arXiv:2304.09531v1 [math.ST] 19 Apr 2023

隐藏AR过程与自适应卡尔曼滤波器

Yury A. Kutoyants

勒芒大学，法国勒芒；国立研究大学“莫斯科动力学院”，俄罗斯莫斯科；托木斯克国立大学，俄罗斯托木斯克

摘要

研究了依赖于某些未知参数的部分观测线性系统模型。提出了对未观测分量的近似方法。该近似分三步实现。首先，构造未知参数的矩方法估计量。然后利用该估计量定义一步最大似然估计过程，最后将得到的估计量代入卡尔曼滤波器方程。所得方程的解为我们提供了该近似方法（自适应K-B滤波器）。描述了上述所有估计量，以及未知参数的最大似然估计量和贝叶斯估计量的渐近性质。讨论了自适应滤波的渐近效率。

MSC 2000分类：62M02、62G10、62G20。

关键词：部分观测线性系统、隐马尔可夫过程、卡尔曼滤波器、参数估计、矩估计量、最大似然估计和贝叶斯估计量、一步最大似然估计过程、在线近似、自适应卡尔曼滤波器。

1 引言

给定一个部分观测线性系统

$$X_t = f\,Y_{t-1} + \sigma\,w_t, \qquad X_0, \qquad t = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

$$Y_t = a\,Y_{t-1} + b\,v_t, \qquad Y_0, \tag{2}$$

其中，$X^T = (X_0, X_1, \dots, X_T)$ 是观测值，自回归过程（AR）$Y_t, t \geq 0$ 是隐过程。这里，$w_t, t \geq 1$ 和 $v_t, t \geq 1$ 是相互独立的标准高斯随机变量，即 $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$、$v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$。初始值为 $X_0 \sim \mathcal{N}(0, d_x^2)$ 和 $Y_0 \sim \mathcal{N}\left(0, d_y^2\right)$，二者可以相关，其相关性为 $\rho_{xy} = \mathrm{E} X_0 Y_0$。该系统由参数 $a, b, f, \sigma^2, d_x^2, d_y^2$ 定义。为方便起见，记 $\vartheta = (a, b, f, \sigma^2)$。

记 $\mathfrak{F}_t^X$ 为由前 $t+1$ 个观测值 $X_0, X_1, \ldots, X_t$ 生成的 σ-代数。根据卡尔曼滤波器的方程（例如，参见 [19] 中的定理 13.4），条件期望 $m(\vartheta, t) = \mathrm{E}_\vartheta\left(Y_t | \mathfrak{F}_t^X\right)$ 满足方程

$$m(\vartheta, t) = a\, m(\vartheta, t-1) + \frac{af\gamma(\vartheta, t-1)}{\sigma^2 + f^2\gamma(\vartheta, t-1)} \left[X_t - fm(\vartheta, t-1)\right], \quad t \geq 1. \tag{3}$$

初始值为 $m(\vartheta, 0) = \mathrm{E}_\vartheta(Y_0 | X_0)$。

均方误差 $\gamma(\vartheta, t) = \mathrm{E}_\vartheta(Y_t - m(\vartheta, t))^2$ 由以下方程描述

$$\gamma(\vartheta, t) = a^2\gamma(\vartheta, t-1) + b^2 - \frac{a^2 f^2 \gamma(\vartheta, t-1)^2}{\sigma^2 + f^2\gamma(\vartheta, t-1)}, \qquad t \geq 1 \tag{4}$$

初始值为 $\gamma(\vartheta, 0) = \mathrm{E}_\vartheta(Y_0 - m(\vartheta, 0))^2$。

假设观测值 X^T 已知，且某些参数未知，但其取值始终满足条件

$$\mathscr{A}_0 : \qquad a^2 \in [0, 1), \qquad b^2 > 0, \qquad f^2 > 0, \qquad \sigma^2 > 0. \tag{5}$$

该条件在以下意义下是一致的。例如，若未知参数为 $f \in (\alpha_f, \beta_f)$，则 $\alpha_f > 0$ 或 $\beta_f < 0$。我们的目标是在这种情况下提出 $m(\vartheta, t)$ $t \geq 1$ 的近似，并描述其在大样本渐近下的逼近误差，即当 $T \to \infty$ 时的逼近误差。

参数 $\left(d_x^2, d_y^2\right)$ 不可能相合估计，因此我们假设这些参数已知。若这些值未知，则系统 (3)-(4) 将使用一些错误的初始值求解；但由于解的稳健性，在条件 $\mathscr{A}_0$ 下，采用真实初始值与错误初始值所得解之间的差异在渐近意义下可忽略不计。还要注意，参数 $\vartheta = (f, b)$ 或 $\vartheta = (f, a, b)$ 不可能相合估计，因为模型 (1)-(2) 取决于乘积 fb。

本文致力于研究在模型（1）-（2）的部分参数未知的情况下，对 $m(\vartheta, t)$ $t = 1$, ..., T 进行估计的问题。与此类问题通常的处理方式一样，我们首先估计未知参数，然后将该估计量代入方程（3）-（4）中。以此方式得到的方程将描述自适应卡尔曼滤波器。关于此类及类似的部分观测系统中的自适应滤波，已有大量文献。它们之间的差异在于参数估计量的构造，以及对 $m(\vartheta, \cdot)$ 近似误差的相应描述，参见例如 [1],[2],[4],[6],[8],[20], [21],[22],[23] 及其中的参考文献。模型（线性和非线性）种类繁多，所采用的极限也各不相同（小噪声或大样本），自适应滤波的方法亦有多种。对于“自适应卡尔曼滤波器”这一词组，Google Scholar 给出了五十万条参考文献。当然，其中并非所有文献都与我们的需求完全一致，但这在某种意义上仍然说明了这一主题的重要性。我们提出了另一种实现此过程的算法。注意，自 Kalman [11]

以来，方程（1）-（2）通常都以更一般的形式进行研究，其中 X_t、 Y_t 和 w_t、 v_t 是向量，而 f、σ、a、b 是矩阵。我们选择这一最简单的模型，是因为计算简便，同时所得结果似乎仍然并非平凡。我们认为，所提出的算法可以推广到更复杂的模型，而这些模型所得的结果也将与本文给出的结果相似。

请注意，此类观测系统的参数估计问题属于更一般的隐马尔可夫过程参数估计问题的一部分，参见例如文献 [3] 和 [5] 及其中的参考文献。

我们关注在不同情形下对条件期望（随机函数） $m(\vartheta, t)\ \ 0 < t \leq T$进行在线估计的问题，其中 ϑ 未知。例如， $f = \vartheta$ 和 a, b 已知。在此类情形下，通常先估计未知参数，再将这些估计量代入方程(3)-(4)。最值得关注的当然是递归自适应滤波器的在线算法。所研究的算法主要通过数值模拟进行验证，模拟结果表明自适应滤波器表现合理。

我们的目标是在齐次部分观测系统(1)-(2)的情形下，获得过程$m(\vartheta, t)\ \ 0 < t \leq T$的良好递归近似 $m_t^\star, 0 < t \leq T$，并讨论自适应滤波器的渐近效率问题。

本研究中对 $m(\vartheta, t)\ \ t \in (0, T]$ 的估计按以下步骤进行：

1. 在相对较短的观测区间 $[0, \tau]$ 上计算初步估计量 ϑ_τ。*2.* 利用 ϑ_τ 构造一步最大似然估计过程 $\vartheta_{t,\,\tau}^\star$， $\tau < t \leq T$。*3.* 作为 $m(\vartheta,\ t)$ 的近似，我们提出借助 *K-B* 方程得到的 $m_t^\star$，其中 ϑ 替换为 $\vartheta_{t,\,\tau}^\star$， $\tau < t \leq T$。*4.* 估计误差 $m_t^\star - m(\vartheta,\ t)$ $\tau < t \leq T$。*5.* 讨论自适应滤波器的渐近效率。

这意味着我们在时间区间 $[0, \tau]$ 上没有在线近似，但$\tau/T \to 0$。请注意，此处使用的一步最大似然估计过程是著名的 Le Cam 单步最大似然估计，其中我们将积分上限（时间 t）视为变量。

介绍连续时间模型

$$\mathrm{d}X_t = f(\vartheta)\ Y_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

$$\mathrm{d}Y_t = -a(\vartheta)\ Y_t\,\mathrm{d}t + b(\vartheta)\ \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0, \qquad t \geq 0, \tag{7}$$

其中， W_t、 V_t、 $t \geq 0$ 是相互独立的维纳过程， $f(\vartheta)$、 $a(\vartheta)$、 $b(\vartheta)$是已知的光滑函数，$\vartheta \in \Theta \subset \mathcal{R}^d$ 是未知参数。假设观测值为$X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$，且马尔可夫过程 $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$是隐藏的。

