arXiv:2304.09520v1 [math.AC] 19 Apr 2023

关于二维正则局部环上秩为 2 的不可分解整闭模

Futoshi Hayasaka 和 Vijay Kodiyalam

Abstract. 我们刻画二维正则局部环中那些作为秩二不可分解整闭模的极大子式理想出现的理想。

这篇短札旨在明确回答这样一个问题：在二维正则局部环上，哪些理想可以作为秩二不可分解整闭模的极大子式理想出现？相关问题最早由 [Kdy1995] 提出。对于单项式理想， [Hys2020] 构造了一大类秩二不可分解整闭模，其对应的极大子式理想中包括非简单整闭理想。这项工作在 [Hys2021] 中得到拓展，涉及更高秩的整闭模。最近这两篇论文都研究单项式理想，并给出了存在性结果。本文的主要目的是去除单项式这一限制，并探讨不存在性结果。不过，我们仅关注秩二的模，因为对此情形我们得到了令人满意的刻画；更高秩的情形将留待未来发表的研究中探讨。

在本文中，$(R,\mathfrak{m})$ 将表示一个具有无限剩余域的二维正则局部环，而 M 将是一个有限生成的无挠 R-模。我们假定读者熟悉 [Kdy1995], 中关于有限生成整闭 R-模的基本结果，现回顾其中的一部分。若 M 是一个有限生成的无挠 R-模，则 $F = M^{**}$ 是一个自由 R-模；我们总是将 M 视为由某个适当矩阵的列生成的 F 的子模。该矩阵的极大子式理想记为 $I(M)$，它是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想（如果 M 本身是自由的，则为 R 的全体）。回忆一下， I 的理想 R 的阶，是满足 $I \subseteq \mathfrak{m}^k$ 的最大非负整数 k 。我们定义 $ord(M)$ 为 $ord(I(M))$。整闭模满足数值等式 $\mu(M) = ord(M) + rk(M)$，其中 $\mu(\cdot)$ 和 $rk(\cdot)$ 分别表示最小生成元数和秩。我们还将使用 Zariski 关于二维正则局部环中整闭理想的经典分解定理；关于该定理的现代处理，参见 [Lpm1988]。

注意，当 M 不可分解（即不能表示为若干模的直和）时，它必然没有自由直和项，因此包含于 $\mathfrak{m}F$中。等价地，用矩阵

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 13B22、13H05。
Key words and phrases. 整闭包、不可分解模、二维正则局部环、行列式判据。第一作者部分获得了日本学术振兴会（JSPS）科研费项目 JP20K03535 的资助。第二作者谨此感谢 Srikanth Iyengar 和 Radha Mohan，使他重新燃起了对整闭模的兴趣。

术语来说，生成 M 的矩阵的所有列中的矩阵元都属于 $\mathfrak{m}$，由此得到对此类模的 $I(M)$的第一个限制，即 $ord(I(M)) \geq 2$。正如我们的第一个引理所示，这一条件显然不足以保证一个整闭理想是某个不可分解整闭 R模的子式理想，该模的秩为二。

引理 1. 对于任意不可分解整闭R-模 M，理想 $\mathfrak{m}^2$ 都不是 $I(M)$。

在开始证明之前，我们提请读者注意本文将多次使用的整依赖行列式判据。我们使用的版本如下。按照前文的记号，若元素 $v \in F$（视为列向量）属于模 M 的整闭包，当且仅当任意一个矩阵的行列式是 $I(M)$ 上的整元，其中该矩阵的一列为 v，其余各列属于 M。这可由 Rees 在[Res1987]中的更一般结论推出。

引理 1 的证明。设 M 是一个秩二的整闭模，不含自由直和项，并且 $I(M) = \mathfrak{m}^2$。按照通常记号，令 $F = M^{**}$，$F \cong R^2$ 和 $M \subseteq \mathfrak{m}F$。由于表示 M 的矩阵的所有矩阵元都属于 $\mathfrak{m}$，行列式判据表明，对于任意 $x \in \mathfrak{m}$，向量

