arXiv:2304.09441v1 [math.ST] 19 Apr 2023

基于时间和空间增量的二维线性抛物型随机偏微分方程参数估计

YOZO TONAKI[1],YUSUKE KAINO[2], 和 MASAYUKI UCHIDA[1,3]

Abstract. 我们研究由两类 Q-Wiener过程驱动的二维线性抛物型二阶随机偏微分方程的参数估计，所依据的是时间和空间上的高频数据。我们提出基于时间和空间平方增量的系数参数最小对比估计量，并基于近似坐标过程给出系数参数的自适应估计量。我们还举例说明了所提出的估计量，并给出模拟结果。

1. 引言

我们考虑如下二维线性抛物型随机偏微分方程（SPDE）：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t(y,z) = &\left\{\theta_2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\theta_1\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial}{\partial z}+\theta_0\right\}X_t(y,z)\mathrm{d}t \\ &+\sigma\mathrm{d}W_t^Q(y,z), \quad (t,y,z)\in[0,1]\times D \end{aligned} \tag{1.1}$$

其初始条件为 $X_0=\xi$，狄利克雷边界条件为

$$X_t(y,z)=0, \quad (t,y,z)\in[0,1]\times\partial D,$$

其中，$D=(0,1)^2$，W_t^Q 是定义在 D上的 Sobolev 空间中的 Q-Wiener 过程，初始值 ξ 与 W_t^Q 相互独立；$\theta=(\theta_0,\theta_1,\eta_1,\theta_2)$和 σ 是未知参数，$(\theta_0,\theta_1,\eta_1,\theta_2,\sigma)\in\Theta$，参数空间 Θ 是 $\mathbb{R}^3\times(0,\infty)^2$的紧凸子集，$\theta^*=(\theta_0^*,\theta_1^*,\eta_1^*,\theta_2^*)$和 σ^* 是参数的真实值，并且我们假设(θ^*,σ^*)属于 Θ的内部。

粗略地说，随机偏微分方程是带有随机项的偏微分方程，广泛应用于工程学、经济学和生物学等领域。特别是，线性抛物型随机偏微分方程是基础且重要的方程，包括随机热方程，并出现在许多场景中。有关随机偏微分方程在地球物理流体动力学和生物学中的应用，参见 Piterbarg 和 Ostrovskii [20], Tuckwell [23] 以及 Altmeyer等 [1]。

许多研究者已经对随机偏微分方程的统计推断进行了研究，参见例如 Cia-lenco 等 [8], Cialenco和 Glatt-Holtz [7], H¨ubner 等 [12], H¨ubner和Rozovskii [13], Lototsky[16], 以及Mahdi Khalil和 Tudor [18]。关于离散观测，参见 Markussen [19], Bibinger和Trabs [2], Chong [4, 3], Cialenco等 [6], Cialenco和Huang [9], Kaino和Uchida [14, 15],Hildebrandt和Trabs [10], Tonaki 等人 [22] 以及其中的参考文献。关于现有理论的概述，参见 Lototsky [17] 和 Cialenco [5]。最近，Tonaki 等人 [21] 基于时间平方增量，提出了随机偏微分方程 (1.1) 的系数参数估计量。他们首先构造了随机偏微分方程 (1.1) 的微分算子特征函数中所含参数的估计量，并利用这些估计量来近似下文 (2.2) 定义的坐标过程。由于坐标过程是一个 Ornstein-Uhlenbeck过程，他们接着基于随机微分方程的统计推断，对每个系数参数进行了估计。结果表明，对于某些 $n\le N$，系数参数的估计量具有渐近正态性，其收敛速率为$\sqrt{n}$，其中 N 为时间观测的数量。Hildebrandt

[1]Graduate School of Engineering Science, Osaka University
[2]Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University
[3]Center for Mathematical Modeling and Date Science (MMDS), Osaka University and JST CREST
Key words and phrases. 自适应估计、高频数据、最小对比估计、二维空间中的随机偏微分方程、稀疏化数据。

而 Trabs [11] 研究了以下一维空间中的线性抛物型随机偏微分方程

$$\mathrm{d}X_t(y) = \left(\theta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \theta_0\right) X_t(y)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t(y), \quad t \geq 0, y \in (0,1)$$

初始条件为 $X_0 \in L^2$((0,1)), 狄利克雷边界条件为 X_t(0) $= X_t$(1) $= 0$, 其中 B_t 是 (0,1) 上 Sobolev 空间中的柱状布朗运动。他们提出了基于双重增量（即时间和空间增量）的最小对比估计量，并证明这些估计量具有渐近正态性，其收敛速率为 $\sqrt{MN}$；其中， ~~M~~ 和 N 分别为空间观测数和时间观测数。

本文将 Hildebrandt 和 Trabs [11] 的方法应用于二维空间中的随机偏微分方程 (1.1)，并利用相对于空间稀疏化的数据，基于时间和空间增量，针对由两类 Q-Wiener 过程驱动的随机偏微分方程，提出系数参数 $(\theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2)$ 的最小对比估计量。此外，利用时间稀疏化的数据，我们基于近似坐标过程，针对每类驱动噪声，推导出该随机偏微分方程系数参数的参数自适应估计量，其中坐标过程为 Ornstein-Uhlenbeck 过程。关于扩散过程参数自适应估计量的详情，可参见 Uchida 和 Yoshida [24] 及其中的参考文献。为简便起见，本文将参数自适应估计量统称为自适应估计量。请注意，本文的方法同时处理时间增量和空间增量，与 Tonaki 等人 [21] 的方法本质不同，因为本文的方法无法指定 Tonaki 等人 [21] 中仅基于时间增量的方法。本文的主要结果是，最小对比估计量以速率 $\sqrt{mN} = O(N)$ 在概率意义下有界，其中 N 为时间观测数， m 为空间稀疏化数据的数量。此外，对于某个 $n \leq N$，自适应估计量具有收敛速率为 $\sqrt{n}$ 的渐近正态性。结果还表明，两种估计量的收敛速率均快于 Tonaki 等人 [21] 的方法。

本文结构安排如下。第 2 节陈述主要结果。我们针对由两类 Q-Wiener 过程驱动的随机偏微分方程 (1.1)，提出系数参数的最小对比估计量和自适应估计量，并证明这些估计量的渐近性质。第 3 节给出一个示例，并对所提出的估计量进行模拟研究。第 4 节给出证明。

2. Main results

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 是满足通常条件的随机基，且 $\{w_{\ell_1,\ell_2}\}_{\ell_1,\ \ell_2 \geq 1}$ 是该随机基上的相互独立的实值标准布朗运动。

我们将微分算子 A_θ 定义为

$$-A_\theta = \theta_2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} + \theta_0.$$

注意，随机偏微分方程 (1.1) 可表示为

$$\mathrm{d}X_t(y,z) = -A_\theta X_t(y,z)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^Q(y,z).$$

微分算子 A_θ 的定义域为 $\mathscr{D}(A_\theta) = H^2(D) \cap H_0^1(D)$，其中 $H^p(D)$ 是阶数为 $p \in \mathbb{N}$ 的 L^2-Sobolev 空间，$H_0^1(D)$ 是 $C_c^\infty(D)$ 在 $H^1(D)$ 中的闭包。微分算子 A_θ 的特征函数 $e_{\ell_1,\ \ell_2}$ 及相应的特征值 $\lambda_{\ell_1,\ \ell_2}$ 为

$$e_{\ell_1,\ell_2}(y,z) = e_{\ell_1}^{(1)}(y) e_{\ell_2}^{(2)}(z), \quad \lambda_{\ell_1,\ell_2} = \theta_2(\pi^2(\ell_1^2 + \ell_2^2) + \Gamma),$$

对于 $\ell_1, \ \ell_2 \geq 1$ 和 $y, \ z \in [0,1]$, 其中

$$e_{\ell_1}^{(1)}(y) = \sqrt{2}\sin(\pi \ell_1 y)\mathrm{e}^{-\kappa y/2}, \quad e_{\ell_2}^{(2)}(z) = \sqrt{2}\sin(\pi \ell_2 z)\mathrm{e}^{-\eta z/2},$$

$$\kappa = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad \eta = \frac{\eta_1}{\theta_2}, \quad \Gamma = -\frac{\theta_0}{\theta_2} + \frac{\kappa^2 + \eta^2}{4}.$$

The 特征函数 $\{e_{\ell_1,\ell_2}\}_{\ell_1,\ \ell_2 \geq 1}$ 关于加权 L^2-内积正交归一 t

$$\langle u, v\rangle := \langle u, v\rangle_\theta = \int_0^1 \int_0^1 u(y,z)v(y,z)\mathrm{e}^{\kappa y}\mathrm{e}^{\eta z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

对于 $u, \ v \in L^2(D)$。

尽管可以像 Tonaki 等人 [21], 一样考虑一般的初始条件，但为简单起见，我们对随机偏微分方程（1.1）的初始值 ξ 施加以下条件。

[**A1**] 初始值 $\xi \in L^2(D)$ 是非随机的，且 $\|A_\theta^{(1+\alpha)/2}\xi\| < \infty$。

此外，我们假设 $\lambda_{1,1}^* > 0$ 从而 A_θ 是一个正自伴算子。

我们首先考虑如下定义的 Q_1-维纳过程 $W_t^{Q_1}$。

$$\langle W_t^{Q_1}, u\rangle = \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \lambda_{\ell_1,\ell_2}^{-\alpha/2}\langle u, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle w_{\ell_1,\ell_2}(t) \tag{2.1}$$

对于 $u \in L^2(D)$, $t \geq 0$ 和 $\alpha \in (0,2)$。 α 是已知的，且其限制保证了系数参数 $(\theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2)$ 的可估计性。我们将 α 的可估计性研究留待未来工作。由 Q_1-维纳过程 (2.1) 驱动的随机偏微分方程 (1.1) 存在唯一的温和解，其表达式为

$$X_t = \mathrm{e}^{-tA_\theta}\xi + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A_\theta}\mathrm{d}W_s^{Q_1},$$

其中 $\mathrm{e}^{-tA_\theta}u = \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}t}\langle u, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle e_{\ell_1,\ell_2}$ 对于 $u \in L^2(D)$。通过定义坐标过程

$$x_{\ell_1,\ell_2}(t) = \langle X_t, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle = \mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}t}\langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle + \sigma\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{-\alpha/2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}(t-s)}\mathrm{d}w_{\ell_1,\ell_2}(s), \tag{2.2}$$

随机场 $X_t(y, z)$ 的谱分解为

$$X_t(y,z) = \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} x_{\ell_1,\ell_2}(t)e_{\ell_1}^{(1)}(y)e_{\ell_2}^{(2)}(z), \quad t \geq 0,\ y, z \in [0,1],$$

其中 $\{x_{\ell_1,\ell_2}\}_{\ell_1,\ \ell_2\geq 1}$ 是满足奥恩斯坦-乌伦贝克动力学的相互独立的一维过程

$$\mathrm{d}x_{\ell_1,\ell_2}(t) = -\lambda_{\ell_1,\ell_2}x_{\ell_1,\ell_2}(t)\mathrm{d}t + \sigma\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{-\alpha/2}\mathrm{d}w_{\ell_1,\ell_2}(t), \quad x_{\ell_1,\ell_2}(0) = \langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle. \tag{2.3}$$

我们假设温和解 X 在网格 $(t_i, y_j, z_k) \in [0,1]^3$ 上被离散观测，其中

$$t_i = i\Delta, \quad y_j = j/M_1, \quad z_k = k/M_2$$

对于 $i = 0, \ldots, N$、 $j = 0, \ldots, M_1$ 和 $k = 0, \ldots, M_2$，其中 $\Delta = 1/N$。也就是说，数据是离散观测 $\mathbb{X}_{M,\ N} = \{X_{t_i}(y_j, z_k);\ i = 0, \ldots, N,\ j = 0, \ldots, M_1,\ k = 0, \ldots, M_2\}$，其中我们令 $M = M_1M_2$。对于序列 $\{a_n\}$，若存在某个 $a \in \mathbb{R}$，使得对所有 n 都有 $a_n = a$，则记为 $a_n \equiv a$。

2.1. 系数参数的最小对比估计。 本小节给出三重增量的二阶矩，并讨论系数参数 $(\theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2)$ 的最小对比估计。

固定 $b \in (0, 1/2)$。我们考虑 $\mathbb{X}_{M,N}$ 的空间稀疏化数据 $\mathbb{X}_{m}^{(1)}{}_{,N} = \{X_{t_i}(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k);\ i = 0, \ldots, N,\ j = 0, \ldots, m_1, k = 0, \ldots, m_2\}$，满足

$$b \leq \widetilde{y}_0 < \widetilde{y}_1 < \cdots < \widetilde{y}_{m_1} \leq 1-b, \quad b \leq \widetilde{z}_0 < \widetilde{z}_1 < \cdots < \widetilde{z}_{m_2} \leq 1-b,$$

$m = m_1m_2$, $m = O(N)$, $N = O(m)$。为简化起见，令 $\widetilde{y}_0 = \widetilde{z}_0 = b$, $\widetilde{y}_{m_1} = \widetilde{z}_{m_2} = 1-b$ 和 $m_1 = m_2$, 即 $\widetilde{y}_j = b + j\delta$ 和 $\widetilde{z}_k = b + k\delta$，其中 $\delta = \frac{1-2b}{m_1} = \frac{1-2b}{\sqrt{m}}$。

我们引入 以下时间和空间增

$$\begin{aligned}
\Delta_i X(y,z) &= X_{t_i}(y,z) - X_{t_{i-1}}(y,z),\\
D_{j,k}X(t) &= X_t(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k) - X_t(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_k) - X_t(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_{k-1}) + X_t(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_{k-1})
\end{aligned}$$

并考虑三重增量

$$\begin{aligned}
T_{i,j,k}X &= (\Delta_i \circ D_{j,k})X = (D_{j,k} \circ \Delta_i)X\\
&= X_{t_i}(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k) - X_{t_i}(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_k) - X_{t_i}(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_{k-1}) + X_{t_i}(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_{k-1})\\
&\quad - X_{t_{i-1}}(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k) + X_{t_{i-1}}(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_k) + X_{t_{i-1}}(\widetilde{y}_j, \widetilde{z}_{k-1}) - X_{t_{i-1}}(\widetilde{y}_{j-1}, \widetilde{z}_{k-1}).
\end{aligned}$$

令 J_0 为第一类 0 阶贝塞尔函数:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

对于 $\delta/\sqrt{\Delta} \equiv r \in (0, \infty)$，定义

$$\psi_{r,\alpha}(\theta_2) = \frac{2}{\theta_2 \pi} \int_0^\infty \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^{1+2\alpha}} \Big(J_0\Big(\frac{\sqrt{2} r x}{\sqrt{\theta_2}}\Big) - 2 J_0\Big(\frac{r x}{\sqrt{\theta_2}}\Big) + 1 \Big) \mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

命题 2.1 设 $\alpha \in (0,2)$ 且 $\delta/\sqrt{\Delta} \equiv r \in (0, \infty)$。在 [A1], 条件下，有

$$\mathbb{E}[(T_{i,j,k} X)^2] = \Delta^\alpha \sigma^2 \mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1} + \widetilde{y}_j)/2} \mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1} + \widetilde{z}_k)/2} \psi_{r,\alpha}(\theta_2) + R_{i,j,k} + O(\Delta^{1+\alpha}),$$

其中 $\sum_{i=1}^N R_{i,j,k} = O(\Delta^\alpha)$ 在 j, k 上一致成立。

设 $\widetilde{T}_{i,j,k} X = T_{i,j,k} X + T_{i+1,j,k} X$ 以及 $\nu = (\kappa, \eta, \theta_2, \sigma^2)$。对于 $\alpha \in (0,2)$ 和 $\delta/\sqrt{\Delta} \equiv r \in (0, \infty)$，我们引入对比函数

$$\begin{aligned} K_{m,N}(\nu) = & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Bigg\{ \frac{1}{N\Delta^\alpha} \sum_{i=1}^{N} (T_{i,j,k} X)^2 - f_{r,\alpha}\Big(\frac{\widetilde{y}_{j-1} + \widetilde{y}_j}{2}, \frac{\widetilde{z}_{k-1} + \widetilde{z}_k}{2} : \nu \Big) \Bigg\}^2 \\ & + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Bigg\{ \frac{1}{N(2\Delta)^\alpha} \sum_{i=1}^{N-1} (\widetilde{T}_{i,j,k} X)^2 - f_{r/\sqrt{2},\alpha}\Big(\frac{\widetilde{y}_{j-1} + \widetilde{y}_j}{2}, \frac{\widetilde{z}_{k-1} + \widetilde{z}_k}{2} : \nu \Big) \Bigg\}^2, \end{aligned}$$

其中 $f_{r,\alpha}(y, z : \nu) = \sigma^2 \mathrm{e}^{-\kappa y} \mathrm{e}^{-\eta z} \psi_{r,\alpha}(\theta_2)$。令

$$\underline{\theta_2}(r, \alpha) = \begin{cases} -\frac{r^2}{8 \log(2^{\alpha/2} - 1)}, & \alpha \in (0,1), \\ 0, & \alpha \in [1,2). \end{cases}$$

设 Ξ 是 $\mathbb{R}^2 \times (\theta_2(r, \alpha), \infty) \times (0, \infty)$ 的紧凸子集，并定义 ν 的最小对比估计量为

$$\hat{\nu} = \underset{\nu \in \Xi}{\operatorname{argmin}}\, K_{m,N}(\nu).$$

定理 2.2 在 [A1], 且 $m \to \infty$ 和 $N \to \infty$ 的条件下，

$$\sqrt{mN}(\hat{\nu} - \nu^*) = O_p(1).$$

注 1

(i) 使用估计量 $\hat{\nu} = (\hat{\kappa}, \hat{\eta}, \hat{\theta}_2, \hat{\sigma}^2)$，可以分别通过 $\theta_1 = \hat{\kappa}\theta_2$ 和 $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}\theta_2$ 估计系数参数 θ_1 和 η_1。因此，系数参数 $(\theta_2, \theta_1, \eta_1, \sigma^2)$ 的估计量以 $\sqrt{mN}$ 的速率依概率有界。注意，$\sqrt{mN} = O(N)$。由于 Tonaki 等人提出的估计量 [21] 在某个 $n \le N$ 下具有渐近正态性，其收敛速率为 $\sqrt{n}$，因此，我们提出的估计量比 Tonaki 等人的估计量 [21] 具有更快的收敛速率。

(ii) 根据定理 2.2 证明中的步骤 3，我们发现，与 Hildebrandt 和 Trabs [11] 不同，我们的估计量不具有渐近正态性，因为命题 2.1 意味着

$$\sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ \mathbb{E}[(T_{i,j,k} X)^2] - \Delta^\alpha f_{r,\alpha}\Big(\frac{\widetilde{y}_{j-1} + \widetilde{y}_j}{2}, \frac{\widetilde{z}_{k-1} + \widetilde{z}_k}{2} : \nu \Big) \Bigg\}$$

以 Δ^α 的速率一致有界于 j, k，且不会以 Δ^α 的速率收敛至 0。这是因为随着空间维度增加，近似误差无法忽略。

2.2. **系数参数的自适应估计**。在本小节中，我们基于最小对比估计量和坐标过程，构造系数参数 $(\theta_0, \ldots, \theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2)$ 的自适应估计量，并证明其渐近正态性。

令 $n \le N$ 和 $\widetilde{t}_i = \lfloor \frac{N}{n} \rfloor \frac{i}{N}$，其中 $i = 0, \ldots, n$。我们将相对于时间 $\mathbb{X}_{M,\,N}$ 的稀疏化数据设为 $\mathbb{X}^{(2)}_{M,\,n} = \{ X_{\widetilde{t}_i}(y_j, z_k) ; i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, M_1, k = 0, \ldots, M_2 \}$。

