arXiv:2304.09464v1 [math.CA] 19 Apr 2023

Rd 中离散化的点-超平面关联界

Thang Pham * Chun-Yen Shen† Nguyen Pham Minh Tri ‡

摘要

设 P 是 $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ 中一个 δ-分离的 (δ, s, C_P) 点集，且 Π 是一族 δ-分离的 (δ, t, C_Π) 超平面，它们与 $B(0,1)$ 相交于 $\mathbb{R}^d$。定义

$$I_{C\delta}(P,\Pi) = \#\{(p,\pi) \in P \times \Pi \colon p \in \pi(C\delta)\}.$$

假设 $s, t \geq \frac{d+1}{2}$，则有 $I_{C\delta}(P,\Pi) \lesssim \delta |P||\Pi|$。我们的论证的主要组成部分是 Eswarathansan、Iosevich 和 Taylor (2011) 的一个测度论结果，该结果通过对广义 Radon 变换使用 Sobolev 界得以证明。我们的结果本质上是尖锐的；最后一节将给出并讨论一个构造。

1 引言

我们从以下两个定义开始。

定义 1.1（(δ, s, C) 集）。设 $0 \leq s < \infty$ 和 $\delta \in (0,1)$，且 $C > 0$为常数。给定度量空间 (X, d)，有界集 $E \subset X$ 称为(δ, s, C)-集，若对每个 $\delta \leq r \leq 1$ 以及所有半径为 r的球 $B \subset X$，都有

$$|E \cap B|_\delta \leq C r^s |E|_\delta,$$

其中 $|E|_\delta$ 表示空间 (X, d) 中 E 的 δ-覆盖。

我们注意到，这个定义与 Katz 和 Tao 在 [9] 中引入的经典定义略有不同。

定义 1.2（Katz-Tao (δ, s, C)-集）。设 $0 \leq s < \infty$ 和 $\delta \in (0,1)$，且 $C > 0$为常数。给定度量空间 (X, d)，有界集 $E \subset X$ 称为 Katz-Tao (δ, s, C)-集，若对每个$\delta \leq r \leq 1$ 以及所有半径为 r的球 $B \subset X$，都有

$$|E \cap B|_\delta \leq C \left(\frac{r}{\delta}\right)^s.$$

注意，如果 $|E|_\delta \sim \delta^{-s}$，那么上述两个定义是等价的。

设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个 δ-分离的 (δ, s, C_P) 点集，Π 是一组与 $B(0,1)$ 相交的 δ-分离的 (δ, t, C_Π) 超平面。$\mathbb{R}^d$ 中 P 与 Π 之间的离散化点-平面关联数定义为

$$I_{C\delta}(P,\Pi) = \#\{(p,\pi) \in P \times \Pi \colon p \in \pi(C\delta)\},$$

其中，$\pi(C\delta)$ 表示超平面 π 的 $C\delta$ 邻域。在本文中，我们将 C_P、C_Π 以及其他常数视为绝对正的有界常数。

*越南国家大学河内科学大学。电子邮箱：phamanhthang.vnu@gmail.com
†国立台湾大学数学系。电子邮箱：cyshen@math.ntu.edu.tw
‡胡志明市师范大学。电子邮箱：nguyenphamminhtri104@gmail.com

我们最初的动机来自 Orponen、Shmerkin 和 Wang [11], 以及 Fu 和 Ren [4] 在二维情形下得出的以下近期定理。

定理 1.3. 设 $0 \le s$、$t \le 2$。那么，对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_0 = \delta_0(\epsilon) > 0$ 使得对于所有 $\delta \in (0, \delta_0]$，以下结论成立。设 $P \subset B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ 为一个 δ-分离的 $(\delta, s, \delta^{-\epsilon})$-点集，并设 $\mathcal{T}$ 为一个与 $B(0,1)$ 相交的 δ-分离的 $(\delta, t, \delta^{-\epsilon})$-管集。

1. 如果 $1 \ge t \ge s$ 或 $1 \ge s \ge t$，则
$$I_\delta(P, \mathcal{T}) \lesssim |P||\mathcal{T}|\delta^{\frac{st}{s+t}-O(\epsilon)}.$$

2. 如果 $t \ge 1 \ge s \ge t-1$，则
$$I_\delta(P, \mathcal{T}) \lesssim |P||\mathcal{T}|\delta^{\frac{st}{1+s}-O(\epsilon)}$$

3. 如果 $s \ge 1 \ge t \ge s-1$，则
$$I_\delta(P, \mathcal{T}) \lesssim |P||\mathcal{T}|\delta^{\frac{st}{1+t}-O(\epsilon)}.$$

4. 如果 $t > 1$ 且 $s > 1$，则
$$I_\delta(P, \mathcal{T}) \lesssim |P||\mathcal{T}|\delta^{\kappa(s+t-1)-O(\epsilon)},\ \kappa = \min\{1/2,\ 1/(s+t-1)\}.$$

在全文中，$X \lesssim Y$ 表示对于某个常数 C，有 $X \le CY$，并且当$X \lesssim Y \lesssim X$时，$X \sim Y$。

本文的主要目的是将定理 1.3 推广到更高维数，即在 $\mathbb{R}^d$ with$d \ge 3$ 中。我们的第一个结果如下。

定理 1.4. 设 $C > 0$、$0 \le s$。存在 $\delta_0 = \delta_0(C、\ s、\ t) > 0$，使得对于 $\delta \in (0, \delta_0)$，以下结论成立。设 P 是 δ- 分离的 $(\delta、\ s、\ C_P)$- 点集，位于 $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ 中，并设 Π 是与 $B(0,1)$ 相交于 $\mathbb{R}^d$ 的 δ-分离的 $(\delta、\ t、\ C_\Pi)$-超平面集。定义
$$I_{C\delta}(P, \Pi) = \#\{(p, \pi) \in P \times \Pi \colon p \in \pi(C\delta)\}.$$
假设 $s、\ t > \frac{d+1}{2}$，则我们得到尖锐估计 $I_{C\delta}(P、\ \Pi) \lesssim \delta|P||\Pi|$。

