arXiv:2304.09525v1 [physics.atom-ph] 19 Apr 2023

将超冷偶极分子电结合为四聚体场关联态

Goulven Qu´埃姆´埃*Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire Aimé Cotton, 91405 Orsay, France*

John L. Bohn*JILA, NIST, and Department of Physics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0440, USA*

James F.E.Croft*The Dodd-Walls Centre for Photonic and Quantum Technologies, Dunedin 9054, New Zealand andDepartment of Physics, University of Otago, Dunedin 9054, New Zealand*

电场或微波场的存在能够改变超冷偶极分子之间的长程力，从而设计出分子对的弱束缚态。这些所谓的场关联态 [Avdeenkov 等，《Phys. Rev. Lett.》90，043006（2003）；Lassabli`ere 等，《Phys. Rev. Lett.》121，163402（2018）], 中，两个束缚分子之间的间距可能比分子本身大几个数量级，已在散射实验中以共振的形式被观测到 [Chen 等，《自然》614，59（2023）]。在此，我们提出通过扫描电场来利用这些场关联态组装弱束缚四聚体分子，这相当于原子中磁关联的电场对应物。这一能力将为构建超冷多原子分子带来新的可能性。

场关联态（FLS）出现在两个相互碰撞的超冷分子之间经过精心设计的长程势阱中。当分子处于特定初态时，施加外场即可形成这些势阱。最初，人们在 2003 [1–4] 利用静电场预言了这类态。在2018 [5], ，人们预言了第二类FLS：对处于基态的超冷偶极分子施加蓝失谐微波场即可产生这类态。2023年，实验观测到了由第二类“微波”FLS引起的共振 [6]。这一发现为超冷分子开辟了迄今尚未具备的广阔可能性，其中最重要的是能够随意调控分子-分子散射长度 [5], ，使其从正值变为负值，并从小值变为大值。这种调控对于达到探索强关联物质态所需的条件至关重要，包括涉及分子玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）和简并费米气体（DFG）的物质态[7–9], ；这些物质态的研究得益于分子的电偶极矩。例如，费米型偶极分子中的BEC-BCS跨越 [10–13] 如今或许已触手可及，并可能进入少体偶极物理发挥作用的区域 [14]。类似地，玻色型偶极分子中的Efimov物理研究 [15–17] [18]也有望成为可能。最后，可以同时调节电偶极分子玻色-爱因斯坦凝聚体中的散射长度和偶极长度，以探索具有超固体性质的密度分布 [19], ，补充此前在磁性偶极原子玻色-爱因斯坦凝聚体中已观测到的相关研究 [20–22]。

像原子体系中常见的那样，通过范诺–费施巴赫共振利用磁场控制散射长度的能力，在双碱金属分子中似乎鲜少出现。除最轻的双碱金属分子 LiNa 处于三重态电子态的情况外 [23, 24], ，在重分子-分子体系的基电子单重态中，[25], 要找到彼此充分隔离的共振已被证明颇为困难，这归因于其较高的态密度（例如参见 [26–28]）。FLS 的存在或可绕过这一困难，并提供另一种途径，既能屏蔽分子以减少损失，又能调节散射长度。

此外，我们指出，通过扫描磁场穿越 Fano–Feshbach 共振，可以产生束缚原子二聚体 [23, 24]。本文探讨了利用电场将两个超冷偶极分子结合成一种长程、场关联四聚体态的可行性。这种技术有望成为从双原子分子组分出发、可控组装多原子分子的有力起点。我们表明，通过扫描微波电场，利用实验上可实现的扫描方案和陷阱，可以实现两个碰撞偶极分子的电结合（EA）。我们讨论了电结合的适用条件，尤其是分子气体的初始布居数分布以及分子的玻色子或费米子性质。

我们首先考虑处于电子、振动和转动基态的超冷偶极玻色双碱金属分子气体，并以 ^{23}Na^{87}Rb 作为代表性例子 [29, 30]。许多其他分子也已在类似条件下制备出来 [31–42], ，因此同样可以进行研究而不失一般性。当对处于转动基态的分子施加圆偏振微波场 $j = 0$，且微波相对于第一激发态略微蓝失谐时 $j = 1$，已有理论提出 [5, 43] 并通过实验观察到 [9, 44–46] ，在适当的拉比频率 $\Omega = dE/\hbar$下会产生对碰撞损失的屏蔽，从而使分子具有较长的寿命。Ω 与微波的电场 E 以及分子的电偶极矩 d 成正比。

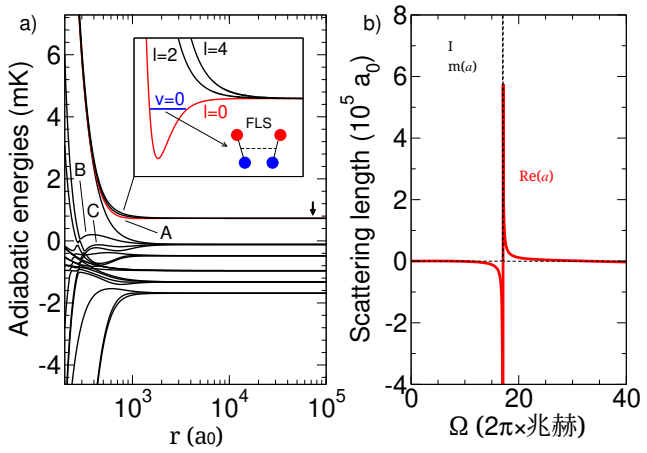


图 1：a）两个碰撞分子的势能随分子间距 r 的变化，参数为 $\Delta = 10$ 兆赫，且 Ω 为 $= 2\pi \times 40$ 兆赫。初始碰撞态用箭头标出。插图放大显示了红色的长程势阱，它可支持一个场关联态（FLS）。字母 A、B、C 分别标示入口通道以及 FLS 可衰变进入的两个散射通道。b） $\Delta = 10$ 兆赫时，散射长度随 Ω 的变化。

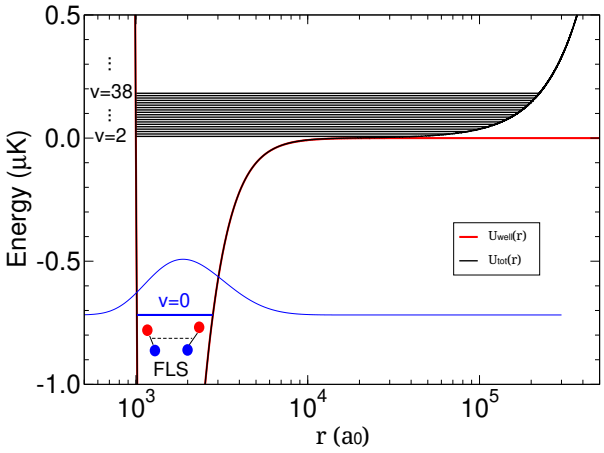


图 2：势能 $U_{\rm tot}$ 中本征态的能量 E_v （蓝色和黑色水平线）。该势能（黑色曲线）由图 1-a 中的长程势阱 $U_{\rm well}$ （红色曲线）和分子的俘获势 $U_{\rm trap}$ 构成，参数为 $\nu =$ 100 $l = 0$ $v =$ 赫兹，且。FLS 以蓝色绘出，能量为 0 和负值；HOS 以黑色绘出，能量为 $v = 2, \ldots,$ 38 和正值。这是 $\Delta = 10$ 兆赫、Ω 为 $= 2\pi \times 40$ 兆赫时的一个示例。