由于

$$x_{\ell_1, \ell_2}(t) = 2 \int_0^1 \int_0^1 X_t(y, z) \sin(\pi \ell_1 y) \sin(\pi \ell_2 z) \mathrm{e}^{\kappa y/2} \mathrm{e}^{\eta z/2} \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

we 将近似坐标过程定义为

$$\hat{x}_{\ell_1,\ell_2}(t)=\frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}X_t(y_j,z_k)\sin(\pi\ell_1 y_j)\sin(\pi\ell_2 z_k)\mathrm{e}^{\hat{\kappa}y_j/2}\mathrm{e}^{\hat{\eta}z_k/2},$$

并将式 (2.3) 中的估计量定义为

$$\hat{\sigma}^2_{\ell_1,\ell_2}=\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_i)-\hat{x}_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_{i-1}))^2.$$

我们提出如下的自适应估计量 $\lambda_{\ell_1,\ \ell_2}$ 和 $(\theta_0,\ \ \theta_1,\ \ \eta_1,\ \ \theta_2,\ \ \sigma^2)$。

$$\check{\lambda}_{\ell_1,\ell_2}=\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2_{\ell_1,\ell_2}}\right)^{1/\alpha},\quad \check{\theta}_0=-\hat{\lambda}_{1,1}+\left(\frac{\hat{\kappa}^2+\hat{\eta}^2}{4}+2\pi^2\right)\hat{\theta}_2,$$

$$\check{\theta}_2=\frac{\check{\lambda}_{1,2}-\check{\lambda}_{1,1}}{3\pi^2},\quad \check{\theta}_1=\hat{\kappa}\check{\theta}_2,\quad \check{\eta}_1=\hat{\eta}\check{\theta}_2,\quad \check{\sigma}^2=\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\theta}_2}\check{\theta}_2.$$

Let

$$\mathcal{J}=2\begin{pmatrix}J_{1,1} & J_{1,2}\\ J_{1,2}^{\mathsf{T}} & J_{2,2}\end{pmatrix},$$

其中

$$J_{1,1}=(\lambda^*_{1,1})^2,\quad J_{1,2}=\frac{-(\lambda^*_{1,1})^2}{3\pi^2\theta^*_2}(\theta^*_1,\eta^*_1,\theta^*_2,(\sigma^*)^2),$$

$$J_{2,2}=\frac{(\lambda^*_{1,1})^2+(\lambda^*_{1,2})^2}{9\pi^4(\theta^*_2)^2\alpha^2}\begin{pmatrix}(\theta^*_1)^2 & \theta^*_1\eta^*_1 & \theta^*_1\theta^*_2 & \theta^*_1(\sigma^*)^2\\ \theta^*_1\eta^*_1 & (\eta^*_1)^2 & \eta^*_1\theta^*_2 & \eta^*_1(\sigma^*)^2\\ \theta^*_1\theta^*_2 & \eta^*_1\theta^*_2 & (\theta^*_2)^2 & \theta^*_2(\sigma^*)^2\\ \theta^*_1(\sigma^*)^2 & \eta^*_1(\sigma^*)^2 & \theta^*_2(\sigma^*)^2 & (\sigma^*)^4\end{pmatrix}$$

且 T 表示转置。

定理 2.3 设 $\alpha\in(0,\ 2)$ 且 $\delta/\sqrt{\Delta}\equiv r\in[0,\ \infty)$。在 [A1], 条件下，有以下结论。

(i) 如果 $\frac{n^{1-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)^{\ 2\tau}}\to 0$ 对某个 $0<\tau\le 1$ 成立，且 $\tau<\alpha$，那么当 $M_1\to\infty$、$M_2\to\infty$且 $n\to\infty$时，$\check{}\theta_0\xrightarrow{p}\theta^*_0$。 (ii) 如果 $\frac{n^{2-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)^{\ 2\tau}}\to 0$ 对某个 $0<\tau\le 1$ 成立，且 $\tau<\alpha$，那么当 $M_1\to\infty$、$M_2\to\infty$ 且$n\to\infty$时，

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\check{\theta}_0-\theta^*_0\\ \check{\theta}_1-\theta^*_1\\ \check{\eta}_1-\eta^*_1\\ \check{\theta}_2-\theta^*_2\\ \check{\sigma}^2-(\sigma^*)^2\end{pmatrix}\xrightarrow{d}N(0,\mathcal{J}).\tag{2.5}$$

备注 2

(i) 对 $n\le N$ 的条件比 Tonaki 等人 [21] 的定理3.3中的条件更宽松。换言之，如果 n_1 和 n_2（$n_1,\ n_2\le N$）分别满足 Tonaki 等人 [21] 的定理3.3和定理 2.3中的条件，那么 $n_1\le n_2$，这意味着我们的估计量的收敛速率快于或等于 Tonaki 等人的估计量的收敛速率 [21]。

(ii) 设 $\widetilde{2J_{1,\ 1}}$ 为 Tonaki 等人 [21] 中定理3.3关于 θ_0 的估计量的渐近方差。我们由此得到

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_{1,1}-J_{1,1}&=\frac{(\lambda^*_{1,1})^2+(\lambda^*_{1,2})^2}{9\pi^4(\theta^*_2)^2}\Bigg\{\left(\left(\frac{\lambda^*_{1,1}}{\alpha}-\frac{\theta^*_0}{1-\alpha}\right)^2+\frac{3\pi^2\theta^*_2(\lambda^*_{1,1})^2}{\alpha((\lambda^*_{1,1})^2+(\lambda^*_{1,2})^2)}\right)^2\\&\qquad+\frac{(\lambda^*_{1,1})^2}{((\lambda^*_{1,1})^2+(\lambda^*_{1,2})^2)^2}\left(\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)(\lambda^*_{1,2})^2-(\lambda^*_{1,1})^2\right)\Bigg\}\\&\ge(\lambda^*_{1,1})^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)\end{aligned}$$

that $\widetilde{J}_{1,1}\ge J_{1,1}$ for $\alpha\in(0,1)$.

(iii) 设 $2\widetilde{J}_{2,2}$ 为 Tonaki 等人在定理3.3中对 $(\theta_1,\eta_1,\theta_2,\sigma^2)$ 的估计量的渐近方差 [21]。我们有

$$\widetilde{J}_{2,2}-J_{2,2}=\frac{1}{9\pi^4(\theta_2^*)^2}\Big(\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{\alpha^2}\Big)(\theta_1^*,\eta_1^*,\theta_2^*,(\sigma^*)^2)^{\mathsf{T}}(\theta_1^*,\eta_1^*,\theta_2^*,(\sigma^*)^2),$$

~这意味着，如果 $\alpha\in[1/2,1)$，$J_{2,\ 2}-J_{2,\ 2}$ 是半正定的。

(iv) 当驱动噪声由 (2.1) 定义时，可以估计 θ_0。另一方面，如果驱动噪声是如下文 (2.6) 所示的 Q-Wiener 过程，则无法估计 θ_0。

2.3. **由 Q_2-Wiener 过程驱动的随机偏微分方程中的系数参数估计**。接下来，我们考虑由 Q_2-Wiener 过程 $W_t^{Q_2}$驱动的随机偏微分方程 (1.1)，其定义如下：

$$\langle W_t^{Q_2},u\rangle=\sum_{\ell_1,\ell_2\geq1}\mu_{\ell_1,\ell_2}^{-\alpha/2}\langle u,e_{\ell_1,\ell_2}\rangle w_{\ell_1,\ell_2}(t)\tag{2.6}$$

对于 $u\in L^2(D)$、$t\geq0$ 和 $\alpha\in(0,\ 2)$，其中 $\mu_{\ell_1,\ \ell_2}=\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)$、$+\mu_0$ 和 $\mu_0\in(-2\pi^2,\ \infty)$。$\mu_0$ 可能已知，也可能未知；μ_0 的参数空间是 $(-2\pi^2,\ \infty)$ 的紧凸子集，且真实值 μ_0^* 位于其内部。当驱动噪声是 Q_2-Wiener 过程时，无法估计 θ_0，但可以估计 $(\theta_1,\ \eta_1,\ \theta_2,\ \sigma^2,\ \mu_0)$。

当驱动噪声为 Q_2-Wiener 过程时，在与上述相同的观测方案下，三重增量的二阶矩 $\mathbb{E}[(T_{i,j,\ k}X)^2]$ 可通过将命题 2.1 中的 $\psi_{r,\alpha}(\theta_2)$ 替换为 $\psi_{r,\alpha}(\theta_2)=\theta_2^\alpha\psi_{r,\alpha}(\theta_2)$ 得到，见下文 (4.19)。因此，我们定义对比函数

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{m,N}(\nu)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\Bigg\{\frac{1}{N\Delta^\alpha}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2-\widetilde{f}_{r,\alpha}\Big(\frac{\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j}{2},\frac{\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k}{2}:\nu\Big)\Bigg\}^2\\+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\Bigg\{\frac{1}{N(2\Delta)^\alpha}\sum_{i=1}^{N-1}(\widetilde{T}_{i,j,k}X)^2-\widetilde{f}_{r/\sqrt{2},\alpha}\Big(\frac{\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j}{2},\frac{\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k}{2}:\nu\Big)\Bigg\}^2,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{f}_{r,\alpha}(y,z:\ \nu)\ =\sigma^2\mathrm{e}^{-\kappa y}\mathrm{e}^{-\eta z}\widetilde{\psi}_{r,\alpha}(\theta_2)$，并将最小对比估计量 $\tilde{\nu}=(\tilde{\kappa},\tilde{\eta},\tilde{\theta}_2,\tilde{\sigma}^2)$ 定义如下。

$$\tilde{\nu}=\operatorname*{argmin}_{\nu\in\Xi}\widetilde{K}_{m,N}(\nu).$$

定理 2.4 在 [A1], $\sqrt{mN}(\tilde{\nu}-\nu^*)\overline{\ =}O_p(1)$ 成立时，且 $m\to\infty$ 和 $N\to\infty$。

由于由 Q_2-维纳过程驱动的随机偏微分方程 (1.1) 的坐标过程由 b 给出 y

$$\mathrm{d}x_{\ell_1,\ell_2}(t)=-\lambda_{\ell_1,\ell_2}x_{\ell_1,\ell_2}(t)\mathrm{d}t+\sigma\mu_{\ell_1,\ell_2}^{-\alpha/2}\mathrm{d}w_{\ell_1,\ell_2}(t),\quad x_{\ell_1,\ell_2}(0)=\langle\xi,e_{\ell_1,\ell_2}\rangle,$$

我们使用近似坐标过程

$$\tilde{x}_{\ell_1,\ell_2}(t)=\frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}X_t(y_j,z_k)\sin(\pi\ell_1y_j)\sin(\pi\ell_2z_k)\mathrm{e}^{\tilde{\kappa}y_j/2}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}z_k/2}$$

并估计 $\varsigma_{\ell_1,\ \ell_2}:=\sigma\mu_{\ell_1\ \ell_2}^{-\alpha/2}$，如下

$$\tilde{\sigma}^2_{\ell_1,\ell_2}=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_i)-\tilde{x}_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_{i-1}))^2.$$

当 μ_0 已知时，通过以下方式构造具有渐近正态性的系数参数估计量

$$\bar{\sigma}^2=\mu_{1,1}^\alpha\tilde{\sigma}^2_{1,1},\quad\bar{\theta}_2=\frac{\tilde{\theta}_2}{\tilde{\sigma}^2}\bar{\sigma}^2,\quad\bar{\theta}_1=\tilde{\kappa}\bar{\theta}_2,\quad\bar{\eta}_1=\tilde{\eta}\bar{\theta}_2,$$

当 μ_0 未知时，具有渐近正态性且满足 μ_0 的系数参数估计量定义如下。

$$\breve{\sigma}^2=\left\{3\pi^2\left(\frac{1}{(\tilde{\sigma}^2_{1,2})^{1/\alpha}}-\frac{1}{(\tilde{\sigma}^2_{1,1})^{1/\alpha}}\right)^{-1}\right\}^\alpha,\quad\breve{\mu}_0=\left(\frac{\breve{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2_{1,1}}\right)^{1/\alpha}-2\pi^2,$$

$$\breve{\theta}_2=\frac{\tilde{\theta}_2}{\tilde{\sigma}^2}\breve{\sigma}^2,\quad\breve{\theta}_1=\tilde{\kappa}\breve{\theta}_2,\quad\breve{\eta}_1=\tilde{\eta}\breve{\theta}_2.$$

Let

$$\mathcal{K} = 2\begin{pmatrix} (\theta_1^*)^2 & \theta_1^*\eta_1^* & \theta_1^*\theta_2^* & \theta_1^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*\eta_1^* & (\eta_1^*)^2 & \eta_1^*\theta_2^* & \eta_1^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*\theta_2^* & \eta_1^*\theta_2^* & (\theta_2^*)^2 & \theta_2^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*(\sigma^*)^2 & \eta_1^*(\sigma^*)^2 & \theta_2^*(\sigma^*)^2 & (\sigma^*)^4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \frac{2}{9\pi^4}\begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} \\ L_{1,2}^{\mathsf{T}} & L_{2,2} \end{pmatrix},$$

其中

$$L_{1,1} = \frac{2(\mu_{1,1}^*)^2(\mu_{1,2}^*)^2}{\alpha^2}, \quad L_{1,2} = \frac{\mu_{1,1}^*\mu_{1,2}^*(\mu_{1,1}^* + \mu_{1,2}^*)}{\alpha}(\theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, (\sigma^*)^2),$$

$$L_{2,2} = ((\mu_{1,1}^*)^2 + (\mu_{1,2}^*)^2)\begin{pmatrix} (\theta_1^*)^2 & \theta_1^*\eta_1^* & \theta_1^*\theta_2^* & \theta_1^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*\eta_1^* & (\eta_1^*)^2 & \eta_1^*\theta_2^* & \eta_1^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*\theta_2^* & \eta_1^*\theta_2^* & (\theta_2^*)^2 & \theta_2^*(\sigma^*)^2 \\ \theta_1^*(\sigma^*)^2 & \eta_1^*(\sigma^*)^2 & \theta_2^*(\sigma^*)^2 & (\sigma^*)^4 \end{pmatrix}.$$

定理 2.5 令 $\alpha \in (0,2)$ 和 $\delta/\sqrt{\Delta} \equiv r \in [0, \infty)$。在 [A1], 下，以下结论成立。

(a) 假设 μ_0 已知。若 $\frac{n^{2-\alpha+\tau}}{(M_1 \wedge M_2)_{2\tau}} \to 0$ 对于某个 $0 < \tau \leq 1$ 满足 $\tau < \alpha$，则当$M_1 \to \infty$、$M_2 \to \infty$ 和 $n \to \infty$时，

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{\theta}_1 - \theta_1^* \\ \bar{\eta}_1 - \eta_1^* \\ \bar{\theta}_2 - \theta_2^* \\ \bar{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{K}).$$

(b) 假设 μ_0 未知。

(i) 若 $\frac{n^{1-\alpha+\tau}}{(M_1 \wedge M_2)_{2\tau}} \to 0$ 对于某个 $0 < \tau \leq 1$ 满足 $\tau < \alpha$，则当 $M_1 \to \infty$、$M_2 \to \infty$ 和 $n \to \infty$时，$\breve{\mu}_0 \xrightarrow{p} \mu_0^*$。(ii) 若 $\frac{n^{2-\alpha+\tau}}{(M_1 \wedge M_2)_{2\tau}} \to 0$ 对于某个 $0 < \tau \leq 1$ 满足 $\tau < \alpha$, 则当 $M_1 \to \infty$、$M_2 \to \infty$和 $n \to \infty$时，

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \breve{\mu}_0 - \mu_0^* \\ \breve{\theta}_1 - \theta_1^* \\ \breve{\eta}_1 - \eta_1^* \\ \breve{\theta}_2 - \theta_2^* \\ \breve{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{L}).$$

注释 3

(i) 将渐近方差 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 与 Tonaki 等人 [21], 定理 3.6 中的结果进行比较，可以看出，无论 μ_0 已知还是未知，系数参数的估计量（$\theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2$）都有所改进。(ii) 定理 2.5 表明，当 μ_0 未知时，系数参数估计量的方差是 μ_0已知时的$2\,9(\frac{\mu_0}{\pi^2} + 2)(\frac{\mu_0}{\pi^2} + 5)$倍。

3. Simulations

随机偏微分方程 (1.1) 的数值解由以下方式生成

$$X_{t_i}(y_j, z_k) = \sum_{\ell_1=1}^{K}\sum_{\ell_2=1}^{L} x_{\ell_1,\ell_2}(t_i)e_{\ell_1}^{(1)}(y_j)e_{\ell_2}^{(2)}(z_k), \quad i = 1, ..., N、\ j = 1..... M_1、\ k = 1..... M_2. \quad (3.1)$$

在本次模拟中，参数的真实值为（θ_0^*，θ_1^*，η_1^*，θ_2^*，σ^*）=（0，0.2，0.2，0.2，1）。我们设定 $N = 10^3$、$M_1 = M_2 = 200$、$K = L = 10^4$、$\xi = 0$、$\alpha = 0.5$、$\lambda_{1,1}^* \approx 4.05$。当 $N = 10^3$，$M_1 = M_2 = 200$时，数据量约为 10 GB。我们使用 R 语言计算定理 2.2 和 2.3 中的估计量。(3.1) 的计算时间与 $K \times L$成正比。因此，随机偏微分方程（1.1）数值解的计算时间与 $N \times M_1 \times M_2 \times K \times L$成正比。在本次模拟的设定下，$N \times M_1 \times M_2 \times K \times L = 4 \times 10^{15}$。本次模拟使用了三台配备 Intel Gold 6128（3.4 GHz）处理器的个人计算机，生成随机偏微分方程（1.1）的一条样本路径约需 100 小时。迭代次数为 250 次。

首先，我们估计了 θ_1、η_1、θ_2 和 σ^2。表 1 给出了 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\eta}_1$、$\hat{\theta}_2$ 和$\hat{\sigma}^2$的均值和标准差（s.d.s）的模拟结果，其中$\hat{\theta}_1 = \hat{\kappa}\hat{\theta}_2$ 和$\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}\hat{\theta}_2$。我们设定（$N$，$m_1$，$m_2$，$\alpha$）=（$10^3$，30，30，0。5）、$r \approx 0.98382$ 和 $\theta_2 \approx 0.07267$。从表 1 可以看出，

TABLE 1. ˆ θ_1、ˆη_1、ˆθ_2 和ˆσ^2的模拟结果

	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\sigma}^2$
真实值	0.2	0.2	0.2	1
mean	0.197	0.197	0.197	1.000
s.d.	(0.0027)	(0.0029)	(0.0023)	(0.0161)

ˆ θ_1、ˆη_1、ˆθ_2 和ˆσ^2 的偏差非常小。 θ_1、 η_1、 θ_2 和 σ^2 的估计量具有良好的性能。

接下来，我们估计了 θ_0。表2给出了ˇ θ_0 在 $(N,\ m_1,\ m_2,\ n,\ \alpha,\ \tau)$ =(10$_3$，30，30，50，0。5。0。49) 下的均值和标准差（s.d.）模拟结果。在这种情况下，$\frac{n^{1-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)_{2\tau}} \approx 0.267$。ˇ从表2可以看出， θ_0 的偏差略小。

ˇTABLE 2. θ_0的模拟结果

	$\check{\theta}_0$
真实值	0
mean	-0.359
s.d.	(1.371)

ˇ表3给出了 θ_0 在 $(N,\ m_1,\ m_2,\ n,\ \alpha,\ \tau)$ =(10$_3$，30，30，100，0。5。0。49) 下均值和标准差（s.d.s）的模拟结果。在这种情况下，$\frac{n^{1-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)_{2\tau}} \approx 0.531$。表3显示