在上述定理中，证明需要条件 $s > \frac{d+1}{2}$ 和 $t > \frac{d+1}{2}$。当 $s、\ t$ 较小时，利用初等几何论证，我们能够证明以下非平凡结果。

定理 1.5. 设 $C > 0$, $0 \le s, t \le d$。存在 $\delta_0 = \delta_0(C, s, t) > 0$，使得对 $\delta \in (0, \delta_0)$，以下结论成立。设 P 是 $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ 中的一个 (δ, s, C_P) 点集，且 Π 是与 $B(0,1)$ 相交于 $\mathbb{R}^d$（其中 $d \ge 3$）的一个 (δ, t, C_Π) 超平面集。我们进一步假设 $s - d + 2 > 0$。那么，对任意 $\epsilon > 0$，有
$$I_{C\delta}(P, \Pi) \lesssim |P| \cdot |\Pi| \cdot \delta^{f(t)(s-d+2)-\epsilon},$$
其中
$$f(t) = \begin{cases} 1/2, & \text{if } t \ge 1 \\ \dfrac{t}{1+t}, & \text{if } t < 1 \end{cases}.$$

备注 1.1. 如果 $t - d + 2 > 0$，那么我们可以使用对偶论证得到类似的结果。尽管定理 1.4 是最优的，但我们尚未构造出能够证明该定理尖锐性的例子。

主要思想与比较：我们首先讨论定理 1.3 证明中的主要思想。注意，如果 P 是一个 (δ, s, C)-集，那么 P 可以被至多 $|P|\delta^{s-O(\epsilon)}$ 个 Katz-Tao (δ, s)-集覆盖。详细证明见 [11, 引理 3.5]。基于这一观察，可以应用 Fu 和 Ren 在 [4] 中得到的定理 1.4 和定理 1.5。为了证明这两个定理，Fu 和 Ren 使用了几何论证以及 Guth、Solomon 和 Wang [5] 的一些早期结果，还有 Bradshaw [1] 的一个推广。

在更高维情形 $d \geq 3$ 下，为了证明定理 1.4，我们采用一种完全不同的方法。更具体地说，我们使用 Eswarathansan、Iosevich 和 Taylor [3]，得出的一个测度论结果，该结果通过使用广义 Radon 变换的 Sobolev 界得到证明。定理 1.5 的证明结合了 Cauchy-Schwartz 论证以及 Hera、Keleti 和 Mathe [6] 得出的几何结果。

我们还想补充说明，定理 1.4 的证明方法类似于 Iosevich、Jorati 和 Laba [8] 在研究一组“管”和一个具有相同规模的点的齐次集之间的关联时所引入的机制。由于我们的证明使用了广义 Radon 变换的 Sobolev 界，因此可以将其推广到更一般的形式，即超平面的方程 $x_d = a_1 x_1 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1} + a_d$ 可以替换为 $\Psi(a_1, \ldots, a_d, x_1, \ldots, x_d) = 0$，其中函数 Ψ 满足下文的 Phong-Stein 曲率条件 (4)。

如果平面集合只需满足其为 δ-分离的性质，那么 Dabrowski、Orponen 和 Villa 最近关于 ($d-1$)-超平面的工作 [2] 告诉我们

$$I_{C\delta}(P, \Pi) \lesssim \delta^{-\epsilon} \delta^{\frac{(d-1)(s+1-d)}{2d-1-s}} |P||\Pi|^{\frac{d-1}{2d-1-s}}, \tag{1}$$

其中 P 是一个满足 $s > 1$ 的 δ-分离的 (δ, s, C_P)-集合。

当 $|\Pi| \leq \delta^{-d}$ 时，该结果弱于定理 1.4。

现在我们比较估计式 (1) 和定理 1.5。定理 1.5 表明，如果 $s - d + 2 > 0$，那么

$$I_{C\delta}(P, \Pi) \lesssim |P| \cdot |\Pi| \cdot \delta^{f(t)(s-d+2)-\epsilon},$$

其中

$$f(t) = \begin{cases} 1/2, & \text{if } t \geq 1 \\ \dfrac{t}{1+t}, & \text{if } t < 1 \end{cases}.$$

假设 e $t \geq 1$，则通过直接计算可知，该界比 (1) 的界更强，条件为 n

$$\delta^{-t} \lesssim |\Pi| \leq \delta^{\frac{M(2d-1-s)}{d-s}},$$

其中

$$M = \frac{(d-1)(s+1-d)}{2d-1-s} - \frac{s-d+2}{2}.$$

当 $2t \leq s + 1 < d$ 时，该范围非空。

假设 $t < 1$，则当以下条件成立时，定理 1.5 比 (1) 的界更强：

$$\delta^{-t} \lesssim |\Pi| \leq \delta^{\frac{M'(2d-1-s)}{d-s}},$$

其中

$$M' = M - \left(\frac{t}{t+1} - \frac{1}{2}\right)(s-d+2).$$

当 $d-2<s<d-1$ 时，这个范围非空。

2 定理1.4的证明

我们首先回顾一些可在 [2] 中找到的记号。令 $\mathcal{A}(d,n)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 n 维仿射子空间的集合。定义在 $\mathcal{A}(d,n)$ 上的度量 $d_{\mathcal{A}}$ （[10, 第 53] 页）定义为

$$d_{\mathcal{A}}(V,W)=||\pi_{V_0}-\pi_{W_0}||_{op}+|a-b|,$$

其中 $V=V_0+a$ 和 $W=W_0+b, V_0,W_0\in\mathcal{G}(d,n)$（ n维子空间的集合）， $a\in V_0^{\perp}$,$b\in W_0^{\perp}$，且 $||\cdot||_{op}$ 是算子范数。