导致两个碰撞中的 NaRb 分子受到屏蔽的势能如图 1-a 所示，其中势能绘制为分子间距 r的函数，对应的失谐为 $\Delta = 10$ 兆赫，Ω 为 $= 2\pi \times 40$ 兆赫。初始碰撞态（入口通道）由黑色箭头标示，对应于两个处于 $j = 0$ 的分子。在这种情况下，入口通道的势能在微波缀饰后于 $r \approx 10^3 a_0$ 处变为排斥性。这会阻止分子彼此靠得过近，从而避免因任何短程损失机制而损失。红色曲线对应于 $l = 0$ 分波的入口通道，并显示在图中的插图内（需要强调的是，图 1 中的径向坐标轴采用对数刻度，突出了这些态极长的作用范围）。插图中的另外两条黑色曲线对应于具有 $l = 2$ 和 $l = 4$ 的入口通道。由于我们考虑的是不可区分的玻色分子， l 的取值为偶数。正如 s-波所预期的那样， $l = 0$ 曲线具有吸引性，并形成一个长程势阱，可容纳由蓝色表示且以量子数 $v = 0$ 为特征的 FLS [1–4], 。由于相关离心势垒的存在， $l = 2$ 和 $l = 4$ 曲线具有排斥性，不会形成势阱。因此，以下我们将仅关注 s-波曲线，因为 FLS 存在于其中。可以推测，关于散射长度调控和 FLS 存在性的类似结论也适用于光学屏蔽 [47–49], ，从而为实验研究提供另一条路径。

FLS 的存在使散射长度具有可调性，如图 1-b 所示。通常，散射长度 a 是一个复数量 [50, 51]，表示为 $a = \mathrm{Re}(a) - i\mathrm{Im}(a)a$，其中 Im(≥ 0) $2\pi \times 40$ 。当 Ω 从 0 变化到 a兆赫时，Re($\simeq 2\pi \times 17$) 在 Ω $2\pi \times 40$ 兆赫处发散并改变符号，从一个很大的负值变为一个很大的正值。这与长程势阱中一个新束缚态出现在阈值处有关，也是图 1-a 中 兆赫处 FLS 出现的原因。散射长度的这种变化让人联想到磁关联（MA），此时电场（通过 Ω）发挥着磁场的作用。因此，可以采用类似的技术使两个分子结合，这种过程称为“电结合”。

现在我们考虑俘获势对分子碰撞的影响；俘获势会使分子间的相对运动量子化 [52, 53]。在上述实验中，分子通常被俘获在光学偶极阱（ODT）中，该阱可很好地用谐势描述。为简化研究，我们考虑频率唯一的球形 ODT $\nu = 100$ Hz。俘获势因此写为 $U_{\rm trap}(r_i) = m\omega^2 r_i^2/2$，其中 $\omega = 2\pi\nu$、 m 为分子的质量， r_i 为分子 i的位置，且$i = 1$, 2。为处理两个分子之间的碰撞，我们在质心系中采用相对运动坐标 [52–54], ，因为质心不参与这一过程。由此可证明，对于感受相同陷阱频率 ν 的相同分子，可用描述相对运动的俘获势重写该问题，其形式为 $U_{\rm trap}(r) = \mu\omega^2 r^2/2$，其中$\mu = m/2$ 是两个分子的约化质量，r 是分子间距。由于质心运动独立于相对运动，且与之无耦合，以下不予考虑。

两个超冷分子在 $j=0$ 中感受到的总势能 $U_{\rm tot}(r)$ 由长程势阱 $U_{\rm well}(r)$ 和俘获势 $U_{\rm trap}(r)$ 组成；前者在图 1-a 中以红色显示。该势能绘于图 2，展示了其空间范围。图中以蓝色显示分子的最低态能量及其对应波函数，以黑色显示较高态。对于给定的 Ω 值，通过数值求解径向薛定谔方程，计算哈密顿量 $H(r)=-(\hbar^2/2\mu)d^2/dr^2+U_{\rm tot}(r)$ 在 $l=0$下的能量。每个能量和波函数均由量子数 $k=0$、1、2、.....标记，该量子数表示态的序号。当波函数向外和向内的对数导数相匹配时，可得到能量 E_k 和波函数 $f_k(r)$ [55–57]。当 Ω 较小时，长程势阱不太深，能量趋近于球谐振子的能量，其表达式为 $E_v^{\rm ho}=\hbar\omega(v+3/2)$，其中 $v=2k+l$ [52, 53]。态 v 具有简并度 $g_v=(v+1)(v+2)/2$。 l 是与球谐势中相对运动的轨道角动量相关的量子数，与前文介绍的两个粒子碰撞时的分波数值相同。对于不可区分的玻色分子，由于 l为偶数， v 取偶数。若考虑不可区分的费米分子，由于l 为奇数， v 将取奇数。在本研究中，我们只考虑 $l=0$，因为更大的取值 $l=2$、4、.....与 FLS 的存在条件无关。因此，$v\equiv 2k$和 $v=0$、2、.....。对于费米子，则有 $v=1$、3、.....。通常在 $\nu=100$ Hz 时，$E_0^{\rm ho}\simeq 7.2$ nK、$E_2^{\rm ho}\simeq 16.8$ nK，等等。我们将正能量本征态称为谐振子态（HOS），将负能量本征态称为 FLS。对于 Ω 在 $\Delta=10$ MHz 时的每个取值，我们计算本征态的能量 E_v。结果如图 3 所示。最低态$v=0$ 以蓝色绘出。当 Ω 较小、 $E_0\simeq E_0^{\rm ho}$时，不存在 FLS，能量就是最低 HOS 的能量。随着 Ω 增大，能量 E_0 降低，并在 Ω 约为 $=2\pi\times 17$ MHz 时变为负值。随后，最低 HOS 平滑地转变为 FLS。不出所料，这发生在散射长度发散的同一 Ω 值处，如图 1 所示。

这些结果非常类似于 MA [52, 53], 的俘获势，尽管这些曲线背后的物理原理截然不同。最值得注意的是，只有对于 EA，一条势能曲线就足够了，而 MA 则需要两条。电结合的基本思想是：通过微波的电场随时间扫描 Ω 的值，从最初由自由的相距分离分子占据的最低 HOS 平滑过渡到束缚四聚体 FLS。求解包含双原子分子或四聚体衰减寿命贡献的含时 Schr¨odinger 方程，可以得到对于给定扫描 $R=d\Omega/dt$ （此处以 $2\pi\times$MHz/ms 表示），从态 v 开始并最终到达态 v' 的概率$P_{vv'}$ [58] 随时间的演化，其中对应于 $l=0$ 曲线。