我们已经将这一构造（步骤 1-2、步骤 1-4 或步骤 1-5）应用于 4 种不同的观测模型。第一种是类似于（6）-（7）的连续时间观测模型，其中两个方程均含有小噪声 [13], [18] （1-4）。第二种是模型（6）-（7），其中仅方程（6）含有小噪声 [15], [16] （1-5）。第三种是隐马尔可夫电报过程模型 [12]（1-2）。第四种是在渐近行为 $T \to \infty$ [14] （1-2）、[17] （1-5）下的观测模型（6）-（7）。

请注意，在卡尔曼滤波理论中，观测模型略有不同，在我们的情形下可写为如下形式

$$X_t = f\, Y_t + \sigma\, w_t, \qquad X_0, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$Y_{t+1} = a\, Y_t + b\, v_{t+1}, \qquad Y_0. \tag{9}$$

这两个模型与修正方程（3）-（4）之间的联系可见于[19], 定理 13.4 的推论3。请注意，如果我们将离散时间模型视为模型（6）-（7）的离散时间近似，那么方程（1）-（2）似乎比方程（8）-（9）更合适。

本文针对模型（1）-（2）提出自适应滤波器（步骤1-5）。初步矩估计量的构造遵循 [12] ，其阐述在某种意义上类似于文献 [17],中连续时间情形的阐述，其中观测模型为（6）-（7）。

下一节我们将研究系统（23）-（24）参数的矩估计量（初步估计量）。随后，计算不同参数对应的费舍尔信息（第3节）。在得到初步估计量和费舍尔信息后，我们引入一步极大似然估计过程，并研究其渐近性质（第4节）。第5节介绍最大似然估计和贝叶斯估计量的性质。将一步最大似然估计过程代入方程（3）-（4），即可得到自适应滤波器（第6节）。最后，第7节讨论所提出的自适应滤波器的渐近效率。

2 矩估计量方法

介绍三个统计量

$$S_{1,T}\left(X^T\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - X_{t-1}\right)^2, \quad S_{2,T}\left(X^T\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\left(X_t - X_{t-1}\right)\left(X_{t-1} - X_{t-2}\right),$$

$$S_{3,T}\left(X^T\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T}\left(X_t - X_{t-1}\right)\left(X_{t-2} - X_{t-3}\right)$$

并研究其渐近（$T \to \infty$）行为。我们始终假设条件 $\mathscr{A}_0$ 得到满足，并将真实值记为 ϑ_0。

记

$$\Phi_1(\vartheta)=\frac{2f^2b^2}{1+a}+2\sigma^2,\quad \Phi_2(\vartheta)=\frac{f^2b^2(a-1)}{1+a}-\sigma^2,\quad \Phi_3(\vartheta)=\frac{f^2b^2a(a-1)}{(1+a)}.$$

引理1。 我们有以下极限

$$S_{1,T}\left(X^T\right) \longrightarrow \Phi_1(\vartheta_0), \tag{10}$$
$$S_{2,T}\left(X^T\right) \longrightarrow \Phi_2(\vartheta_0), \tag{11}$$
$$S_{3,T}\left(X^T\right) \longrightarrow \Phi_3(\vartheta_0), \tag{12}$$

并且存在常数 $C_1>0$、 $C_2>0$、 $C_3>0$ ，使得

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{1,T}\left(X^T\right)-\Phi_1(\vartheta_0)\right|^2\le\frac{C_1}{T},\quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{2,T}\left(X^T\right)-\Phi_2(\vartheta_0)\right|^2\le\frac{C_2}{T}, \tag{13}$$
$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{3,T}\left(X^T\right)-\Phi_3(\vartheta_0)\right|^2\le\frac{C_3}{T}. \tag{14}$$

证明。 根据（23）

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-X_{t-1})^2=\frac{f_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_{t-1}-Y_{t-2})^2+\frac{2f_0\sigma_0}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_{t-1}-Y_{t-2})(w_t-w_{t-1})$$
$$+\frac{\sigma_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(w_t-w_{t-1})^2.$$

高斯时间序列 $Y_t, t\ge1$ 呈指数混合，具有平稳（不变）高斯分布 $\mathcal{N}\left(0,\frac{b_0^2}{1-a_0^2}\right)$ ，且与 w_t, $t\ge1$相互独立。因此，根据大数定律，我们得到以下收敛结果

$$\frac{f_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_{t-1}-Y_{t-2})^2=\frac{f_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}((a_0-1)Y_{t-2}+b_0v_{t-1})^2$$
$$=\frac{f_0^2(1-a_0)^2}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_{t-2}^2-\frac{2b_0(1-a_0)f_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_{t-2}v_{t-1}+\frac{f_0^2b_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}v_{t-1}^2$$
$$\longrightarrow\frac{f_0^2b_0^2(1-a_0)^2}{1-a_0^2}+f_0^2b_0^2=\Phi_1(\vartheta_0)-2\sigma_0^2,$$
$$\frac{2f_0\sigma_0}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_{t-1}-Y_{t-2})(w_t-w_{t-1})\longrightarrow0,$$
$$\frac{\sigma_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}(w_t-w_{t-1})^2\longrightarrow2\sigma_0^2,$$

这证明了（10）。

为证明式（11），我们写出

$$\begin{aligned}
&(X_t - X_{t-1})(X_{t-1} - X_{t-2}) \\
&\quad = [f_0(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \sigma_0(w_t - w_{t-1})][f_0(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \sigma_0(w_{t-1} - w_{t-2})] \\
&\quad = [f_0(a_0 - 1)Y_{t-2} + f_0 b_0 v_{t-1} + \sigma_0(w_t - w_{t-1})] \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{a_0}[f_0(a_0 - 1)Y_{t-2} + f_0 b_0 a_0 v_{t-2} + \sigma_0 a_0(w_{t-1} - w_{t-2})].
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(X_t - X_{t-1})(X_{t-1} - X_{t-2}) = \frac{f_0^2(a_0 - 1)^2}{a_0 T}\sum_{t=2}^{T}Y_{t-2}^2 + \frac{f_0^2 b_0(a_0 - 1)}{T}\sum_{t=2}^{T}Y_{t-2}v_{t-2} \\
+ \frac{\sigma_0^2}{T}\sum_{t=2}^{T}(w_t - w_{t-1})(w_{t-1} - w_{t-2}) + o(1).
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}Y_{t-2}v_{t-2} = \frac{a_0}{T}\sum_{t=2}^{T}Y_{t-3}v_{t-2} + \frac{a_0 b_0}{T}\sum_{t=2}^{T}v_{t-2}^2 \longrightarrow a_0 b_0, \\
&\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(w_t - w_{t-1})(w_{t-1} - w_{t-2}) \longrightarrow -1.
\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(X_t - X_{t-1})(X_{t-1} - X_{t-2}) &\longrightarrow \frac{f_0^2 b_0^2(a_0 - 1)^2}{a_0(1 - a_0^2)} + f_0^2 b_0^2 a_0(a_0 - 1) - \sigma^2 \\
&= \Phi_2(\vartheta_0).
\end{aligned}$$

最后一个收敛结果（12）可用类似的论证如下得到:

$$\begin{aligned}
&(X_t - X_{t-1})(X_{t-2} - X_{t-3}) \\
&\quad = [f_0(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \sigma_0(w_t - w_{t-1})][f_0(Y_{t-3} - Y_{t-4}) + \sigma_0(w_{t-2} - w_{t-3})] \\
&\quad = [f_0(a_0 Y_{t-2} - Y_{t-2}) + f_0 b_0 v_{t-1} + \sigma_0(w_t - w_{t-1})] \\
&\qquad \times \frac{1}{a_0}[f_0(a_0 Y_{t-3} - Y_{t-3}) + f_0 b_0 v_{t-3} + a_0\sigma_0(w_{t-2} - w_{t-3})].
\end{aligned}$$