设 γ_1 和 γ_2 是由下式定义的两个$(d-1)$-平面

$$\gamma_1\colon x_d=a_1x_1+\cdots+a_{d-1}x_{d_1}+a_d,$$

and

$$\gamma_2\colon x_d=b_1x_1+\cdots+b_{d-1}x_{d_1}+b_d.$$

下面的公式在实际应用中更为有用

$$d_{\mathcal{A}}\left(\gamma_1,\gamma_2\right)=\left|\frac{(a_1\ldots,a_{d-1},-1)}{|(a_1\ldots,a_{d-1},-1|}-\frac{(b_1\ldots,b_{d-1},-1)}{|(b_1\ldots,b_{d-1},-1|}\right|+\left|\frac{a_d}{|(a_1\ldots,a_{d-1},-1|}-\frac{b_d}{|(b_1\ldots,b_{d-1},-1)|}\right|.$$

这可以通过直接计算证明，也可参见 [7, 引理 2.5]。

对于由 $x_d=a_1x_1+\cdots+a_{d-1}x_{d-1}+a_d$ 定义的每个平面，我们称点（$a_1,\ldots,a_d$）为其在 $\mathbb{R}^d$ 中的对偶点。

令 $D\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathcal{A}(d,d-1)$ 为如下定义的映射

$$D\colon(x_1,\ldots,x_d)\mapsto\left\{y_d=\sum_{i=1}^{d-1}x_iy_i+x_d\right\}.$$

我们应牢记 D 的一些性质，即将 D 限制在球 $B(R)$ 上，其中 $0<R<\infty$，所得映射到其像是双 Lipschitz 的，且双 Lipschitz 常数仅取决于 R 和 d。因此， D 是单射。 D 的逆映射记为 D^*: i m(D) $\to\mathbb{R}^d$，定义为

$$D(x_1,\ldots,x_d)\mapsto(-x_1,\ldots,-x_{d-1},x_d).$$

存在一个仅依赖于维数的常数 $0<r_d<1$ ，使得将 D^* 限制在 $B(V_0,r_d)$ 上所得映射到其像是双 Lipschitz 的，其中 $V_0=D(0,\ldots,0)$。

使用这些记号，可以通过标准论证证明接下来的两个引理。

引理 2.1. 设 S 是一组相互 δ-分离且与单位球 $B(0,1)$ 相交的超平面。那么，相应对偶点的集合对于某个绝对常数 c 也是 $c\delta$-分离的。

证明。若两个超平面 γ_1 和 γ_2 在度量下是 δ-分离的，

$$d_{\mathcal{A}}\left(\gamma_1,\gamma_2\right)=\left|\frac{(a_1\ldots,a_{d-1},-1)}{|(a_1\ldots,a_{d-1},-1|}-\frac{(b_1\ldots,b_{d-1},-1)}{|(b_1\ldots,b_{d-1},-1|}\right|+\left|\frac{a_d}{|(a_1\ldots,a_{d-1},-1|}-\frac{b_d}{|(b_1\ldots,b_{d-1},-1)|}\right|,$$

其中 γ_1 和 γ_2 分别由方程定义

$$(\gamma_1) : y_d = \sum_{i=1}^{d-1} a_i y_i + a_d,$$

and

$$(\gamma_2) : y_d = \sum_{i=1}^{d-1} b_i y_i + b_d,$$

那么，我们希望证明，点 $(a_1, \ldots, a_d)$ 和 $(b_1, \ldots, b_d)$ 之间通常的欧几里得距离至少为 $c\delta$，其中 c 是某个绝对常数。为简化记号，我们将 $u = (a_1 \ldots, a_{d-1}, -1)$ 和 $v = (b_1 \ldots, b_{d-1}, -1)$ 分别记为上述两点。显然， $|u|, |v| \geq 1$。由于两个超平面 γ_1, γ_2 是 δ-分离的，因此我们有 $d_{\mathcal{A}}(\gamma_1, \gamma_2) \geq \delta$。
在这些假设下，我们尝试证明:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} (a_i - b_i)^2} \gtrsim \delta$$

应当注意，如果我们分别将 a_d、b_d 视为向量 $(0, \ldots, a_d)$、$(0, \ldots, b_d)$，那么两点 $(a_1, \ldots, a_d)$ 和 $(b_1, \ldots, b_d)$ 之间通常的欧几里得距离可以重写为
$\sqrt{|u - v|^2 + |a_d - b_d|^2}$.

因此，目标是证明以下不等式

$$\left| \frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|} \right| + \left| \frac{a_d}{|u|} - \frac{b_d}{|v|} \right| \lesssim \sqrt{|u - v|^2 + |a_d - b_d|^2}. \tag{2}$$

我们不证明 2，而是证明一个更强的版本

$$\left| \frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|} \right| + \left| \frac{a_d}{|u|} - \frac{b_d}{|v|} \right| \lesssim |u - v| + |a_d - b_d|. \tag{3}$$

我们首先证明

$$\left| \frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|} \right| \leq |u - v|.$$

两边平方可得

$$|u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v \geq 2 - \frac{2u \cdot v}{|u||v|}.$$

这可化为

$$2|u||v| - 2u \cdot v \geq 2 - \frac{2u \cdot v}{|u||v|}.$$

记 $|u||v| = x$、$u \cdot v = y$，则上式可表示为

$$(x - 1)(x - y) \geq 0.$$

这个不等式成立，因为根据柯西-施瓦茨不等式， $|u|$、$|v| \geq 1$ 和 $x \geq y$。
现在我们估计 $\left| \frac{a_d}{|u|} - \frac{b_d}{|v|} \right|$。由于所有超平面都与 $B(0, 1)$ 相交，因此有 $\frac{|a_d|}{|u|}$ 和 $\frac{|b_d|}{|v|}$，即超平面 γ_1、γ_2 到原点的距离不超过 1。于是

$$\left| \frac{a_d}{|u|} - \frac{b_d}{|v|} \right| = \left| \frac{a_d|v| - a_d|u| + a_d|u| - b_d|u|}{|u||v|} \right| \leq |u - v| + |a_d - b_d|.$$