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

在 M 上是整的，因此属于 M。于是 $M \supseteq \mathfrak{m}F$ 也如此，所以 $M = \mathfrak{m}F = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$，因此是可分解的。□

虽然 $ord(I) \geq 2$ 并不足以保证一个整闭理想是某个不可分解整闭 R-模的子式理想，且该模的秩为二，但事实证明，$ord(I) \geq 3$ 是这样一个充分条件。事实上，在单项式情形下，这是 [Hys2020] 的主要结果之一。

命题 2. 设 I 是 R 中的一个整闭 $\mathfrak{m}$-准素理想，且满足 $ord(I) \geq 3$。那么，存在一个秩二的不可分解整闭 R-模 M，使得 $I(M) = I$。

该命题的证明需要用到整依赖的方程判据的一个推论。回顾一下，在此语境中，方程判据——参见 [Res1987] ——表述如下。对于通常的 $M \subseteq F$，将 F 中的元素视为关于 r 个变量 X_1、$\cdots$、X_r 的线性形式，其中 $r = rk(F)$。设 S 为由 M 中的元素（视为线性形式）生成的 $R[X_1, \cdots, X_r]$ 的 R-子代数。元素 F 是关于 M 整的，当且仅当相应的线性形式关于 S 整。我们需要的推论是：若 F 中的元素 v 关于由某个矩阵的列生成的 M 整，则对每个 k，v 的第 k^{th} 行中的元素 v_k 关于该矩阵第 k^{th} 行生成的理想都是整的。对此，可取相应线性形式关于 S 整依赖方程，并令除 X_k 以外的所有变量均为 0。

我们还需要几个准备性引理。下面两个引理中的理想 $I_1(M)$ 和 $I_2(M)$，分别指由其列生成 M 的矩阵的矩阵元和 2×2子式生成的理想。因此，对于一个秩二的模，$I_2(M) = I(M)$。

引理 3. 设 I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-主理想，满足 R with $ord(I) \geq 2$。则存在一个整闭的 R-模 M，其秩为二，使得 $I_2(M) = I$ and$I_1(M) = \mathfrak{m}$。

证明。令 a, b 构成 I 的一个极小约化，并选取 $c \in I \setminus (a, b)$，使得 $\mathfrak{m}c \subseteq (a, b)$。这是可行的，因为 I 严格包含 (a, b)，并且可以通过取 R 的剩余域的若干副本构成商的一个滤过来实现。于是，理想 (a, b, c) 是极小的三生成理想，因为它在 R 中的余长严格小于 (a, b) 的余长，而后者是 I 的重数。

考虑 (a, b, c) 的一个如下形式的极小自由分解

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} (a, b, c) \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathfrak{m}c \subseteq (a, b)$，理想 $(t, u) = \mathfrak{m}$。令 M 为由转置表示矩阵的各列生成的模的整闭包

$$\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix},$$

使得 M 是一个整闭模，其极大子式理想为 $(a, b, c) = I$。另需注意， $I_1(M) = \overline{\mathfrak{m}}$，因为 $(t, u) = \mathfrak{m}$。□

引理 4. 设 M 是秩二可分解整闭模，且$I_2(M) = I$的阶至少为 3，并且 $I_1(M) = \mathfrak{m}$。则 M分解为 $\mathfrak{m} \oplus J$，其中$J = (I : \mathfrak{m})$，且 $I = \mathfrak{m}J$。