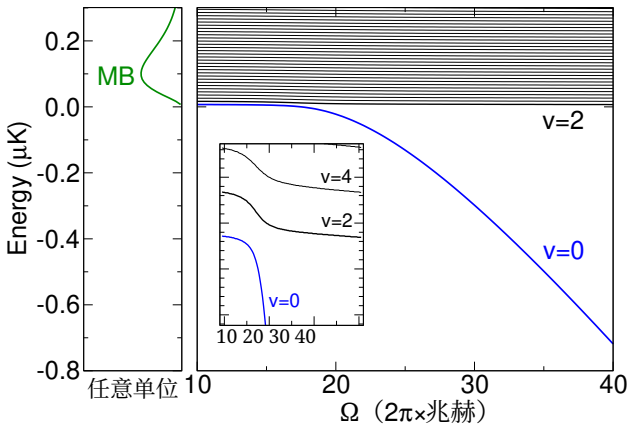


图 3：图 2 中所示许多本征态的能量 E_v 对应于 $l=0$，现表示为 Ω 的函数。插图放大显示了态 $v=0$ 与 $v=2$之间的反交叉。左图显示了单个分子在 $T=50$ 纳开尔文条件下典型的初始麦克斯韦-玻尔兹曼分布。

为便于说明，我们考虑从 Ω =$2\pi\times 10$ 兆赫扫描至 Ω $=2\pi\times 40$ 兆赫的过程。对于从 $v=0$ 开始并最终到达 $v'=0$ 的概率P_{00}，其随扫描值 R的变化如图 4 中的黑色实线所示， $\nu=100$Hz。可以看到，当扫描速率为 $R\simeq 2\pi\times$3.4 兆赫/ms 时，概率达到最大值；此时持续时间为 8.8 ms，可达到 75% 的结合概率。这表明，在现实的实验条件下，最初处于相对运动最低 HOS 的两个分子 $v=0$ 能够较为高效地 EA 成长程四聚体。然而，其应用范围受到限制（见插图）。扫描速率必须保持在 $R=2\pi\times$ [1–10] 兆赫/ms 范围内，才能使概率高于 50%。最佳扫描是两种相互竞争机制之间的平衡。如果扫描过慢（$R<2\pi\times$1 兆赫/ms），碰撞会在扫描过程中导致分子损失，因而 FLS 的最终产率会很低。另一方面，如果扫描过快（$R>2\pi\times$ 10兆赫/ms），分子将无法绝热转移到基态 $v'=0$，结果是较高的俘获态被占据，而不是 FLS。

在图 4 中，我们还展示了以下概率：从 HOS 的某个态 $v=$ 2,4,6,8 的 $l=0$ 曲线出发 P_{v0}，最终到达 $v'=0$，即 FLS。可以看出，无论扫描方式如何选择，P_{00} 始终明显高于其他概率P_{v0} （$v>0$），而其他概率均低于 4%。除选择合适的扫描方式这一判据外，这也表明，当玻色分子的相对运动占据最低 HOS $v=0$时，电结合的效率最高。费米分子也同样如此，只是其最低 HOS 为 $v=1$。在较高的态中，概率会变得非常小，几乎没有机会形成 FLS。

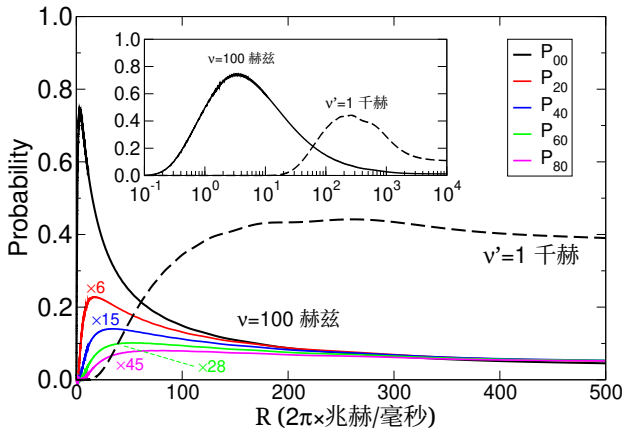


图 4：在 $\Omega = 2\pi \times 10$ 兆赫时，从态 $v = 0$ （代表两个受困分子）开始，并在 $\Omega = 2\pi \times 40$ 兆赫时结束于态 $v' = 0$ （代表一个 FLS）的概率 P_{00}；囚禁频率为 $\nu = 100$ 赫兹（黑色实线）和 $\nu' = 1$ 千赫（黑色虚线）。该图以施加的斜坡 R 为函数绘制。插图以对数刻度显示同一图形。下方曲线显示在 $\Omega = 2\pi \times 40$ 兆赫时、频率为 $\nu = 100$ 赫兹的概率P_{v0}，其中 $v = 2$，4、6、8 分别以红色、蓝色、绿色和粉色线条表示。为使图中更易观察，我们分别将它们乘以 6、15、28、45。

因此，初始分布会显著影响 FLS 形成的效率。首先，以不可区分玻色分子的初始麦克斯韦-玻尔兹曼分布为例。对于单个分子，态 v_i 的布居数 $i = 1,2$ 由 $A\, g_{v_i} \exp(-E^{\mathrm{ho}}_{v_i}/k_B T)$ 给出，其中 A 是归一化因子，g_{v_i} 是态 v_i 的简并度。图 3 左图展示了一个分布示例，其给出了典型温度 $T = 50$ nK 下单个受困分子的离散能量分布。该分布表明，在这一温度下，分子主要布居于较高的激发态，即 $v_1, v_2 \simeq 20$ 。为了在相对坐标和质心表示下描述两个单个分子$i = 1,2$ 的分布（此前推导的结果适用于这种表示），我们需要使用谐振子函数的组合；例如，附录 C 中推导了这种组合 [54]。其中表明，在单个分子表示中，对于 v_1 态和 v_2 态之间的任意对称构造，相对坐标表示中总会有一个 $v = 0$ 分量。附录 C 还表明，对于不可区分费米分子的热气体，[54]，中 v_1 态和 v_2 态之间的任意反对称构造，相对坐标表示中总会有一个对应的 $v = 1$ 分量。与玻色分子的情况不同，此时必须满足 $v_1 \neq v_2$ （这是反对称态的定义）。因此，图 3 中在给定温度下布居的任何振动态 T，至少都会在玻色子的 $v = 0$ 态（或费米子的 $v = 1$ 态）上有一定的投影，并且可以有助于电结合（EA）。这一说法与此前在超冷玻色子和费米子结合成弱束缚分子的磁结合（MA）研究中得到的结果一致[59]。