ˇTABLE 3. 模拟结果： θ_0

	$\check{\theta}_0$
真实值	0
mean	-0.377
s.d.	(0.946)

ˆ θ_0 具有较小的偏差。

ˇ 表4给出了 θ_0 在（$N,\ m_1,\ m_2,\ n,\ \alpha,\ \tau$） =（10$_3$，30，30，150，0。5。0。49）下均值和标准差（s.d.s）的模拟结果。在这种情况下，$\frac{n^{1-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)_{2\tau}} \approx 0.793$。由此看来，

ˇTABLE 4. 模拟结果： θ_0

	$\check{\theta}_0$
真实值	0
mean	-0.918
s.d.	(0.828)

ˇ 表4中 θ_0 的偏差很小。

我们使用 Tonaki 等人 [21] 中的定理3.3计算了ˆθ^S =(ˆθ_0^S, ˆθ_1^S, ˆη_1^S, ˆθ_2^S, (ˆσ^S)^2)。表5展示了ˆ θ_0^S、ˆθ_1^S、ˆ η_1^S、ˆθ_2^S和(ˆσ^S)^{2}在$(N, m_1, m_2, n, \alpha, \epsilon)$ =(103, 30, 30, 50, 0.5, 0.499)条件下的均值和标准差（s.d.s）的模拟结果。在这种情况下， $\frac{n^{1-\alpha+\epsilon}}{M_1^{2\epsilon}\wedge M_2^{2\epsilon}} \approx 0.25$。从表5看来，ˆ θ_1^S、ˆη_1^S、ˆθ_2^S和(ˆσ^S)^2 的偏差不算太大，但ˆ θ_0^S存在偏差。

表6给出了ˆ θ_0^S、ˆθ_1^S、ˆη_1^S、ˆθ_2^S和(ˆσ^S)^2 在$(N,\ m_1,\ m_2,\ n,\ \alpha,\ \epsilon)$ =(10$_3$，30，30，100，0。5，0。499)时的均值和标准差（s.d.s）的模拟结果。在这种情况下， $\frac{n^{1-\alpha+\epsilon}}{M_1^{2\epsilon}\wedge M_2^{2\epsilon}} \approx 0.50$。表6显示，ˆ θ_0^S 存在偏差，ˆ θ_1^S、ˆη_1^S 和(ˆσ^S)^2 的偏差较小，而ˆ θ_2^S 的性能良好。

TABLE 5. $\hat{}\,\theta_0^S$、$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\theta_2^S$及 $(\hat{}\sigma^S)^2$ 的模拟结果

	$\hat{\theta}_0^S$	$\hat{\theta}_1^S$	$\hat{\eta}_1^S$	$\hat{\theta}_2^S$	$(\hat{}\sigma^S)^2$
真实值	0	0.2	0.2	0.2	1
mean	-1.382	0.161	0.161	0.175	0.758
s.d.	(5.576)	(0.111)	(0.111)	(0.121)	(0.524)

TABLE 6. 模拟结果：$\hat{}\theta_0^S$、$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\theta_2^S$和$(\hat{}\sigma^S)^2$

	$\hat{\theta}_0^S$	$\hat{\theta}_1^S$	$\hat{\eta}_1^S$	$\hat{\theta}_2^S$	$(\hat{}\sigma^S)^2$
真实值	0	0.2	0.2	0.2	1
mean	-1.245	0.187	0.187	0.204	0.882
s.d.	(4.594)	(0.092)	(0.091)	(0.100)	(0.432)

表7给出了$\hat{}\,\theta_0^S$、$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\theta_2^S$和$(\hat{}\sigma^S)^2$在$(N,\ m_1,\ m_2,\ n,\ \alpha,\ \epsilon) = (10_3,\ 30,\ 30,\ 150,\ 0。5,\ 0。499)$时的均值和标准差（s.d.s）的模拟结果。在这种情况下，$\frac{n^{1-\alpha+\epsilon}}{M_1^{2\epsilon}\wedge M_2^{2\epsilon}} \approx 0.75$。根据表7，$\hat{}\,\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$和$\hat{}\,\theta_2^S$的偏差似乎不太大，而$\hat{}\,\theta_0^S$和$(\hat{}\sigma^S)^2$具有

TABLE 7. $\hat{}\,\theta_0^S$、$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\theta_2^S$和 $(\hat{}\sigma^S)$ 的模拟结果[2]

	$\hat{\theta}_0^S$	$\hat{\theta}_1^S$	$\hat{\eta}_1^S$	$\hat{\theta}_2^S$	$(\hat{}\sigma^S)^2$
真实值	0	0.2	0.2	0.2	1
mean	-0.967	0.163	0.163	0.177	0.767
s.d.	(3.333)	(0.070)	(0.069)	(0.076)	(0.329)

偏差。

从表5-7可以看出，当 $n = 100$时，$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\theta_2^S$和$(\hat{}\sigma^S)^2$的性能良好；当 $n = 150$时，$\hat{}\,\theta_0^S$的偏差最小。

$\hat{}$表8汇总了表1-4和表5-7的结果。表8的第2、3和4行分别展示了在$(N, m_1, m_2, n, \alpha, \tau)$为$=(103,$ 30, 30, 50, 0.5.0.49)、(103, 30, 30, 100, 0.5.0.49)和(103, 30, 30, 150, 0.5.0.49)时，$\theta = (\check{}\theta_0, \hat{}\theta_1, \hat{}\eta_1, \hat{}\theta_2,$ $\hat{}\sigma^2)$ 的结果。表 8 的第 6 、 7 和 8 行分别展示了在 $(N, m_1, m_2, n, \alpha, \epsilon)$ 为 $=$(103, 30, 30, 50, 0.5.0.49) 、(103, 30, 30, 100, 0.5.0.49)和(103, 30, 30, 150, 0.5.0.49)时，$\hat{}\theta^S = (\hat{}\theta_0^S, \hat{}\theta_1^S, \hat{}\eta_1^S, \hat{}\theta_2^S, (\hat{}\sigma^S)^2)$的结果。表8显示，对于所有情形n=50、100和150，$\check{}\,\theta_0$、$\hat{}\theta_1$、$\hat{}\eta_1$、$\hat{}\theta_2$ 和$\hat{}\sigma^2$ 的偏差分别小于$\hat{}\,\theta_0^S$、$\hat{}\theta_1^S$、$\hat{}\eta_1^S$、$\hat{}\,\theta_2^S$和$(\hat{}\sigma^S)^2$, 的偏差。这表明$\hat{}\theta = (\check{}\theta_0, \hat{}\theta_1, \hat{}\eta_1, \hat{}\theta_2, \hat{}\sigma^2)$优于$\hat{}\theta^S = (\hat{}\theta_0^S, \hat{}\theta_1^S, \hat{}\eta_1^S, \hat{}\theta_2^S, (\hat{}\sigma^S)^2)$。

4. PROOFS

我们采用以下记号。

1. 令 $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$。2. 对于 $a, b \in \mathbb{R}$，若存在常数 $C > 0$ 使得 $a \lesssim b$ if $|a| \le C|b|$，则记为 $a \lesssim b$ if $|a| \le C|b|$。3. 对于两个函数 f, g：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，若在 $x = a$ 的某个邻域内 $f(x) \lesssim g(x)$，则记为 $f(x) \lesssim g(x)\ (x \to a)$。4. 对于 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 和 f：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，记 $\partial_{x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$，$\partial_x f(x) = (\partial_{x_1} f(x) \ldots, \partial_{x_d} f(x))$ 以及 $\partial_x^2 f(x) = (\partial_{x_j} \partial_{x_i} f(x))_{i,j=1}^d$。5. 令 $\mathbf{1}_A$ 为 A 的示性函数。6. 对于函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 及正数 ϵ，我们定义

$$D_\epsilon f(x) = f(x + \epsilon) - f(x).$$

请注意，$D_\epsilon^2 f(x) = D_\epsilon[D_\epsilon f](x) = f(x + 2\epsilon) - 2f(x + \epsilon) + f(x)$。7. For a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and 一个正iti值 b数 ϵ，我们设

$$D_{1,\epsilon} f(x, y) = f(x + \epsilon, y) - f(x, y), \quad D_{2,\epsilon} f(x) = f(x, y + \epsilon) - f(x, y).$$

TABLE 8. 表1-4和表5-7汇总

		真实值	$\check{\theta}_0$ 0	$\hat{\theta}_1$ 0.2	$\hat{\eta}_1$ 0.2	$\hat{\theta}_2$ 0.2	$\hat{\sigma}^2$ 1
模拟结果 $\theta = (\check{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\sigma}^2)$	$n = 50$	mean	-0.359				
		s.d.	(1.371)				
	$n = 100$	mean	-0.377	0.197	0.197	0.197	1.000
		s.d.	(0.946)	(0.0027)	(0.0029)	(0.0023)	(0.0161)
	$n = 150$	mean	-0.918				
		s.d.	(0.828)				
		真实值	$\hat{\theta}_0^S$ 0	$\hat{\theta}_1^S$ 0.2	$\hat{\eta}_1^S$ 0.2	$\hat{\theta}_2^S$ 0.2	$(\hat{\sigma}^S)^2$ 1
模拟结果 $\theta^S = (\hat{\theta}_0^S, \hat{\theta}_1^S, \hat{\eta}_1^S, \hat{\theta}_2^S, (\hat{\sigma}^S)^2)$	$n = 50$	mean	-1.382	0.161	0.161	0.175	0.758
		s.d.	(5.576)	(0.111)	(0.111)	(0.121)	(0.524)
	$n = 100$	mean	-1.245	0.187	0.187	0.204	0.882
		s.d.	(4.594)	(0.092)	(0.091)	(0.100)	(0.432)
	$n = 150$	mean	-0.967	0.163	0.163	0.177	0.767
		s.d.	(3.333)	(0.070)	(0.069)	(0.076)	(0.329)

4.1. **第 2.1 和 2.2 小节结果的证明**。令

$$A_{i,\ell_1,\ell_2} = -\langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})\mathrm{e}^{-(i-1)\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta},$$

$$B^{(1)}_{i,\ell_1,\ell_2} = -\frac{\sigma(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})}{\lambda^{\alpha/2}_{\ell_1,\ell_2}} \int_0^{(i-1)\Delta} \mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}((i-1)\Delta - s)} \mathrm{d}w_{\ell_1,\ell_2}(s),$$

$$B^{(2)}_{i,\ell_1,\ell_2} = \frac{\sigma}{\lambda^{\alpha/2}_{\ell_1,\ell_2}} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}(i\Delta - s)} \mathrm{d}w_{\ell_1,\ell_2}(s),$$

以及 $B_{i,\ell_1,\ell_2} = B^{(1)}_{i\,\ell_1,,\ell_2} + B^{(2)}_{i\,\ell_1,,\ell_2}$。由 Q_1-维纳过程驱动的随机偏微分方程 **(1.1)** 的坐标过程增量可分解为

$$x_{\ell_1,\ell_2}(t_i) - x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i-1}) = A_{i,\ell_1,\ell_2} + B_{i,\ell_1,\ell_2}.$$

命题 2.1 的证明。对于 $y,\ z \in [0,2)$，定义

$$F_\alpha(y,z) = \sum_{\ell_1,\ell_2 \geq 1} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}} \cos(\pi\ell_1 y)\cos(\pi\ell_2 z). \tag{4.1}$$

Let

$$F_{j,k} = \sum_{\ell_1,\ell_2 \geq 1} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}} (e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j) - e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))^2 (e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k) - e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1}))^2. \tag{4.2}$$

我们首先证明

$$\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2] = \sigma^2 F_{j,k} + R_{i,j,k}, \tag{4.3}$$

其中 $R_{i,\ j,\ k}$ 满足 $\sum_{i=1}^N R_{i,\ j,\ k} \lesssim F_{j,\ k}$。

注意到

$$T_{i,j,k}X = \sum_{\ell_1,\ell_2 \geq 1} (x_{\ell_1,\ell_2}(t_i) - x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i-1}))(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j) - e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k) - e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1})).$$

由 $\{B_{i,\ell_1,\ell_2}\}_{\ell_1,\ \ell_2 \geq 1}$ 和 $\mathbb{E}[B_{i,\ell_1,\ell_2}] = 0$ 的独立性可知，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2] = &\sum_{\ell_1,\ell_1',\ell_2,\ell_2' \geq 1} A_{i,\ell_1,\ell_2}A_{i,\ell_1',\ell_2'} \\ &\times (e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j) - e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k) - e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1})) \\ &\times (e^{(1)}_{\ell_1'}(\widetilde{y}_j) - e^{(1)}_{\ell_1'}(\widetilde{y}_{j-1}))(e^{(2)}_{\ell_2'}(\widetilde{z}_k) - e^{(2)}_{\ell_2'}(\widetilde{z}_{k-1})) \\ &+ \sum_{\ell_1,\ell_2 \geq 1} \mathbb{E}[B^2_{i,\ell_1,\ell_2}](e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j) - e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))^2 (e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k) - e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1}))^2\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} A_{i,\ell_1,\ell_2}(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j) - e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k) - e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1})) \right)^2$$
$$+ \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \mathbb{E}[B_{i,\ell_1,\ell_2}^2](e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j) - e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))^2(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k) - e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1}))^2$$
$$=: S_1 + S_2.$$

由于 $\|A_\theta^{(1+\alpha)/2}\xi\|^2 = \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \lambda_{\ell_1}^{1+\alpha}{}_{,\ell_2}\langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle^2$，由施瓦茨不等式可得。

$$S_1 = \left(\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \lambda_{\ell_1,\ell_2}^{(1+\alpha)/2}\langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle \right.$$
$$\left. \times \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{(1+\alpha)/2}} \mathrm{e}^{-(i-1)\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j) - e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k) - e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1})) \right)^2$$
$$\leq \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}\langle \xi, e_{\ell_1,\ell_2}\rangle^2$$
$$\times \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})^2}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-2(i-1)\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j) - e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))^2(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k) - e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1}))^2$$
$$=: \|A_\theta^{(1+\alpha)/2}\xi\|^2 G_{i,j,k},$$

其中$G_{i,j,k}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N} G_{i,j,k} \leq \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}} (e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j) - e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))^2(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k) - e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1}))^2 = F_{j,k}. \tag{4.4}$$

与此同时，有

$$\mathbb{E}[B_{i,\ell_1,\ell_2}^2] = \frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{2} \mathrm{e}^{-2(i-1)\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}\right),$$

因此可得

$$S_2 = \sigma^2 \left(F_{j,k} - \frac{G_{i,j,k}}{2}\right).$$

因此，由 [A1]和 (4.4)，可得 (4.3)。

接下来证明

$$F_{j,k} = \Delta^\alpha \mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j)/2} \mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k)/2} \psi_{r,\alpha}(\theta_2) + O(\Delta^{1+\alpha}), \tag{4.5}$$

其中 $\psi_{r,\alpha}(\theta_2)$ 由 (2.4) 给出。

由引理 4.10 可知

$$F_{j,k} = 4\mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j)/2} \mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k)/2} D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(0,0) + O(\Delta^{1+\alpha}),$$

因此只需计算 $D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(0,0)$。设

$$f_\alpha(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^{1+\alpha}}, \quad G_{r,\alpha}(x,y:\theta_2) = f_\alpha(\theta_2\pi^2(x^2+y^2))(\cos(\pi r x)-1)(\cos(\pi r y)-1).$$

由引理 4.1 可知，对于 $\alpha \in (0,2)$ 和 $\delta = r\sqrt{\Delta}$,

$$D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(0,0) = \Delta^{1+\alpha} \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f_\alpha(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)(\cos(\pi r\ell_1\sqrt{\Delta})-1)(\cos(\pi r\ell_2\sqrt{\Delta})-1)$$
$$= \Delta^\alpha \iint_{\mathbb{R}_+^2} G_{r,\alpha}(x,y:\theta_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(\Delta^{1+\alpha}). \tag{4.6}$$

由于

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}J_0(x),$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}J_0(\sqrt{2}x),$$

式（4.6）中的积分可计算为

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}_+^2} G_{r,\alpha}(x,y:\theta_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\theta_2\pi^2}\int_0^\infty z f_\alpha(z^2)\int_0^{\pi/2}\Big(\cos\Big(\frac{rz}{\sqrt{\theta_2}}\cos(t)\Big)-1\Big)\Big(\cos\Big(\frac{rz}{\sqrt{\theta_2}}\sin(t)\Big)-1\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\theta_2\pi}\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-z^2}}{z^{1+2\alpha}}\Big(J_0\Big(\frac{\sqrt{2}rz}{\sqrt{\theta_2}}\Big)-2J_0\Big(\frac{rz}{\sqrt{\theta_2}}\Big)+1\Big)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\psi_{r,\alpha}(\theta_2)}{4},
\end{aligned}$$

因此，我们得到（4.5）。证明至此完成。 □

对于 $b\in(0,1/2)$ 和 $u,v\in L^2((b,1-b)^2)$，记

$$\langle u,v\rangle_b=\frac{1}{(1-2b)^2}\int_b^{1-b}\int_b^{1-b}u(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \|u\|_b=\sqrt{\langle u,u\rangle_b}.$$

我们定义 $V(\nu)=2(V_{(1)}(\nu)+V_{(2)}(\nu))$，其中

$$V^{(j)}(\nu)=\Big(\big\langle\partial_{\nu_p}f_{r/\sqrt{j},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu),\partial_{\nu_q}f_{r/\sqrt{j},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu)\big\rangle_b\Big)_{1\le p,q\le 4}.$$

令 $\bar{y}_j=(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j)/2$，$\bar{z}_k=(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k)/2$。对比函数 $K_{m,N}$ 可表示为$K_{m,N}(\nu)=K_{m}^{(1)},_N(\nu)+K_{m}^{(2)},_N(\nu)$，其中

$$\begin{aligned}
K_{m,N}^{(1)}(\nu)&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\Big(\frac{1}{N\Delta^\alpha}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2-f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\Big)^2,\\
K_{m,N}^{(2)}(\nu)&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\Big(\frac{1}{N(2\Delta)^\alpha}\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{T}_{i,j,k}X)^2-f_{r/\sqrt{2},\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\Big)^2.
\end{aligned}$$

令 $K(\nu,\nu^*)=K^{(1)}(\nu,\nu^*)+K^{(2)}(\nu,\nu^*)$，其中

$$K^{(p)}(\nu,\nu^*)=\|f_{r/\sqrt{p},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu)-f_{r/\sqrt{p},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu^*)\|_b^2.$$

定理 2.2 的证明。由中值定理可得

$$-\sqrt{mN}\partial_\nu K_{m,N}(\nu^*)^{\mathsf{T}}=\int_0^1\partial_\nu^2 K_{m,N}(\nu^*+u(\hat{\nu}-\nu^*))\mathrm{d}u\sqrt{mN}(\hat{\nu}-\nu^*).$$

为完成证明，只需证明

$$\hat{\nu}\xrightarrow{p}\nu^*, \tag{4.7}$$

$$-\sqrt{MN}\partial_\nu K_{m,N}(\nu^*)^{\mathsf{T}}=O_p(1), \tag{4.8}$$

$$\int_0^1\partial_\nu^2 K_{m,N}(\nu^*+u(\hat{\nu}-\nu^*))\mathrm{d}u\xrightarrow{p}V(\nu^*)\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{R}). \tag{4.9}$$

我们将通过以下五个步骤证明（4.7）—（4.9）。在步骤1和步骤2中，我们验证 $K(\nu,\ \nu^*)$ 在 $\nu=\nu^*$ 处取得唯一最小值，并证明 $K_{m,\ N}(\nu)$ 关于 $\nu\in\Xi$ 一致地依概率收敛于 $K(\nu,\ \nu^*)$，以此证明（4.7）；步骤3用于证明（4.8）。步骤4证明（4.9）依概率收敛，步骤5则确认 $V(\nu^*)$ 非奇异。