证明。设 M 分解为 $K \oplus J$，不妨设 K 和 J 是 R的 $\mathfrak{m}$-主理想。由于 M 是整闭的，K和 J也都是整闭的。现在 $I_2(M) = KJ$，且 $I_1(M) = K + J$，因此有 $KJ = I$ 和 $K + J = \mathfrak{m}$。由于 I 的阶至少为 3， K 和 J中至少有一个（设为 J）的阶至少为 2；于是由 $K + J = \mathfrak{m}$ 可得， K 必为 $\mathfrak{m}$。因此 M 必分解为 $\mathfrak{m} \oplus J$，从而 $I_2(M) = I = \mathfrak{m}J$。现在，必有 $J =$$(I : \mathfrak{m})$。包含关系 $J \subseteq (I : \mathfrak{m})$显然；反向包含关系则由熟知的“行列式技巧”得出，因为 J 是整闭的。最后， $I = I_2($ $\mathfrak{m} \oplus J) = \mathfrak{m}J$。□

命题 2 的证明。由引理 3，存在一个整闭 R-模 M，其秩为二，且 $I_2(M) = I$， $I_1(M) = \mathfrak{m}$。若 M不可分解，则证毕。否则，由引理 4， $I = \mathfrak{m}J$ 满足 $J = (I :$ $\mathfrak{m})$。现在令 M' 为由矩阵各列生成的模

$$\begin{bmatrix} J & y & 0 \\ 0 & x & J \end{bmatrix},$$

其中 x、 y在以下意义下足够一般： I是从 $R[\frac{\mathfrak{m}}{y}]$ 收缩得到的，且 $(x, y) = \mathfrak{m}$。这一收缩条件等价于 $(I : y) = (I : \mathfrak{m})$。

我们看到 $I(M') = \mathfrak{m}J + J^2 = I$因为 $J^2 \subseteq \mathfrak{m}J = I$。此外， M' 是整闭的。这是方程判据的一个应用。假设

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

在 M' 上整。于是 p 在 (y, J) 上整，而 q 在 (x, J) 上整。由于这两个都是阶为 1 的理想，它们是整闭的，因此 $p \in (y, J)$ 且 $q \in (x, J)$。因此，从 J 中分别减去适当的元素，再从 p 和 q 中减去相应元素，我们可以假设该向量具有如下形式

$$\begin{bmatrix} uy \\ vx \end{bmatrix},$$

对于某些 $u, v \in R$。现在，根据行列式判据（$u - v$）$xy \in I$，因此（$u - v$）$x \in$（I: y）$=$（I: $\mathfrak{m}$）$= J$。由此可得

$$\begin{bmatrix} uy \\ vx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (v-u)x \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \in M',$$

如所需。

如果 M' 可分解，则再次根据引理 4，它分解为 $\mathfrak{m} \oplus J$。特别地，存在一个从 M' 到 R 的同态——即投影到第一个分量——其像为 $\mathfrak{m}$。将 M' 视为 $F = (M')^{**}$ 的子模，任意从 M' 到 R 的同态都可延拓为一个从 F 到 R 的同态，因此其形式为左乘某个行向量，记作 $[s\ t]$。在此同态下，M' 的像是理想 $sJ + (sy + tx) + tJ \subseteq (sy + tx, \mathfrak{m}^2)$。显然，此理想不可能是 $\mathfrak{m}$，所以 M' 必定不可分解。□

在继续讨论不存在性结果之前，我们再给出一个充分条件。

命题 5. 设 I 是一个阶为 2 的整闭 $\mathfrak{m}$-准素理想，且它要么是一个简单整闭理想，要么是两个简单整闭 $\mathfrak{m}$-准素理想的乘积，即 $I = JK$，其中 $J + K \neq \mathfrak{m}$。那么，I 是一个秩二不可分解整闭 R-模的子式理想。

证明。考虑在引理 3 的证明中构造的模 M。它是秩二整闭模，其子式理想为 I，且 $I_1(M) = \mathfrak{m}$。若 M 可分解为 $P \oplus Q$，其中 P 和 Q 是必然整闭的 $\mathfrak{m}$-准素理想，那么 $I = PQ$ 且 $P + Q = \mathfrak{m}$。根据扎里斯基唯一分解定理，P 和 Q 在转置意义下必然分别为 J 和 K。但这与 $J + K \neq \mathfrak{m}$ 矛盾。因此，M 不可分解。□