证明至此完成。 □

引理2.2. 设 Π 是一组与 $B(0,1)$ 相交的 δ-分离的（δ、t、C_π）-超平面。那么，对偶点集是某个绝对常数 c、$c'>0$ 所对应的 $c\delta$-分离的（δ、t、c'）-集合。

证明。记 Π^* 为超平面 Π的对偶点集。由引理 2.1 可知，集合 Π^* 是$c\delta$-分离的。因此，我们只需证明：对于任意的球 $B(x,r)$，有

$$|\Pi^* \cap B(x,r)|_\delta \leq c' r^t |\Pi^*|_\delta, \delta \leq r \leq 1,$$

其中常数 c' 将在后面选定。只需证明

$$|\left\{x' \in \Pi^* : d(x',x) \leq r\right\}| \leq c' r^t |\Pi^*|_\delta, \delta \leq r \leq 1.$$

如前所述，映射 D是到其像上的双 Lipschitz 映射，因此 $|\{x' \in \Pi^* : d(x',x) \leq r\}|$至多为

$$\left|\left\{D(x') \in \Pi : d_{\mathcal{A}}(D(x'), D(x)) \leq K_D r\right\}\right| \leq C_\pi K_D^t r^t |\Pi^*|_\delta, \delta \leq r \leq 1.$$

取 $c' = C_\pi K_D^t$，则引理得证。注意，K_D^t 可以替换为一个不依赖于 t 的常数，因为 $t \in (0,d)$。

□

2.1 广义 Radon 变换的 Sobolev 界及其推论

在本节中，我们回顾一些利用广义 Radon变换有界性的已知结果。设 g: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 Schwartz 函数，$t \in \mathbb{R}$, ψ: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是光滑截断函数，且 $\Psi(x, y)$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是满足某些适当假设的光滑函数。我们定义

$$T_{\Psi_t} g(\mathbf{x}) := \int_{\{\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})=t\}} g(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x},t}(\mathbf{y}),$$

其中 $d\sigma_{\mathbf{x},t}$是集合 $\{y: \Psi(x, y) = t\}$上的勒贝格测度。

我们将具有 s 阶广义导数的 L^2 函数在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上构成的通常 L^2-Sobolev 空间记为$L_s^2(\mathbb{R}^d)$。下述定理由 Eswarathasan、Iosevich 和 Taylor 在 [3] 中证明。

定理 2.3（[3], 命题 2.2）。设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，满足 $\dim_H(E) = \alpha$，且 μ 是 E 上相应的 Frostman 测度。假设 T_{Ψ_t} 将 L^2 映射到 L_s^2，并且映射常数在 t 的一个小邻域内一致，且 $d - s < \alpha < d$。那么我们有

$$\mu \times \mu\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E \times E : t \leq |\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq t + \epsilon\} \lesssim \epsilon.$$

注 2.1. 从 Eswarathasan-Iosevich-Taylor 的证明中可以看出，同一结果对两个不同的集合 $E \times F$ 也成立，即

$$\mu_E \times \mu_F\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E \times F : t \leq |\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq t + \epsilon\} \lesssim \epsilon,$$

若 T_{Ψ_t}将 L^2映射到 L_s^2，且 $d - s < \alpha$、$\beta < d$，其中 $\alpha = \dim_H(E)$，且 $\beta = \dim_H(F)$。另请注意，集合 E 和 F 不必是 A-D 正则的。此外，在证明中，与集合 E 相关的唯一要求是存在一个概率测度 μ，其支撑在 E上，并满足 $\mu(B(x,r)) \lesssim r^\alpha$；对 F也同样如此。

为了在定理 1.4 的证明中应用上述定理，我们需要回顾 Phong 和 Stein 的一项著名结果 [12]，该结果表明算子 T_{Ψ_t} 从 L^2 到 L_s^2 在一个小邻域上一致有界

t ，其中 $s=\frac{d-1}{2}$ ，当所谓的 Phong-Stein旋转曲率条件

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \nabla_{\mathbf{x}}\Psi \\ -\nabla_{\mathbf{y}}\Psi & \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i \partial y_j} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

在集合 $\{(\mathbf{x},\mathbf{y}):\ \Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})=t\}$ 上成立。由此以及备注 2.1 可得以下定理。

定理 2.4. 设 μ_E、μ_F 分别是定义在紧集 E、$F\subset\mathbb{R}^d$ 上的概率测度，满足

$$\mu_E(B(x,r))\lesssim r^{\alpha},\ \mu_F(B(x,r))\lesssim r^{\beta},$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $r>0$ 均成立。假设函数 Ψ 满足 Phong-Stein旋转曲率条件 (4)，且 $d-(d-1)/2<\alpha$、$\beta<d.$。那么，对于 $\epsilon>0$，有

$$\mu_E\times\mu_F\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in E\times F:|\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leq\epsilon\}\lesssim\epsilon.$$

2.2 定理 1.4 的证明

设 Π^* 是与 Π 中的平面相对应的对偶点集合。正如我们在引理2.2中所证明的，该集合是 $c\delta$-分离的 (δ,t,c')-集。

我们首先在 $P(\delta)$ 和 $\Pi^*(c\delta)$ 上分别定义两个概率测度，记为 μ_P 和 μ_Π，如下：

$$\mu_P(X)=\frac{|X\cap P(\delta)|}{|P(\delta)|},$$

and

$$\mu_{\Pi^*}(X)=\frac{|X\cap\Pi^*(c\delta)|}{|\Pi^*(c\delta)|}.$$

由于 P是(δ,s,C_P)-集且 Π^* 是$(c\delta,t,c')$-集，我们有

$$\mu_P(B(x,r))\lesssim r^s,$$

and

$$\mu_{\Pi^*}(B(x,r))\lesssim r^t,$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $r\geq\delta$均成立。