这里我们使用了方程 (24) 和等式 $a_0 Y_{t-4} = Y_{t-3} - b_0 v_{t-3}$。此外，由于 $w_t, t \geq 1$ 与 Y_t, $t \geq 1$ 以及 $v_t, t \geq 1$ 相互独立，我们可以写出

$$S_{3,T}(X^T) = \frac{1}{a_0 T}\sum_{t=3}^{T}[f_0(a_0 - 1)Y_{t-2} + f_0 b_0 v_{t-1}][f_0(a_0 - 1)Y_{t-3} + f_0 b_0 v_{t-3}] + o(1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_0 T}\sum_{t=3}^{T}\left[f_0\left(a_0-1\right)a_0 Y_{t-3}+f\left(a_0-1\right)v_{t-2}+f_0 b_0 v_{t-1}\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[f_0\left(a_0-1\right)Y_{t-3}+f_0 b_0 v_{t-3}\right]+o\left(1\right) \\
&= \frac{f_0^2\left(a_0-1\right)^2}{T}\sum_{t=3}^{T}Y_{t-3}^2+\frac{f_0^2\left(a_0-1\right)b_0}{T}\sum_{t=3}^{T}Y_{t-3}v_{t-3}+o\left(1\right) \\
&= \frac{f_0^2\left(a_0-1\right)^2}{T}\sum_{t=3}^{T}Y_{t-3}^2+\frac{f_0^2 b_0^2\left(a_0-1\right)}{T}\sum_{t=3}^{T}v_{t-3}^2+o\left(1\right) \\
&\longrightarrow \frac{f_0^2 b_0^2\left(1-a_0\right)}{1+a_0}+f_0^2 b_0^2\left(a_0-1\right)=\Phi_3\left(\vartheta_0\right).
\end{aligned}
$$

由于高斯自回归过程 $Y_t, t\geq 1$ 的相关函数呈指数衰减，因此由标准论证可得收敛关系 (13),(14)。关于高阶矩，请参见 Rosenthal 型不等式 [7]。

□

注1. 由证明可知，估计量 (12) 在紧集上一致 $\mathbb{K}\subset\Theta$ 也成立，即

$$
\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{1,T}\left(X^T\right)-\Phi_1\left(\vartheta_0\right)\right|^2\leq\frac{C}{T},\quad \sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{2,T}\left(X^T\right)-\Phi_2\left(\vartheta_0\right)\right|^2\leq\frac{C}{T} \tag{15}
$$

$$
\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|S_{3,T}\left(X^T\right)-\Phi_3\left(\vartheta_0\right)\right|^2\leq\frac{C}{T}. \tag{16}
$$

注释 2. 更详细的分析可以验证渐近正态性

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{T}\left(S_{1,T}\left(X^T\right)-\Phi_1\left(\vartheta_0\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,D_1\left(\vartheta_0\right)^2\right), \\
&\sqrt{T}\left(S_{2,T}\left(X^T\right)-\Phi_2\left(\vartheta_0\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,D_2\left(\vartheta_0\right)^2\right), \\
&\sqrt{T}\left(S_{3,T}\left(X^T\right)-\Phi_3\left(\vartheta_0\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,D_3\left(\vartheta_0\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

但我们不证明这些收敛性，因为我们只需要这些矩估计量来构造一步极大似然估计过程，而估计量 (15)、(16) 已足以解决这些问题。

模型 (23)-(24) 的所有参数都可以借助所引入的统计量 $S_{1、T}\left(X^T\right), S_{2、T}\left(X^T\right), S_{3、T}\left(X^T\right)$ 进行估计。下面给出参数 f, a, b, σ^2 的矩方法估计量（MME），并描述其渐近行为。

2.1 参数 f的估计。

假设参数 a, b, σ^2 已知，需要估计 $\vartheta = f \in (\alpha_f, \beta_f), \alpha_f > 0$。则 MME 可定义如下

$$f_T^* = \alpha_f \mathbb{I}_{\left\{\mathbb{B}_{1,T}\right\}} + \bar{f}_T \mathbb{I}_{\left\{\mathbb{B}_{2,T}\right\}} + \beta_f \mathbb{I}_{\left\{\mathbb{B}_{3,T}\right\}}. \tag{17}$$

Here

$$\bar{f}_T = \left(\frac{\left(S_{1,T}\left(X^T\right) - 2\sigma^2\right)(1+a)}{2b^2} \right)^{1/2},$$

$$\mathbb{B}_{1,T} = \left\{ \text{The event}: \quad S_{1,T}\left(X^T\right) \leq \frac{2\alpha_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2 \right\},$$

$$\mathbb{B}_{2,T} = \left\{ \text{The event}: \quad \frac{2\alpha_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2 < S_{1,T}\left(X^T\right) \leq \frac{2\beta_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2 \right\},$$

$$\mathbb{B}_{3,T} = \left\{ \text{The event}: \quad S_{1,T}\left(X^T\right) \geq \frac{2\beta_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2 \right\}.$$

因此 $f_T^* \in [\alpha_f, \beta_f]$。由于

$$S_{1,T}\left(X^T\right) \longrightarrow \Phi_1\left(\vartheta_0\right) = \frac{2f_0^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2$$

概率

$$\mathbf{P}_{f_0}\left(\mathbb{B}_{1,T}\right) \longrightarrow 0, \qquad \mathbf{P}_{f_0}\left(\mathbb{B}_{2,T}\right) \longrightarrow 1, \quad \mathbf{P}_{f_0}\left(\mathbb{B}_{3,T}\right) \longrightarrow 0,$$

下文对其他矩估计量省略类似于（17）的表示。

由引理1和注1容易看出，矩估计量 f_T^*是相合的，即 $f_T^* \to f_0$。

下面验证上界

$$\sup_{f_0 \in \mathbb{K}} \mathbf{E}_{f_0} \left| f_T^* - f_0 \right|^2 \leq \frac{C}{T}.$$

将 $\eta_T = \sqrt{T}\left(S_{1,T}\left(X^T\right) - \Phi_1(\vartheta_0)\right)$ 代入。注意，由于 f_T^* 的定义 (17)，只需研究集合 $\mathbb{B}_2$ 上的统计量 $S_{1,T}(X_T)$，因此我们得到以下估计

$$\frac{2\alpha_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2 \leq S_{1,T}\left(X_T\right) \leq \frac{2\beta_f^2 b^2}{1+a} + 2\sigma^2. \tag{18}$$

Then

$$f_T^* = \sqrt{\frac{1+a}{2b^2}} \left[\Phi_1\left(\vartheta_0\right) - 2\sigma^2 + T^{-1/2}\eta_T\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+a}{2b^2}} \left[\Phi_1(\vartheta_0) - 2\sigma^2\right]^{1/2} + \sqrt{\frac{1+a}{2b^2}} \left[\Phi_1(\vartheta_0) - 2\sigma^2 + sT^{-1/2}\eta_T\right]^{-1/2} T^{-1/2}\eta_T$$
$$= f_0 + \sqrt{\frac{1+a}{2b^2}} \left[\Phi_1(\vartheta_0) - 2\sigma^2 + sT^{-1/2}\eta_T\right]^{-1/2} T^{-1/2}\eta_T,$$

其中 $s \in (0, 1)$，因此

$$|f_T^* - f_0| \leq \frac{(1+a)}{2b^2\alpha_f} T^{-1/2}\eta_T.$$

这里使用了（18）。因此，根据引理1

$$\sup_{f_0 \in \mathbb{K}} \mathbf{E}_{f_0} |f_T^* - f_0|^2 \leq C\, T^{-1} \mathbf{E}_{f_0} |\eta_T|^2 .$$

注3。当然，统计量 $S_{2,T}\left(X^T\right)$ 和 $S_{3,T}\left(X^T\right)$ 也可以用于构造 f的矩估计量。例如，我们可以求解方程

$$S_{2,T}\left(X^T\right) = \frac{f^2 b^2 (a-1)}{1+a} - \sigma^2$$

关于 f，并令

$$f_T^{**} = \left(\frac{\left(S_{2,T}\left(X^T\right) + \sigma^2\right)(1+a)}{b^2(a-1)} \right)^{1/2}.$$

注意，统计量 $S_{2,T}\left(X^T\right)$ 取负值，并且方根下的表达式以趋于1的概率为正。该矩估计量具有与 f_T^*相似的渐近性质。

2.2 b的估计。

b 的估计与 f 的估计几乎相同，因为在 $\Phi_1(\vartheta)$、$\Phi_2(\vartheta)$ 和 $\Phi_3(\vartheta)$ 中，这些参数仅出现在乘积 bf 中。因此，b 的矩估计量具有以下性质

$$b_T^* = \left(\frac{\left(S_{1,T}\left(X^T\right) - 2\sigma^2\right)(1+a)}{2f^2} \right)^{1/2} \longrightarrow b_0, \qquad \sup_{b_0 \in \mathbb{K}} \mathbf{E}_{b_0} |b_T^* - b_0|^2 \leq \frac{C}{T} \tag{19}$$

等等。

2.3 参数 a的估计。

该方程的解

$$S_{1,T}\left(X^T\right)=\frac{2f^2b^2}{1+a}+2\sigma^2$$

得到矩估计量

$$a_T^*=\frac{2f^2b^2}{S_{1,T}\left(X^T\right)-2\sigma^2}-1.$$

由引理1可得

$$a_T^*\longrightarrow a_0,\qquad \sup_{a_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{a_0}\left|a_T^*-a_0\right|^2\leq\frac{C}{T}.$$