接下来我们将证明本文的主要非存在性结果。这回答了 [Hys2020]中提出的一个问题。

命题 6. 设 $\mathfrak{m} = (x, y)$，并假设对于 $m, n \geq 2$，有 $I = (x^m, xy, y^n)$。如果M 是一个没有自由直和项的秩二整闭模，且$I(M) = I$，那么 M同构于 $(x, y^{n-1}) \oplus (x^{m-1}, y)$。特别地，$M$是可分解的。

证明. 如果 $m = n = 2$，则引理 1 即可完成证明，因此我们可以假设 m, n 中至少有一个至少为 3；由对称性，不妨设 $m \geq 3$。由于 M 没有自由直和项，如果 $F = M^{**}$，则 $M \subseteq \mathfrak{m}F$。假设 M由矩阵的列极小生成

$$A = \begin{bmatrix} p_0x + p_1y & q_0x + q_1y & r_0x + r_1y & s_0x + s_1y \\ t_0x + t_1y & u_0x + u_1y & v_0x + v_1y & w_0x + w_1y \end{bmatrix}.$$

我们可以自由地对该矩阵进行行和列运算，所得结果都给出与 M 同构的模。

我们首先断言，该矩阵的所有 2×2 子式

$$B=\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 & v_1 & w_1 \end{bmatrix}$$

包含于 $(I:\ y^2)\ =(x,y^{n-2})$ 中。为证明这一点适用于子式 $p_1u_1-q_1t_1$，注意原矩阵前两列的行列式为 $(p_0u_0\ -q_0t_0)x^2+(p_0u_1+p_1u_0-q_0t_1-q_1t_0)xy+($ $p_1u_1-q_1t_1)y^2$。由于它包含于 I 中，可得 $(p_1u_1-q_1t_1)y^2\in(I,x)\ =(x,y^n)$，因此 $p_1u_1-q_1t_1\in(x,y^n):y^2\ =\ (x,y^{n-2})\ =\ (I:\ y^2)$。其他子式也可用类似方法证明。根据行列式判据，$yB$ 的每一列都在 M 中。

由于 $xy\in I$，A 的某个 2×2 子式中 xy 的系数必为单位。因此，B 的某个元素是单位，而 B 中对应的列是 $GL(2,R)$ 中某个矩阵的第二列，记为 P。若 $Q=P^{-1}$，则 yQB 的每一列都属于由 QA 的各列生成的模。根据 Q 的选取，yQB 的某一列就是向量

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

因此，我们可以假设上面的向量属于 M。

此外，若 $J\ =(I:\ \mathfrak{m})\ =(x^{m-1},xy,y^{n-1})$，则再次由行列式判据可得 $JF\subseteq M$。因此，M 由以下矩阵的各列生成

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & p_0x+p_1y & q_0x+q_1y & r_0x+r_1y & s_0x+s_1y \\ 0 & J & y & t_0x+t_1y & u_0x+u_1y & v_0x+v_1y & w_0x+w_1y \end{bmatrix},$$

因此也由以下矩阵的各列生成

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & p_0x+p_1y & q_0x+q_1y & r_0x+r_1y & s_0x+s_1y \\ 0 & x^{m-1} & y & t_0x & u_0x & v_0x & w_0x \end{bmatrix}.$$

第一行的所有元素都必须属于 $(I:\ y)\ =(x,y^{n-1})$，且由于 $y^{n-1}\in J$，一个形如以下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & p_0x & q_0x & r_0x & s_0x \\ 0 & x^{m-1} & y & t_0x & u_0x & v_0x & w_0x \end{bmatrix}.$$