对于 $r\leq\delta$，我们有 $|B(x,r)\cap P(\delta)|\lesssim r^d$。另一方面，我们有 $|P(\delta)|\gtrsim\delta^{d-s}$，这源于 P是(δ,s,C_P)-集这一假设。对于 $r\leq\delta$和 $s<d$，我们有 $r^{d-s}\leq\delta^{d-s}$，这意味着

$$\mu_P(B(x,r))\lesssim\frac{r^d}{\delta^{d-s}}\lesssim r^s.$$

Π^*也同样成立。换言之，两个概率测度 μ_P 和 μ_{Π^*} 分别是指数为 s 和 t的Frostman测度。

为进一步推进，我们不妨假设所有超平面均由以下形式的方程定义

$$a_1x_1+\cdots+a_{d-1}x_{d-1}+a_d=x_d. \tag{5}$$

这表明，对偶点的形式为（$a_1,\ldots,a_{d-1},1$）。定义

$$\Psi(x_1,\ldots,x_d,a_1,\ldots,a_d)=a_1x_1+\cdots+a_{d-1}x_{d-1}-x_d+a_d.$$

直接计算表明，该函数满足曲率条件（4）。现在注意到，当 $|\Psi(x_1,\dots,x_d,a_1,\dots,a_d)| \le C\delta$ 时，$(x_1,\dots,x_d) \in \pi(C\delta)$，其中 π 由（5）定义。另一方面，当 $|\Psi(x_1,\dots,x_d,a_1,\dots,a_d)| \le C\delta$ 时，当 δ 足够小时，对于所有 $U \in B((x_1,\dots,x_d)\ \delta)$ 和 $V \in B((a_1,\dots,a_d)\ c\delta)$，均有 $|\Psi(U,V)| \lesssim \delta$。这推得

$$\frac{1}{|P||\Pi|}|I_\delta(P,\Pi)| \le \mu_P \times \mu_{\Pi^*}\left\{(U,V) \in P(\delta) \times \Pi^*(c\delta)\colon |\Psi(U,V)| \lesssim \delta\right\}.$$

因此，我们只需证明以下结论。

$$\mu_P \times \mu_{\Pi^*}\left\{(U,V) \in P(\delta) \times \Pi^*(c\delta)\colon |\Psi(U,V)| \lesssim \delta\right\} \lesssim \delta,$$

这可由定理 2.4 得出。

3 定理 1.5 的证明

本节将给出一种研究关联问题的初等论证。

对于 $p \in P$，令 $I(p)$ 表示满足 $p \in \pi(C\delta)$ 的超平面 $\pi \in \Pi$ 的集合。我们注意到

$$I_{C\delta}(P,\Pi) = \sum_{p\in P}|I(p)|.$$

因此，对于 x、$y > 0$ 和 $x \ge y$，由 H¨older 不等式可得

$$I_{C\delta}(P,\Pi) \le |P|^{\frac{x}{x+y}}\left(\sum_p |I(p)|^{\frac{x+y}{y}}\right)^{\frac{y}{x+y}}.$$

这意味着

$$I_{C\delta}(P,\Pi)^{x+y} \le |P|^x\left(\sum_p |I(p)|^{\frac{x+y}{y}}\right)^{y}.$$

为了进一步推进，我们需要估计和 $\sum_p |I(p)|^{1+x/y}$。我们有

$$\sum_{p\in P}|I(p)|^{1+x/y} = \sum_{p\in P}\sum_{\pi\colon p\in\pi(C\delta)}|I(p)|^{x/y} = \sum_{\pi\in\Pi}J(\pi),$$

这里 $J(\pi) = \sum_{p\in\pi(C\delta)}|I(p)|^{x/y}$，可表示如下。

$$J(\pi) = \sum_{p\in\pi(C\delta)}\left(\sum_i |I(p)\cap J_{2^i\delta}(\pi)|\right)^{x/y} \lesssim \sum_{p\in\pi(C\delta)}\sum_{i=1}^{\log\delta^{-1}}|I(p)\cap J_{2^i\delta}(\pi)|^{x/y},$$

其中，$J_{2^i\delta}(\pi)$ 是满足 $d_{\mathcal{A}}(\pi,\pi') \sim 2^i\delta$ 的超平面集合。

由于平面集合为 (δ,t,C_Π)，我们有

$$|J_{2^i\delta}(\pi)| \lesssim (2^i\delta)^t|\Pi|.$$

引理 3.1. 设 π 和 π' 是 $\mathcal{A}(d,d-1)$ 中的两个超平面。假设这两个平面都与单位球 $B(0,1)$ 相交，且 $d_{\mathcal{A}}(\pi,\pi') = w > \delta$，那么交集 $\pi(\delta) \cap \pi'(\delta) \cap B(0,1)$

可以用至多 $\delta^{-(d-2)}$ 个参数为 $\frac{\delta}{w} \times \delta \times \cdots \times \delta$ 的 $\mathbb{R}^d$ 中的立方体覆盖。

证明。该证明本质上结合了 [6] 中的若干结果。设 $e_0 = (0, \cdots, 0)$，且 $\{e_1, \cdots, e_d\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准基。若记 $H_0 = \langle e_d \rangle$，则 H_0 是一条直线，而 $\pi \cap H_0$是形如 $(0, \cdots, 0, a_0)$ 的点。我们还记 $H_i = e_i + H_0$，使得 $\pi \cap H_i$ 也是形如 $(0, \cdots, 1, \cdots, a^i)$ 的点。令 $b_i = a_i - a_0$，然后我们将 a_0 称为超平面的垂直截距，将 b_i 称为超平面 π的斜率。