2.4 参数 σ^2的估计。

矩估计量

$$\sigma_T^{2*}=\frac{1}{2}S_{1,T}\left(X^T\right)-\frac{f^2b^2}{1+a}$$

是相合的，并且

$$\sup_{\sigma_0^2\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\sigma_0^2}\left|\sigma_T^{2*}-\sigma_0^2\right|^2\leq\frac{C}{T}.$$

2.5 参数 $\vartheta=(a,\quad f)$ 的估计。

MME $\vartheta_T^*=(a_T^*,f_T^*)$ 是以下方程组的解

$$S_{1,T}\left(X^T\right)=\Phi_1\left(\vartheta_T^*\right),\qquad S_{2,T}\left(X^T\right)=\Phi_2\left(\vartheta_T^*\right)$$

其形式如下

$$a_T^*=\frac{S_{1,T}\left(X^T\right)+S_{2,T}\left(X^T\right)-\sigma^2}{S_{1,T}\left(X^T\right)-2\sigma^2},\tag{20}$$

$$f_T^*=\left(\frac{S_{1,T}\left(X^T\right)\left(1+a_T^*\right)-2\sigma^2}{2b^2}\right)^{1/2}.\tag{21}$$

借助引理1，可以证明

$$(a_T^*,f_T^*)\longrightarrow(a_0,f_0)$$

and

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\vartheta_T^*-\vartheta_0\right\|^2\leq\frac{C}{T}.\tag{22}$$

2.6 $\vartheta = \left(a,\ \ f,\ \ \sigma^2\right)$**的参数估计。**

在这种情况下，我们有三个方程

$$S_{1,T}\left(X^T\right) = \frac{2f^2b^2}{1+a} + 2\sigma^2, \quad S_{2,T}\left(X^T\right) = \frac{f^2b^2\left(a-1\right)}{1+a} - \sigma^2,$$
$$S_{3,T}\left(X^T\right) = \frac{f^2b^2a\left(a-1\right)}{\left(1+a\right)}.$$

矩估计量 $\vartheta_T^* = (a_T^*, f_T^*, \sigma_T^{2*})$ 是该系统的以下解:

$$a_T^* = \frac{2S_{3,T}\left(X^T\right)}{S_{1,T}\left(X^T\right) + 2S_{2,T}\left(X^T\right)} + 1,$$
$$f_T^* = \frac{S_{3,T}\left(X^T\right)\left(1+a_T^*\right)}{b^2a_T^*\left(a_T^*-1\right)},$$
$$\sigma_T^{2*} = \frac{1}{2}S_{1,T}\left(X^T\right) - \frac{\left(f_T^*\right)^2b^2}{1+a_T^*}.$$

再次得到 ϑ_T^* 的相合性以及类似于（22）的界。

对于估计 $\vartheta = (a, b, \sigma^2)$，也有几乎相同的结果。

注 4. 当然，可以定义并研究参数 $\vartheta = (a, b)$、 $\vartheta = (f, \sigma^2)$ 和 $\vartheta = (b, \sigma^2)$ 的矩估计量。唯一不允许的参数组合是 $\vartheta = (f, b)$。在这种情况下，无法对 ϑ 进行相合估计。事实上，平稳自回归过程 $Y_t, t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ 可表示为

$$Y_t = b\sum_{k=0}^{\infty} a^k v_{t-k}$$

因此，观测过程为

$$X_t = fb\sum_{k=0}^{\infty} a^k v_{t-k} + \sigma w_t, \qquad k = ..., -1, 0, 1, \ldots.$$

这里我们引入了由 v_t、 $t = ...$、 -1、0、1、.....组成的独立同分布的标准高斯随机变量序列。模型取决于乘积 fb，因此无法分别估计这些参数。

3 费希尔信息

我们有相同的观测模型

$$X_t = fY_{t-1} + \sigma\, w_t, \qquad X_0, \qquad t \geq 1,$$

$$Y_t = aY_{t-1} + b\,v_t, \qquad Y_0, \qquad t \geq 1,$$

其中 w_t、v_t、$t \geq 1$ 是相互独立的标准高斯随机变量，而 f、σ^2、a、b 是模型的参数。与之前一样，我们假设其中一些参数是未知的，并且必须通过观测值 $X^T =$（X_0、X_1，.....，X_T）来估计未知参数 $\vartheta \in \Theta$。

上文研究的矩估计量是相合的，但并非渐近有效。这就是我们在下文提出构造一步最大似然估计过程的原因，它使我们能够解决两个问题：首先，获得这些参数的渐近有效估计量；其次，描述条件期望 $m(\vartheta, t)$ $t \geq 1$ 的近似。

构造一步最大似然估计过程需要了解费希尔信息。因此，我们在下文计算与不同参数相关的费希尔信息。为此，我们先回顾 $\gamma(\vartheta, t)$ 的一些已知性质，并描述该模型的似然比函数。

考虑如下部分观测时间序列模型

$$X_t = f\,Y_{t-1} + \sigma\,w_t, \qquad X_0, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$
$$Y_t = a\,Y_{t-1} + b\,v_t, \qquad Y_0, \tag{24}$$

其中，$X^T = (X_0, X_1, \ldots, X_T)$ 是观测值，自回归过程（AR）$Y_t, t \geq 0$ 是隐过程。这里，$w_t, t \geq 1$ 和 $v_t, t \geq 1$ 是相互独立的标准高斯随机变量，即 $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$、$v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$。初始值为 $X_0 \sim \mathcal{N}(0, d_x^2)$ 和 $Y_0 \sim \mathcal{N}\left(0, d_y^2\right)$。该系统由参数 $a, b, f, \sigma^2, d_x^2, d_y^2$ 定义。我们假设其中某些参数未知，需要根据观测值 X^T 进行估计。

为方便起见，暂记为 $\vartheta = (a, b, f, \sigma^2)$。

记 $\mathfrak{F}_t^X$为由前 $t+1$ 个观测值 $X_0, X_1, \ldots, X_t$生成的 σ-代数。根据卡尔曼滤波器的方程（例如参见 [11], [19]），条件期望 $m(\vartheta, t) = \mathsf{E}_\vartheta\left(Y_t | \mathfrak{F}_t^X\right)$ 满足方程

$$m(\vartheta, t) = a\,m(\vartheta, t-1) + \frac{af\gamma(\vartheta, t-1)}{\sigma^2 + f^2\gamma(\vartheta, t-1)}\left[X_t - fm(\vartheta, t-1)\right], \quad t \geq 1. \tag{25}$$

初始值为 $m(\vartheta, 0) = \mathsf{E}_\vartheta(Y_0 | X_0)$。

均方误差 $\gamma(\vartheta, t) = \mathsf{E}_\vartheta(Y_t - m(\vartheta, t))^2$ 由方程描述

$$\gamma(\vartheta, t) = a^2\gamma(\vartheta, t-1) + b^2 - \frac{a^2 f^2 \gamma(\vartheta, t-1)^2}{\sigma^2 + f^2\gamma(\vartheta, t-1)}, \qquad t \geq 1 \tag{26}$$

其初始值为 $\gamma(\vartheta, 0) = \mathsf{E}_\vartheta(Y_0 - m(\vartheta, 0))^2$。

如果某些已提及的参数未知，那么当然无法使用 (25)-(26) 来计算 $m(\vartheta, t)$ $t \geq 1$。

我们假设观测值 $X^T = (X_0, X_1, \ldots, X_T)$ 已知，且某些参数未知，但它们的取值始终满足条件 $\mathscr{A}_0$。我们的目标是在这种情况下，为 $m(\vartheta, t)$ $t \geq 1$ 提出一种近似方法，并描述在大样本渐近情形下的逼近误差，即当 $T \to \infty$ 时的误差。

参数 $\left(d_x^2, d_y^2\right)$ 的相合估计是不可能的，因此我们假设这些参数已知。若这些值未知，则系统 (25)-(26) 将以某些错误的初始值求解；但由于解具有稳健性，在我们的问题中，使用真实初始值和错误初始值所得到的解之间的差异渐近可忽略不计。

与之前一样，所提出的方案包含几个步骤。首先，在一个长度可忽略不计的学习区间 $\left[0, \tau_T\right]$ （$\tau_T/T \to 0$）上，我们构造一个相合初始估计量 $\vartheta^*_{\tau_T}$。然后利用该估计量定义一步最大似然估计过程 $\vartheta^\star_T = \left(\vartheta^\star_{t,\,T}, t = \tau_T + 1, \ldots, T\right)$，最后通过将 $\vartheta^\star_T$ 代入方程 (25)-(26)，得到近似 $m^\star_T = \left(m^\star_{t,\,T}, t = \tau_T + 1, \ldots, T\right)$。最后一步是评估误差 $m^\star_{t,\,T} - m(\vartheta, t)$。

