^*(r)\}$，那么

$$g(r) + \lambda(r)\frac{\partial v(s^*(r), r)}{\partial r} = 0, \tag{9}$$

并且如果 $\min \Gamma_r^* < s^*(r) < \max \Gamma_r^*$，那么 λ 在 r 处有导数 $\lambda'(r)$，满足对于所有 $s \in \Gamma_r^*$，

$$g(r) + \lambda(r)\frac{\partial v(s, r)}{\partial r} + \lambda'(r)\left(v(s, r) - \tfrac{1}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

现在，考虑任意一个最优 $\mathcal{H}$。根据 (8)，对于所有 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，我们有 $\text{supp}(P) \subset \Gamma_{r^*(P)}$。根据 $r^*(P)$ 的定义，我们有 $\int v(s, r^*(P))dP(s) = 1/2$，因此要么 $\text{supp}(P) = \{s^*(r^*(P))\}$，要么 $\min \text{supp}(P) < s^*(r^*(P)) < \max \text{supp}(P)$。在这两种情况下，根据 (7) 和 $\Gamma_{r^*(P)}^*$ 的定义，我们都有 $\text{supp}(P) \subset \Gamma_{r^*(P)}^*$。因此，根据 Γ 的定义，引理的第 1 部分得证。进而，当 P 退化时，第 2 部分由 (9) 得证；当 P 非退化时，第 2 部分由对 P 积分 (10) 得证。最后，第 3 部分由 (10) 得证。□

命题 *5* 的证明。第 *1* 部分由（1）和 $v(s, r) = Q(s - r)$ 得出。对于第 2 部分，注意到（1）等价于

$$\frac{\partial^3 v(s, r)}{\partial s^2 \partial r}\frac{\partial v(s, r)}{\partial s} > \frac{\partial^2 v(s, r)}{\partial s \partial r}\frac{\partial^2 v(s, r)}{\partial s^2} \quad \text{for all } s, r.$$

因此，令下标表示偏导数，$v_{sr}(s, r) = 0$ 意味着 $v_{ssr}(s, r) > 0$，所以 $v_{sr}(s, r) = 0$ 意味着 $v_{sr}(s', r) > 0$ 对所有 $s' > s$都成立，这表明 $v_{sr}(s, r)$ 在 s 上满足严格单交叉，因此 $v_r(s, r)$ 在 s 上是严格拟凸的。□

命题 *6* 的证明。对于状态无关发送者情形，该命题由Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky（2023年）中的定理 3 推出，其中 $V(a, \theta) = V(a)$。我们在 $\text{supp}(F)$ 和 $\text{supp}(\mathcal{H})$ 为有限集的情形下说明证明过程。一般49

证明过程的逻辑相同，但涉及额外的技术细节，可使用引理 1 进行处理。证明建立在两个引理之上。

引理 2. 对于任意最优的 $\mathcal{H}$ （具有有限支撑），不存在 $P, P' \in \text{supp}(\mathcal{H})$使得 P包含类型 $s < s''$， P' 包含类型 $s' \in (s, s'')$，且 $r^*(P) < r^*(P')$。

证明。反设存在这样的选区 P和 P'，并记 $r^*(P) = r$ 以及 $r^*(P') = r'$，其中 $r < r'$。考虑这样一种扰动：将类型-s 选民的质量 $\rho = (v(s'', r) - v(s', r))\varepsilon$ 以及类型-s'' 选民的质量 $\rho'' = (v(s', r) - v(s, r))\varepsilon$ 从 P转移到 P'，并将相等的质量 $\rho' = \rho + \rho'' = (v(s'', r) - v(s, r))\varepsilon$ 的类型-s' 选民从 P' 转移到P，其中 $\varepsilon > 0$足够小。由于 $v(s, r)$ 关于 s 严格递增，这些质量严格为正，因此该扰动定义良好。由于该扰动不会改变 P 和 P'中的选民质量，要证明它严格提高设计者的预期席位份额，只需证明 $r^*(P)$不变，且$r^*(P')$严格增加。首先， $r^*(P)$不变，因为 $\int v(s, r)dP(s)$不变，这是因为