对于每个超平面 π，我们将其关联到一个点 $x = x(\pi) = (a_0, b_1, \cdots, b_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$，并注意到映射 φ: $\Pi \mapsto x(\Pi)$ 是良定义且单射的。由该映射生成的空间称为编码空间。我们赋予该空间最大度量，即

$$||x - x'|| := \max\left(|a_0 - a_0'|, \max_{i=1,\ldots,d-1}\left(|b_i - b_i'|\right)\right).$$

如 [6,备注 4.2]，所述，编码空间上的最大度量与超平面之间的度量 $d_{\mathcal{A}}$ 强等价，即 $||\varphi(\pi) - \varphi(\pi')|| \sim d_{\mathcal{A}}(\pi, \pi')$。

固定两个超平面 π, π'，并将它们对应的两个编码分别记为 $x(\pi)$ 和 $x(\pi')$。那么我们可以用方程表示平面 π

$$a_0 + b_1 t_1 + \cdots + b_{d-1} t_{d-1} = t_d, (t_1, \ldots, t_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1},$$

其中 $x(\pi) = (a_0, b_1, \cdots, b_{d-1})$。类似地，我们可以根据其编码坐标定义 π'。如 [6, 引理 4.3] 的证明所示，存在一个与 δ 无关的常数 c，使得:

$$\pi(\delta) \subset \pi + (\{0\} \times (-c\delta, c\delta)).$$

因此，我们有

$$\pi(\delta) \cap \pi'(\delta) \cap \mathcal{C} \subset \left\{(t, u) \in \mathbb{R}^d : u \in B(t_d, c\delta) \cap B(t_d', c\delta)\right\},$$

其中 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{d-1} \times L^1$ 和 $\mathcal{C}_{d-1}$ 是 $(0, \ldots, 0)$ $e_1, \ldots, e_{d-1}$ 的凸包，而 L^1 是以原点为中心、位于 $< e_d >$ 中的单位线段。

如果 $|a_0 - a_0'| > \max_{i=1,\ldots,d-1}(|b_i - b_i'|) + D\delta$，那么取 $D = 2c$ 可推出 $B(t_d, c\delta) \cap B(t_d', c\delta)$ 为空。这意味着 $\pi(\delta) \cap \pi'(\delta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$。

如果 $\max_{i=1,\ldots,d-1}(|b_i - b_i'|) > 0$ 且 $B(t_d, c\delta) \cap B(t_d', c\delta) \neq \emptyset$，令 $N = \{t \in \mathcal{C}_{d-1} : |t_d - t_d'| < 2c\delta\}$，则有

$$N = \{t \in \mathcal{C}_{d-1} : p_-(t) \leq t_{d-1} \leq p_+(t)\}$$

其中

$$p_-(t) = p_-(t_1, \cdots, t_{d-2}) = \frac{-2c\delta - (a_0 - a_0') - \sum_{i=1}^{d-2} t_i(b_i - b_i')}{b_{d-1} - b_{d-1}'},$$

and

$$p_+(t) = p_+(t_1, \cdots, t_{d-2}) = \frac{2c\delta - (a_0 - a_0') - \sum_{i=1}^{d-2} t_i(b_i - b_i')}{b_{d-1} - b_{d-1}'}.$$

这意味着，N 是 $\mathcal{C}_{d-1}$ 与两条平行超平面$\{t_{d-1} = p_-(t)\}$ 和 $\{t_{d-1} = p_+(t)\}$之间条带的交集。通过直接计算，这两个

超平面之间的距离等于

$$d(p_-(t), p_+(t)) = \frac{2c\delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^{d-2}(b_i - b_i')^2}} \lesssim \frac{\delta}{\max_{i=1,\dots,d-1}|b_i - b_i'|}.$$

因此， N 包含在一个矩形盒中，该盒的最短边长度为 $d \lesssim \delta/w$ ，其余 $d-2$ 条边的长度至多为 $diam(\mathcal{C}) = \sqrt{2}$。

为完成证明，如有必要，我们进行旋转，假设超平面 π 的法向量为 e_d。由此得到

$$\pi : f(t) = a_0.$$

超平面 π' 的方程形式为

$$\pi' : g(t) = a_0' + b_1' t_1 + \cdots + b_{d-1}' t_{d-1}.$$

在这些假设下，若(t,u)和(t',u')是 $\pi(\delta) \cap \pi'(\delta) \cap \mathcal{C}$中的两个元素，则由三角不等式可得

$$|u - u'| = |u - f(t) + f(t') - u'| \le |u - f(t)| + |u - f(t')| < 2\delta$$

因此，交集部分的第 d个坐标包含在一个维数为 $\lesssim \delta$的盒子中。换言之，交集 $\pi(\delta) \cap \pi'(\delta) \cap \mathcal{C}$ 可由大约 δ^{2-d} 个大小为$\frac{\delta}{w} \times \underbrace{\delta \times \cdots \delta}_{d-1 \text{ 次}}$的二进制盒覆盖
。证明至此完成。 □

引理 3.2。固定 $\pi \in \Pi$。对于任意 $\delta < w \ll 1$，我们有

$$\sum_{p \in \pi(c\delta)} |I(p) \cap J_w(\pi)| \lesssim |J_w(\pi)| \cdot |P|\delta^s \cdot \frac{1}{w^{\min\{s,1\}}} \cdot \frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

证明。固定 $\pi \in J_w(\pi)$，则由引理 3.1 可知， $\pi \cap \pi'$ 包含在由参数为 $\frac{\delta}{w} \times \delta \times \cdots \times \delta$的 δ^{2-d} 个盒子组成的并集中。这意味着每个盒子的直径为 $\sim \delta/w$。我们现在从两种方式对上述和进行界定:

由于 P 是 δ-分离的，每个盒子中至多包含来自 P 的 $\lesssim \frac{1}{w}$ 个元素。这给出

$$\sum_{p \in \pi(c\delta)} |I(p) \cap J_w(\pi)| \lesssim |J_w(\pi)| \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