步骤1： 我们证明 $K(\nu,\ \nu^*)=0$ 当且仅当 $\nu=\nu^*$。若 $K(\nu,\ \nu^*)=0$，则

$$\|f_{r,\alpha}(\cdot,\cdot:\nu)-f_{r,\alpha}(\cdot,\cdot:\nu^*)\|_b=\|f_{r/\sqrt{2},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu)-f_{r/\sqrt{2},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu^*)\|_b=0,$$

也就是说，对于任意 $y,z\in[b,1-b]$，$f_{r,\alpha}(y,z\vdots\ \nu)$、$=f_{r,\alpha}(y,z\colon\ \nu^*)$ 和 $f_{r/\sqrt{2},\alpha}(y,z\colon\ \nu)=f_{r/\sqrt{2},\alpha}(y,z\colon\ \nu^*)$。因此，对于任意 $y,z\in[b,1-b]$，有

$$\begin{aligned}
\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2)\mathrm{e}^{-\kappa y}\mathrm{e}^{-\eta z}&=(\sigma^*)^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2^*)\mathrm{e}^{-\kappa^* y}\mathrm{e}^{-\eta^* z},\\
\sigma^2\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)\mathrm{e}^{-\kappa y}\mathrm{e}^{-\eta z}&=(\sigma^*)^2\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2^*)\mathrm{e}^{-\kappa^* y}\mathrm{e}^{-\eta^* z},
\end{aligned}$$

由此得到 $\kappa = \kappa^*$, $\eta = \eta^*$, $\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2) = (\sigma^*)^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2^*)$ 以及 $\sigma^2\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2) = (\sigma^*)^2\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2^*)$。注意到 $\psi_{r,\alpha}(\theta_2)/\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2) = \psi_{\bar{r},\alpha}(\theta_2^*)/\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2^*)$，且函数

$$\theta_2 \mapsto \psi_{r,\alpha}(\theta_2)/\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)$$

对于 $\theta_2 > \theta_2(r, \alpha)$ 是单射。由引理 4.12 和 4.13 可知，我们从 $\psi_{r,\alpha}(\theta_2) > 0$得到 $\theta_2 = \theta_2^*$ 和 $\sigma^2 = (\sigma^*)^2$。此外，若 $\nu = \nu^*$，则 $K(\nu, \nu^*) = 0$。因此，所需结果得证。

步骤 2： 我们证明

$$\sup_{\nu\in\Xi} |K_{m,N}(\nu) - K(\nu, \nu^*)| \xrightarrow{p} 0, \quad m, N \to \infty.$$

令

$$\zeta_{i,j,k} = \frac{(T_{i,j,k}X)^2}{\Delta^\alpha} - f_{r,\alpha}(\bar{y}_j, \bar{z}_k; \nu^*), \quad Z_{j,k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,j,k},$$

以及 $\phi_{r,\alpha}(y, z; \nu) = f_{r,\alpha}(y, z; \nu^*) - f_{r,\alpha}(y, z; \nu)$，我们可以写成

$$K_{m,N}^{(1)}(\nu) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} Z_{j,k}^2 + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} Z_{j,k}\phi_{r,\alpha}(\bar{y}_j, \bar{z}_k : \nu) + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} \phi_{r,\alpha}^2(\bar{y}_j, \bar{z}_k : \nu),$$

因此有

$$\begin{aligned}\sup_{\nu\in\Xi} |K_{m,N}^{(1)}(\nu) - K^{(1)}(\nu, \nu^*)| \le{}& \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} Z_{j,k}^2 + 2\sup_{\nu\in\Xi}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} Z_{j,k}\phi_{r,\alpha}(\bar{y}_j, \bar{z}_k : \nu)\right| \\ &+ \sup_{\nu\in\Xi}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} \phi_{r,\alpha}^2(\bar{y}_j, \bar{z}_k : \nu) - K^{(1)}(\nu, \nu^*)\right|. \end{aligned} \tag{4.10}$$

由于函数 $(y, z, \nu) \mapsto \phi_{r,\alpha}(y, z; \nu)$ 在紧集 $[b, 1-b]^2 \times \Xi$ 上连续，(4.10) 的最后一项收敛于 0。此外，由命题 2.1 可得

$$\zeta_{i,j,k} = \Delta^{-\alpha}\big((T_{i,j,k}X)^2 - \mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2]\big) + \mathcal{R}_{i,j,k},$$

其中，$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_{i,j,k} = O(1)$ 关于 j, k一致成立，由伊瑟利斯定理和引理 4.11 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\zeta_{i,j,k}\zeta_{i',j,k}] &= \Delta^{-2\alpha}\mathrm{Cov}[(T_{i,j,k}X)^2, (T_{i',j,k}X)^2] + \mathcal{R}_{i,j,k}\mathcal{R}_{i',j,k} \\ &= 2\Delta^{-2\alpha}\mathrm{Cov}[T_{i,j,k}X, T_{i',j,k}X]^2 + \mathcal{R}_{i,j,k}\mathcal{R}_{i',j,k} \\ &= O\left(\frac{1}{(|i-i'|+1)^2}\right) + \mathcal{R}_{i,j,k}\mathcal{R}_{i',j,k}.\end{aligned}$$

因此，由施瓦茨不等式以及$\phi_{r,\alpha}$ 的有界性可得

$$\mathbb{E}[Z_{j,k}^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i,i'=1}^{N} \mathbb{E}[\zeta_{i,j,k}\zeta_{i',j,k}] = O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ uniformly in } j, k,$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{\nu\in\Xi}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} Z_{j,k}\phi_{r,\alpha}(\bar{y}_j, \bar{z}_k : \nu)\right|^2\right] &\lesssim \frac{1}{m^2}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\sum_{j,j'=1}^{m_1} \mathbb{E}[Z_{j,k}^2]^{1/2}\mathbb{E}[Z_{j',k'}^2]^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} \mathbb{E}[Z_{j,k}^2]^{1/2}\right)^2 = O\left(\frac{1}{N}\right),\end{aligned}$$

这意味着 (4.10) 的第一项和第二项依概率收敛于 0。注意到 $T_{i,j,k}X = T_{i,j,k}X + T_{i+1,j,k}X$，我们可以证明

$$\sup_{\nu\in\Xi} |K_{m,N}^{(2)}(\nu) - K^{(2)}(\nu, \nu^*)| \xrightarrow{p} 0, \quad m, N \to \infty$$

以同样的方式，因此我们得到所需的结果。

步骤 3： 我们证明（4.8）。由引理 4.11 和命题 2.1 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left[\frac{1}{\sqrt{mN}\Delta^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\right]\\
&=\frac{1}{mN\Delta^{2\alpha}}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\sum_{i,i'=1}^{N}\mathrm{Cov}[(T_{i,j,k}X)^2,(T_{i',j',k'}X)^2]\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_{j'},\bar{z}_{k'}:\nu^*)\\
&=\frac{2}{mN\Delta^{2\alpha}}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\sum_{i,i'=1}^{N}\mathrm{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]^2\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_{j'},\bar{z}_{k'}:\nu^*)\\
&=O(1)
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2]-\Delta^{\alpha}f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\Big)=O(\Delta^{\alpha})$$

关于 j，k一致成立。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{mN}\partial_\nu K_{m,N}^{(1)}(\nu^*)^{\mathsf{T}}\\
&=\sqrt{mN}\times\frac{-2}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{N\Delta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2-f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\right)\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\\
&=\frac{-2}{\sqrt{mN}\Delta^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{N}\Big((T_{i,j,k}X)^2-\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2]\Big)\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{mN}\Delta^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{N}\Big(\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2]-\Delta^{\alpha}f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\Big)\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\\
&=O_p(1).
\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $\sqrt{mN}\partial_\nu K_m^{(2)}$，$N(\nu^*)^{\mathsf{T}}$是一致紧的，因此可得到所需结果。

步骤 4： 我们证明，对于$\epsilon_{m,N}\to 0$,

$$\sup_{|\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}|\partial_\nu^2 K_{m,N}(\nu)-V(\nu^*)|\xrightarrow{p}0,\quad m,N\to\infty. \tag{4.11}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\partial_\nu^2 K_{m,N}^{(1)}(\nu)&=\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)^{\mathsf{T}}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\\
&\quad-\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{N\Delta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2-f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\right)\partial_\nu^2 f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\\
&=:\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\left\{g_1(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)+\left(\frac{1}{N\Delta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2\right)g_2(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu)\right\}.
\end{aligned}$$

由于函数$(y,\ z,\ \nu)\mapsto g_\ell(y,\ z:\nu)$在紧集 $[b,1-b]^2\times\Xi$上连续，并且

$$\sup_{m,N}\mathbb{E}\left[\frac{1}{mN\Delta^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2\right]<\infty,$$

由此可得，当 $m,\ N\to\infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{|\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}|\partial_\nu^2 K_{m,N}^{(1)}(\nu)-\partial_\nu^2 K_{m,N}^{(1)}(\nu^*)|\\
&\le\sup_{\substack{y,z\in[b,1-b],\\|\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}}|g_1(y,z:\nu)-g_1(y,z:\nu^*)|
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{mN\Delta^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2\right)\sup_{\substack{y,z\in[b,1-b],\\ |\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}}|g_2(y,z:\nu)-g_2(y,z:\nu^*)|$$

$\xrightarrow{p}0.$

按照相同的推理，可得当 $m,N\to\infty$时，$\sup_{|\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}|\partial_\nu^2K_{m}^{(2)}{}_{,N}(\nu)-\partial_\nu^2K_{m}^{(2)}{}_{,N}(\nu^*)|\xrightarrow{p}0$，因此

$$\sup_{|\nu-\nu^*|\le\epsilon_{m,N}}|\partial_\nu^2K_{m,N}(\nu)-\partial_\nu^2K_{m,N}(\nu^*)|\xrightarrow{p}0. \tag{4.12}$$

与此同时，与步骤 2 相同，可得当 $m,N\to\infty$时，

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)^{\mathsf{T}}\partial_\nu f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\to V^{(1)}(\nu^*),$$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\left(\frac{1}{N\Delta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{N}(T_{i,j,k}X)^2-f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\right)\partial_\nu^2 f_{r,\alpha}(\bar{y}_j,\bar{z}_k:\nu^*)\xrightarrow{p}0,$$

因此我们有

$$\partial_\nu^2K_{m,N}^{(1)}(\nu^*)\xrightarrow{p}2V^{(1)}(\nu^*),\quad m,N\to\infty.$$

由于类似地可证明，$\partial_\nu^2K_{m}^{(2)}{}_{,N}(\nu^*)$依概率收敛于 $2V^{(2)}(\nu^*)$，我们得到

$$\partial_\nu^2K_{m,N}(\nu^*)\xrightarrow{p}V(\nu^*),\quad m,N\to\infty,$$

这与（4.12）结合可得（4.11）。

步骤 5： 我们证明 $V=V(\nu^*)$ 是严格正定的。设 $g_p=\partial_{\nu_p}f_{r,\alpha}(\cdot,\cdot:\nu^*)$ 和 $h_p=\partial_{\nu_p}f_{r/\sqrt{2},\alpha}(\cdot,\cdot:\nu^*)$，其中 $p=1,\dots,4$。由此可知，对于任意 $u=(u_p)_{p=1}^4\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$，

$$u^{\mathsf{T}}Vu=\sum_{p,q=1}^{4}u_pu_q\langle g_p,g_q\rangle_b+\sum_{p,q=1}^{4}u_pu_q\langle h_p,h_q\rangle_b=\left\|\sum_{p=1}^{4}u_pg_p\right\|_b^2+\left\|\sum_{p=1}^{4}u_ph_p\right\|_b^2\ge0.$$

现在，我们假设存在 $u\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ 使得

$$\left\|\sum_{p=1}^{4}u_pg_p\right\|_b^2+\left\|\sum_{p=1}^{4}u_ph_p\right\|_b^2=0. \tag{4.13}$$

由于

$$\sum_{p=1}^{4}u_pg_p(y,z)=0,\quad\sum_{p=1}^{4}u_ph_p(y,z)=0,\quad(y,z)\in[b,1-b]^2$$

且 $g=(g_p)_{p=1}^4$ 由下式给出

$$g(y,z)=\mathrm{e}^{-\kappa y}\mathrm{e}^{-\eta z}(-y\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2),-z\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2),\sigma^2\psi'_{r,\alpha}(\theta_2),\psi_{r,\alpha}(\theta_2)),$$

我们有

$$u_1\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2)=0, \tag{4.14}$$

$$u_2\sigma^2\psi_{r,\alpha}(\theta_2)=0, \tag{4.15}$$

$$u_3\sigma^2\psi'_{r,\alpha}(\theta_2)+u_4\psi_{r,\alpha}(\theta_2)=0, \tag{4.16}$$

$$u_3\sigma^2\psi'_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)+u_4\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)=0. \tag{4.17}$$

注意，$\psi_{r,\alpha}(\theta_2)\neq0$。(4.14) 和 (4.15) 得出 $u_1=u_2=0$，而 (4.16) 和 (4.17) 蕴含

$$0=u_4(-\psi_{r,\alpha}(\theta_2)\psi'_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)+\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)\psi'_{r,\alpha}(\theta_2))=u_4\psi^2_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)\left(\frac{\psi_{r,\alpha}(\theta_2)}{\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)}\right)'.$$

由于 $(\psi_{r,\alpha}(\theta_2)/\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2))'\neq0$ 对于 $\alpha\in(0,2)$ 成立，这由引理 4.12 和 4.13 可知，因此我们得到 $u_4=0$ 且 $u_3=0$。这与假设 $u\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ 矛盾。因此，不存在满足 (4.13) 的 $u\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$，这意味着 $u^{\mathsf{T}}Vu>0$。□

定理 2.3 的证明。(ii) 详细证明请参见 Tonaki 等人 [21]的定理3.3。我们首先证明,

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2-(\sigma_{1,1}^*)^2\\ \hat{\sigma}_{1,2}^2-(\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix}\xrightarrow{d}N\left(0,2\begin{pmatrix}(\sigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\sigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}\right). \tag{4.18}$$

为了证明 (4.18)，只需验证在 $n^{2-\alpha+\tau}(M_1\wedge M_2)_{2\tau}\to 0$ 下，对于某个 $0<\tau\le 1$ 满足 $\tau<\alpha$,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_{\ell_1,\ell_2}^2-\sum_{i=1}^{n}(x_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_i)-x_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_{i-1}))^2\right)=o_p(1),$$

也就是说，对于 $k=1,2,3$,

$$n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{k,i}^2=o_p(1),$$

~其中 $\Delta_i X(y,z)=X_{\widetilde{t}_i}(y,z)-X_{\widetilde{t}_{i-1}}(y,z)$,

$$\mathcal{B}_{1,i}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}\widetilde{\Delta}_i X(y_j,z_k)\sin(\pi\ell_1 y_j)\sin(\pi\ell_2 z_k)(\mathrm{e}^{\hat{\kappa}y_j/2}\mathrm{e}^{\hat{\eta}z_k/2}-\mathrm{e}^{\kappa^* y_j/2}\mathrm{e}^{\eta^* z_k/2}),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{2,i}=&\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}\widetilde{\Delta}_i X(y_j,z_k)\\ &\times\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{y_{j-1}}^{y_j}(\sin(\pi\ell_1 y_j)\sin(\pi\ell_2 z_k)\mathrm{e}^{\kappa^* y_j/2}\mathrm{e}^{\eta^* z_k/2}-\sin(\pi\ell_1 y)\sin(\pi\ell_2 z)\mathrm{e}^{\kappa^* y/2}\mathrm{e}^{\eta^* z/2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{3,i}=\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{y_{j-1}}^{y_j}(\widetilde{\Delta}_i X(y_j,z_k)-\widetilde{\Delta}_i X(y,z))\sin(\pi\ell_1 y)\sin(\pi\ell_2 z)\mathrm{e}^{\kappa^* y/2}\mathrm{e}^{\eta^* z/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由泰勒展开可得

$$n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{1,i}^2\le\mathcal{C}_n\times mN(|\hat{\kappa}-\kappa^*|^2+|\hat{\eta}-\eta^*|^2),$$

其中 $\mathcal{C}_n$ 满足：对于 $\epsilon_1,\epsilon_2>0$,

$$\mathcal{C}_n\lesssim\frac{n}{mN}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}(\widetilde{\Delta}_i X)^2(y_j,z_k)$$

在 $\Omega_1=\{|\hat{\kappa}-\kappa^*|+|\hat{\eta}-\eta^*|<\epsilon_1\}$ 上，且

$$P(|\mathcal{C}_n|>\epsilon_2)\lesssim\frac{n^{2-\alpha}}{\epsilon_2 mN}+P(\Omega_1^{\mathrm{c}}),$$

结合 $\frac{n^{2-\alpha}}{mN}\to 0$ 和定理 2.2，可得 $n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{1,i}^2=o_p(1)$。注意到$\mathbb{E}[\mathcal{B}_{2,i}^2]\lesssim\frac{1}{n^\alpha(M_1\wedge M_2)^2}$，我们看到，在$n^{2-\alpha+\tau}(M_1\wedge M_2)_{2\tau}\to 0$ 条件下,

$$n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{2,i}^2=O_p\left(\frac{n^{2-\alpha}}{(M_1\wedge M_2)^2}\right)=o_p(1).$$

由于可知，对于 $0<\tau\le 1$ 且满足 $\tau<\alpha$,

$$\mathbb{E}\big[(\widetilde{\Delta}_i X(y_j,z_k)-\widetilde{\Delta}_i X(y,z))^2\big]\lesssim\frac{1}{(M_1\wedge M_2)^{2\tau}}\sum_{\ell_1,\ell_2\ge 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}/n}}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha-\tau}}=O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\tau}(M_1\wedge M_2)^{2\tau}}\right)$$

在 i、j、k和（y、z）$\in$（y_{j-1}、y_j]$\times$（z_{k-1}、z_k]中一致地，我们得到，在$\frac{n^{2-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)^{2\tau}}\to 0$,

$$\begin{aligned}n\sum_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{3,i}^2&\lesssim n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_1}\sum_{k=1}^{M_2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\big(\widetilde{\Delta}_i X(y_j,z_k)-\widetilde{\Delta}_i X(y,z)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=O_p\left(\frac{n^{2-\alpha+\tau}}{(M_1\wedge M_2)^{2\tau}}\right)=o_p(1).\end{aligned}$$

接下来证明（2.5）。由此可得

$$\check{\theta}_2 = \frac{\check{\lambda}_{1,2} - \check{\lambda}_{1,1}}{3\pi^2} = \frac{(\hat{\sigma}^2)^{1/\alpha}}{3\pi^2}((\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{-1/\alpha} - (\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha})$$

that

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\check{\theta}_2 - \theta_2^*) &= \frac{\sqrt{n}}{3\pi^2}\Big[(\hat{\sigma}^2)^{1/\alpha}\{(\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{-1/\alpha} - (\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha}\} - (\sigma^*)^{2/\alpha}\{(\sigma_{1,2}^*)^{-2/\alpha} - (\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha}\}\Big] \\ &= \frac{\sqrt{n}}{3\pi^2}\{(\hat{\sigma}^2)^{1/\alpha} - (\sigma^*)^{2/\alpha}\}\{(\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{-1/\alpha} - (\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha}\} \\ &\quad + \frac{\sqrt{n}(\sigma^*)^{2/\alpha}}{3\pi^2}\Big[\{(\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{-1/\alpha} - (\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha}\} - \{(\sigma_{1,2}^*)^{-2/\alpha} - (\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha}\}\Big].\end{aligned}$$