最后，我们考虑从玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）开始。在这种情况下，所有分子都处于最低态 $v_1 = v_2 = 0$，这相当于占据 $v = 0$ 态。为了说明这一方案的可行性，必须考虑BEC中的多体相互作用[52, 53, 60, 61]。这里我们沿用 [60] 的研究，其中作者指出，可以将囚禁频率重新标度为新的有效囚禁频率 $\nu' = (\hbar / 2m)\,(n/2)^{2/3}$。例如，典型的BEC密度为 $n = 1.3\ 10^{13}$ 个分子/cm^{3}时，NaRb的有效约束为 $\nu' = 1$ 千赫。如图4所示，在这一频率下，概率 P_{00} 在扫描速率为 $R \simeq 2\pi \times$ 260兆赫/毫秒时达到最大值，对应的持续时间为0.11毫秒。最佳结合概率仅为44%，低于 $\nu = 100$ 赫。这是因为BEC中的密度高得多，因此碰撞更加频繁，从而降低了电结合（EA）的总体效率。因此，与$\nu = 100$ 赫的情况相比，最佳扫描必须更快。在这种情况下可以实现这一点，因为重新标度后的囚禁频率 ν' 高于 ν。图3中出现的反交叉现在会更加明显地呈现为非交叉，但即使扫描速率如此之高，仍可实现向场关联态的高效转移。在分子简并费米气体（DFG） [7–9] 的情况下，也可以考虑从可区分费米子开始，如磁结合（MA）研究中所做的那样，前提是微波屏蔽和场关联态（FLS）的存在在该情况下仍然成立。若确实如此，则允许 $l = 0$ 和 $v = 0$，以及 v_1 和 v_2 态的对称构造，从而增加允许的 v_1和 v_2 组合数量，并提高费米子情形下的转化率。

总之，我们证明，当分子处于相对运动的基态时，利用现实可行的微波电场扫描，可以将两个超冷偶极分子电结合为四聚体场关联态。对于实验中常见密度和常见谐振阱中的典型热气体，麦克斯韦-玻尔兹曼分布中的任一振动态都可能参与电结合。在典型的玻色-爱因斯坦凝聚体条件下，大多数分子直接处于相对运动的基态，这是理想情况。但在这两种情况下，电结合效率都会受到碰撞损失的影响。为进一步避免这类碰撞，可以考虑从强限域阱（如光学晶格 [7, 30, 62–64]或光镊 [37, 38, 42, 44, 65]）中的两个基态分子开始。这或许是未来将此类长程束缚激发态转移至基态四聚体的理想方案，正如利用受激拉曼绝热过程形成双原子分子的研究中所做的那样 [66–68]。这为光缔合方案 [69–71] 提供了一种替代途径，并可能为逐个构建更大的

超冷分子。

J.L.B 感谢美国国家科学基金会通过资助编号 PHY 1734006 支持本研究。J.F.E.C 感谢新西兰马斯登基金（合同编号 19- UOO-130）以及多德-沃尔斯奖学金的支持。

补充材料

A. 使用含时薛定谔方程描述扫描动力学

我们考虑包含由势能 $U_{\rm tot}(r) = U_{\rm well}(r) + U_{\rm trap}(r)$ 描述的 FLS 的 $l = 0$ 通道。当施加 $\Omega(t)$ 的扫描时，整体势能现在通过 Ω 显式依赖于时间，我们将其记为$U^{\Omega}_{\rm tot}(r)$。可以得到相应的波函数和能量，它们满足

$$H^{\Omega}(r) f^{\Omega}_v(r) = E^{\Omega}_v\, f^{\Omega}_v(r) \tag{1}$$

其中 $H^{\Omega}(r) = -(\hbar^2/2\mu)d^2/dr^2 + U^{\Omega}_{\rm tot}(r)$，并且$H$，$f_v$，$E_v$现在也通过 Ω 显式依赖于时间。两个碰撞分子的含时波函数在此参数基底中展开

$$\Psi(t) = \sum_{v=0}^{38} c_v(t)\, f^{\Omega}_v(r)\, \exp(-iE^{\Omega}_v t/\hbar). \tag{2}$$

我们考虑图 3 中从 $v = 0$到 $v = 38$绘出的前 20 个态，这足以使结果收敛。在$t = 0$处，我们考虑初始处于 Ω 为 $= 2\pi \times 10$ 兆赫时的 $v = 0$ 的分子。选择该 Ω 值的原因是，当 Ω 较低时，红色曲线的排斥性尚不足以保护分子免于损失，因此扫描至少必须从该值开始。例如，扫描过程将在 Ω 为 $= 2\pi \times 40$ 兆赫时结束。使用式 (2) 和初始条件 $c_0(0) = 1$ 以及 $c_{v\neq 0}(0) = 0$求解含时薛定谔方程，我们可以监测扫描过程中复系数$c_v(t)$的演化。这些系数满足以下耦合微分方程

$$\frac{d}{dt}c_v(t) = -\sum_{v'\neq v} p_{vv'}(t)\, \exp(i(E^{\Omega}_v - E^{\Omega}_{v'})t/\hbar)\, c_{v'}(t) \tag{3}$$

以及耦合项

$$p_{vv'}(t) = \langle f^{\Omega}_v(r)|\frac{d}{dt} f^{\Omega}_{v'}(r)\rangle = \int_0^{\infty} f^{\Omega}_v(r)\, \frac{d}{dt} f^{\Omega}_{v'}(r)\, dr \tag{4}$$

由波函数 $f^{\Omega}_v(r)$ 得到。如果我们考虑 Ω 的恒定扫描 R，则可以将耦合项$p_{vv'}(t)$替换为 $p_{vv'}(\Omega) \times R$，其中

$$p_{vv'}(\Omega) = \langle f^{\Omega}_v(r)|\frac{d}{d\Omega} f^{\Omega}_{v'}(r)\rangle \tag{5}$$

and

$$R = \frac{d\Omega}{dt}. \tag{6}$$

出于数值计算的目的，我们利用以下事实

$$p_{vv'}(\Omega) = -\langle f^{\Omega}_v(r)|\frac{dU^{\Omega}_{\rm tot}(r)/d\Omega}{E^{\Omega}_v - E^{\Omega}_{v'}}|f^{\Omega}_{v'}(r)\rangle \tag{7}$$

利用海尔曼-费曼定理。使用四阶龙格-库塔方法对方程组进行数值求解，采用从 $\Omega = 2\pi \times 10$ 兆赫到 $\Omega = 2\pi \times 40$兆赫的 120 个点，步长为 $2\pi \times 0.25$兆赫，以使结果收敛。对于 $l = 0$ 曲线，从 $v = 0$ 开始并最终到达 v' 的概率为

$$P_{0v'}(t) = |c_{v'}(t)|^2\, \exp(-t/\tau^{\Omega}). \tag{8}$$

在式 (8) 中，τ^{Ω} 是由猝灭碰撞（包括黏滞碰撞 [26–28] 或化学反应，以及微波光子受激吸收导致的向更高转动态的跃迁）引起的准经验寿命。指数衰减旨在表示这样一个事实：在微波扫描过程中，相遇的分子可能会被破坏，而不是绝热地进入 FLS。还可以计算在式 (2) 中不同初始条件下，使用 $c_v(t)$ 系数时，对于 $l = 0$曲线，从态 v 开始并最终到达 $v' = 0$ 的概率 $P_{v0}(t)$。该概率为

$$P_{v0}(t) = |c_{v'=0}(t)|^2\, \exp(-t/\tau^{\Omega})\, /\, g_v. \tag{9}$$

除以 $g_v = (v+1)(v+2)/2$ 后，我们计入了给定初始 v 下 g_v 个简并态中独特的 $l = 0$ 贡献，因为只有 $l = 0$ 曲线才可能在 $v' = 0$ 中存在 FLS。请注意，在式 (8) 中，$g_0 = 1$ 并未显式出现。