其各列生成 M。

由于 $xy\in I$（且 $x\notin J$ 因为 $m\geq 3$），p_0、q_0、r_0、s_0 中至少有一个必须是单位。不失一般性，假设 p_0 是单位；于是通过列变换（并重新命名），可假设 q_0、r_0、s_0 均为零。因此 u_0、v_0、$w_0\in$（$I:\ \ x^2$）$\ =\ $（$x^{m-2}$、$y$），进而通过更多列变换，可假设 u_0x、v_0x、w_0x 也都为零。因此 M 由如下形式的矩阵的各列生成

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & p_0x \\ 0 & x^{m-1} & y & t_0x \end{bmatrix}.$$

最后，通过更多行变换和列变换，M 由某个矩阵的各列生成　x
其形式为

$$\begin{bmatrix} y^{n-1} & 0 & 0 & x \\ 0 & x^{m-1} & y & 0 \end{bmatrix}.$$

因此它同构于（x，y^{n-1}）$\oplus$（x^{m-1}，y），证毕。　□

我们最后给出主定理的陈述与证明。

定理 7. 若 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个具有无限剩余域的二维正则局部环，且 I 是 R 的一个整闭 $\mathfrak{m}$-主理想，那么 I 是某个不可分解整闭 R-模的秩二子式理想，当且仅当它满足以下条件之一：

(1) $ord(I) \geq 3$. (2) $ord(I) = 2$ 和 I 是一个简单的整闭理想。(3) $ord(I) = 2$ 和 I 是简单整闭理想 J 和 K的乘积，其中 $J + K \neq \mathfrak{m}$。

证明。(1)、(2)、(3) 中条件的充分性已在命题 2 和命题 5 中得到证明。至于必要性，设 I 是 R 中的一个整闭 $\mathfrak{m}$-准素理想，且不满足 (1)、(2) 和 (3) 中的任何一个条件。那么，要么 $ord(I) = 1$ ——在这种情况下，显然不可能是某个秩二不可分解整闭 R-模的子式理想——要么 $ord(I) = 2$ 且 I 是简单整闭理想 J和 K 的乘积，其中 $J+K = \mathfrak{m}$。在此情况下， $ord(J) = 1 = ord(K)$，稍加思考即可看出， I必定具有 (x^m, xy, y^n) 的形式，其中 m、 $n \geq 2$ 和 x、 y 是 $\mathfrak{m}$的生成元。现在利用命题 6 可知， I不是某个秩二不可分解整闭 R-模的子式理想。□

Acknowledgements

第一位署名作者部分获得了 JSPS KAKENHI Grant Number JP20K03535 的资助。第二位署名作者谨向 Srikanth Iyengar 和 Radha Mohan 致谢，感谢他们重燃了他对整闭模的兴趣。

References

[Hys2020] Hayasaka, Futoshi. 关于二维正则局部环上不可分解整闭模的构造. *Journal of Algebra* 556 : 897-907, 2020. [Hys2021] Hayasaka, Futoshi. 二维正则局部环上任意秩的不可分解整闭模. 即将发表于 *Journal of Pure and Applied Algebra* 226, 2022, *arXiv:2112.02885v1*, 2021.[Kdy1995] Kodiyalam, Vijay. 二维正则局部环上的整闭模. *Transactions of the American Mathematical Society* 347(9) : 3551 - 3573, 1995. [Lpm1988] Lipman, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra Vol. I* 203 231, 1988 Joseph. 正则局部环上的完全理想. 载于 , , Kinokuniya, Tokyo : - . [Res 1987] Rees, David. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 101 431 449, 1987 模的约化. : - .

Department of Environmental and Mathematical Sciences, Okayama University, 3-1-1 Tsushimanaka, Kita-ku, Okayama, 700-8530, Japan*Email address*: hayasaka@okayama-u.ac.jp

The Institute of Mathematical Sciences, Chennai, India and Homi Bhabha National Institute, Mumbai, India
Email address: vijay@imsc.res.in