$$-v(s, r)\rho + v(s', r)\rho' - v(s'', r)\rho'' = 0.$$

其次， $r^*(P')$ 严格递增，因为 $\int v(s, r')dP'(s)$ 严格递增，原因如下：

$$\begin{aligned}
&v(s, r')\rho - v(s', r')\rho' + v(s'', r')\rho'' \\
&= [(v(s'', r') - v(s', r'))(v(s', r) - v(s, r)) - (v(s'', r) - v(s', r))(v(s', r') - v(s, r'))]\varepsilon \\
&= \left[\int_{s'}^{s''}\int_{s}^{s'} \frac{\partial v(\tilde{s}', r')}{\partial s}\frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s}d\tilde{s}d\tilde{s}' - \int_{s'}^{s''}\int_{s}^{s'} \frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s}\frac{\partial v(\tilde{s}, r')}{\partial s}d\tilde{s}d\tilde{s}'\right]\varepsilon \\
&= \left[\int_{s'}^{s''}\int_{s}^{s'} \left(\frac{\partial v(\tilde{s}', r')}{\partial s}\frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s} - \frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s}\frac{\partial v(\tilde{s}, r')}{\partial s}\right)d\tilde{s}d\tilde{s}'\right]\varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为对于 $r < r'$ 和 $\tilde{s} < \tilde{s}'$，被积函数严格为正，这由假设1可知。□

引理 3。 对于任意最优的 $\mathcal{H}$ （具有有限支撑）以及任意 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，我们有 $|\text{supp}(P)| \leq 2$。

证明。 反设存在一个包含三种类型 $s < s' < s''$的选区 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$。记 $r^*(P) = r$。假设我们将选区 P 划分为两个相同的等规模选区 P'和 P''。然后考虑这样一种扰动：将质量

$\rho = (v(s'', r) - v(s', r))\varepsilon$ 个 s 类型选民以及质量 $\rho'' = (v(s', r) - v(s, r))\varepsilon$ 个 s'' 类型选民从 P' 移至 P''，并将等量质量 $\rho' = \rho + \rho'' = (v(s'', r) - v(s, r))\varepsilon$ 个 s' 类型选民从 P'' 移至 P'，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小。注意，由于 $r^*(P'') = r^*(P') = r$，因为

$$v(s, r)\rho - v(s', r)\rho' + v(s'', r)\rho'' = 0.$$

现在考虑另一个扰动：将无穷小质量 $d\rho$ 的 P'' 类型选民从 P' 移至 P''，并将同样的质量 $d\rho$ 的 P' 类型选民从 P' 移至 P''。根据隐函数定理，$r^*(P'') = r + dr'' + o(dr'')$，且 $r^*(P') = r - dr' + o(dr')$，其中

$$dr'' = \frac{(v(s'', r) - v(s, r))}{-\int \frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial r} dP''(\tilde{s})} dm \quad \text{and} \quad dr' = -\frac{(v(s'', r) - v(s, r))}{-\int \frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial r} dP'(\tilde{s})} dm.$$

要证明该扰动严格增加设计者的预期席位份额，只需证明 $dr'' > dr'$，或等价地证明 $-\int \frac{\partial v}{(\tilde{s}, \partial r}{}^{r} \, dP'')(\tilde{s}) < -\int \frac{\partial v}{(\tilde{s}, \partial r}{}^{r} \, dP')(\tilde{s})$。这是因为——