态的碰撞寿命估算如下：

$$\tau^{\Omega} = \frac{1}{\beta^{\Omega}\, n(0)} \tag{10}$$

其中，β^{Ω} 是给定 Ω 下自由空间中两体散射问题的猝灭率系数，$n(0)$ 是初始气体的密度。对于 $\nu = 100$ Hz 的情况（热气体的典型值），我们取 $n(0) = 10^{11}$ 个分子/cm^3；对于 $\nu = 1$ kHz 的情况（玻色-爱因斯坦凝聚体的典型值），我们取 $n(0) = 1.3\ 10^{13}$ 个分子/cm^3。对于能量为正的态，β^{Ω} 是两个碰撞 NaRb 分子之间的损失率系数 $\beta^{\Omega}_{(\mathrm{NaRb})-(\mathrm{NaRb})^*}$ 为得到寿命的下限，我们针对扫描中的每个 Ω，在能量为 $E_c = k_B \times 1$ nK 时计算 β^{Ω}，并将其赋给式 (8) 中的每个态 v'。这对应于最坏情形，用以展示损失在实验中可能产生的整体影响。$\beta^{\Omega}_{(\mathrm{NaRb})-(\mathrm{NaRb})}$ 在图 1-b 所示的共振处最高可达 10^{-10} cm^3/s，但由于屏蔽作用，在其他情况下均低于 10^{-11} cm^3/s。

对于负能量态，β^{Ω} 是两个碰撞的(NaRb)$_2$ FLS之间的损失率系数$\beta^{\Omega}_{(\mathrm{NaRb})_2-(\mathrm{NaRb})_2}$。我们取唯一的普适极限

数值$\beta_{(\mathrm{NaRb})_2-(\mathrm{NaRb})_2} = 4.6\ 10^{-10}$ cm^3/s [72]，采用系数 $C_6^{(\mathrm{NaRb})_2-(\mathrm{NaRb})_2} = 4 \times C_6^{\mathrm{NaRb\text{-}NaRb}} = 6099600$ a.u [69]。需要注意的是，对于这种情况，我们将密度除以二，因为FLS的密度是双原子分子密度的一半。我们不考虑FLS的解离寿命，因为我们估计其寿命长于碰撞寿命（见下一节）。

对于囚禁频率为 $\nu = 100$ Hz 的情况，我们发现 $\tau^{\Omega} \simeq 43$ ms，这比最优扫描 $R \simeq 2\pi\times$ 3.4 MHz/ms 时的 8.8 ms 持续时间更长。对于囚禁频率为 $\nu' = 1$ kHz 的情况，我们发现 $\tau^{\Omega} \simeq 0.3$ ms，这也比 $R \simeq 2\pi\times$260 MHz/ms 时的 0.11 ms 持续时间更长。图 5 展示了不同扫描 R下，$v = 0$ 和 $v' = 0$，2 的概率 $|c_{v'}(t)|^2$随时间的变化。对于每种扫描，我们取过程结束时的数值，并使用公式 (8) 在图 4 中报告该值。

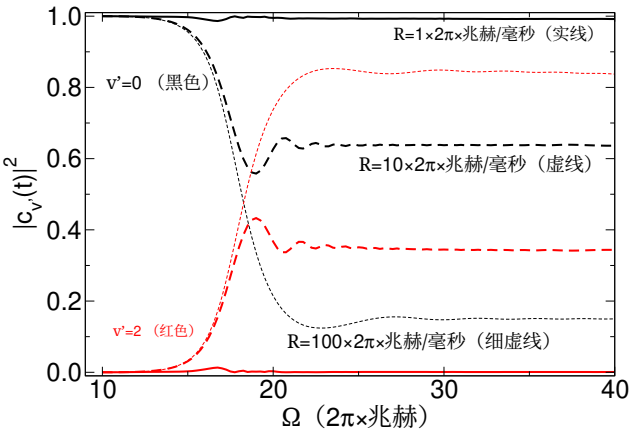


图 5：初始处于态 $v = 0$ （Ω 为 $= 2\pi \times 10$ MHz），最终处于态 $v' = 0$ （黑色曲线）和 $v' = 2$ （红色曲线）（Ω 为 $= 2\pi \times 40$ MHz）的概率 $|c_{v'}(t)|^2$，对应不同扫描 R，囚禁频率为 $\nu = 100$ Hz。将横坐标上的 Ω 除以 R，即可得到对应的扫描时间 t （初始时刻对应 Ω 为 $= 2\pi \times 10$ MHz）。

B. 通过绝热畸变波玻恩近似对 FLS 进行解离

在本节中，我们探讨图 1-a 中红色曲线所对应的 FLS 是否可能衰变到同一图中黑色曲线所示的较低散射通道；该入口通道的初始值为 $l = 0$，而最终值为 l。一般的哈密顿量为 $H(r) = -(\hbar^2/2\mu)d^2/dr^2 + V_{\mathrm{eff}}$，其中势能为 $V_{\mathrm{eff}} = \hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2 + V$，包括离心项。 V是势能，它不仅取决于 $\vec{r}$，还取决于分子的内部坐标 $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$ 。 V_{eff} 在每个 r 处对角化

$$V_{\mathrm{eff}}\,\phi_i = U_i(r)\,\phi_i \tag{11}$$

从而得到绝热能量 $U_i(r)$（如图 1-a 所示）和绝热函数 ϕ_i ($\hat{r}$, $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$; r)，它们现在以参数形式依赖于 r。完整耦合系统的定态波函数在绝热函数中展开

$$\psi(\vec{r},\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2) = \sum_i F_i(r)\,\phi_i(\hat{r},\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2;r). \tag{12}$$

耦合薛定谔方程变为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_i\left[\frac{d^2F_i}{dr^2}\phi_i + 2\frac{dF_i}{dr}\frac{d\phi_i}{dr} + F_i\frac{d^2\phi_i}{dr^2}\right] + \sum_i U_iF_i\phi_i = E\sum_i F_i\phi_i. \tag{13}$$

我们将这些方程投影到单个绝热通道ϕ_j上，其中投影遍历除 r之外的所有坐标。在这里，我们仅保留两个通道，即 ϕ_{A} ，它是携带 FLS 的通道；以及 ϕ_{B} ，即 FLS 将解离进入的通道。这两个通道如图 1-a 所示。此外，我们忽略二阶导数$d^2\phi_i/dr^2$。耦合通道方程变为

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2F_{\mathrm{A}}}{dr^2} + U_{\mathrm{A}}F_{\mathrm{A}} - EF_{\mathrm{A}} &= \frac{\hbar^2}{\mu}P_{\mathrm{AB}}\frac{dF_{\mathrm{B}}}{dr} \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2F_{\mathrm{B}}}{dr^2} + U_{\mathrm{B}}F_{\mathrm{B}} - EF_{\mathrm{B}} &= \frac{\hbar^2}{\mu}P_{\mathrm{BA}}\frac{dF_{\mathrm{A}}}{dr}. \end{aligned} \tag{14}$$