令 $F(x,y) = y^{-1/\alpha} - x^{-1/\alpha}$ 对 $x, y > 0$成立。由于有

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\Big[\{(\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{-1/\alpha} - (\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha}\} - \{(\sigma_{1,2}^*)^{-2/\alpha} - (\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha}\}\Big] \\ &= \sqrt{n}\{F(\hat{\sigma}_{1,1}^2, \hat{\sigma}_{1,2}^2) - F((\sigma_{1,1}^*)^2, (\sigma_{1,2}^*)^2)\} \\ &= \partial F((\sigma_{1,1}^*)^2, (\sigma_{1,2}^*)^2)\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\alpha}((\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha-2}, -(\sigma_{1,2}^*)^{-2/\alpha-2})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1),\end{aligned}$$

由 $\sqrt{mN}\{(\hat{\sigma}^2)^{1/\alpha} - (\sigma^*)^{2/\alpha}\} = O_p(1)$ 可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\check{\theta}_2 - \theta_2^*) &= \frac{(\sigma^*)^{2/\alpha}}{3\pi^2\alpha}((\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha-2}, -(\sigma_{1,2}^*)^{-2/\alpha-2})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1) \\ &= \frac{(\sigma^*)^{-2}}{3\pi^2\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1).\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\check{\theta}_0 - \theta_0^*) &= -\sqrt{n}(\check{\lambda}_{1,1} - \lambda_{1,1}^*) + o_p(1) \\ &= -(\sigma^*)^{2/\alpha}\sqrt{n}\{(\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{-1/\alpha} - (\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha}\} + o_p(1) \\ &= -\frac{(\sigma^*)^{2/\alpha}}{\alpha}(\sigma_{1,1}^*)^{-2/\alpha-2}\sqrt{n}\{\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2\} + o_p(1) \\ &= -\frac{(\sigma^*)^{-2}}{\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}, 0)\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1).\end{aligned}$$

此外，有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\check{\theta}_1 - \theta_1^*) &= \sqrt{n}(\hat{\kappa} - \kappa^*)\check{\theta}_2 + \kappa^*\sqrt{n}(\check{\theta}_2 - \theta_2^*) \\ &= \frac{\kappa^*(\sigma^*)^{-2}}{3\pi^2\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1), \\ \sqrt{n}(\check{\eta}_1 - \eta_1^*) &= \frac{\eta^*(\sigma^*)^{-2}}{3\pi^2\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1), \\ \sqrt{n}(\check{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2) &= \frac{(\theta_2^*)^{-1}}{3\pi^2\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha})\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1).\end{aligned}$$

因此，令

$$\boldsymbol{v}_1 = (-3\pi^2, \kappa^*, \eta^*, 1, (\sigma^*)^2/\theta_2^*)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{v}_2 = (0, \kappa^*, \eta^*, 1, (\sigma^*)^2/\theta_2^*)^\mathsf{T},$$

由（4.18）可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\begin{pmatrix}\check{\theta}_0 - \theta_0^* \\ \check{\theta}_1 - \theta_1^* \\ \check{\eta}_1 - \eta_1^* \\ \check{\theta}_2 - \theta_2^* \\ \check{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2\end{pmatrix} &= \frac{(\sigma^*)^{-2}}{3\pi^2\alpha}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_1, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_2)\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{1,1}^2 - (\sigma_{1,1}^*)^2 \\ \hat{\sigma}_{1,2}^2 - (\sigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} N(0, \mathcal{J}),\end{aligned}$$

其中， $\mathcal{J}$由 $\boldsymbol{\theta}_{-1}^* = (\theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, (\sigma^*)^2)$表示如下。

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \frac{2(\sigma^*)^{-4}}{9\pi^4\alpha^2}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_1, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}(\sigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\sigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}((\lambda_{1,1}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_1, -(\lambda_{1,2}^*)^{1+\alpha}\boldsymbol{v}_2)^{\mathsf{T}}\\
&= \frac{2}{9\pi^4\alpha^2}((\lambda_{1,1}^*)^2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathsf{T}} + (\lambda_{1,2}^*)^2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathsf{T}})\\
&= 2\begin{pmatrix}(\lambda_{1,1}^*)^2 & \frac{-(\lambda_{1,1}^*)^2}{3\pi^2\theta_2^*}\boldsymbol{\theta}_{-1}^*\\ \frac{-(\lambda_{1,1}^*)^2}{3\pi^2\theta_2^*}(\boldsymbol{\theta}_{-1}^*)^{\mathsf{T}} & \frac{(\lambda_{1,1}^*)^2+(\lambda_{1,1}^*)^2}{9\pi^4(\theta_2^*)^2\alpha^2}(\boldsymbol{\theta}_{-1}^*)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\theta}_{-1}^*\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}J_{1,1} & J_{1,2}\\ J_{1,2}^{\mathsf{T}} & J_{2,2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(i) 类似地，可以证明，在 $n^{1-\alpha+\tau}(M_1\wedge M_2)^{-2\tau}\to 0$ 下，对于某个 $0<\tau\le 1$，使得 $\tau<\alpha$，

$$\hat{\sigma}_{\ell_1,\ell_2}^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_i) - x_{\ell_1,\ell_2}(\widetilde{t}_{i-1}))^2 = o_p(1),$$

因此我们有 $\check{\theta}_0 \xrightarrow{p} \theta_0^*$。 □

4.2. **第2.3小节结果的证明。**

定理 2.4 的证明。 由于根据命题 2.1 和引理 4.2，在 [A1], 下成立

$$\mathbb{E}[(T_{i,j,k}X)^2] = \Delta^\alpha\sigma^2\mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j)/2}\mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k)/2}\widetilde{\psi}_{r,\alpha}(\theta_2) + R_{i,j,k} + O(\Delta^{1+\alpha}), \tag{4.19}$$

其中 $\sum_{i=1}^{N} R_{i,\ j,\ k} = O(\Delta^\alpha)$ 关于 j， k 一致，并且由引理 4.12 和引理 4.13 可知， $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$函数 $\theta_2 \mapsto \psi_{r,\ \alpha}(\theta_2)/\psi_{r/\sqrt{2},\ \alpha}(\theta_2)$ 在 $(\theta_2(r,\ \alpha)\ \infty)$ 上是单射的，且参数 $(\theta_2,\ \kappa,\ \eta,\ \sigma^2)$ 是可辨识的，因此可以按照定理 2.2 的相同方法得到 □。

定理 2.5 的证明。 由于该证明与定理 2.3 的证明相似，我们只验证当 μ_0 已知和未知时，渐近方差分别为 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$。注意，

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_{1,1}^2 - (\varsigma_{1,1}^*)^2\\ \tilde{\sigma}_{1,2}^2 - (\varsigma_{1,2}^*)^2\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(0, 2\begin{pmatrix}(\varsigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\varsigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}\right) \tag{4.20}$$

也得到了证明，且式 (4.18) 也成立。

(a) 考虑 μ_0 已知的情形。由式 (4.20) 可得 $\sqrt{n}(\bar{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2) \xrightarrow{d} N(0,\ 2(\sigma^*)^4)$, 因此由定理 2.4 可知

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{\theta}_1 - \theta_1^*\\ \bar{\eta}_1 - \eta_1^*\\ \bar{\theta}_2 - \theta_2^*\\ \bar{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2\end{pmatrix} = (\sigma^*)^{-2}\begin{pmatrix}\theta_1^*\\ \eta_1^*\\ \theta_2^*\\ (\sigma^*)^2\end{pmatrix}\sqrt{n}(\bar{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2) + o_p(1) \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{K}).$$

(b) 考虑 μ_0 未知的情形。令 $\Phi(x,\ y) = 3\pi^2(x^{1/\alpha}y^{-1/\alpha} - 1)^{-1}$, $\Psi(x,\ y) = \{3\pi^2(y^{-1/\alpha} - x^{1/\alpha})^{-1}\}^\alpha$, $\boldsymbol{p}_1 = \partial\Phi((\varsigma_{1,\ 1}^*)^2, (\varsigma_{1,\ 2}^*)^2)$ 和 $\boldsymbol{p}_2 = \partial\Psi((\varsigma_{1,\ 1}^*)^2, (\varsigma_{1,\ 2}^*)^2)$。简单计算可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1\begin{pmatrix}(\varsigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\varsigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathsf{T}} &= \frac{2(\mu_{1,1}^*)^2(\mu_{1,2}^*)^2}{9\pi^4\alpha^2},\\
\boldsymbol{p}_1\begin{pmatrix}(\varsigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\varsigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}\boldsymbol{p}_2^{\mathsf{T}} &= \frac{\mu_{1,1}^*\mu_{1,2}^*(\mu_{1,1}^* + \mu_{1,2}^*)}{9\pi^4\alpha},\\
\boldsymbol{p}_2\begin{pmatrix}(\varsigma_{1,1}^*)^4 & 0\\ 0 & (\varsigma_{1,2}^*)^4\end{pmatrix}\boldsymbol{p}_2^{\mathsf{T}} &= \frac{(\mu_{1,1}^*)^2 + (\mu_{1,2}^*)^2}{9\pi^4},
\end{aligned}$$

因此，由定理 2.4 和 (4.20) 可知

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \breve{\mu}_0-\mu_0^* \\ \breve{\theta}_1-\theta_1^* \\ \breve{\eta}_1-\eta_1^* \\ \breve{\theta}_2-\theta_2^* \\ \breve{\sigma}^2-(\sigma^*)^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1^* \\ \eta_1^* \\ \theta_2^* \\ (\sigma^*)^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{p}_2\right)\sqrt{n}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{1,1}^2-(\varsigma_{1,1}^*)^2 \\ \tilde{\sigma}_{1,2}^2-(\varsigma_{1,2}^*)^2 \end{pmatrix} + o_p(1) \xrightarrow{d} N(0,\mathcal{L}).$$

□

4.3. 黎曼求和与傅里叶级数的辅助结果。我们准备关于黎曼求和与傅里叶级数的几个引理。

令 $\alpha\in(0,\ 2)$、$\beta\in\mathbb{R}$、γ，γ_1，γ_2，$J\geq 0$ 和 $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。我们定义一些函数空间。

1. 令 $\boldsymbol{F}_{J,\ \beta}(\mathbb{R}_+)$ 为 $\boldsymbol{C}^2(\mathbb{R}_+)$ 中满足以下条件的函数所构成的子空间，其中元素 f 满足：(i) $x^\beta f(x)$、$x^{\beta+1}f'(x)$、$x^{\beta+2}f''(x)\lesssim \mathrm{e}^{-Jx}\ (x\to 0)$；(ii) $x^{\alpha+1}f(x)$、$x^{\alpha+2}f'(x)$、$x^{\alpha+3}f''(x)\lesssim \mathrm{e}^{-Jx}\ (x\to\infty)$。2. 令 $\boldsymbol{G}_\gamma^p(\mathbb{R}^2)$ 为 $\boldsymbol{C}^p(\mathbb{R}^2)$ 中满足以下条件的函数所构成的子空间，其中元素 g 满足：(i) $|\partial^j g(x,y)|\lesssim (x^2+y^2)^{\gamma+j/2}\ (x,\ y\to 0)$，对于 $j=0,\ \ldots\ldots,\ p$；(ii) $|\partial^j g(x,y)|\lesssim 1\ (x,y\to\infty)$，对于 $j=0,\ \ldots\ldots,\ p$。特别地，我们将 $\boldsymbol{G}_\gamma(\mathbb{R}^2)$ 记为 $=\boldsymbol{G}_\gamma^0(\mathbb{R}^2)$。3. 令 $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{\gamma_1,\ \gamma_2}(\mathbb{R}^2)$ 为 $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}^2)$ 中满足以下条件的函数所构成的子空间，其中元素 g 满足：(i) 存在 g_1、$g_2\in\boldsymbol{C}(\mathbb{R})$，使得 $g(x,y)=g_1(x)g_2(y)$；(ii) $g_j(s)\lesssim s^{2\gamma_j}\ (s\to 0)$，对于 $j=1,\ 2$；(iii) $g_j(s)\lesssim 1\ (s\to\infty)$，对于 $j=1,\ 2$。

4. 令 $\boldsymbol{B}_b(\mathbb{R}^2)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上有界可测函数的空间。

我们将经常使用以下性质。

$$\sum_{1\leq\ell\leq L}\frac{1}{\ell^\beta}=\begin{cases} O(L^{1-\beta}), & \beta<1, \\ O(\log L), & \beta=1, \\ O(1), & \beta>1, \end{cases}\quad \sum_{\ell>L}\frac{1}{\ell^\beta}=O\Big(\frac{1}{L^{\beta-1}}\Big),\quad \beta>1.$$

$$\sum_{1\leq\ell_1^2+\ell_2^2\leq L^2}\frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^\beta}=\begin{cases} O(L^{2(1-\beta)}), & \beta<1, \\ O(\log L), & \beta=1, \\ O(1), & \beta>1, \end{cases}\quad \sum_{\ell_1^2+\ell_2^2>L^2}\frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^\beta}=O\Big(\frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\Big),\quad \beta>1.$$

引理 4.1 令 $\alpha\in(0,\ 2)$ 且 $f\in\boldsymbol{F}_{0,\ \alpha}(\mathbb{R}_+)$。

(1) 对于 $\gamma\geq 0$, $g\in\boldsymbol{G}_\gamma(\mathbb{R}^2)$ 和 $h\in\boldsymbol{B}_b(\mathbb{R}^2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)\\ &=\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}f(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)+\begin{cases} O(1), & \alpha<\gamma, \\ O(\log\frac{1}{\epsilon}), & \alpha=\gamma, \\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma \end{cases}\end{aligned}\tag{4.21}$$

关于 $y,\ z\in\mathbb{R}$ 一致地成立。特别地，当 $\epsilon\to 0$ 时，

$$\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)=\begin{cases} O(\epsilon^{-2}), & \alpha<\gamma+1, \\ O(\epsilon^{-2}\log\frac{1}{\epsilon}), & \alpha=\gamma+1, \\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma+1 \end{cases}\tag{4.22}$$

关于 $y,\ z\in\mathbb{R}$ 一致地成立。

(2) 对于 $\gamma>\alpha\vee 3/2$ 和 $g\in\widetilde{\boldsymbol{G}}_{\gamma-1,\ 1}(\mathbb{R}^2)\cap\boldsymbol{G}_\gamma^2(\mathbb{R}^2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，成立：

$$\epsilon^2\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}f((\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)=\iint_{\mathbb{R}_+^2}f(x^2+y^2)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+O(\epsilon^2).\tag{4.23}$$

证明。(1) 由于 $f \in \boldsymbol{F}_{0,\ \alpha}(\mathbb{R}_+)$、$g \in \boldsymbol{G}_\gamma(\mathbb{R}^2)$ 和 $h \in \boldsymbol{B}_b(\mathbb{R}^2)$，根据中值定理可得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z) - \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)\right| \\
&\leq |\theta_2\Gamma|\epsilon^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\left|\int_0^1 f'(\theta_2(\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)+u\Gamma)\epsilon^2)\mathrm{d}u g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)\right| \\
&\lesssim \epsilon^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} |f'(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)||g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)| \\
&\lesssim \epsilon^{2(\gamma-\alpha)} \sum_{1\leq \ell_1^2+\ell_2^2\leq 1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{1+\alpha-\gamma}} + \frac{1}{\epsilon^{2(1+\alpha)}} \sum_{\ell_1^2+\ell_2^2>1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{2+\alpha}} \\
&= \begin{cases} O(1), & \alpha<\gamma, \\ O(-\log\epsilon), & \alpha=\gamma, \\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma. \end{cases}
\end{aligned}$$

同样，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z) \\
&\lesssim \epsilon^{2(\gamma-\alpha)} \sum_{\ell_1^2+\ell_2^2\leq 1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{\alpha-\gamma}} + \frac{1}{\epsilon^{2(1+\alpha)}} \sum_{\ell_1^2+\ell_2^2>1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{1+\alpha}} \\
&= \begin{cases} O(\epsilon^{-2}), & \alpha<\gamma+1, \\ O(-\epsilon^{-2}\log\epsilon), & \alpha=\gamma+1, \\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma+1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

因此，由 (4.21) 和 (4.24) 可得 (4.22)。

(2) 对于 $\ell_1,\ell_2\geq 1$，设 $E_{\ell_1,\ell_2}=((\ell_1-1/2)\epsilon,(\ell_1+1/2)\epsilon]\times((\ell_2-1/2)\epsilon,(\ell_2+1/2)\epsilon]\subset\mathbb{R}_+^2$ 以及 $E=\bigcup_{\ell_1,\ell_2\geq 1}E_{\ell_1,\ell_2}$。由于 $f\in\boldsymbol{F}_{0,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ 和 $g\in\boldsymbol{G}_\gamma^2(\mathbb{R}^2)$，$G(x,y)=f(x^2+y^2)g(x,y)$ 可按如下方式控制。

$$|\partial^j G(x,y)| \lesssim \begin{cases} (x^2+y^2)^{\gamma-\alpha-j/2}, & (x,y\to 0), \\ \frac{1}{(x^2+y^2)^{1+\alpha+j/2}}, & (x,y\to\infty) \end{cases} \tag{4.25}$$

对于 $j=0$，1，2。注意，当 $\gamma>\alpha$ 时，$|\partial^2 G|\in L^1(\mathbb{R}_+^2)$。因此，由泰勒展开可得

$$\begin{aligned}
\left|\epsilon^2\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon) - \iint_E G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\iint_{E_{\ell_1,\ell_2}} (G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)-G(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\
&\lesssim \epsilon^2\iint_E |\partial^2 G(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\lesssim \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

由于 $g\in\widetilde{\boldsymbol{G}}_{\gamma-1,\ 1}(\mathbb{R}^2)$，若 $\gamma>\alpha\vee 3/2$，则存在 $g_1,\ g_2\in\boldsymbol{C}(\mathbb{R})$，使得 $g(x,\ y)=g_1(x)g_2(y)$，并且成立：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon/2}\int_0^{\epsilon/2} G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= O\left(\int_0^{\epsilon/2}\int_0^{\epsilon/2}(x^2+y^2)^{\gamma-\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\
&= O\left(\int_0^{\epsilon} r^{2\gamma-2\alpha+1}\mathrm{d}r\right) = O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha+1)}) = O(\epsilon^2), \\
\int_{\epsilon/2}^{\infty}\int_0^{\epsilon/2} G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\lesssim \int_0^{\epsilon/2} x^{2(\gamma-1)}\mathrm{d}x\int_{\epsilon/2}^{\infty}|f(\theta_2\pi^2 y^2)||g_2(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= O\left(\epsilon^{2\gamma-1}\left(\int_\epsilon^1 y^{2-2\alpha}\mathrm{d}y + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^{2+2\alpha}}\right)\right) = O(\epsilon^2),$$

$$\int_0^{\epsilon/2}\int_{\epsilon/2}^\infty G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim \int_{\epsilon/2}^\infty |f(\theta_2\pi^2x^2)||g_1(x)|\mathrm{d}x \int_0^{\epsilon/2} y^2\mathrm{d}y$$

$$= O\left(\epsilon^3\left(\int_\epsilon^1 x^{2(\gamma-\alpha-1)}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2+2\alpha}}\right)\right) = O(\epsilon^2),$$

由此得到

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2\setminus E} G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(\epsilon^2). \tag{4.27}$$

因此，(4.26) 和 (4.27) 推出 (4.23)。 □

下面的引理有助于证明第2.3小节中的定理。

引理 4.2 令 $\alpha\in(0,2)$ 和 $f\in C^2(\mathbb{R}_+)$ 满足 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,

$$f_1(x)\lesssim 1\ (x\to 0),\quad xf_1(x)\lesssim 1\ (x\to\infty),\quad f_2(x)=x^{-\alpha}.$$