注意到函数 $\gamma(\vartheta, t)$ 收敛于值

$$\gamma_*(\vartheta) = \frac{f^2 b^2 - \sigma^2(1-a^2)}{2f^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma^2(1-a^2)}{f^2} - b^2\right)^2 + \frac{4b^2\sigma^2}{f^2}\right]^{1/2} \tag{27}$$

当 $t \to \infty$ 时（参见第14.4, [19]节中的例3）。值 $\gamma_*(\vartheta)$ 作为方程（26）的正解得到，其中令 $\gamma(\vartheta, t) = \gamma(\vartheta, t-1) = \gamma_*(\vartheta)$，于是得到

$$\gamma_*(\vartheta)^2 + \left[\frac{\sigma^2(1-a^2)}{f^2} - b^2\right]\gamma_*(\vartheta) - \frac{b^2\sigma^2}{f^2} = 0.$$

下面我们研究估计量的渐近（$T \to \infty$）性质。因此，为简化论述，我们假设初始值 $\gamma(\vartheta, 0) = \gamma_*(\vartheta)$。那么对于任意$t \geq 1$，我们有 $\gamma(\vartheta, t) = \gamma_*(\vartheta)$。当然，这是关于 X_0 与 Y_0 以及值 d_x^2、d_y^2 之间相关性的条件。

因此，方程（25）被方程所替代

$$m_t(\vartheta) = a\, m_{t-1}(\vartheta) + \frac{af\gamma_*(\vartheta)}{\sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)}\left[X_t - f m_{t-1}(\vartheta)\right], \quad t \geq 1 \tag{28}$$

取相应的初始值，使得 $\gamma(\vartheta,0) = \gamma_*(\vartheta)$。回想一下，方程（25）关于初始值是稳定的，即对于错误的初始条件，差值$m(\vartheta, t) - m_t(\vartheta) \to 0$。

还要注意，如果我们用 ϑ_0 表示真实值，那么

$$\zeta_t(\vartheta_0) = \frac{X_t - f_0 m_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{\sigma_0^2 + f_0^2\gamma_*(\vartheta_0)}}, \qquad t \geq 1$$

是独立同分布的标准高斯随机变量（参见 [19] 中的定理 13.5）。这意味着观测方程（23）可以写成如下形式

$$X_t = f_0 m_{t-1}(\vartheta_0) + \sqrt{\sigma_0^2 + f_0^2 \gamma_*(\vartheta_0)}\, \zeta_t(\vartheta_0), \qquad t \geq 1.$$

利用这种表示，我们也可以改写方程（28）。

$$\begin{aligned} m_t(\vartheta) = a\, m_{t-1}(\vartheta) &+ \frac{af\gamma_*(\vartheta)}{\sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)} \left[f_0 m_{t-1}(\vartheta_0) - f m_{t-1}(\vartheta) \right] \\ &+ \frac{af\gamma_*(\vartheta)\sqrt{\sigma_0^2 + f_0^2\gamma_*(\vartheta_0)}}{\sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)} \zeta_t(\vartheta_0), \quad t \geq 1. \end{aligned} \tag{29}$$

似然函数为

$$\begin{aligned} L\left(\vartheta, X^T\right) &= \left(2\pi\left(\sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)\right)\right)^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(X_t - f m_{t-1}(\vartheta)\right)^2}{\sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi P(\vartheta)} \right)^{T/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(X_t - f m_{t-1}(\vartheta)\right)^2}{P(\vartheta)} \right), \qquad \vartheta \in \Theta. \end{aligned} \tag{30}$$

Here

$$P(\vartheta) = \sigma^2 + f^2\gamma_*(\vartheta)$$

并且 Θ 是参数 ϑ 可能取值所构成的开有界凸集。

3.1 未知参数 b

我们先考虑一维情形，设 $\vartheta = b \in \Theta = (\alpha_b, \beta_b)$ $\alpha_b > 0$。与上文相同，我们假设 $f \neq 0$, $a^2 \in [0, 1)$。因此，系统为

$$\begin{aligned} X_t &= f\, Y_{t-1} + \sigma\, w_t, \qquad X_0, \qquad t = 1, 2, \ldots, \\ Y_t &= a\, Y_{t-1} + \vartheta\, v_t, \qquad Y_0, \end{aligned}$$

引入以下记号：

$$\begin{aligned} &\Gamma(\vartheta) = f^2\gamma_*(\vartheta), \qquad P(\vartheta) = \sigma^2 + \Gamma(\vartheta), \qquad A(\vartheta) = \frac{a\sigma^2}{P(\vartheta)}, \\ &B(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{a\Gamma(\vartheta)\sqrt{P(\vartheta_0)}}{P(\vartheta)}, \qquad \dot{B}_b(\vartheta_0, \vartheta_0) = \left.\frac{\partial B(\vartheta, \vartheta_0)}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{a\sigma^2 \dot{\Gamma}(\vartheta_0)}{P(\vartheta_0)^{3/2}}. \end{aligned}$$

注意，$\inf_{\vartheta\in\Theta} \Gamma(\vartheta_0) > 0$（见下文公式（44））。我们将使用的另一个估计是

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} |A(\vartheta)| < 1. \tag{31}$$

下面证明一个众所周知的事实：如果 $a^2 \in [0,1)$，该条件总是成立。我们有

$$P(\vartheta) = \frac{f^2\vartheta^2 + \sigma^2 + \sigma^2 a^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right) - f^2\vartheta^2\right)^2 + 4f^2\vartheta^2\sigma^2\right]^{1/2}$$

and

$$\begin{aligned}|A(\vartheta)| &= 2|a|\sigma^2\left(f^2\vartheta^2 + \sigma^2 + \sigma^2 a^2 + \left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right) - f^2\vartheta^2\right)^2 + 4f^2\vartheta^2\sigma^2\right]^{1/2}\right)^{-1} \\ &< \frac{2|a|\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma^2 a^2} = \frac{2|a|}{1+a^2} < 1.\end{aligned}$$

命题1. 费舍尔信息为

$$\mathrm{I}_b(\vartheta_0) = \frac{\dot{P}_b(\vartheta_0)^2\left[P(\vartheta_0)^2 + a^2\sigma^4\right]}{2P(\vartheta_0)^2\left[P(\vartheta_0)^2 - a^2\sigma^4\right]}. \tag{32}$$

证明. 将方程(29)乘以 f，记 $M_t(\vartheta) = fm_t(\vartheta)$，并改写如下

$$\begin{aligned}M_t(\vartheta) &= \frac{a\sigma^2}{P(\vartheta)}M_{t-1}(\vartheta) + \frac{a\Gamma(\vartheta)}{P(\vartheta)}M_{t-1}(\vartheta_0) + \frac{a\Gamma(\vartheta)\sqrt{P(\vartheta_0)}}{P(\vartheta)}\zeta_t(\vartheta_0) \\ &= A(\vartheta)M_{t-1}(\vartheta) + [a - A(\vartheta)]M_{t-1}(\vartheta_0) + B(\vartheta,\vartheta_0)\ \zeta_t(\vartheta_0), \qquad t \geq 1.\end{aligned}$$

费舍尔得分为（见(30)）

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L\left(\vartheta, X^T\right)}{\partial\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\left(X_t - M_{t-1}(\vartheta)\right)^2}{2P(\vartheta)} + \frac{1}{2}\ln P(\vartheta)\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{[X_t - M_{t-1}(\vartheta)]}{P(\vartheta)}\dot{M}_{t-1}(\vartheta) + \frac{[X_t - M_{t-1}(\vartheta)]^2\ \dot{P}(\vartheta)}{2P(\vartheta)^2} - \frac{\dot{P}(\vartheta)}{2P(\vartheta)}\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{[X_t - M_{t-1}(\vartheta)]}{\sqrt{P(\vartheta)}}\frac{\dot{M}_{t-1}(\vartheta)}{\sqrt{P(\vartheta)}} + \frac{[X_t - M_{t-1}(\vartheta)]^2}{P(\vartheta)}\frac{\dot{P}(\vartheta)}{2P(\vartheta)} - \frac{\dot{P}(\vartheta)}{2P(\vartheta)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{P(\vartheta)}}\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t(\vartheta)\dot{M}_{t-1}(\vartheta) + \left[\zeta_t(\vartheta)^2 - 1\right]\frac{\dot{P}(\vartheta)}{2\sqrt{P(\vartheta)}}\right].\end{aligned}$$