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial v(s, r)}{\partial r}\rho + \frac{\partial v(s', r)}{\partial r}\rho' - \frac{\partial v(s'', r)}{\partial r}\rho'' \\
&= \left[-\tfrac{\partial v(s,r)}{\partial r}(v(s'', r) - v(s', r)) + \tfrac{\partial v(s',r)}{\partial r}(v(s'', r) - v(s, r)) - \tfrac{\partial v(s'',r)}{\partial r}(v(s', r) - v(s, r))\right]\varepsilon \\
&= \left[\left(\tfrac{\partial v(s',r)}{\partial r} - \tfrac{\partial v(s,r)}{\partial r}\right)(v(s'', r) - v(s', r)) - \left(\tfrac{\partial v(s'',r)}{\partial r} - \tfrac{\partial v(s',r)}{\partial r}\right)(v(s', r) - v(s, r))\right]\varepsilon \\
&= \left[\int_s^{s'} \frac{\partial^2 v(\tilde{s}, r)}{\partial s \partial r} d\tilde{s} \int_{s'}^{s''} \frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s} d\tilde{s}' - \int_{s'}^{s''} \frac{\partial^2 v(\tilde{s}', r)}{\partial s \partial r} d\tilde{s}' \int_s^{s'} \frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s} d\tilde{s}\right]\varepsilon \\
&< \frac{\frac{\partial^2 v(s',r)}{\partial s \partial r}}{\frac{\partial v(s',r)}{\partial s}} \left[\int_s^{s'} \frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s} d\tilde{s} \int_{s'}^{s''} \frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s} d\tilde{s}' - \int_{s'}^{s''} \frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s} d\tilde{s}' \int_s^{s'} \frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s} d\tilde{s}\right]\varepsilon = 0,
\end{aligned}$$

其中，不等式由假设1推出；假设1意味着 $\partial \ln(\partial v(s, r)/\partial s)/\partial r$ 关于 s 严格递增，因此

$$\frac{\frac{\partial^2 v(\tilde{s}, r)}{\partial s \partial r}}{\frac{\partial v(\tilde{s}, r)}{\partial s}} < \frac{\frac{\partial^2 v(s', r)}{\partial s \partial r}}{\frac{\partial v(s', r)}{\partial s}} < \frac{\frac{\partial^2 v(\tilde{s}', r)}{\partial s \partial r}}{\frac{\partial v(\tilde{s}', r)}{\partial s}} \quad \text{for } \tilde{s} < s' < \tilde{s}'. \qquad \square$$

根据引理2 和3，要证明每个最优选区划分方案 $\mathcal{H}$（具有有限支撑集）都是单峰谷型，只需证明：对于任意由选民类型 $P \in \text{supp}(\mathcal{H}$构成的选区 $s < s''$，以及任意包含选民类型 $P' \in \text{supp}(\mathcal{H}$的选区 $s' \in (s, s'')$，均有$r^*(P) \neq r^*(P')$。这是因为，如果 $r^*(P) = r^*(P')$，那么合并选区 P51

和 P' 为一个选区也会是最优的，但合并后的选区将包含三种选民类型，这与引理3矛盾。□

命题7的证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个打包配对式选区划分方案。由于 $\mathcal{H}$ 是严格单峰谷型的，每个 P ∈的支撑集 supp($\mathcal{H}$)至多包含两个元素，因此可表示为 $\{s_1(r^*(P))\ s_2(r^*(P))\}$，其中 $s_1(r^*(P)) \leq r^*(P) \leq s_2(r^*(P))$。此外，对于每个 P，若 $P' \in$的支撑集 supp($\mathcal{H}$)满足 $r^*(P) < r^*(P')$，则有 $s_2(r^*(P)) \leq s_2(r^*(P'))$；否则，我们将有 $s_2(r^*(P')) \in (s_1(r^*(P))\ s_2(r^*(P)))$，这与 $\mathcal{H}$.的严格单峰谷性矛盾。

假设存在 P，使得 $s_1(r^*(P)) < s_2(r^*(P))$；否则，该命题显然对$r^b = s$成立。定义 $r^b = \inf\{r^*(\tilde{P}) : \tilde{P} \in \text{supp}(\mathcal{H})^- s_1(r^*(\tilde{P})) < s_2(r^*(\tilde{P}))\}$，于是，对于每个满足 $r^*(P) < r^b$ 的 $P \in$，我们有 supp(P) $=\{r^*(P)\}$。由于 supp($\mathcal{H}$) 是紧致的，存在 $P^b \in$ supp($\mathcal{H}$)，使得 $r^*(P^b) = r^b$.。由此可知 supp(P^b) $= \{r^b\}$；否则（即，若 $s_1(r^*(P^b)) < r^b < s_2(r^*(P^b))$，则位于 $(r^b, s_2(r^*(P^b))$ 内的选民类型（由于 f 在 $[s, s]$ 上严格为正，其质量严格为正）无法被分隔，否则这将与$\mathcal{H}$的严格单峰谷性矛盾；这些类型也无法与其他类型配对，否则这将与 $\mathcal{H}$ 的严格单峰谷性或 r^b的定义矛盾。