对于 $\gamma\geq 0$, $g\in G_\gamma(\mathbb{R}^2)$ 和 $h\in B_b(\mathbb{R}^2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，有:

$$\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f_1(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)f_2(\theta_2\mu_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)$$

$$= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z) + \begin{cases} O(1), & \alpha<\gamma,\\ O(-\log\epsilon), & \alpha=\gamma,\\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma \end{cases}$$

关于 $y,z\in\mathbb{R}$ 一致。

~证明。令 $\Gamma=\mu_0-\Gamma$。由于

$$x^{\alpha+1}f_1(x)f_2'(x)\lesssim 1\ (x\to 0),\quad x^{\alpha+2}f_1(x)f_2'(x)\lesssim 1\ (x\to\infty),$$

$g\in G_\gamma(\mathbb{R}^2)$ 和 $h\in B_b(\mathbb{R}^2)$，根据中值定理可知

$$\left|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f_1(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)f_2(\theta_2\mu_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z) - \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)\right|$$

$$\leq |\theta_2\widetilde{\Gamma}|\epsilon^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\left|f_1(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\epsilon^2)\int_0^1 f_2'((\lambda_{\ell_1,\ell_2}+u\theta_2\widetilde{\Gamma})\epsilon^2)\mathrm{d}u g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)h(\ell_1 y,\ell_2 z)\right|$$

$$\lesssim \epsilon^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} |f_1(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)f_2'(\theta_2\pi^2(\ell_1^2+\ell_2^2)\epsilon^2)||g(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)|$$

$$\lesssim \epsilon^{2(\gamma-\alpha)} \sum_{1\leq\ell_1^2+\ell_2^2\leq 1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{1+\alpha-\gamma}} + \frac{1}{\epsilon^{2(1+\alpha)}} \sum_{\ell_1^2+\ell_2^2>1/\epsilon^2} \frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{2+\alpha}}$$

$$= \begin{cases} O(1), & \alpha<\gamma,\\ O(-\log\epsilon), & \alpha=\gamma,\\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma. \end{cases}$$

□

以下引理4.3和引理4.4是在比Hildebrandt和Trabs [11], 中的引理A.7和引理A.8更宽松的条件下的断言，而引理4.5是引理 4.3的两个变量版本。

引理 4.3 设 $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$ 为实数序列，且 $\tau\in\{\sin,\cos\}$。则有

$$\left|\sum_{\ell=1}^L a_\ell\tau(\pi\ell y)\right| \leq \frac{K_L}{y\wedge(2-y)}$$

对于任意 $y\in(0,2)$，其中 $K_L=|a_1|+\sum_{\ell=2}^L|a_\ell-a_{\ell-1}|$。

证明。 参见 Hildebrandt和Trabs [11] 中引理 A.7 的证明。 □

引理 4.4 令 $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个函数，并定义

$$K(\epsilon)=|D_\epsilon G(\epsilon)|+\sum_{\ell\geq 1}|D_\epsilon^2 G(\ell\epsilon)|.$$

于是，对于 $y\in(0,2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，

$$\sum_{\ell\geq 1}G(\ell\epsilon)\cos(\pi\ell y)=-\frac{G(\epsilon)}{2}+O\bigg(\frac{K(\epsilon)}{(y\wedge(2-y))^2}\bigg),$$
$$\sum_{\ell\geq 1}G(\ell\epsilon)\sin(\pi\ell y)=\frac{G(\epsilon)}{2\tan(\frac{\pi y}{2})}+O\bigg(\frac{K(\epsilon)}{(y\wedge(2-y))^2}\bigg).$$

证明。 可以计算得

$$\sum_{\ell\geq 1}G(\ell\epsilon)\cos(\pi\ell y)=-\frac{G(\epsilon)}{2}-\frac{1}{2\sin(\frac{\pi y}{2})}\sum_{\ell\geq 1}D_\epsilon G(\ell\epsilon)\sin\Big(\pi\Big(\ell+\frac{1}{2}\Big)y\Big)$$

与 Hildebrandt 和 Trabs [11] 中引理 A.8 的证明相同。应用引理 4.3 可得

$$\bigg|\sum_{\ell\geq 1}D_\epsilon G(\ell\epsilon)\sin\Big(\pi\Big(\ell+\frac{1}{2}\Big)y\Big)\bigg|\leq\frac{K(\epsilon)}{y\wedge(2-y)},$$

从而得到第一个结论。类似地，可以证明第二个结论。 □

引理 4.5 设 $\{a_{\ell_1,\ell_2}\}_{\ell_1,\ \ell_2=1}^{L}$ 是一个实双重序列，且 τ_1，$\tau_2\in\{\sin,\cos\}$。那么，有

$$\bigg|\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{L}a_{\ell_1,\ell_2}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\bigg|\leq\frac{K_L}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}$$

对于任意 y，$z\in(0,\ 2)$，其中

$$\begin{aligned}K_L=&|a_{1,1}|+\sum_{\ell_1=2}^{L}|a_{\ell_1,1}-a_{\ell_1-1,1}|+\sum_{\ell_2=2}^{L}|a_{1,\ell_2}-a_{1,\ell_2-1}|\\&+\sum_{\ell_1,\ell_2=2}^{L}|a_{\ell_1,\ell_2}-a_{\ell_1-1,\ell_2}-a_{\ell_1,\ell_2-1}+a_{\ell_1-1,\ell_2-1}|.\end{aligned}$$

证明。 由于它可以分解为

$$\sum_{\ell=1}^{L}b_\ell\tau_1(\pi\ell y)=b_1\sum_{\ell=1}^{L}\tau_1(\pi\ell y)+\sum_{k=2}^{L}(b_k-b_{k-1})\sum_{\ell=k}^{L}\tau_1(\pi\ell y),$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{L}a_{\ell_1,\ell_2}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\\&=a_{1,1}\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)+\sum_{m=2}^{L}(a_{m,1}-a_{m-1,1})\sum_{\ell_1=m}^{L}\sum_{\ell_2=1}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\\&\quad+\sum_{k=2}^{L}(a_{1,k}-a_{1,k-1})\sum_{\ell_1=1}^{L}\sum_{\ell_2=k}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\\&\quad+\sum_{k,m=2}^{L}(a_{m,k}-a_{m-1,k}-a_{m,k-1}+a_{m-1,k-1})\sum_{\ell_1,\ell_2=m}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z).\end{aligned}$$

根据拉格朗日三角恒等式，也有

$$\bigg|\sum_{\ell_1=L_1}^{L_2}\tau_1(\pi\ell_1 y)\bigg|\leq\frac{1}{\sin(\frac{\pi y}{2})}\leq\frac{1}{y\wedge(2-y)}$$

关于 $L_1 \le L_2$ 一致成立，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{L} a_{\ell_1,\ell_2}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\right| \\
&\le |a_{1,1}|\left|\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\right| + \sum_{m=2}^{L}|a_{m,1}-a_{m-1,1}|\left|\sum_{\ell_1=m}^{L}\sum_{\ell_2=1}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\right| \\
&\quad + \sum_{k=2}^{L}|a_{1,k}-a_{1,k-1}|\left|\sum_{\ell_1=1}^{L}\sum_{\ell_2=k}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\right| \\
&\quad + \sum_{k,m=2}^{L}|a_{m,k}-a_{m-1,k}-a_{m,k-1}+a_{m-1,k-1}|\left|\sum_{\ell_1,\ell_2=m}^{L}\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)\right| \\
&\le \frac{K_L}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}.
\end{aligned}$$

□

利用上述三个引理，我们得到以下结果。

引理 4.6 设 $\alpha\in(0,\ 2)$，$\gamma\ge 1$ 和 $\tau_1,\ \tau_2\in\{\sin,\ \cos\}$。对于 $f\in \boldsymbol{F}_{0,\ \alpha}(\mathbb{R}_+)$ 和 $g\in \widetilde{\boldsymbol{G}}_{\gamma-1,\ 1}(\mathbb{R}^2)\cap \boldsymbol{G}^2_{\gamma}(\mathbb{R}^2)$，定义 $G(x,\ y)=f(x^2+y^2)g(x,\ y)$。

(1) 对于 $y\in(0,\ 2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，

$$\sum_{\ell_1,\ell_2\ge 1} G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)\tau_1(\pi\ell_1 y)=\begin{cases} O\Big(\frac{\epsilon^{-1}}{(y\wedge(2-y))^2}\Big), & \gamma>(\alpha-1/2)\vee 1,\\ O\Big(\frac{1}{(y\wedge(2-y))^2}\Big), & \gamma>\alpha\vee 3/2.\end{cases} \tag{4.28}$$

(2) 对于 $y,\ z\in(0,\ 2)$，当 $\epsilon\to 0$ 时，

$$\sum_{\ell_1,\ell_2\ge 1} G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)\tau_1(\pi\ell_1 y)\tau_2(\pi\ell_2 z)=\begin{cases} O\Big(\frac{\epsilon^{-1}}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}\Big), & \gamma\ge 3/2,\\ O\Big(\frac{1}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}\Big), & \gamma\ge 2.\end{cases} \tag{4.29}$$

证明。(1) 根据 (4.25)，可得对于 $\gamma>\alpha-1+j/2$，$|\partial^j G|\in L^1(\mathbb{R}^2_+)$。此外，由 $f\in \boldsymbol{F}_{0,\ \alpha}(\mathbb{R}_+)$ 和 $g\in \boldsymbol{G}_{\gamma-1,\ 1}(\mathbb{R}^2)$ 还可得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell_2\ge 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)| &\lesssim \epsilon^{2(\gamma-1)}\sum_{\ell_2\ge 1}|f((\ell_2^2+1)\epsilon^2)|((\ell_2\epsilon)^2\wedge 1)\\
&\lesssim \epsilon^{2(\gamma-\alpha)}\sum_{1\le\ell_2\le 1/\epsilon}\frac{1}{\ell_2^{2(\alpha-1)}}+\epsilon^{2(\gamma-\alpha-2)}\sum_{\ell_2>1/\epsilon}\frac{1}{\ell_2^{2\alpha+2}}\\
&=\begin{cases} O(\epsilon^{2\gamma-3}), & \alpha<3/2,\\ O(-\epsilon^{2\gamma-3}\log\epsilon), & \alpha=3/2,\\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>3/2.\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

因此，有

(i) $|\partial G|\in L^1(\mathbb{R}^2_+)$ and $\epsilon\sum_{\ell_2\ge 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)|=O(1)$ if $\gamma>(\alpha-1/2)\vee 1$,

(ii) $|\partial^2 G|\in L^1(\mathbb{R}^2_+)$ and $\sum_{\ell_2\ge 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)|=O(1)$ if $\gamma>\alpha\vee 3/2$.

由于对于 $G\in \boldsymbol{C}^2(\mathbb{R}^2)$,

$$|D^k_{1,\epsilon}D^m_{2,\epsilon}G(\epsilon x,\epsilon y)|\lesssim \min_{j=0,\dots,(k+m)\wedge 2}\epsilon^j\sup_{u,v\in[0,1]}|\partial^j G(\epsilon(x+u),\epsilon(y+v))|,$$

我们有

$$K(\epsilon)=\left|\sum_{\ell_2\ge 1}D_{1,\epsilon}G(\epsilon,\ell_2\epsilon)\right|+\sum_{\ell_1\ge 1}\left|\sum_{\ell_2\ge 1}D^2_{1,\epsilon}G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)\right|$$

$$\lesssim \sum_{\ell_2\geq 1}\sup_{u\in[0,1]}|G(\epsilon(1+u),\ell_2\epsilon)| + \begin{cases}\epsilon\displaystyle\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\sup_{u,v\in[0,1]}|\partial_x G((\ell_1+u)\epsilon,(\ell_2+v)\epsilon)|\\ \epsilon^2\displaystyle\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\sup_{u,v\in[0,1]}|\partial_x^2 G((\ell_1+u)\epsilon,(\ell_2+v)\epsilon)|\end{cases}$$

$$\lesssim \sum_{\ell_2\geq 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)| + \begin{cases}\epsilon^{-1}\displaystyle\iint_{\mathbb{R}_+^2}|\partial_x G(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}_+^2}|\partial_x^2 G(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$$

$$\lesssim \begin{cases}\epsilon^{-1}, & \gamma>(\alpha-1/2)\vee 1,\\ 1, & \gamma>\alpha\vee 3/2.\end{cases}$$

因此，由引理 4.4 可得式（4.28）。

（2）注意到

$$K(\epsilon)=|G(\epsilon,\epsilon)|+\sum_{\ell_1\geq 1}|G(\ell_1\epsilon,\epsilon)|+\sum_{\ell_2\geq 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)|+\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 2}|D_{1,\epsilon}D_{2,\epsilon}G((\ell_1-1)\epsilon,(\ell_2-1)\epsilon)|$$
$$\lesssim |G(\epsilon,\epsilon)|+\sum_{\ell_1\geq 1}|G(\ell_1\epsilon,\epsilon)|+\sum_{\ell_2\geq 1}|G(\epsilon,\ell_2\epsilon)|+\epsilon^2\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}|\partial^2 G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)|.$$

与（4.30）相同，可得 $|G(\epsilon,\ \epsilon)|\lesssim\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}$,

$$\sum_{\ell_1\geq 1}|G(\ell_1\epsilon,\epsilon)|\lesssim\epsilon^2\sum_{\ell_1\geq 1}|f((\ell_1^2+1)\epsilon^2)|((\ell_1\epsilon)^{2(\gamma-1)}\wedge 1)$$
$$\lesssim\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}\sum_{1\leq\ell_1\leq 1/\epsilon}\frac{1}{\ell_1^{2(\alpha-\gamma+1)}}+\epsilon^{-2\alpha}\sum_{\ell_1>1/\epsilon}\frac{1}{\ell_1^{2\alpha+2}}$$
$$=\begin{cases}O(\epsilon), & \alpha<\gamma-1/2,\\ O(-\epsilon\log\epsilon), & \alpha=\gamma-1/2,\\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma-1/2,\end{cases}$$

$$\epsilon^2\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}|\partial^2 G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)|\lesssim\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}\sum_{1\leq\ell_1^2+\ell_2^2\leq 1/\epsilon^2}\frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{\alpha-\gamma+1}}$$
$$+\epsilon^{-2(1+\alpha)}\sum_{\ell_1^2+\ell_2^2>1/\epsilon^2}\frac{1}{(\ell_1^2+\ell_2^2)^{\alpha+2}}$$
$$=\begin{cases}O(1), & \alpha<\gamma,\\ O(-\log\epsilon), & \alpha=\gamma,\\ O(\epsilon^{2(\gamma-\alpha)}), & \alpha>\gamma.\end{cases}$$

因此，当 $\gamma\geq 3/2$ 时，有 $\epsilon K(\epsilon)=O(1)$；当 $\gamma\geq 2$ for $\alpha\in(0,\ 2)$ 时，有 $K(\epsilon)=O(1)$。应用引理 4.5，可得

$$\left|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}G(\ell_1\epsilon,\ell_2\epsilon)\cos(\pi\ell_1 y)\cos(\pi\ell_2 z)\right|\lesssim\frac{K(\epsilon)}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}$$
$$=\begin{cases}O\Big(\frac{\epsilon^{-1}}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}\Big), & \gamma\geq 3/2,\\ O\Big(\frac{1}{(y\wedge(2-y))(z\wedge(2-z))}\Big), & \gamma\geq 2.\end{cases}$$

□

4.4. **二维傅里叶余弦级数及其差分的有界性**。设 $\alpha\in(0,\ 2)$ 和 $r\in(0,\ \infty)$。令 $f\in\boldsymbol{F}_{0,\ \alpha}(\mathbb{R}_+)$ 且 $y,\ z\in[0,2)$，定义

$$F(y,z)=\Delta^{1+\alpha}\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\cos(\pi\ell_1 y)\cos(\pi\ell_2 z).\tag{4.31}$$

注意到， $F(y,\ z)$ 关于 y 和 z 对称。令

$$g_1(x,y)=1, \quad g_2(x,y)=\sin(x), \quad g_3(x,y)=1-\cos(x),$$
$$g_4(x,y)=\sin^2(x), \quad g_5(x,y)=\sin(x)\sin(y), \quad g_6(x,y)=\sin(x)(\cos(y)-1),$$
$$g_7(x,y)=\sin(x)\sin^2(y), \quad g_8(x,y)=\sin^2(x)(\cos(y)-1), \quad g_9(x,y)=\sin^2(x)\sin^2(y),$$

因此可得

$$g_1\in \boldsymbol{G}_0(\mathbb{R}^2), \quad g_2\in \boldsymbol{G}_{1/2}(\mathbb{R}^2), \quad g_3,g_4,g_5\in \boldsymbol{G}_1(\mathbb{R}^2), \tag{4.32}$$
$$g_6,g_7\in \widetilde{\boldsymbol{G}}_{1/2,1}(\mathbb{R}^2)\subset \boldsymbol{G}_{3/2}(\mathbb{R}^2), \quad g_8,g_9\in \widetilde{\boldsymbol{G}}_{1,1}(\mathbb{R}^2)\subset \boldsymbol{G}_2(\mathbb{R}^2). \tag{4.33}$$

以下三个引理用于控制如 (4.31) 中的傅里叶余弦级数 .

引理 4.7 对于 $\alpha\in(0,2)$ 和 $\delta=r\sqrt{\Delta}$，有

(1) $F(y,z)=O(\Delta^{\alpha-1})$ 关于 $y,z\in[0,2)$ 一致，(2) $D_{1,\delta}F(y,z)=O(\Delta^{\alpha-1/2})$ 关于 $y\in(0,2)$ 和 $z\in[0,2)$ 一致，(3) $D_{1,\delta}F(0,z)=O(\Delta^{\alpha})$ 关于 $z\in[0,2)$ 一致，(4) $D^2_{1,\delta}F(y,z)=O(\Delta^{\alpha})$ 关于 $y,z\in[0,2)$ 一致，(5) $D_{1,\delta}D_{2,\delta}F(y,z)=O(\Delta^{\alpha})$ 关于 $y,z\in(0,2)$ 一致。

证明。 注意到三角恒等式

$$\cos(a+b)-\cos(a)=-2\sin\Big(\frac{b}{2}\Big)\sin\Big(a+\frac{b}{2}\Big), \tag{4.34}$$
$$\cos(a+2b)-2\cos(a+b)+\cos(a)=-4\sin^2\Big(\frac{b}{2}\Big)\cos(a+b). \tag{4.35}$$

(1) 注意到

$$|F(y,z)|\le \Delta^{\alpha-1}\left(\Delta^2\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|\right)$$

以及 (4.32)，由 (4.22) 和 $\gamma=0$ 可知

$$\Delta^2\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|=\begin{cases}O(\Delta), & \alpha<1,\\ O(-\Delta\log\Delta), & \alpha=1,\\ O(\Delta^{2-\alpha}), & \alpha>1,\end{cases}$$

并且当 $\alpha\in\in(0,\ 2)$ 时，可得所需结果。

(2) 三角恒等式 (4.34) 和 $\delta=r$ $\sqrt{\Delta}$ 可得

$$|D_{1,\delta}F(y,z)|\lesssim \Delta^{\alpha-1/2}\left(\Delta^{3/2}\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|\Big|\sin\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\Big|\right).$$

因此，由 (4.32) 和 (4.22)，结合 $\gamma=1/2$ ，可得

$$\Delta^{3/2}\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|\Big|\sin\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\Big|=\begin{cases}O(\Delta^{1/2}), & \alpha<3/2,\\ O(-\Delta^{1/2}\log\Delta), & \alpha=3/2,\\ O(\Delta^{2-\alpha}), & \alpha>3/2,\end{cases}$$

从而得到 $\alpha\in(0,2)$ 上所需的结果。

(3)-(5) 由于 (4.34)、(4.35) 和 (4.32)，由 (4.22) 并结合 $\gamma=1$ ，可得

$$|D_{1,\delta}F(0,z)|\le\Delta^{\alpha}\left(\Delta\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|(1-\cos(\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}))\right)=O(\Delta^{\alpha}),$$
$$|D^2_{1,\delta}F(y,z)|\lesssim\Delta^{\alpha}\left(\Delta\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|\sin^2\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\right)=O(\Delta^{\alpha}),$$
$$|D_{1,\delta}D_{2,\delta}F(y,z)|\lesssim\Delta^{\alpha}\left(\Delta\sum_{\ell_1,\ell_2\ge1}|f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)|\Big|\sin\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\Big|\Big|\sin\Big(\frac{\pi r\ell_2\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\Big|\right)=O(\Delta^{\alpha}).$$

□

引理 4.8 对于 $\alpha\in(0,2)$， $\delta=r\sqrt{\Delta}$ 和 $y,z\in(0,2-\delta)$，可得

(1) $D_{1,\delta}D_{2,\delta}F(y,0) = O\Big(\frac{\Delta^{\alpha+1/2}}{y\wedge\ 2-\delta-y}(\ (\ )^2\Big)$, (2) $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}F(y,0) = O\Big(\frac{\Delta^{\alpha+1}}{y\wedge\ 2-\delta-y}(\ (\ )^2\Big)$, (3) $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}F(y,z) = O\Big(\frac{\Delta^{\alpha+1/2}}{y\wedge\ 2-\delta-y\quad z\wedge}(\ (\ ))\overline{((2-\delta-z))}\Big)$, (4) $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F(y,z) = O\Big(\frac{\Delta^{\alpha+1}}{y\wedge\ 2-\delta-y\quad z\wedge}\overline{(\ (\ ))((2-\delta-z))}\Big)$.