这里， $P_{\mathrm{AB}} = \langle\phi_{\mathrm{A}}|\frac{d}{dr}|\phi_{\mathrm{B}}\rangle$ 是非绝热耦合，其对角元素为零。积分遍历除径向坐标之外的所有坐标。我们假设场关联态是通道 A 的束缚态，能量接近 E；并且它将解离到通道 B 中，其动能为 $E - E_{\mathrm{B}}$，其中 E_{B} 是通道 B 的阈能。忽略第二个方程右侧的非绝热耦合后，我们通过下式定义参考函数：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + U_{\mathrm{B}} - E\right)\begin{Bmatrix} f_{\mathrm{B}} \\ g_{\mathrm{B}}\end{Bmatrix} = 0 \tag{15}$$

对于较大 r 的边界条件

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{B}} &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi\hbar^2 k}}\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \\ g_{\mathrm{B}} &\to -\sqrt{\frac{2\mu}{\pi\hbar^2 k}}\cos(kr - l\pi/2 + \delta_l) \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $k = \sqrt{2\mu(E - E_{\mathrm{B}})/\hbar^2}$。这些函数经过能量归一化

$$\langle f_{\mathrm{B}}(E)|f_{\mathrm{B}}(E')\rangle = \delta(E - E') \tag{17}$$

并定义格林函数 [73]

$$G(r,r') = -\pi f_{\mathrm{B}}(r_<)g_{\mathrm{B}}(r_>). \tag{18}$$

通道 B 中的波函数（对于给定的分波l）随后由玻恩近似给出

$$F_{\mathrm{B}}(r) = f_{\mathrm{B}}(r) + \int_0^\infty dr' G(r,r')\frac{\hbar^2}{\mu}P_{\mathrm{BA}}\frac{dF_{\mathrm{A}}}{dr}(r') \tag{19}$$

在极限 $r \to \infty$ 下，这变为

$$F_{\rm B} \to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi\hbar^2 k}}\big\{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) + K\cos(kr - l\pi/2 + \delta_l)\big\}. \quad (20)$$

我们可以识别出 K-矩阵

$$K = \pi\frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_{\rm B} P_{\rm BA}\frac{dF_{\rm A}}{dr}. \quad (21)$$

至于 $F_{\rm A}$，它可以很好地近似为能量为 E_0 的束缚态

$$F_{\rm A} = N f_0 \quad (22)$$

其中 f_0 是 FLS 的波函数（采用论文中的记号），并按常规定则归一化

$$\int_0^\infty dr f_0^2(r) = 1 \quad (23)$$

其中，N 是在耦合道背景下剩余的归一化因子。于是，$F_{\rm A}$ 的方程为

$$(E_0 - E)N f_0 = \frac{\hbar^2}{\mu}P_{\rm AB}\frac{dF_{\rm B}}{dr}. \quad (24)$$

将其乘以 f_0 并对 r 积分，得到

$$(E_0 - E)N = \frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_0 P_{\rm AB}\frac{dF_{\rm B}}{dr} \approx \frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_0 P_{\rm AB}\frac{df_{\rm B}}{dr}. \quad (25)$$

因此，N 已确定，我们得到了K矩阵的表达式，

$$K = \pi\left(\frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_{\rm B} P_{\rm BA}\frac{df_0}{dr}\right)N = \pi\left(\frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_{\rm B} P_{\rm BA}\frac{df_0}{dr}\right)\left(\frac{\hbar^2}{\mu}\frac{1}{E_0 - E}\int_0^\infty dr f_0 P_{\rm AB}\frac{df_{\rm B}}{dr}\right). \quad (26)$$

由于这是定义共振相移的共振 K矩阵，因此有 [74]

$$K = \tan\delta_{res} = \frac{\Gamma/2}{E_0 - E} \quad (27)$$

并得到共振宽度

$$\Gamma = 2\pi\left(\frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_{\rm B} P_{\rm BA}\frac{df_0}{dr}\right)\left(\frac{\hbar^2}{\mu}\int_0^\infty dr f_0 P_{\rm AB}\frac{df_{\rm B}}{dr}\right) = (4\hbar^2/\mu)\int_0^\infty dr\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)P_{\rm BA}\frac{df_0}{dr} \times \int_0^\infty dr f_0 P_{\rm AB}\cos(kr - l\pi/2 + \delta_l) \quad (28)$$

其中在最后一行，我们很好地近似采用了 $f_{\rm B}$ 的渐近形式（式 (16)）。因此，该宽度的绝对值近似等于场关联态的衰减率，其衰减寿命为

$$\tau = \frac{\hbar}{|\Gamma|}. \quad (29)$$

当 FLS 在散射通道中解离时，寿命取决于方程（28）中出现的相移 δ_l。可以用我们的近耦合计算求出该值，但此值不会收敛，因为它取决于求解方程时所采用波函数的最小径向距离。我们改为扫描 δ_l 从 0 到 π 的不同取值，并选取对应寿命中的最小值。图 6 展示了 FLS 解离至通道 B 或通道 C 的情况，这两个通道在图 1 中标出。解离至其他通道所需时间更长。我们在 $E = E_0$ 处计算了 Γ 和 τ。可以看到，最短衰减寿命约为 1.25 s，长于 FLS 的碰撞寿命（约为毫秒量级）。因此，在渐变过程中可以忽略 FLS 的解离。

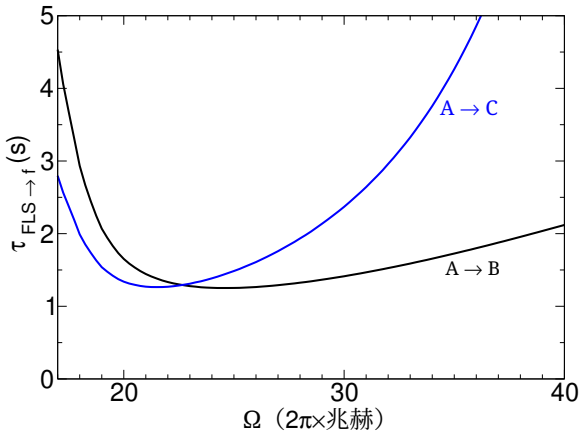


图 6：通道 A 中 FLS 解离至通道 B 或通道 C 的散射态时，其衰减寿命 τ 随 Ω 的变化关系（见图 1）。对于每项计算，我们保留最低值。

与原始静态场缚定态（sFLS）相比，后者预测的解离寿命为 3 ns，[3], 微波场缚定态（mFLS）的寿命似乎更长。这可以从定性上解释为：mFLS 出现在比原始态大得多的径向距离处，此处的偶极耦合较弱。粗略地说，如果将 FLS 及其导数近似为无限深方势阱函数，$f_0 \propto (\Delta r)^{-1/2}$ 和 $df_0/dr \propto \Delta r^{-3/2}$，其中 Δr 是 FLS 势阱的范围。根据海尔曼–费曼定理，我们还有 $P_{\rm AB} = \langle\phi_A|V(r')|\phi_B\rangle/[(r'-r)(U_{\rm B}(r) - U_{\rm A}(r))]$，其中 $\phi_{\rm A,B}$ 是在 r 处计算的，而 V 是在附近的点 $r' \simeq r$处计算的。由于 $V(r') \simeq V(r) \propto d^2/r^3$ 来自偶极为 d 的偶极–偶极相互作用，且 $(r'-r)$ 的标度方式将