最后，我们证明，对于每个 $P, P' \in$supp($\mathcal{H}$)，若 $r^b < r^*(P) < r^*(P')$，则有$s_1(r^*(P)) \geq s_1(r^*(P'))$。反设 $s_1(r^*(P)) < s_1(r^*(P'))$。由于$\mathcal{H}$ 是严格单谷型的打包配对式选区划分方案，根据 r^b的定义，我们有 $s_1(r^*(P)) < r^*(P) < s_2(r^*(P)) \leq s_1(r^*(P')) < r^*(P') < s_2(r^*(P'))$。定义 $r^\dagger = \inf\{r^*(\tilde{P}) : \tilde{P} \in \text{supp}(\mathcal{H})\ s_1(r^*(P')) \leq s_1(r^*(\tilde{P})) < s_2(r^*(\tilde{P}))\ \leq s_2(r^*(P'))\} \geq s_1(r^*(P'))$。按照上一段中的相同论证，我们有 $\delta_{r^\dagger} \in$ supp($\mathcal{H}$)，这与 $\mathcal{H}$ 是打包配对式相矛盾。□

下一个引理重述了 Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky （2023年）中的一些结果，我们利用这些结果证明命题 8 和 9。

引理4。 考虑加性偏好冲击情形，其中偏好冲击密度严格对数凹且关于*0*对称。

(1) 如果对于所有 $s < r < s'$，我们都有

$$G(r) < \frac{Q(s'-r) - \frac{1}{2}}{Q(s'-r) - Q(s-r)} G(s) + \frac{\frac{1}{2} - Q(s-r)}{Q(s'-r) - Q(s-r)} G(s'),$$

那么唯一的最优方案就是隔离。

(2) 若对所有 $s < s'$，均存在 $r \in (s, s')$ 使得

$$G(r) > \frac{Q(s'-r) - \frac{1}{2}}{Q(s'-r) - Q(s-r)} G(s) + \frac{\frac{1}{2} - Q(s-r)}{Q(s'-r) - Q(s-r)} G(s'),$$

那么，唯一的最优方案是负向匹配。

证明。 根据 $r^*(P)$的定义，我们有

$$r^*(\rho\delta_s + (1-\rho)\delta_{s'}) = r \in (s, s') \iff \rho = \frac{Q(s'-r) - \frac{1}{2}}{Q(s'-r) - Q(s-r)} \in (0, 1).$$

因此，第1部分表明，对于任意 $s < s'$，设计者都倾向于将任何选区$P = \rho\delta_s + (1-\rho)\delta_{s'}$ 拆分为选区 δ_s 和 $\delta_{s'}$；第2部分表明，对于任意 $s < s'$，设计者都倾向于将选区 δ_s 和 $\delta_{s'}$ 合并为某个选区 $P = \rho\delta_s + (1-\rho)\delta_{s'}$。因此，第1部分和第2部分可由 Kolotilin、Corrao 和 Wolitzky(2023年中的定理4和定理6推出。 □

命题 8的证明。 对于第 1 部分，根据引理 4，如果对于所有 $s < s'$ 都存在 $r \in (s, s')$ 使得

$$(G(r) - G(s)) \left(Q(s'-r) - \tfrac{1}{2}\right) > (G(s') - G(r)) \left(\tfrac{1}{2} - Q(s-r)\right),$$