证明。 (1), (2) 注意到，结合 $\gamma=3/2$ 或 $\gamma=2$，由 (4.33)-(4.35)、(4.21) 和 (4.28) 可得

$$\begin{aligned}
&|D_{1,\delta}D_{2,\delta}F(y,0)|\\
&\lesssim \Delta^{1/2+\alpha}\Big|\Delta^{1/2}\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\sin\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)(\cos(\pi r\ell_2\sqrt{\Delta})-1)\sin\Big(\pi\ell_1\Big(y+\frac{\delta}{2}\Big)\Big)\Big|\\
&= O\bigg(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))^2}\bigg)+\begin{cases} O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot\Delta^{1/2}), & \alpha<3/2,\\ O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot(-\Delta^{1/2}\log\Delta)), & \alpha=3/2,\\ O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot\Delta^{2-\alpha}), & \alpha>3/2,\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}F(y,0)| &\lesssim \Delta^{1+\alpha}\Big|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\sin^2\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)(\cos(\pi r\ell_2\sqrt{\Delta})-1)\cos(\pi\ell_1(y+\delta))\Big|\\
&= O\bigg(\frac{\Delta^{1+\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))^2}\bigg)+O(\Delta^{1+\alpha}).
\end{aligned}$$

(3), (4) 结合 $\gamma=3/2$ 或 $\gamma=2$，由 (4.33)-(4.35)、(4.21) 和 (4.29) 可得

$$\begin{aligned}
&|D_{1,\ \delta}^2D_{2,\ \delta}F\ (y,z)\ |\\
&\lesssim \Delta^{1/2+\alpha}\Big|\Delta^{1/2}\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\sin^2\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi r\ell_2\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\cos(\pi\ell_1(y+\delta))\sin\Big(\pi\ell_2\Big(z+\frac{\delta}{2}\Big)\Big)\Big|\\
&= O\bigg(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))(z\wedge(2-\delta-z))}\bigg)+\begin{cases} O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot\Delta^{1/2}), & \alpha<3/2,\\ O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot(-\Delta^{1/2}\log\Delta)), & \alpha=3/2,\\ O(\Delta^{1/2+\alpha}\cdot\Delta^{2-\alpha}), & \alpha>3/2,\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F(y,z)|\\
&\lesssim \Delta^{1+\alpha}\Big|\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\sin^2\Big(\frac{\pi r\ell_1\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\sin^2\Big(\frac{\pi r\ell_2\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\cos(\pi\ell_1(y+\delta))\cos(\pi\ell_2(z+\delta))\Big|\\
&= O\bigg(\frac{\Delta^{1+\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))(z\wedge(2-\delta-z))}\bigg)+O(\Delta^{1+\alpha}).
\end{aligned}$$

□

引理 4.9 对于 $\alpha\in(0,2)$, $\delta=r\sqrt{\Delta}$, $\overline{y}\in(0,2-\delta)$ 和 $0\leq K_1,K_2\leq 1/\delta$，可得

(1) $D_{1,\delta}D_{2,\delta}^2F(y,K_2\delta) = O(\Delta^{1/2+\alpha}) + O\Big(\frac{\Delta^{\alpha}}{y\wedge\ 2-y-\delta}\overline{((\ ))(K_2+1)}\Big)$,

(2) $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F(y,K_2\delta) = O(\Delta^{1+\alpha}) + O\Big(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{y\wedge\ 2-y-\delta}\overline{((\ ))(K_2+1)}\Big)$,

(3) $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F(K_1\delta,K_2\delta) = O(\Delta^{1+\alpha}) + O\Big(\frac{\Delta^{\alpha}}{K_1+1}\overline{(\ )(K_2+1)}\Big)$.

证明。 与引理 4.8 中（3）的证明相同，我们得到第一个结论:

$$\begin{aligned}
|D_{1,\delta}D_{2,\delta}^2F(y,K_2\delta)| &= O\bigg(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))(K_2+1)\delta}\bigg)+O(\Delta^{1/2+\alpha})\\
&= O\bigg(\frac{\Delta^{\alpha}}{(y\wedge(2-\delta-y))(K_2+1)}\bigg)+O(\Delta^{1/2+\alpha}).
\end{aligned}$$

同样，其余结论可通过使用引理 4.8 中的 (4) 得到证明。 □

4.5. 三重增量的协方差。 本小节考察由 Q_1-Wiener 过程驱动的随机偏微分方程 (1.1) 的三重增量 $T_{i,j,k}X$ 的协方差。对于 $\alpha \in (0,2)$ 和 $J \geq 0$，定义

$$f_\alpha(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x^{1+\alpha}}, \quad f_{J,\alpha}(x) = \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}{x^{1+\alpha}}\mathrm{e}^{-Jx}, \quad x > 0.$$

我们很容易验证 $f_\alpha \in \boldsymbol{F}_{0,\,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ 以及 $f_{J,\,\alpha} \in \boldsymbol{F}_{J/2,\,\alpha-1}(\mathbb{R}_+)$。此外，利用 f_α，可将式 (4.1) 中给出的 F_α 表示为

$$F_\alpha(y,z) = \Delta^{1+\alpha}\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1} f_\alpha(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)\cos(\pi\ell_1 y)\cos(\pi\ell_2 z).$$

我们定义

$$\begin{aligned}
F^{j,k}_{j',k'} &= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j)-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k)-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1}))\\
&\quad\times(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'})-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'})-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'-1})),\\
F^{j,k}_{J,j',k'} &= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})^2}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}J\Delta}(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j)-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k)-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1}))\\
&\quad\times(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'})-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'-1}))(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'})-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'-1})).
\end{aligned}$$

设 $r \in$ 属于$(0,\ \infty)$。根据以下两个引理，可以计算式 (4.2) 中的 $F_{j,\,k}$ 以及 $T_{i,\,j,\,k}X$ 的协方差。

引理 4.10 对于属于$(0,\ 2)$的 $\alpha \in$ 和 $\delta = r\sqrt{\Delta}$，有

$$\begin{aligned}
F^{j,k}_{j',k'} &= \mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'})/2}\mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'})/2}D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)\\
&\quad+O(\Delta^{1+\alpha})+O\bigg(\Delta^{1/2+\alpha}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg). \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

特别地，有

(1) $F_{j,k} = 4\mathrm{e}^{-\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_j)/2}\mathrm{e}^{-\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_k)/2}D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(0,0)+O(\Delta^{1+\alpha})$,

(2) $F^{j,k}_{j',k'} = O\Big(\Delta^\alpha\Big(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\Big)\Big)+O\Big(\Delta^{1/2+\alpha}\Big(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\Big)\Big)$,

(3) $F^{j,k}_{J,j',k'} = O\Big(\frac{\Delta^\alpha}{J+1}\Big(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\Big)\Big)+O\Big(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{J+1}\Big(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\Big)\Big)$.

证明。令 $g_1(x) = \mathrm{e}^{-\kappa x/2}$ 和 $g_2(x) = \mathrm{e}^{-\eta x/2}$。由 Hildebrandt 和 Trabs 中的 (22) 式可得 [11],

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\kappa y/2}(e^{(1)}_{\ell_1}(y+\delta)-e^{(1)}_{\ell_1}(y))\mathrm{e}^{\kappa y'/2}(e^{(1)}_{\ell_1}(y'+\delta)-e^{(1)}_{\ell_1}(y'))\\
&= D^2_\delta g_1(0)\cos(\pi\ell_1(y'-y)) - D^2_\delta\big[g_1(\cdot)\cos(\pi\ell_1(y+y'+\cdot))\big](0)\\
&\quad - g_1(\delta)D^2_\delta\big[\cos(\pi\ell_1(y'-y-\delta+\cdot))\big](0). \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

对于 $y',\ z' \in [0,2)$，定义

$$\begin{aligned}
G_0(y,z:y',z') &= g_1(y)g_2(z)F_\alpha(y+y',z+z'),\\
G_1(y,z:y',z') &= g_1(y)F_\alpha(y+y',z+z'),\\
G_2(y,z:y',z') &= g_2(z)F_\alpha(y+y',z+z').
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
D_{1,\delta}D^j_{2,\delta}F_\alpha(0,0) &= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}D_\delta[\cos(\pi\ell_1\cdot)](0)D^j_\delta[\cos(\pi\ell_2\cdot)](0),\\
D^2_{1,\delta}D^j_{2,\delta}G_1(0,0:y',0) &= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}D^2_\delta[g_1(\cdot)\cos(\pi\ell_1(y'+\cdot))](0)D^j_\delta[\cos(\pi\ell_2\cdot)](0),\\
D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_0(0,0:y',z') &= \sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}D^2_\delta[g_1(\cdot)\cos(\pi\ell_1(y'+\cdot))](0)D^2_\delta[g_2(\cdot)\cos(\pi\ell_2(z'+\cdot))](0),
\end{aligned}$$

由（4.37）可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1})/2}\mathrm{e}^{\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})/2}F^{j,k}_{j',k'}\\
&=\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}\\
&\qquad\times \mathrm{e}^{\kappa\widetilde{y}_{j-1}/2}(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_j)-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j-1}))\mathrm{e}^{\kappa\widetilde{y}_{j'-1}/2}(e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'})-e^{(1)}_{\ell_1}(\widetilde{y}_{j'-1}))\\
&\qquad\times \mathrm{e}^{\eta\widetilde{z}_{k-1}/2}(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_k)-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k-1}))\mathrm{e}^{\eta\widetilde{z}_{k'-1}/2}(e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'})-e^{(2)}_{\ell_2}(\widetilde{z}_{k'-1}))\\
&=\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda^{1+\alpha}_{\ell_1,\ell_2}}\\
&\qquad\times\big(D^2_\delta g_1(0)\cos(\pi\ell_1(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_{j-1}))\\
&\qquad\quad -D^2_\delta\big[g_1(\cdot)\cos(\pi\ell_1(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1}+\cdot))\big](0)\\
&\qquad\quad -g_1(\delta)D^2_\delta\big[\cos(\pi\ell_1(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j+\cdot))\big](0)\big)\\
&\qquad\times\big(D^2_\delta g_2(0)\cos(\pi\ell_2(\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1}))\\
&\qquad\quad -D^2_\delta\big[g_2(\cdot)\cos(\pi\ell_2(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1}+\cdot))\big](0)\\
&\qquad\quad -g_2(\delta)D^2_\delta\big[\cos(\pi\ell_2(\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k+\cdot))\big](0)\big)\\
&=D^2_\delta g_1(0)D^2_\delta g_2(0)F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_{j-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})\\
&\quad -D^2_\delta g_1(0)\Big(D^2_{2,\delta}G_2(0,0:\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_{j-1},\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})\\
&\qquad +g_2(\delta)D^2_{2,\delta}F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_{j-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)\Big)\\
&\quad -D^2_\delta g_2(0)\Big(D^2_{1,\delta}G_1(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})\\
&\qquad +g_1(\delta)D^2_{1,\delta}F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})\Big)\\
&\quad +D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_0(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})\\
&\quad +g_2(\delta)D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_1(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)\\
&\quad +g_1(\delta)D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_2(0,0:\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})\\
&\quad +g_1(\delta)g_2(\delta)D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k).
\end{aligned}
$$

注意到 $D^\ell_\delta g_1(0)=O(\Delta^{\ell/2})$、$\widetilde{y}_j+\widetilde{y}_{j'}\in(b,\ 2-b)$ 和 $\widetilde{y}_j-\widetilde{y}_{j'}=(j-j')\delta$。由引理 4.7 可得

$$
F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_{j-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})=O(\Delta^{\alpha-1}),\quad D^2_{1,\delta}F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})=O(\Delta^\alpha)
$$

关于 $j,\ j',\ k,\ k'$ 一致，并且由下式可知

$$
\begin{aligned}
D^2_{1,\delta}D^\ell_{2,\delta}G_1(0,0:y',z')&=D^2_\delta g_1(0)D^\ell_{2,\delta}F_\alpha(2\delta+y',z')+2D_\delta g_1(0)D_{1,\delta}D^\ell_{2,\delta}F_\alpha(\delta+y',z')\\
&\quad+g_1(0)D^2_{1,\delta}D^\ell_{2,\delta}F_\alpha(y',z'),
\end{aligned}
$$

$D^2_{2,\ \delta}F_\alpha(y,\ -\delta)=2D_{2,\ \delta}F_\alpha(y,\ 0)$，由引理 4.7–4.9 可得

$$
D^2_{1,\delta}G_1(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_{k-1})=O(\Delta^\alpha)
$$

关于 $j,\ j',\ k,\ k'$ 一致，并且

$$
D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_1(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)=O(\Delta^{1+\alpha})+O\bigg(\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{|k-k'|+1}\bigg)
$$

关于 $j,\ j'$ 一致成立。此外，注意到

$$
\begin{aligned}
&D^2_{1,\delta}D^2_{2,\delta}G_0(0,0:y',z')\\
&=D^2_\delta g_1(0)\Big\{D^2_\delta g_2(0)F_\alpha(2\delta+y',2\delta+z')\\
&\qquad+2D_\delta g_2(0)D_{2,\delta}F_\alpha(2\delta+y',\delta+z')+g_2(0)D^2_{2,\delta}F_\alpha(2\delta+y',z')\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2D_\delta g_1(0)\Big\{D_\delta^2 g_2(0)D_{1,\delta}F_\alpha(\delta+y',2\delta+z')\\
&\quad+2D_\delta g_2(0)D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(\delta+y',\delta+z')+g_2(0)D_{1,\delta}D_{2,\delta}^2F_\alpha(\delta+y',z')\Big\}\\
&+g_1(0)\Big\{D_\delta^2 g_2(0)D_{1,\delta}^2F_\alpha(y',2\delta+z')\\
&\quad+2D_\delta g_2(0)D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}F_\alpha(y',\delta+z')+g_2(0)D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F_\alpha(y',z')\Big\},
\end{aligned}
$$

有

$$
D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2G_0(0,0:\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1},\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})=O(\Delta^{1+\alpha})
$$

对 j，j'，k，k' 一致成立。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\kappa(\widetilde{y}_{j-1}+\widetilde{y}_{j'-1})/2}\mathrm{e}^{\eta(\widetilde{z}_{k-1}+\widetilde{z}_{k'-1})/2}F_{j',k'}^{j,k}\\
&=\mathrm{e}^{-\kappa\delta/2}\mathrm{e}^{-\eta\delta/2}D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)\\
&\quad+O(\Delta^{1+\alpha})+O\bigg(\Delta^{1/2+\alpha}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg),
\end{aligned}
$$

结合 $\delta=\widetilde{y}_{j'}-\widetilde{y}_{j'-1}=\widetilde{z}_{k'}-\widetilde{z}_{k'-1}$，即可得到所需结果。

(1) 根据 $F_{j,k}=F^{j}_{\cdot,jk,}$ 和 $D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F_\alpha(-\delta,-\delta)=4D_{1,\delta}D_{2,\delta}F_\alpha(0,0)$，证明完毕。

(2) 由于由 (4.6) 以及引理 4.8 和 4.9 可知

$$
D_{1,\delta}^2D_{2,\delta}^2F_\alpha(\widetilde{y}_{j'-1}-\widetilde{y}_j,\widetilde{z}_{k'-1}-\widetilde{z}_k)=O(\Delta^{1+\alpha})+O\bigg(\frac{\Delta^\alpha}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\bigg),
$$

(4.36) 即可得到所需结果。

(3) 对于 $f\in\boldsymbol{F}_{J,\alpha-1}(\mathbb{R}_+)$，有

$$
(J+1)x^\alpha f(x),\ (J+1)x^{1+\alpha}f'(x),\ (J+1)x^{2+\alpha}f''(x)\lesssim(J+1)x\mathrm{e}^{-Jx}\lesssim 1\quad(x\to 0),
$$

$$
(J+1)x^{1+\alpha}f(x),\ (J+1)x^{2+\alpha}f'(x),\ (J+1)x^{3+\alpha}f''(x)\lesssim(J+1)\mathrm{e}^{-Jx}\lesssim 1\quad(x\to\infty)
$$

a因此我们看到 $(J+1)f\in\boldsymbol{F}_{0,\alpha}(\mathbb{R}_+)$。因此，由 $f_{J,\alpha}\in\boldsymbol{F}_{J/2,\alpha-1}(\mathbb{R}_+)$ 可得 at

$$
\begin{aligned}
(J+1)F_{J,j',k'}^{j,k}&=\Delta^{1+\alpha}\sum_{\ell_1,\ell_2\geq 1}(J+1)f_{J,\alpha}(\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta)(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j)-e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k)-e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1}))\\
&\quad\times(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j'})-e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j'-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k'})-e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k'-1}))\\
&=O\bigg(\Delta^\alpha\bigg(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\bigg)\bigg)\\
&\quad+O\bigg(\Delta^{1/2+\alpha}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg)
\end{aligned}
$$

与式 (2) 同理。 □

引理 4.11 有

$$
\mathrm{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]=\sigma^2\times\begin{cases}F_{j',k'}^{j,k}-\frac{1}{2}F_{2(i-1),j',k'}^{j,k}, & i=i',\\ -\frac{1}{2}(F_{|i-i'|-1,j',k'}^{j,k}+F_{i+i'-2,j',k'}^{j,k}), & i\neq i'.\end{cases}
$$

特别地，对于 $\alpha\in(0,2)$ 和 $\delta=r\sqrt{\Delta}$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]&=O\bigg(\frac{\Delta^\alpha}{|i-i'|+1}\bigg(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\bigg)\bigg)\\
&\quad+O\bigg(\frac{\Delta^{\alpha+1/2}}{|i-i'|+1}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg)\quad(4.38)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{k,k'=1}^{m_2}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\sum_{i,i'=1}^{N}\mathrm{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]^2=O(mN\Delta^{2\alpha}).
$$