回忆一下，$M_{t-1}(\vartheta) = \partial M_{t-1}(\vartheta)/\partial\vartheta, P(\vartheta) = \partial P(\vartheta)/\partial\vartheta$ 以及

$$\zeta_t(\vartheta_0) = \frac{X_t - M_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta_0)}} = \frac{X_t - M_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{P(\vartheta_0)}}, \qquad t \geq 1$$

是相互独立的标准高斯随机变量（$\zeta_t(\vartheta_0) \sim \mathcal{N}(0,1)$）。

$\dot{}$导数 $M_t(\vartheta)$ 的方程 $t \geq 1$ 为

$$\dot{M}_t(\vartheta) = A(\vartheta)\dot{M}_{t-1}(\vartheta) + \dot{A}(\vartheta)[M_{t-1}(\vartheta) - M_{t-1}(\vartheta_0)] + \dot{B}_b(\vartheta,\vartheta_0)\zeta_t(\vartheta_0)$$

$\dot{}$初始值为 $M_0(\vartheta)$。如果 $\vartheta = \vartheta_0$，那么

$$\dot{M}_t(\vartheta_0) = A(\vartheta_0)\dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + \dot{B}_b(\vartheta_0,\vartheta_0)\ \zeta_t(\vartheta_0), \quad \dot{M}_0(\vartheta_0), \qquad t \geq 1.$$

过程 $\dot{m}_t(\vartheta_0)$ 的平稳版本 $t \geq 1$ 可以写成独立同分布变量之和

$$\dot{M}_t(\vartheta_0) = \dot{B}_b(\vartheta_0,\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty} A(\vartheta_0)^k \zeta_{t-k}(\vartheta_0),$$
$$\dot{M}_0(\vartheta_0) = \dot{B}_b(\vartheta_0,\vartheta_0)\sum_{k=0}^{\infty} A(\vartheta_0)^k \zeta_{-k}(\vartheta_0),$$

其中我们引入了独立同分布随机变量 $\zeta_k(\vartheta_0) \sim \mathcal{N}(0,1)$ $k = 0,-1,-2,\ldots$. 实值过程$M(\vartheta_0,t)$ $0 \leq t \leq T$具有类似的有限和表示，但由于我们关注估计量的渐近（$T \to \infty$）性质，因此直接写出这个无限和；对于这些过程以及下面几个类似过程，这两种表示之间的差异在渐近意义下可以忽略。我们有

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{M}_t(\vartheta_0)^2 = \dot{B}_b(\vartheta_0,\vartheta_0)^2\sum_{k=0}^{\infty} A(\vartheta_0)^{2k} = \frac{\dot{B}_b(\vartheta_0,\vartheta_0)^2}{1-A(\vartheta_0)^2} = \frac{a^2\sigma^4\dot{P}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^3\left(1-A(\vartheta_0)^2\right)}.$$

得分函数的二阶矩有如下表达式

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\frac{\partial \ln L\left(\vartheta, X^T\right)}{\partial\vartheta}\right]^2_{\vartheta=\vartheta_0} \\
&\quad = \frac{1}{P(\vartheta_0)}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + \frac{1}{2}\left[\zeta_t(\vartheta_0)^2-1\right]\dot{P}(\vartheta_0)P(\vartheta_0)^{-1/2}\right]\right)^2 \\
&\quad = \frac{1}{P(\vartheta_0)}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\sum_{t=1}^{T}\left(\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + \frac{1}{2}\left[\zeta_t(\vartheta_0)^2-1\right]\dot{P}(\vartheta_0)P(\vartheta_0)^{-1/2}\right)^2
\end{aligned}$$

因为（以下 $t > s$ 为简便起见省略了$\frac{1}{2}P$ $(\vartheta_0)^{-1/2}$）

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + \left[\zeta_t(\vartheta_0)^2-1\right]\dot{P}(\vartheta_0)\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\zeta_s(\vartheta_0)\dot{M}_{s-1}(\vartheta_0) + \left[\zeta_s(\vartheta_0)^2-1\right]\dot{P}(\vartheta_0)\right) \\
&\quad = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_{t-1}(\vartheta_0)\zeta_{s-1}(\vartheta_0)\dot{M}_{s-1}(\vartheta_0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\dot{P}\left(\vartheta_0\right)\mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\left[\zeta_s\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\\
&+\dot{P}\left(\vartheta_0\right)\mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta_s\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\\
&+\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\left[\zeta_s\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]=0.
\end{aligned}
$$

这里使用了如下等式

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\zeta_s\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)\right]\\
&\qquad=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\zeta_s\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\zeta_t\left(\vartheta_0\right)|\mathfrak{F}_{t-1}^X\right)\right]=0.
\end{aligned}
$$

此外

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)+\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)}{2\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}\right)^2\\
&\qquad=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)^2+\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{4P\left(\vartheta_0\right)}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]^2\\
&\qquad=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)^2+\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}\\
&\qquad=\frac{\dot{B}_b\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)^2}{1-A\left(\vartheta_0\right)^2}+\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}\\
&\qquad=\frac{a^2\sigma^4\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{P\left(\vartheta_0\right)^3\left(1-A\left(\vartheta_0\right)^2\right)}+\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}\\
&\qquad=\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}\left[\frac{2a^2\sigma^4}{P\left(\vartheta_0\right)^2-a^2\sigma^4}+1\right].
\end{aligned}
$$

因此，即使我们在开始时具有非平稳过程，极限也将是

$$
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\frac{\partial\ln L\left(\vartheta,X^T\right)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=\vartheta_0}^2=\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right).
$$

□

注 5. 如果未知参数为 $\vartheta=f$，且所有其他参数均已知，那么滤过方程几乎相同。

$$
\begin{aligned}
M_t\left(\vartheta\right)&=a\,M_{t-1}\left(\vartheta\right)+\frac{a\Gamma\left(\vartheta\right)}{\sigma^2+\Gamma\left(\vartheta\right)}\left[X_t-M_{t-1}\left(\vartheta\right)\right],\quad M_t\left(\vartheta\right)=\vartheta m_t\left(\vartheta\right),\quad t\geq 1,\\
\Gamma\left(\vartheta\right)&=\frac{1}{2}\left[\vartheta^2b^2-\sigma^2\left(1-a^2\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right)-\vartheta^2b^2\right)^2+4\vartheta^2b^2\sigma^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

不难看出，得分函数形式相同，但当然现在是关于 $\vartheta = f$ 进行推导。

$$\frac{\partial L(\vartheta, X^T)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{P(\vartheta)}} \sum_{t=1}^{T} \left[\zeta_t(\vartheta) \dot{M}_{t-1}(\vartheta) + \left[\zeta_t(\vartheta)^2 - 1 \right] \frac{\dot{P}_f(\vartheta)}{2\sqrt{P(\vartheta)}} \right].$$

此处 $P(\vartheta) = \sigma^2 + \Gamma(\vartheta)$。

要计算费舍尔信息，我们必须使用以下方程来求导数 $M_t(\vartheta)$

$$\dot{M}_t(\vartheta_0) = A(\vartheta_0) \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + \dot{B}_f(\vartheta_0, \vartheta_0) \zeta_t(\vartheta_0), \qquad t \geq 1$$

其中函数为

$$A(\vartheta) = \frac{a\sigma^2}{P(\vartheta)}, \qquad B_f(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{a\Gamma(\vartheta)\sqrt{P(\vartheta_0)}}{P(\vartheta)}.$$

由此可得费舍尔信息

$$\mathrm{I}_f(\vartheta_0) = \frac{\dot{P}_f(\vartheta_0)^2 \left[P(\vartheta_0)^2 + a^2\sigma^4 \right]}{2P(\vartheta_0)^2 \left[P(\vartheta_0)^2 - a^2\sigma^4 \right]}. \tag{33}$$

3.2 未知参数 a

假设 $f > 0$、$\sigma^2 > 0$、$b > 0$ 的值已知，而参数 $\vartheta = a \in \Theta = (\alpha_a, \beta_a)$ $-1 < \alpha_a < \beta_a < 1$ 未知。因此，部分可观测系统为

$$\begin{aligned} X_t &= f\, Y_{t-1} + \sigma\, w_t, \qquad X_0, \qquad t = 1, 2, \ldots, \\ Y_t &= \vartheta\, Y_{t-1} + b\, v_t, \qquad Y_0, \end{aligned}$$