因此，考虑 $r \uparrow s'$，若对所有 $s < s'$，我们有

$$(G(s') - G(s)) q(0) > g(s') \left(\tfrac{1}{2} - Q(s-s')\right),$$

如正文所示，当 G 为凹函数时，这一结论成立。

对于第 2 部分，只需证明存在 $c > 0$，使得对所有 $s \neq r$，我们有

$$\frac{G(s) - G(r)}{g(r)} > \frac{Q(s-r) - \frac{1}{2}}{q(0)}.$$

事实上，这个不等式意味着对所有 $s < r < s'$，我们有

$$\frac{G(r) - G(s)}{\frac{1}{2} - Q(s-r)} < \frac{g(r)}{q(0)} < \frac{G(s') - G(r)}{Q(s'-r) - \frac{1}{2}}, \tag{11}$$

因此，根据引理 4，隔离是唯一的最优解。

现在，由于对于所有 r， $g'(r)/g(r) \geq c$，Gronwall不等式给出：对于所有 $s > r$， $g(s)/g(r) \geq e^{c(s-r)}$；并且对于所有 $s < r$， $g(s)/g(r) \leq e^{c(s-r)}$。因此，对于所有 s， r，我们有

$$\frac{G(s) - G(r)}{g(r)} = \int_r^s \frac{g(x)}{g(r)} dx \geq \int_r^s e^{c(x-r)} dx = \frac{e^{c(s-r)} - 1}{c}.$$

因此，只需证明存在 $c > 0$，使得对于所有 $s \neq r$，我们都有

$$\frac{e^{c(s-r)} - 1}{c} > \frac{Q(s-r) - \frac{1}{2}}{q(0)}.$$

注意到两边在 $s = r$ 处具有相同的值和相同的导数。此外，在 $s = r$ 处，左侧的二阶导数 $c > 0$ 大于右侧的二阶导数 $q'(0)/q(0) = 0$。因此，不等式在某个邻域 $s \in (r - \varepsilon, r)$ 内成立。令 $c = q(0)/(1/2 - Q(-\varepsilon)) > 0$，可保证不等式对所有 $s \neq r$ 都成立。事实上，对于 $s \leq r - \varepsilon$，我们有

$$\frac{e^{c(s-r)} - 1}{c} > -\frac{1}{c} = \frac{Q(-\varepsilon) - \frac{1}{2}}{q(0)} \geq \frac{Q(s-r) - \frac{1}{2}}{q(0)},$$

其中，第一个不等式由 $e^{c(s-r)} > 0$ 得出，第二个不等式由 Q 的单调性得出。对于 $s > r$，我们有

$$\frac{e^{c(s-r)} - 1}{c} > s - r > \frac{Q(s-r) - \frac{1}{2}}{q(0)},$$

其中，第一个不等式由 e^{cx} 关于 x 的严格凸性得出，第二个不等式由 Q 在 $[0, +\infty$ 上的严格凹性得出）。□

命题证明 9。由于密度 q 关于 0 对称，且密度 f 在 $[s, s]$上严格为正，因此 $s < r^*(F) < s$。由于 G 是拐点为 $r^*(F)$ 的严格 S 形函数，因此 G 在 $[r^*(F)\ s]$上为凹函数。因此，根据命题 8，对于 $[r^*(F)\ s]$中的类型，负向匹配的选区划分是唯一的最优方案，这表明隔离不可能是最优的。 –

反证假设负向分类划区 $\mathcal{H}$ 是最优的。根据命-题 7，对于每个 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，除了 δ_{r^b}之外，我们有 $s_1(r^*(P)) < r^*(P)$。 $< s_2(r^*(P))$，其中 s_1 是递减的，而 s_2 是递增的。注意， $r^b < r^*(F)$，因为

$$\int Q(s - r^*(F)) dF(s) = 0 = \iint Q(s - r^*(P)) dP(s) d\mathcal{H}(P)$$
$$< \iint Q(s - r^b) dP(s) d\mathcal{H}(P) = \int Q(s - r^b) dF(s),$$