与积分中的 dr 相同，因此我们看到

$$\Gamma \propto d^4/(r^6\,\Delta r^2) \qquad\qquad \tau \propto r^6\,\Delta r^2/d^4. \qquad (30)$$

如果我们取 $d_{\mathrm{sFLS}} = 1.67$ D、 $r_{\mathrm{sFLS}} \simeq 80\,a_0$ 和$\Delta r_{\mathrm{sFLS}} \simeq 50\ a_0$，并将 [3] 中的数值与 $d_{\mathrm{mFLS}} = 3.2$ D进行比较，$r_{\mathrm{mFLS}} \simeq 1300\ a_0$ 和本研究中的 $\Delta r_{\mathrm{mFLS}} \simeq 2000\ a_0$，我们会发现 $\tau_{\mathrm{mFLS}}/\tau_{\mathrm{sFLS}} \simeq 2\,10^9$。取 $\tau_{\mathrm{sFLS}} = 3$ ns [3],后，可得到重标度后的数值 $\tau_{\mathrm{mFLS}} = 6$ s，这与我们使用式（28）计算得到的 1.25 s 处于同一数量级。

[1] A. V. Avdeenkov 和 J. L. Bohn，《物理评论快报》90，043006（2003）。[2] A. V. Avdeenkov 和 J. L. Bohn，《物理评论A》66，052718（2002）。[3] A. V. Avdeenkov、D. C. E. Bortolotti 和 J. L. Bohn，《物理评论A》69，012710（2004）。[4] A. V. Avdeenkov 和 J. L. Bohn，《物理评论A》71，022706（2005）。[5] L. Lassabli`ere 和 G. Qu´em´ener，《物理评论快报》121，163402（2018）。[6] X.-Y. Chen、A. Schindewolf、S. Eppelt、R. Bause、M. Duda、S. Biswas、T. Karman、T. Hilker、I. Bloch 和 X.-Y. Luo，《自然》614，59（2023）。[7] L. De Marco、G. Valtolina、K. Matsuda、W. G. Tobias、J. P. Covey 和 J. Ye，《科学》363，853（2019）。[8] G. Valtolina、K. Matsuda、W. G. Tobias、J.-R. Li、L. De Marco 和 J. Ye，《自然》588，239（2020），ISSN 0028-0836。[9] A. Schindewolf、R. Bause、X.-Y. Chen、M. Duda、T. Karman、I. Bloch 和 X.-Y. Luo，《自然》607，677（2022）。[10] C. A. Regal、M. Greiner 和 D. S. Jin，《物理评论快报》92，040403（2004）。[11] M. Bartenstein、A. Altmeyer、S. Riedl、S. Jochim、C. Chin、J. Hecker Denschlag 和 R. Grimm，《物理评论快报》92，120401（2004）。[12] M. W. Zwierlein、C. A. Stan、C. H. Schunck、S. M. F. Raupach、A. J. Kerman 和 W. Ketterle，《物理评论快报》92，120403（2004）。[13] T. Bourdel、L. Khaykovich、J. Cubizolles、J. Zhang、F. Chevy、M. Teichmann、L. Tarruell、S. J. J. M. F. Kokkelmans 和 C. Salomon，《物理评论快报》93，050401（2004）。[14] Y. Wang、J. P. D'Incao 和 C. H. Greene，《物理评论快报》107，233201（2011）。[15] V. Efimov，Phys. Lett. B 33，563（1970），ISSN 0370-2693。[16] T. Kraemer、M. Mark、P. Waldburger、D. J. G.、C. Chin、B. Engeser、A. D. Lange、K. Pilch、A. Jaakkola、H.-C. N¨agerl 等，《自然》440，315（2006）。[17] E. Braaten 和 H.-W. Hammer，Phys. Rep. 428，259（2006）。[18] Y. Wang、J. P. D'Incao 和 C. H. Greene，《物理评论快报》106，233201（2011）。[19] M. Schmidt、L. Lassabli`ere、G. Qu´em´ener 和 T. Langen，Phys. Rev. Research 4，013235（2022）。[20] L. Tanzi、E. Lucioni、F. Fam`a、J. Catani、A. Fioretti、C. Gabbanini、R. N. Bisset、L. Santos 和 G. Modugno，《物理评论快报》122，130405（2019）。[21] L. Chomaz、D. Petter、P. Ilzh¨ofer、G. Natale、A. Traut- mann、C. Politi、G. Durastante、R. M. W. van Bijnen、A. Patscheider、M. Sohmen 等，Phys. Rev. X 9，021012（2019）。[22] F. B¨ottcher、J.-N. Schmidt、M. Wenzel、J. Hertkorn、M. Guo、T. Langen 和 T. Pfau，Phys. Rev. X 9，011051 (2019)。[23] T. K¨ohler、K. G´oral 和 P. S. Julienne，《现代物理评论》78，1311（2006）。[24] C. Chin、R. Grimm、P. J ulienne 和 E. Tiesinga，《现代物理评论》82，1225（2010）。[25] J. J. Park、Y.-K. Lu、A. O. Jamison、T. V. Tscherbul 和 W. Ketterleˆ A，《自然》614，54（2023）。[26] J. F. E. Croft、J. L. Bohn 和 G. Qu´em´ener，《物理评论A》102，033306（2020）。[27] J. F. E. Croft、J. L. Bohn 和 G. Qu´em´ener，《物理评论A》107，023304（2023）。[28] R. Bause、A. Christianen、A. Schindewolf、I. Bloch 和 X.-Y.Luo，《物理化学杂志A》127，729（2023）。[29] M. Guo、B. Zhu、B. Lu、X. Ye、F. Wang、R. Vex- iau、N. Bouloufa-Maafa、G. Qu´em´ener、O. Dulieu 和 D. Wang，Phys. Rev. Lett. 116，205303（2016）。[30] L. Christakis、J. S. Rosenberg、R. Raj、S. Chi、A. Morn- ingstar、D. A. Huse、Z. Z. Yan 和 W. S. Bakr，《自然》614，64（2023）。[31] K.-K. Ni、S. Ospelkaus、M. H. G. de Miranda、A. Pe'er、B. Neyenhuis、J. J. Zirbel、S. Kotochigova、P. S. Julienne、D. S. Jin 和 J. Ye，《科学》322，231（2008）。[32] K. Aikawa、D. Akamatsu、M. Hayashi、K. Oasa、J. Kobayashi、P. Naidon、T. Kishimoto、M. Ueda 和 S. Inouye，Phys. Rev. Lett. 105，203001（2010）。[33] T. Takekoshi、L. Reichs¨ollner、A. Schindewolf、J. M. Hutson、C. R. Le Sueur、O. Dulieu、F. Ferlaino、R. Grimm 和 H.-C. N¨agerl，Phys. Rev. Lett. 113，205301（2014）。[34] P. K. Molony、P. D. Gregory、Z. Ji、B. Lu、M. P. K¨oppinger、C. R. Le Sueur、C. L. Blackley、J. M. Hutson 和 S. L. Cornish，Phys. Rev. Lett. 113，255301（2014）。[35] J. W. Park、S. A. Will 和 M. W. Zwierlein，Phys. Rev. Lett. 114，205302（2015）。[36] T. M. Rvachov、H. Son、A. T. Sommer、S. Ebadi、J. J. Park、M. W. Zwierlein、W. Ketterle 和 A. O. Jamison，Phys. Rev. Lett. 119，143001（2017）。[37] L. R. Liu、J. D. Hood、Y. Yu、J. T. Zhang、N. R. Hutzler、T. Rosenband 和 K.-K. Ni，《科学》360，900（2018）。[38] L. Anderegg、L. W. Cheuk、Y. Bao、S. Burchesky、W. Ket- terle、K.-K. Ni 和 J. M. Doyle，《科学》365，1156（2019）。[39] K. K. Voges、P. Gersema、M. Meyer zum Alten Borgloh、T. A. Schulze、T. Hartmann、A. Zenesini 和 S. Os- pelkaus，Phys. Rev. Lett. 125，083401（2020）。[40] R. Bause、A. Schindewolf、R. Tao、M. Duda、X.-Y. Chen、G. Qu´em´ener、T. Karman、A. Christianen、I. Bloch 和 X.-Y. Luo，Phys. Rev. Research 3，033013（2021）。[41] I. Stevenson、A. Z. Lam、N. Bigagli、C. Warner、W. Yuan、S. Zhang 和 S. Will，arXiv预印本 arXiv:2206.00652（2022）。[42] D. K. Ruttley、A. Guttridge、S. Spence、R. C. Bird、C. R. Le Sueur、J. M. Hutson 和 S. L. Cornish，arXiv预印本 arXiv:2302.07296（2023）。[43] T. Karman 和 J. M. Hutson，《物理评论快报》121，