我们还注意到，每个盒子都包含在半径为 δ/w 的球中，这意味着由于 P 是 (δ, s, C_P) 集合，每个盒子至多包含 $C_P|P|\delta^s \frac{1}{w^s}$ 个 P 球。因此，总共有

$$\sum_{p \in \pi(c\delta)} |I(p) \cap J_w(\pi)| \lesssim |J_w(\pi)| \cdot |P|\delta^s \cdot \frac{1}{w^s} \cdot \frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

Note 根据假设，我们有 $|P|\delta^s \ge 1$ ，因此结合这两个估计，得到的是 t

$$\sum_{p \in \pi(c\delta)} |I(p) \cap J_w(\pi)| \lesssim |J_w(\pi)| \cdot |P|\delta^s \cdot \frac{1}{w^{\min\{s,1\}}} \cdot \frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

这完成了引理的证明。 □

我们现在继续证明关联估计。具体而言，

$$\begin{aligned} J(\pi) &\lesssim \sum_{p\in\pi(C\delta)}\sum_{i}|I(p)\cap J_{2^i\delta}(\pi)|^{x/y} \\ &\lesssim \sum_{i}\sum_{p\in\pi(C\delta)}|I(p)\cap J_{2^i\delta}(\pi)|\cdot|J_{2^i\delta}(\pi)|^{x/y-1} \\ &\lesssim \sum_{i}|(2^i\delta)^t|\Pi||^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{(2^i\delta)^{\min\{s,1\}}}\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}. \end{aligned}$$

现在我们分为以下几种情况:

如果 $s\geq 1$ 和 $tx/y\geq 1$，那么

$$J(\pi)\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}\cdot\sum_i(2^i\delta)^{\frac{tx}{y}-1}\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

如果 $s\geq 1$ 和 $tx/y<1$，则

$$J(\pi)\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}\cdot\sum_i(2^i\delta)^{\frac{tx}{y}-1}\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^{s+\frac{tx}{y}-1}\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

如果 $s<1$ 和 $tx/y\geq s$，那么

$$J(\pi)\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}\cdot\sum_i(2^i\delta)^{\frac{tx}{y}-s}\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}.$$

若 $s<1$ 且 $tx/y<s$，则

$$J(\pi)\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^s\cdot\frac{1}{\delta^{d-2}}\cdot\sum_i(2^i\delta)^{\frac{tx}{y}-s}\lesssim|\Pi|^{x/y}\cdot|P|\delta^{\frac{tx}{y}-d+2}.$$

将这些估计代入 $I_{C\delta}(P,\Pi)$，可得

情形 1：若 $s\geq 1$ 且 $tx/y\geq 1$，则

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim|P||\Pi|\delta^{\frac{y}{x+y}(s-d+2)}.$$

若 $s-d+2<0$，则我们只能得到平凡上界。因此，该上界在范围 $s-d+2>0$ 内成立。取 $x=y$，可得上界

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim|P||\Pi|\delta^{\frac{1}{2}(s-d+2)}.$$

情形 2：若 $s\geq 1$ 且 $tx/y<1$，则

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim|P||\Pi|\delta^{\frac{y}{x+y}\left(s+\frac{tx}{y}-d+1\right)}.$$

我们注意到 $t\leq 1$，因为 $x\geq y$。如果 $s-d+2<0$，那么我们只能得到平凡上界。如果

$s-d+2>0$，那么我们可以选择 $y=xt+\epsilon$、 $\epsilon>0$，从而得到上界

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim |P||\Pi|\delta^{\frac{t}{1+t}(s-d+2)-\epsilon}.$$

情形 3：若 $s<1$ 和 $tx/y\geq s$，则

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim |P||\Pi|\delta^{\frac{y}{x+y}(s-d+2)}.$$

在这种情形下，由于 $s<1$ 和 $d\geq 3$， $s-d+2$ 始终为负，因此只能得到平凡上界。

情形 4：若 $s<1$ 和 $tx/y<s$，则

$$I_{C\delta}(P,\Pi)\lesssim |P||\Pi|\delta^{\frac{y}{x+y}\left(\frac{tx}{y}-d+2\right)}.$$

由于 $tx/y<s$、 $s<1$和 $d\geq 3$，在这种情形下我们只能得到平凡上界。

综合这些情形，可得定理 1.5。

4 定理 1.4 的尖锐性

在本节中，我们给出一个例子，以说明定理 1.4 中结果的精确性。该构造主要改编自 Fu 和 Ren 在 [4] 中给出的二维例子。为方便读者，我们在此概述其思路。

我们首先回顾一下， [4] 中的构造 4 表明，当 $s+t\geq 3$时，平面上球与管之间的关联为 $\sim\delta^{-(s+t-1)}=\delta|P||\mathcal{T}|$。我们将看到，他们的例子可以推广到更高维数，从而得到一个紧的上界。

请注意，Fu 和 Ren [4] 在平面中的关联结果适用于满足定义 1.2 的球集和管集（Katz-Tao（δ,s）集）。然而，正如我们之前提到的，当集合的大小为 $\sim\delta^{-s}$ 时，定义 1.1 和定义 1.2 是等价的。此外，在他们的锐性示例中，他们构造的实际上是（δ,s,C）集。因此，我们可以将他们的构造推广到高维空间。下文中，为方便起见，我们记 $D=\delta^{-1}$ 。

$\mathbb{R}^3$中的构造 4.1

我们的想法是构造一个构型，使得该构型与平面 O_{xy} 的交集恰好是 [4]中的构造 4。这样，在考虑 δ-超平面与带有 O_{xy} 的 δ-球的交集时，我们就可以归约到二维情形。然后，我们将平面 O_{xy} 按间距 2δ 垂直移动（相邻两个平面之间的距离为 2δ），从而得到所需的界。