其中，前两个等式由 $r^*(F)$的定义和 $r^*(P)$的定义成立，不等式由 $r^*(P) > r^b$ 对所有 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$成立（ δ_{r^b}除外），最后一个等式由$\int P d\mathcal{H}(P) = F$成立。由于密度 f 在$[s, s]$上严格为正，利用与命题7证明中相同的论证，我们得到$\lim_{r \downarrow r^b} s_1(r) = \lim_{r \downarrow r^b} s_2(r) = r^b$。因此，对于任意$\varepsilon > 0$，存在 $P \in \text{supp}(\mathcal{H})$，使得 $r^b - \varepsilon < s_1(r^*(P)) < s_2(r^*(P)) < r^b + \varepsilon$，并且 $[s_1(r^*(P)) \ s_2(r^*(P))]$ 中的所有类型彼此以负向分类匹配的方式匹配。对于足够小的 $\varepsilon > 0$ 以及 $s < r < s'$ 中所有属于 $[s_1(r^*(P)) \ s_2(r^*(P))]$, 的对象，我们有

$$\frac{G(s) - G(r)}{g(r)} > \frac{Q(s - r) - \frac{1}{2}}{q(0)},$$

其中不等式成立，是因为两边在 $s = r$ 处具有相同的值和相同的导数，而左侧的二阶导数 $g'(r)/g(r) > 0$ 大于右侧的二阶导数 $q'(0)/q(0) = 0$（回忆一下， r^b 小于严格 S 形 G 的拐点 $r^*(F)$）。由命题8证明中的（11）可知，对于 $[s_1(r^*(P)) \ s_2(r^*(P))]$, 中的类型，隔离是唯一最优的，这表明 $\mathcal{H}$ 不可能是最优的。□

命题10的证明。反设存在一个最优的非打包与拆分方案 $\mathcal{H}$。根据命题6， $\mathcal{H}$ 是严格单谷型的。因此，由于 $\mathcal{H}$ 不是打包与拆分方案，存在 $s < r < s' \leq s''$ 和 P, $P' \in \text{supp}(\mathcal{H})$，使得 $r^*(P) = r$、$\text{supp}(P) = \{s, s'\}$，且 $\text{supp}(P') = \{s''\}$。根据引理 1，条件（3）成立。直观地说，（3）表示设计者倾向于不将少数 s 类型的选民从选区 P 移至选区 δ_s 和 $\delta_{s''}$。

我们已通过数值计算验证，3）在指定参数范围内成立。代码可应要求提供。

□

命题的证明 *11*。 由引理 1， λ 在每个 $\lambda'(r)$ 处都有导数 $r \in (r^b, \ r^b + \varepsilon]$满足

$$g(r) - \lambda(r) q(s_2(r) - r) + \lambda'(r) \left(Q(s_2(r) - r) - \tfrac{1}{2} \right) = 0,$$
$$g(r) - \lambda(r) q(s_1(r) - r) + \lambda'(r) \left(Q(s_1(r) - r) - \tfrac{1}{2} \right) = 0.$$

解出 $\lambda(r)$ 和 $\lambda'(r)$，对于所有 $r \in (r^b,\ r^b+\varepsilon]$,

$$\lambda(r)=\frac{g(r)[Q(s_2(r)-r)-Q(s_1(r)-r)]}{\left(Q(s_2(r)-r)-\frac{1}{2}\right)q(s_1(r)-r)-\left(Q(s_1(r)-r)-\frac{1}{2}\right)q(s_2(r)-r)},$$
$$\lambda'(r)=\frac{g(r)[q(s_2(r)-r)-q(s_1(r)-r)]}{\left(Q(s_2(r)-r)-\frac{1}{2}\right)q(s_1(r)-r)-\left(Q(s_1(r)-r)-\frac{1}{2}\right)q(s_2(r)-r)}.$$

由于 λ' 是 λ的导数，因此对所有 $r \in (r^b,\ r^b+\varepsilon]$，都有 $d\lambda(r)/dr = \lambda'(r)$。考虑到 s_1 和 s_2 均为二阶可微，且满足 $\lim_{r\downarrow r^b} s_1(r) = \lim_{r\downarrow r^b} s_2(r) = r^b$，我们可以应用洛必达法则计算 $d\lambda(r)/dr = \lambda'(r)$在 $r \downarrow r^b$ 趋于极限时的值，得到