163401（2018）。[44] L. Anderegg、S. Burchesky、Y. Bao、S. S. Yu、T. Karman、E. Chae、K.-K. Ni、W. Ketterle 和 J. M. Doyle，《科学》**373**，779（2021）。[45] N. Bigagli、C. Warner、W. Yuan、S. Zhang、I. Stevenson、T. Karman 和 S. Will，arXiv预印本 arXiv:2303.16845（2023）。[46] J. Lin、G. Chen、M. Jin、Z. Shi、F. Deng、W. Zhang、G. Qu´em´ener、T. Shi、S. Yi 和 D. Wang，arXiv预印本 arXiv:2304.08312（2023）。[47] T. Xie、M. Lepers、R. Vexiau、A. Orb´an、O. Dulieu 和 N. Bouloufa-Maafa，Phys. Rev. Lett. **125**，153202（2020）。[48] C. Karam、M. Meyer zum Alten Borgloh、R. Vexiau、M. Lepers、S. Ospelkaus、N. Bouloufa-Maafa、L. Karpa 和 O. Dulieu，arXiv预印本 arXiv:2211.08950（2022）。[49] R. Napolitano、J. Weiner 和 P. S. Julienne，《物理评论A》**55**，1191（1997）。[50] N. Balakrishnan、V. Kharchenko、R. Forrey 和 A. Dal- garno，Chem. Phys. Lett. **280**，5（1997）。[51] J. M. Hutson，《新物理学杂志》**9**，152（2007）。[52] F. H. Mies、E. Tiesinga 和 P. S. Julienne，《物理评论A》**61**，022721（2000）。[53] E. Tiesinga、C. J. Williams、F. H. Mies 和 P. S. Julienne，《物理评论A》**61**，063416（2000）。[54] G. Qu´em´ener 和 J. L. Bohn，《物理评论A》**83**，012705（2011）。[55] B. R. Johnson，《化学物理学杂志》**67**，4086（1977）。[56] J. M. Hutson，Comput. Phys. Commun. **84**，1（1994）。[57] A. E. Thornley 和 J. M. Hutson，《化学物理学杂志》**101**，5578 1994( )。[58] 参见补充材料：http://link.aps.org/supplemental/（????）。[59] E. Hodby、S. T. Thompson、C. A. Regal、M. Greiner、A. C. Wilson、D. S. Jin、E. A. Cornell 和 C. E. Wieman，Phys. Rev. Lett. **94**，120402（2005）。[60] B. Borca、D. Blume 和 C. H. Greene，《新物理学杂志》**5**，111 2003( )。[61] K. G´oral、T. K¨ohler、S. A. Gardiner、E. Tiesinga 和 P. S. Julienne，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**37**，3457 (2004)。[62] M. H. G. de Miranda、A. Chotia、B. Neyenhuis、D. Wang、G. Qu´em´ener、S. Ospelkaus、J. Bohn、J. L. Ye 和 D. S. Jin，《自然物理学》**7**，502 (2011)。[63] A. Chotia、B. Neyenhuis、S. A. Moses、B. Yan、J. P. Covey、M. Foss-Feig、A. M. Rey、D. S. Jin 和 J. Ye，Phys. Rev. Lett. **108**，080405 (2012)。[64] B. Yan、S. A. Moses、B. Gadway、J. P. Covey、K. R. A. Hazzard、A. M. Rey、D. S. Jin 和 J. Ye，《自然》**501**，521 2013( )。[65] A. M. Kaufman 和 K.-K. Ni，《自然物理学》**17**，1324 (2021)。[66] K. Bergmann、H. Theuer 和 B. W. Shore，《现代物理评论》**70**，1003 (1998)。[67] K. Bergmann、N. V. Vitanov 和 B. W. Shore，《化学物理学杂志》**142**，170901 (2015)。[68] N. V. Vitanov、A. A. Rangelov、B. W. Shore 和 K. Bergmann，《现代物理评论》**89**，015006 (2017)。[69] M. Lepers、R. Vexiau、M. Aymar、N. Bouloufa-Maafa 和 O. Dulieu，《物理评论A》**88**，032709 (2013)。[70] J. P´erez-R´ıos、M. Lepers 和 O. Dulieu，Phys. Rev. Lett. **115**，073201 (2015)。[71] M. Gacesa、J. N. Byrd、J. Smucker、J. A. Montgomery 和 R. Cˆot´e，《物理评论研究》**3**，023163 (2021)。[72] Z. Idziaszek 和 P. S. Julienne，Phys. Rev. Lett. **104**，113202 2010( )。[73] H. Friedrich，*Theoretical atomic physics*（施普林格，2005)。[74] B. H. Brandsen 和 C. J. Joachain，*Physics of atoms and molecules* 2003（阿迪生-韦斯利，)。