证明。通过简单计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\big[x_{\ell_1,\ell_2}(t_i)-x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i-1}),x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i'})-x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i'-1})\big]\\
&=\operatorname{Cov}[A_{i,\ell_1,\ell_2}+B_{i,\ell_1,\ell_2},A_{i',\ell_1,\ell_2}+B_{i',\ell_1,\ell_2}]\\
&=\operatorname{Cov}[B_{i,\ell_1,\ell_2},B_{i',\ell_1,\ell_2}]\\
&=\sigma^2\times\begin{cases}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}}\Big(1-\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta}}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda_{\ell_1,\ell_2}(i-1)\Delta}\Big), & i=i',\\ -\frac{(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}\Delta})^2}{2\lambda_{\ell_1,\ell_2}^{1+\alpha}}(\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}(|i'-i|-1)\Delta}+\mathrm{e}^{-\lambda_{\ell_1,\ell_2}(i'+i-2)\Delta}), & i\neq i'\end{cases}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]&=\sum_{\ell_1,\ell_2\geq1}\operatorname{Cov}\big[x_{\ell_1,\ell_2}(t_i)-x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i-1}),x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i'})-x_{\ell_1,\ell_2}(t_{i'-1})\big]\\
&\quad\times(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_j)-e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_k)-e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k-1}))\\
&\quad\times(e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j'})-e_{\ell_1}^{(1)}(\widetilde{y}_{j'-1}))(e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k'})-e_{\ell_2}^{(2)}(\widetilde{z}_{k'-1}))\\
&=\sigma^2\times\begin{cases}F_{j',k'}^{j,k}-\frac{1}{2}F_{2(i-1),j',k'}^{j,k}, & i=i',\\ -\frac{1}{2}(F_{|i-i'|-1,j',k'}^{j,k}+F_{i+i'-2,j',k'}^{j,k}), & i\neq i'.\end{cases}
\end{aligned}$$

由引理 4.10 可知

$$\begin{aligned}
F_{j',k'}^{j,k}-\frac{1}{2}F_{2(i-1),j',k'}^{j,k}&=O\bigg(\Delta^{\alpha}\bigg(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\bigg)\bigg)\\
&\quad+O\bigg(\Delta^{1/2+\alpha}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg),\\
F_{|i-i'|-1,j',k'}^{j,k}+F_{i+i'-2,j',k'}^{j,k}&=O\bigg(\frac{\Delta^{\alpha}}{|i-i'|+1}\bigg(\Delta+\frac{1}{(|j-j'|+1)(|k-k'|+1)}\bigg)\bigg)\\
&\quad+O\bigg(\frac{\Delta^{1/2+\alpha}}{|i-i'|+1}\bigg(\mathbf{1}_{\{j\neq j'\}}\frac{1}{|j-j'|+1}+\mathbf{1}_{\{k\neq k'\}}\frac{1}{|k-k'|+1}\bigg)\bigg)
\end{aligned}$$

关于 j，k，j'，k'一致成立，因此得到 (4.38)。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{mN\Delta^{2\alpha}}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\sum_{i,i'=1}^{N}\operatorname{Cov}[T_{i,j,k}X,T_{i',j',k'}X]^2\\
&=O\bigg(\frac{1}{N}\sum_{i,i'=1}^{N}\frac{1}{(|i-i'|+1)^2}\bigg(m\Delta^2+\frac{1}{m_1}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\frac{1}{(|j-j'|+1)^2}\frac{1}{m_2}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\frac{1}{(|k-k'|+1)^2}\bigg)\bigg)\\
&\quad+O\bigg(\frac{1}{N}\sum_{i,i'=1}^{N}\frac{1}{(|i-i'|+1)^2}\bigg(m_2\Delta\times\frac{1}{m_1}\sum_{j,j'=1}^{m_1}\frac{1}{(|j-j'|+1)^2}\\
&\qquad+m_1\Delta\times\frac{1}{m_2}\sum_{k,k'=1}^{m_2}\frac{1}{(|k-k'|+1)^2}\bigg)\bigg)\\
&=O(1)+O(\sqrt{\Delta})\\
&=O(1).
\end{aligned}$$

□

4.6. 估计量一致性的辅助结果。 以下引理用于证明估计量的一致性。

引理 4.12 设 $\alpha\in[1,2)$ 和 $r\in(0,\infty)$。对于 (2.4) 中给出的 $\psi_{r,\alpha}$，函数

$$\theta_2\mapsto\frac{\psi_{r,\alpha}(\theta_2)}{\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)}\tag{4.39}$$

对于 $\theta_2>0$ 是单射的。

证明。 注意

$$\psi_{r,\alpha}(\theta_2)=\frac{2(r')^{2\alpha}}{\theta_2\pi}\int_0^\infty\frac{1-\mathrm{e}^{-(x/r')^2}}{x^{1+2\alpha}}(J_0(\sqrt{2}x)-2J_0(x)+1)\mathrm{d}x,$$

其中 $r'=r/\sqrt{\theta_{2\circ}}$ 令

$$\psi_\alpha(t)=\int_0^\infty\frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^{1+2\alpha}}(J_0(\sqrt{2}x)-2J_0(x)+1)\mathrm{d}x,$$

函数 (4.39) 可表示为

$$\theta_2\mapsto\frac{\psi_{r,\alpha}(\theta_2)}{\psi_{r/\sqrt{2},\alpha}(\theta_2)}=2^\alpha\times\frac{\psi_\alpha(\theta_2/r^2)}{\psi_\alpha(2\theta_2/r^2)}.$$

因此，只需证明函数

$$t\mapsto\frac{\psi_\alpha(t)}{\psi_\alpha(2t)}\tag{4.40}$$

对 $t>0$ 是单射。

设 $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 对 $s>0$。由于

$$\begin{aligned}J_0(\sqrt{2}x)-2J_0(x)+1&=\left(1+\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k\right)-2\left(1+\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k\right)+1\\&=\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{2}{4^k}\right)x^{2k},\end{aligned}$$

对于 $t>0$，结论成立,

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha(t)&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^{2\alpha-1}}(J_0(\sqrt{2}x)-2J_0(x)+1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{2}{4^k}\right)x^{2(k-\alpha)+1}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{2}{4^k}\right)\int_0^\infty x^{2(k-\alpha)+1}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{4^k}\right)\int_0^\infty z^{(k-\alpha+1)-1}\mathrm{e}^{-tz}\mathrm{d}z\\&=\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{4^k}\right)\frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{t^{k-\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Let

$$\varphi_\alpha(s)=\sum_{k\geq2}\frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\frac{(-1)^ks^k}{k!}$$

对于 $s>0$。由于

$$\int_0^s x^{k-\alpha}(s-x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(k+1)}s^k,$$

有

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(s)&=\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)k!}\int_0^s x^{k-\alpha}(s-x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s x^{-\alpha}(s-x)^{\alpha-1}\sum_{k\geq2}\frac{(-x)^k}{k!}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s x^{-\alpha}(s-x)^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{-x}-1+x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha(t) &= t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{1}{2t}\Big)^k - \sum_{k\geq 2}\frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{1}{4t}\Big)^k\right)\\ &= t^{\alpha-1}\left(\frac{\varphi_\alpha(1/2t)}{2} - \varphi_\alpha(1/4t)\right)\\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{1/2t} x^{-\alpha}\Big(\frac{1}{2t}-x\Big)^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{-x}-1+x)\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left. - \int_0^{1/4t} x^{-\alpha}\Big(\frac{1}{4t}-x\Big)^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{-x}-1+x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{1}{2^\alpha}\int_0^{1/2t} x^{-\alpha}(1-2tx)^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{-x}-1+x)\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left. - \frac{1}{2\cdot 4^{\alpha-1}}\int_0^{1/2t}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\alpha}(1-2tx)^{\alpha-1}\Big(\mathrm{e}^{-x/2}-1+\frac{x}{2}\Big)\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{1/2t} x^{-\alpha}(1-2tx)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-x/2})^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 $\psi_\alpha(0)=0$ 可知

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(t) &= \int_0^t \psi'_\alpha(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_s^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{s}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^t x^{\alpha-2}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\int_0^x\Big(1-\frac{s}{x}\Big)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.+\int_t^\infty x^{\alpha-2}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\int_0^t\Big(1-\frac{s}{x}\Big)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)}\left\{\int_0^t x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.+\int_t^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^\alpha\Big\}\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

因此，注意到

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(2t) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)}\left\{\int_0^{2t} x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.+\int_{2t}^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\Big\{1-\Big(1-\frac{2t}{x}\Big)^\alpha\Big\}\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\int_0^t x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\mathrm{d}x\right.\\ &\qquad\left.+\int_t^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^\alpha\Big\}\mathrm{d}x\right\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha(2t) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{2t}^\infty x^{\alpha-1}\Big(1-\frac{2t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{2^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

有

$$\psi'_\alpha(t)\psi_\alpha(2t)-2\psi_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t)=\frac{2^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}(I_{\alpha,1}(t)+I_{\alpha,2}(t)),$$

其中

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,1}(t)=&\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\int_0^t x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\mathrm{d}x\\
&-\int_0^t x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\mathrm{d}x,\\
I_{\alpha,2}(t)=&\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\\
&\times\int_t^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha}\Big\}\mathrm{d}x\\
&-\int_t^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha}\Big\}\mathrm{d}x\\
&\times\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由于对 $0<y<x$，有 $\mathrm{e}^{-1/8x}-\mathrm{e}^{-1/8y}>0$，因此可得

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,1}(t)=&\int_t^\infty\int_0^t x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}y^{\alpha-1}\\
&\times\{(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2-(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/4y})^2\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
=&\int_t^\infty\int_0^t x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}y^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2\\
&\times(2+\mathrm{e}^{-1/8x}+\mathrm{e}^{-1/8y})(\mathrm{e}^{-1/8x}-\mathrm{e}^{-1/8y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
>&0.
\end{aligned}$$

此外，有

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,2}(t)=&\int_t^\infty\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}y^{\alpha-1}\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{y}\Big)^{\alpha}\Big\}\\
&\times\{(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2-(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/4y})^2\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
=&\int_t^\infty\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}y^{\alpha-1}\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{y}\Big)^{\alpha}\Big\}\\
&\times(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2(2+\mathrm{e}^{-1/8x}+\mathrm{e}^{-1/8y})(\mathrm{e}^{-1/8x}-\mathrm{e}^{-1/8y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
=:&\int_t^\infty\int_t^\infty g_{\alpha,t}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
=&\iint_{D_t}(g_{\alpha,t}(x,y)+g_{\alpha,t}(y,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 $D_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+|x>y>t\}$。令

$$h_{\alpha,t}(x)=x\Big\{\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{1-\alpha}-1\Big\}$$

对于 $\alpha\geq1$ 和 $x>t$，可得

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha,t}(x,y)+g_{\alpha,t}(y,x)\\
&=x^{\alpha-2}y^{\alpha-2}\Big\{\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}y\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{y}\Big)^{\alpha}\Big\}-\Big(1-\frac{t}{y}\Big)^{\alpha-1}x\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha}\Big\}\Big\}\\
&\quad\times(1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2(2+\mathrm{e}^{-1/8x}+\mathrm{e}^{-1/8y})(\mathrm{e}^{-1/8x}-\mathrm{e}^{-1/8y})\\
&=x^{\alpha-2}y^{\alpha-1}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}\Big\{1-\Big(1-\frac{t}{y}\Big)^{\alpha-1}\Big\}\Big(1-\frac{h_{\alpha,t}(x)}{h_{\alpha,t}(y)}\Big)
\end{aligned}$$

$$\times (1-\mathrm{e}^{-1/8x})^2(1-\mathrm{e}^{-1/8y})^2(2+\mathrm{e}^{-1/8x}+\mathrm{e}^{-1/8y})(\mathrm{e}^{-1/8x}-\mathrm{e}^{-1/8y}).$$

利用伯努利不等式:

$$(1+z)^\beta \geq 1+\beta z$$

对于 $\beta \geq 1$ 和 $z>-1$，我们看到 $h'_{\alpha,t}(x) = (1-\frac{t}{x})^{-\alpha}(1-\frac{\alpha t}{x}) = 1 \leq 0$ 对于 $x>t$ 和 $h_{\alpha,t}(x)$ 在 $\alpha \geq 1$时关于 $x>t$ 单调递减。因此，我们得到 $g_{\alpha,t}(x,y)+g_{\alpha,t}(y,x) \geq 0$，也就是说，$I_{\alpha,2}(t) \geq 0$。因此，我们有 $\psi'_\alpha(t)\psi_\alpha(2t) - 2\psi_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t) > 0$，这意味着当 $\alpha \in [1,2$ 时，函数 (4.40) 是单射）。□

引理4.13 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $r \in (0,\infty)$。那么，当 $\theta_2 > r^{2^{-}8\log(2^{\alpha/2}-1)}$ 时，函数 (4.39) 是单射。

证明。只需证明 $\psi'_\alpha(t)\psi_\alpha(2t) - 2\psi_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t) > 0$ 对于 $t > -_8 \quad {}^{1}_{\log(2^{\alpha/2}-1)}$。令

$$G_\alpha(t) = \int_t^\infty (x-t)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x, \quad F_\alpha(t) = \frac{G_\alpha(0)-G_\alpha(t)}{t\psi'_\alpha(t)}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(t) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)}\left\{\int_0^\infty x^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x \right.\\
&\qquad \left. -\int_t^\infty x^{\alpha-1}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^\alpha(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{G_\alpha(0)}{2\Gamma(\alpha+1)} - \psi'_{\alpha+1}(t),\\
\psi'_{\alpha+1}(t) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)}\int_t^\infty x^{\alpha-1}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\\
&\qquad -\frac{t}{2\Gamma(\alpha+1)}\int_t^\infty x^{\alpha-2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-1/4x})^2\mathrm{d}x\\
&= \frac{G_\alpha(t)}{2\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t\psi'_\alpha(t)}{\alpha},
\end{aligned}$$

我们得到

$$\psi_\alpha(t) = \frac{G_\alpha(0)-G_\alpha(t)}{2\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t\psi'_\alpha(t)}{\alpha} = t\psi'_\alpha(t)\left(\frac{F_\alpha(t)}{2\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha}\right).$$

因此可知

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha(t)\psi_\alpha(2t) - 2\psi_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t) &= 2t\psi'_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t)\left(\frac{F_\alpha(2t)}{2\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha}\right)\\
&\qquad -2t\psi'_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t)\left(\frac{F_\alpha(t)}{2\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha}\right)\\
&= \frac{t\psi'_\alpha(t)\psi'_\alpha(2t)}{\Gamma(\alpha+1)}(F_\alpha(2t)-F_\alpha(t)).
\end{aligned}$$

注意，$G_\alpha(t)$ 在 $t>0$ 时严格单调递减，即

$$G_\alpha(0)-G_\alpha(2t) > G_\alpha(0)-G_\alpha(t) > 0. \tag{4.41}$$

由于

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-x/4t})^2\mathrm{d}x,\\
\psi'_\alpha(2t) &= \frac{2^{\alpha-2}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-x/8t})^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

并且对于 $t > -_8 \quad {}^{1}_{\log(2^{\alpha/2}-1)}$，有 $(1+\mathrm{e}^{-1/8t})^2 > 2^\alpha$

$$\psi'_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-x/8t})^2(1+\mathrm{e}^{-x/8t})^2\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&> \frac{t^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}(1+\mathrm{e}^{-1/8t})^2\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}(1-\mathrm{e}^{-x/8t})^2\mathrm{d}x \\
&> 2\psi'_\alpha(2t),
\end{aligned}
$$

结合 (4.41) 可得，对于 $t > -\frac{1}{8\log(2^{\alpha/2}-1)}$，$F_\alpha(2t) - F_\alpha(t) > 0$。———————— □

References

[1] R. Altmeyer、T. Bretschneider、J. Jan´ak 和 M. Reiß。《细胞复极化随机偏微分方程模型中的参数估计》，*SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*，10(1):179–199，2022。[2] M. Bibinger 和 M. Trabs。《利用高频观测估计随机偏微分方程的波动率》。*Stochastic Processes and their Applications* 130 5 3005 3052, 2020，( ): – 。[3] C. Chong。《乘性噪声抛物型随机偏微分方程的高频分析：第一部分》。*arXiv preprint arXiv:1908.04145* 2019，。[4] C. Chong。《抛物型随机偏微分方程的高频分析》。*The Annals of Statistics* 48 2 1143 1167, 2020，( ): – 。[5] I. Cialenco。《随机偏微分方程的统计推断：概述》。*Statistical Inference for Stochastic Processes*，21 2 309( ): –329，2018。[6] I. Cialenco、F. Delgado-Vences 和 H.J. Kim。《离散采样随机偏微分方程的漂移估计》。*Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations* 8 895 920, 2020，: – 。[7] I. Cialenco 和 N. Glatt-Holtz。《受随机扰动的纳维-斯托克斯方程的参数估计》。*Stochastic Processes and their Applications*，121(4):701–724，2011。[8] I. Cialenco、R. Gong 和 Y. Huang。《加性噪声驱动的随机偏微分方程的轨迹拟合估计量》。*Statistical Inference for Stochastic Processes* 21 1 1 19, 2018，( ): – 。[9] I. Cialenco 和 Y. Huang。《关于离散采样随机偏微分方程参数估计的说明》。*Stochastics and Dynamics* 20 3 2050016, 2020，( ): 。[10] F. Hildebrandt 和 M. Trabs。《基于离散观测的随机反应扩散方程非参数校准》。*arXiv preprint arXiv:2102.13415*，2021。[11] F. Hildebrandt 和 M. Trabs。《基于时空离散观测的随机偏微分方程参数估计》。*Electronic Journal of Statistics*，15(1):2716–2776，2021。[12] M. H¨ubner、R. Khasminskii 和 B.L. Rozovskii。《*Two Examples of Parameter Estimation for Stochastic Partial Differential Equations*》，第 149 160 – 页。Springer New York，1993。[13] M. H¨ubner 和 B.L. Rozovskii。《抛物型随机偏微分方程最大似然估计量的渐近性质》。*Probability Theory and Related Fields*，103(2):143–163，1995。[14] Y. Kaino 和 M. Uchida。《基于离散观测的抛物型线性随机偏微分方程模型参数估计》。*Journal of Statistical Planning and Inference*，211:190–220，2020。[15] Y. Kaino 和 M. Uchida。《小噪声下抛物型线性随机偏微分方程的自适应估计量》。*Japanese Journal of Statistics and Data Science* 4 513 541, 2021，: – 。[16] S. V. Lototsky。《随机抛物型方程的参数估计：基于二维投影的估计量的渐近性质》*Statistical Inference for Stochastic Processes*，6:65–87，2003。[17] S. V. Lototsky。《随机抛物型方程的统计推断：谱方法》。*Publicacions Matemàtiques* 53 1 3 45, 2009，( ): – 。[18] Z. Mahdi Khalil 和 C. Tudor。《通过幂变差估计分数阶随机热方程的漂移参数》。*Modern Stochastics: Theory and Applications*，6(4):397–417，2019。[19] B. Markussen。《离散观测随机偏微分方程的似然推断》。*Bernoulli*，9 745 762，2003: – 。[20] L. Piterbarg 和 A. Ostrovskii。《*Advection and diffusion in random media: implications for sea surface temperature anomalies* 1997》。Springer Science & Business Media，。[21] Y. Tonaki、Y. Kaino 和 M. Uchida。《基于高频数据的二维空间线性抛物型随机偏微分方程参数估计》。*arXiv preprint arXiv:2201.09036*，2022。[22] Y. Tonaki、Y. Kaino 和 M. Uchida。《小噪声下二维空间线性抛物型随机偏微分方程模型的参数估计》。*arXiv preprint arXiv:2206.10363*，2022。[23] H.C. Tuckwell。《神经生物学中的随机偏微分方程：脉冲神经元的线性和非线性模型》，载于 *Stochastic biomathematical models*，第149–173页，2013。Springer。[24] M. Uchida 和 N. Yoshida。《基于采样数据的遍历扩散过程自适应估计》。*Stochastic Processes and their Applications* 122 8 2885 2924, 2012，( ): – 。