我们考虑如下形式的球：

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+z^2=\delta^2.$$

显然，这些是 δ-球，在 $\mathbb{R}^3$ 中它们与 O_{xy} 的交集也是二维空间中的 δ-球。对于 [4]，中构造 4 的每个管道，我们只需将管道垂直延伸到 $\mathbb{R}^3$，使其变成一个平面。因此，如果我们以 2δ 的间距在 $\mathbb{R}^3$ 中放置球（两个相邻球的球心距离为 2δ），那么这些球与平面之间的关联为 $\sim\delta^{-(s+t-1)}\cdot\delta^{-1}=\delta\cdot\delta^{-s-1}\cdot\delta^{-t}$，这等于 $\delta|P||\Pi|$。

下一步是检查上述构造的球和平面是否满足定义 1.1。由于这些超平面只是竖直扩展的管， δ-超平面的数量等于 δ-管的数量，即 $\sim D^t$。此外，正如 Fu 和 Ren 的论文 [4]（第 6 页）中已经证明的， δ-管构成一个（δ， t， C）集，因此我们的 δ-超平面集也是一个（δ， t， C）集。

现在，对于 O_{xy} 的每个副本，都有 $\sim D^s$ 个球，如 [4], 所述，并且总共有 δ^{-1} 个副本。因此，$|P| \sim D^{s+1}$。此外，如 [4], 所示，对于 O_{xy} 的每个副本，平面内半径为 w 的球至多包含 $Cw^s\delta^{-s}$ δ 个球。因此， $\mathbb{R}^3$ 中的一个球 B_w 至多包含 P 中的 $Cw^s\delta^{-s-1}$ δ 个球。由此可得，

$$|\{p \in P : p \subset B_w\}| \leq Cw^s\delta^{-s-1} \sim Cw^s|P|.$$

因此，集合 P是一个 (δ, s, C)-集。

4.2 $\mathbb{R}^d$ 中的构造， $d \geq 4$

对于维数 $d > 3$，该构造通过归纳方式构造。例如，我们考虑 $d = 4$。我们只需添加变量 x_4，便可将上述三维构造中的每个超平面直接扩展为 $\mathbb{R}^4$ 中的一个超平面。具体地，假设上述三维构造中的一个超平面由 $\{(x_1, x_2, x_3) : ax_1 + bx_2 + cx_3 = e\}$ 定义，则在 $\mathbb{R}^4$ 中的扩展由$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : ax_1 + bx_2 + cx_3 + 0x_4 = e\}$. 定义。现在我们考虑由以下方程定义的球：

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 = \delta^2.$$

这些球通过在 2δ 、 x_3 和 x_4 方向上的间隔移动。因此，我们看到，当固定最后一个坐标 x_4 时，这些超平面与球之间的关联数与我们在三维中构造的相同，即为 $\delta\delta^{-s-1}\delta^{-t}$。此外，在 x_4 方向上我们有 δ^{-1} 个副本，这意味着关联数为 $\delta\delta^{-s-1}\delta^{-t}\delta^{-1} = \delta|P||\Pi|$。不难证明，球集和超平面集分别是 (δ, s, C) 集和 (δ, t, C) 集。对于其他维数 $d > 4$，构造以相同方式进行。因此，关联数 $I(P, \Pi) \sim |\{\text{平面中的关联 }\}| \cdot \delta^{2-d} \sim \delta|P||\Pi|$。

对于定理 1.5 的精确性，人们可能会想到通过将构造 1、2、3 在 [4] 中扩展到更高维数来采用相同的思路，但至少按照我们尝试的方式，这并不符合定理 1.5 中的上界。

5 致谢

T. Pham 谨感谢越南高等数学研究院（VIASM）提供的热情款待和优越的工作条件。C.-Y. Shen 的部分研究经费来自国家科学及技术委员会（NSTC）资助项目 111-2115-M-002-010-MY5。

参考文献

[1] P. Bradshaw, 《适用于所有维数中良好分离原子的关联结果》，即将在《澳大利亚数学学会杂志》发表，2023 年。

[2] D. Dabrowski、T. Orponen 和 M. Villa, 《正交投影的可积性及其在 Furstenberg 集中的应用》，《数学进展》，407(2022)：108567。

[3] S. Eswarathasan、A. Iosevich 和 K. Taylor，《傅里叶积分算子、分形集与正则值定理》，《数学进展》，228(2011)：2385–2402。[4] Y. Fu 和 K. Ren，《 α 维管与 β 维球的关联估计》，$\mathbb{R}^2$，arXiv:2111.05093，2021。[5] L. Guth、N. Solomon 和 H. Wang，《良好间隔的管的关联估计》，《几何与泛函分析》，29(6)：1844–1863，2019。[6] K. Hera、T. Keleti 和 A. Mathe，《仿射子空间并集与 Furstenberg 型集的豪斯多夫维数》，《分形几何学杂志》，6(3)(2019)，第263–284页。[7] K. H´era、P. Shmerkin 和 A. Yavicoli，《$(\alpha, 2\alpha)$-Furstenberg 集维数的改进界》，《伊比利亚美洲数学杂志》，38(1)(2021)：295–322。[8] A. Iosevich、H. Jorati 和 I. Laba，《通过傅里叶分析研究几何关联定理》，《美国数学会汇刊》，361(12)(2009)：6595–6611。[9] N. Katz 和 T. Tao，《Falconer距离集猜想与 Furstenberg 型集之间的一些联系》，《纽约数学杂志》，7(2001)：149–187。[10] P. Mattila，《欧几里得空间中集合与测度的几何学：分形与可求长性》，剑桥大学出版社，1999。[11] T. Orponen、P. Shmerkin 和 H. Wang，《径向投影的 Kaufman 与 Falconer 估计及 Beck 定理的连续体版本》，arXiv:2209.00348，2022。[12] D. H. Phong 和 E. Stein，《Hilbert 积分、奇异积分与 Radon 变换》，《数学学报》(157)(1986)：99–157。