而针对 $M_t(\vartheta) = \vartheta m_t(\vartheta)$ 的卡尔曼滤波器由以下关系式给出

$$\begin{aligned} M_t(\vartheta) &= \left[\vartheta - \frac{\vartheta\Gamma(\vartheta)}{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta)} \right] M_{t-1}(\vartheta) + \frac{\vartheta\Gamma(\vartheta)}{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta)} X_t, \\ &= \frac{\vartheta\sigma^2}{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta)} M_{t-1}(\vartheta) + \frac{\vartheta\Gamma(\vartheta)}{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta)} X_t, \\ &= A(\vartheta)\, M_{t-1}(\vartheta) + \frac{\vartheta\Gamma(\vartheta)}{P(\vartheta)} M_{t-1}(\vartheta_0) + B(\vartheta, \vartheta_0) \zeta_t(\vartheta_0), \quad t \geq 1, \\ \Gamma(\vartheta) &= \frac{1}{2} \left[f^2 b^2 - \sigma^2 \left(1 - \vartheta^2 \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\sigma^2 \left(1 - \vartheta^2 \right) - f^2 b^2 \right)^2 + 4b^2\sigma^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Here

$$A(\vartheta) = \frac{\vartheta\sigma^2}{P(\vartheta)}, \qquad B(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\vartheta\Gamma(\vartheta)\sqrt{P(\vartheta_0)}}{P(\vartheta)},$$

and

$$\zeta_t(\vartheta_0) = \frac{X_t - M_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{\sigma^2 + \Gamma(\vartheta_0)}}, \qquad t \geq 1$$

是相互独立的标准高斯随机变量。

我们给出相应的得分函数和费舍尔信息，不提供详细证明。

我们有

$$\frac{\partial \ln L\left(\vartheta, X^T\right)}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{P(\vartheta)}} \sum_{t=1}^{T} \left[\zeta_t(\vartheta) \dot{M}_{t-1}(\vartheta) + \left[\zeta_t(\vartheta)^2 - 1\right] \frac{\dot{P}(\vartheta)}{2\sqrt{P(\vartheta)}} \right].$$

$\dot{M}_t(\vartheta_0) = f\partial m_t(\vartheta_0) / \partial a$ 的方程为

$$\dot{M}_t(\vartheta_0) = A(\vartheta_0) \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) + M_{t-1}(\vartheta_0) + \dot{B}_a(\vartheta_0, \vartheta_0) \zeta_t(\vartheta_0), \qquad t \geq 1,$$

其中

$$\dot{B}_a(\vartheta_0, \vartheta_0) = \frac{\Gamma(\vartheta_0) P(\vartheta_0) + \vartheta_0 \sigma^2 \dot{P}(\vartheta_0)}{P(\vartheta_0)^{3/2}}.$$

因此，利用所有过程的平稳性，我们写出

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_t(\vartheta_0)^2 &= A(\vartheta_0)^2 \mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0)^2 + \mathbf{E}_{\vartheta_0} M_{t-1}(\vartheta_0)^2 + \dot{B}_a(\vartheta_0, \vartheta_0)^2 \\
&\quad + 2A(\vartheta_0) \mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) M_{t-1}(\vartheta_0) \\
&= \left(1 - A(\vartheta_0)^2\right)^{-1} \left[\mathbf{E}_{\vartheta_0} M_{t-1}(\vartheta_0)^2 + \dot{B}_a(\vartheta_0, \vartheta_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2A(\vartheta_0) \mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) M_{t-1}(\vartheta_0) \right]
\end{aligned}$$

The $\dot{M}_t(\vartheta_0)$ 和 $M_t(\vartheta_0)$ 的方程使我们能够计算以下矩 s

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\vartheta_0} M_{t-1}(\vartheta_0)^2 &= \frac{\vartheta_0^2 \Gamma(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^2 (1 - \vartheta_0^2)}, \\
\mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_{t-1}(\vartheta_0) M_{t-1}(\vartheta_0) &= \frac{\vartheta_0 \Gamma(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^2 (1 - \vartheta_0 A(\vartheta_0))} \left[\frac{\vartheta_0}{\left(1 - A(\vartheta_0)^2\right)} + P(\vartheta_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\vartheta_0 \sigma^2 \dot{P}(\vartheta_0)}{\Gamma(\vartheta_0)} \right].
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \dot{M}_t(\vartheta_0)^2 = \left(1 - A(\vartheta_0)^2\right)^{-1} \left[\frac{\vartheta_0^2 \Gamma(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^2 (1 - \vartheta_0^2)} + \frac{\left[\Gamma(\vartheta_0) P(\vartheta_0) + \sigma^2 \dot{P}(\vartheta_0)\right]^2}{P(\vartheta_0)^3} \right.$$

$$+\frac{2A\left(\vartheta_0\right)\vartheta_0\Gamma\left(\vartheta_0\right)^2}{P\left(\vartheta_0\right)^2\left(1-\vartheta_0 A\left(\vartheta_0\right)\right)}\left(\frac{\vartheta_0}{\left(1-A\left(\vartheta_0\right)^2\right)}+P\left(\vartheta_0\right)+\frac{\vartheta_0\sigma^2\dot{P}\left(\vartheta_0\right)}{\Gamma\left(\vartheta_0\right)}\right)\Bigg]$$
$$\equiv Q\left(\vartheta_0\right).$$

回顾一下，费舍尔信息为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_a\left(\vartheta_0\right)&=\frac{1}{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\left.\frac{\partial \ln L\left(\vartheta,X^T\right)}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}\right)^2\\&=\frac{1}{TP\left(\vartheta\right)}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\zeta_t\left(\vartheta\right)\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta\right)+\left[\zeta_t\left(\vartheta\right)^2-1\right]\frac{\dot{P}\left(\vartheta\right)}{2\sqrt{P\left(\vartheta\right)}}\right]^2\\&=\frac{1}{P\left(\vartheta\right)}\left[\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{M}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)^2+\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}\right]\\&=\frac{2Q\left(\vartheta_0\right)+\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)}.\end{aligned}\tag{34}$$

注释6. 类似的计算使我们能够写出在 $\vartheta=\sigma^2$ 情况下的得分函数和费舍尔信息，但这里不再赘述。

3.3 未知参数 $\vartheta=(f,a)$

考虑如下系统

$$\begin{aligned}X_t&=\theta_1 Y_{t-1}+\sigma w_t, &\quad X_0, &\quad t=1,2,\ldots,\\Y_t&=\theta_2 Y_{t-1}+b v_t, &\quad Y_0.&\end{aligned}$$

这里的未知参数为 $\vartheta=(\theta_1,\theta_2)$。记 $M(\vartheta,t)=\theta_1 m_t(\vartheta)$ $\Gamma(\vartheta)=\theta_1^2\gamma_*(\vartheta)$。卡尔曼滤波器写作如下

$$\begin{aligned}M\left(\vartheta,t\right)&=\frac{\theta_2\sigma^2}{P\left(\vartheta\right)}M\left(\vartheta,t-1\right)+\frac{\theta_2\Gamma\left(\vartheta\right)}{P\left(\vartheta\right)}X_t\\&=A\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t-1\right)+\mathrm{E}\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta_0,t-1\right)+\mathrm{B}\left(\vartheta,\vartheta_0\right)\zeta_t\left(\vartheta_0\right), \qquad t\geq 1,\\\Gamma\left(\vartheta\right)&=\frac{1}{2}\left[\theta_1^2b^2-\sigma^2\left(1-\theta_2^2\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\sigma^2\left(1-\theta_2^2\right)-\theta_1^2b^2\right)^2+4b^2\sigma^2\right]^{1/2},\end{aligned}$$

其中 $P(\vartheta)=\sigma^2+\Gamma(\vartheta)$,

$$\mathrm{A}\left(\vartheta\right)=\frac{\theta_2\sigma^2}{P\left(\vartheta\right)},\qquad E\left(\vartheta\right)=\frac{\theta_2\Gamma\left(\vartheta\right)}{P\left(\vartheta\right)},\qquad \mathrm{B}\left(\vartheta,\vartheta_0\right)=\frac{\theta_2\Gamma\left(\vartheta\right)\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}{P\left(\vartheta\right)}.\tag{35}$$

. 导数的方程为 $\dot{M}_f(\vartheta_0,t)$ $\dot{M}_a(\vartheta_0,t)$

$$\dot{M}_f\left(\vartheta_0,t\right)=A\left(\vartheta_0\right)\dot{M}_f\left(\vartheta_0,t-1\right)+\dot{B}_f\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)\zeta_t\left(\vartheta_0\right),$$

$$\dot{M}_a(\vartheta_0,t)=A(\vartheta_0)\dot{M}_a(\vartheta_0,t-1)+M(\vartheta_0,t-1)+\dot{B}_a(\vartheta_0,\vartheta_0)\zeta_t(\vartheta_0),$$