$$\frac{g'(r^b)q(0)}{(q(0))^2}=\frac{g(r^b)q'(0)}{(q(0))^2},$$

这意味着 $r^b = 0$，因为对所有 r ， $G(r) = Q(\gamma r)$，且 $q'(r)$当且仅当 $r = 0$。记 $\lim_{r\downarrow r^b} s_1'(r) = 1-\beta_1$ 和 $\lim_{r\downarrow r^b} s_2'(r) = 1+\beta_2$，其中 $\beta_1 \geq 1$ （因为 s_1递减）且 $\beta_2 \geq 0$ （因为 $s_2(r) > r$）。对 $d\lambda(r)/dr = \lambda'(r)$关于 r 求导并令 $r \downarrow 0$趋于极限，得到

$$\frac{\gamma q''(0)(\gamma^2-\beta_2\beta_1)}{q(0)}=\frac{\gamma q''(0)(\beta_2-\beta_1)}{2q(0)},$$

因此

$$2\gamma^2 = 2\beta_2\beta_1+\beta_2-\beta_1. \tag{12}$$

由于对于足够小的 $r > 0$，类型 $s_1(r)$ 被同时赋予选区 $\delta_{s_1(r)}$ 和选区P，其中 $r^*(P) = r$和 $\text{supp}(P) = \{s_1(r)\ s_2(r)\}$，根据引理 1，我们必须有：

$$Q(\gamma s_1(r)) = Q(\gamma r)+\lambda(r)\left(Q(s_1(r)-r)-\tfrac{1}{2}\right).$$

在极限 $r \downarrow 0$ 中，两边的值及最高二阶的导数始终一致，而三阶导数一致当且仅当

$$q''(0)\gamma^3(-\beta_1+1)^3 = q''(0)\gamma^3-3q''(0)\gamma^3\beta_1+3q''(0)\gamma\beta_2\beta_1^2-q''(0)\gamma\beta_1^3,$$

这可化简为

$$-\gamma^2\beta_1+3\gamma^2 = 3\beta_2-\beta_1. \tag{13}$$

由于当 $r > 0$ 足够小时，类型 $s_1(r)$ 同时被分配到选区 $\delta_{s_1(r)}$ 和选区P，且 $r^*(P) = r$，而类型 $s_2(r)$ 仅被分配到选区 P，因此我们有

$$f(s_1(r))s_1'(r)\left(Q(s_1(r)-r)-\tfrac{1}{2}\right) \geq f(s_2(r))s_2'(r)\left(Q(s_2(r)-r)-\tfrac{1}{2}\right).$$

在极限 $r \downarrow 0$ 下，两边相等，因此它们的导数必须满足

$$-f(0)q(0)\beta_1(1-\beta_1) \geq f(0)q(0)\beta_2(\beta_2+1),$$

鉴于 $\beta_1+\beta_2>0$，可简化为

$$\beta_1 \geq \beta_2 + 1. \tag{14}$$

方程 (12) 和 (13) 有两个解 $(\beta_1,\beta_2) = (3\gamma^2/(2(\gamma^2-1))\ \gamma^2/2)$ 和 $(\beta_1,\beta_2) = (1, (2\gamma^2+1)/3)$；除非 $\gamma^2=1$，此时 (12) 和 (13) 只有一个解 $(\beta_1,\beta_2) = (1,1)$。解 $(\beta_1,\beta_2) = (1,(2\gamma^2+1)/3)$ 永远不满足 (14)，因此予以舍弃。此外，对于解 $(\beta_1,\beta_2) = (3\gamma^2/(2(\gamma^2-1))\ \gamma^2/2)$，条件 $\beta_1 \geq 1$ 得出 $\gamma > 1$，而条件 (14) 得出 $\gamma \leq \sqrt{1+\sqrt{3}}$。因此，要使 Y型选区划分达到最优，必须有 $\gamma \in (1, \sqrt{1+\sqrt{3}}]$。最后，脚注 30 中的陈述成立，是因为

$$\lim_{r\downarrow 0} s_1'(r) = 1-\beta_1 = -\frac{(\gamma^2+2)}{2(\gamma^2-1)} < 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r\downarrow 0} s_2'(r) = 1+\beta_2 = 1+\frac{\gamma^2}{2} > 0$$

都关于 γ 严格递增。 □