其中，回顾一下

$$M(\vartheta_0,t-1)=\theta_{0,2}M(\vartheta_0,t-2)+\mathrm{B}(\vartheta_0,\vartheta_0)\zeta_{t-1}(\vartheta_0),$$

$$\dot{B}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)=\frac{\theta_{0,2}\sigma^2\dot{P}_f(\vartheta_0)}{P(\vartheta_0)^{3/2}},\qquad \dot{B}_a(\vartheta_0,\vartheta_0)=\frac{\Gamma(\vartheta_0)P(\vartheta_0)+\theta_{0,2}\dot{P}_a(\vartheta_0)}{P(\vartheta_0)^{3/2}}.$$

这里我们使用关系式 $A(\vartheta)+\mathrm{E}(\vartheta)=\theta_{2}$。得分函数向量为

$$\left.\frac{\partial L(\vartheta,X^T)}{\partial\theta_1}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}=\frac{1}{\sqrt{P(\vartheta_0)}}\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_f(\vartheta_0,t-1)+\left[\zeta_t(\vartheta_0)^2-1\right]\frac{\dot{P}_f(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)}\right],$$

$$\left.\frac{\partial L(\vartheta,X^T)}{\partial\theta_2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}=\frac{1}{\sqrt{P(\vartheta_0)}}\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t(\vartheta_0)\dot{M}_a(\vartheta_0,t-1)+\left[\zeta_t(\vartheta_0)^2-1\right]\frac{\dot{P}_a(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)}\right].$$

利用底层过程的平稳性，我们写出

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\left.\frac{\partial L(\vartheta,X^T)}{\partial\theta_1}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}\left.\frac{\partial L(\vartheta,X^T)}{\partial\theta_2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}\right)$$
$$=\frac{T}{P(\vartheta_0)}\left[\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{M}_f(\vartheta_0,t-1)\dot{M}_a(\vartheta_0,t-1)+\frac{\dot{\mathrm{P}}_f(\vartheta_0)\dot{P}_a(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)^2}\right].$$

此外

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\dot{M}_a(\vartheta_0,t-1)\dot{M}_f(\vartheta_0,t-1)\right]&=A(\vartheta_0)^2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\dot{M}_a(\vartheta_0,t-2)\dot{M}_f(\vartheta_0,t-2)\right]\\&\quad+A(\vartheta_0)\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[M(\vartheta_0,t-2)\dot{M}_f(\vartheta_0,t-2)\right]+\dot{\mathrm{B}}_a(\vartheta_0,\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)\\&=\frac{1}{\left(1-A(\vartheta_0)^2\right)}\left[\frac{A(\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)\mathrm{B}(\vartheta_0,\vartheta_0)}{(1-\theta_{0,2}\mathrm{A}(\vartheta_0))}+\dot{\mathrm{B}}_a(\vartheta_0,\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)\right]\\&=\frac{A(\vartheta_0)\mathrm{B}(\vartheta_0,\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)+(1-\theta_{0,2}\mathrm{A}(\vartheta_0))\dot{\mathrm{B}}_a(\vartheta_0,\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)}{(1-\theta_{0,2}\mathrm{A}(\vartheta_0))\left(1-A(\vartheta_0)^2\right)}\equiv K(\vartheta_0)\end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[M(\vartheta_0,t-2)\dot{M}_f(\vartheta_0,t-2)\right]=\frac{\mathrm{B}(\vartheta_0,\vartheta_0)\dot{\mathrm{B}}_f(\vartheta_0,\vartheta_0)}{(1-\theta_{0,2}\mathrm{A}(\vartheta_0))}.$$

因此

$$I_{12}(\vartheta_0)=\frac{2P(\vartheta_0)^2K(\vartheta_0)+\dot{P}_a(\vartheta_0)\dot{P}_f(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)^3}.\tag{36}$$

费 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I}(\vartheta_0)=\begin{pmatrix}I_{11}(\vartheta_0), & I_{12}(\vartheta_0)\\ I_{12}(\vartheta_0) & I_{22}(\vartheta_0)\end{pmatrix},$$

其中，数值 $I_{11}(\vartheta_0)$ 和 $\mathrm{I}_{22}(\vartheta_0)$ 分别由 (33) 和 (34) 给出。

4 一步最大似然估计过程

我们考虑在未知参数$\vartheta = b \in \Theta = (\alpha_b, \beta_b)$,$\alpha_b > 0$的情况下构造一步最大似然估计过程。令观测值学习区间为 $X^{\tau_T} = (X_0, X_1, \ldots, X_{\tau_T})$, 其中 $\tau_T = \left[T^{\delta}\right], \delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$和 $[A]$是 A的整数部分。我们取 (19) 中定义的矩估计量 $\vartheta^*_{\tau_T} = b^*_{\tau_T}$ 作为初步估计量

$$\vartheta^*_{\tau_T} = 2^{-1/2} f^{-1} \left(\left[S_{1,\tau_T} \left(X^{\tau_T} \right) - 2\sigma^2 \right] (1+a) \right)^{1/2}.$$

一步最大似然估计过程为

$$\vartheta^{\star}_{t,T} = \vartheta^*_{\tau_T} + \frac{1}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T}) \left(t - \tau_T\right)} \sum_{s=\tau_T+1}^{t} \left[\frac{\left[X_s - f m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]}{P(\vartheta^*_{\tau_T})} f \dot{m}_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right.$$
$$\left. + \left(\left[X_s - f m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]^2 - P(\vartheta^*_{\tau_T}) \right) \frac{\dot{P}(\vartheta^*_{\tau_T})}{2P(\vartheta^*_{\tau_T})^2} \right], \qquad t \in \left[\tau_T + 2, T\right]. \tag{37}$$

定理1。 若 $t = [vT]$， $v \in (0,1]$ 且 $T \to \infty$，则有以下收敛关系

$$\sqrt{t} \left(\vartheta^{\star}_{t,T} - \vartheta_0 \right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}_b(\vartheta_0)^{-1}\right), \qquad t\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\vartheta^{\star}_{t,T} - \vartheta_0 \right)^2 \longrightarrow \mathrm{I}_b(\vartheta_0)^{-1}.$$

在紧集 $\mathbb{K} \subset \Theta$ 上一致成立。

证明。 为研究该估计，我们需要下一引理中给出的$m_t(\vartheta)$的一阶和二阶导数界。

引理2。 对于任意 $p > 1$， 存在常数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$， 它们不依赖于 $\vartheta_0 \in \Theta$ 和 $t \geq 1$， 使得对于

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \dot{m}_t(\vartheta) \right|^p < C_1, \qquad \sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \ddot{m}_t(\vartheta) \right|^p < C_2. \tag{38}$$

证明。 </style}第二导数方程 $\ddot{m}(\vartheta, t)$ 为

$$\ddot{m}_t(\vartheta) = A(\vartheta) \ddot{m}_{t-1}(\vartheta) + 2\dot{A}(\vartheta) \dot{m}_{t-1}(\vartheta) + \ddot{A}(\vartheta) m_{t-1}(\vartheta)$$
$$- \ddot{A}(\vartheta) m_{t-1}(\vartheta_0) + \ddot{B}^*(\vartheta, \vartheta_0) \zeta_t(\vartheta_0).$$

请注意，此处 $B^*(\vartheta, \vartheta_0) = af\gamma_*(\vartheta) \sqrt{P(\vartheta_0)} P(\vartheta)^{-1}$。

回顾一下，随机函数 $m(\vartheta_0, t-1)$、$m(\vartheta, t-1)$、 $\dot{m}(\vartheta, t-1)$ 和 $\ddot{m}(\vartheta, t-1)$ 的平稳版本为

$$m_{t-1}(\vartheta_0) = B^*(\vartheta_0, \vartheta_0) \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-k-1},$$

$$
\begin{aligned}
m_{t-1}(\vartheta) &= A(\vartheta)\, m_{t-2}(\vartheta) + [a - A(\vartheta)]\, B^*(\vartheta_0, \vartheta_0) \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-k-2} + B^*(\vartheta, \vartheta_0)\, \zeta_{t-k-1} \\
&= [a - A(\vartheta)]\, B^*(\vartheta_0, \vartheta_0) \sum_{j=0}^{\infty} A(\vartheta)^j \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-j-k-2} + B^*(\vartheta, \vartheta_0) \sum_{j=0}^{\infty} A(\vartheta)^j\, \zeta_{t-j-1}, \\
\dot{m}_{t-1}(\vartheta) &= B^*(\vartheta_0, \vartheta_0)\, \dot{A}(\vartheta)\; A(\vartheta)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} [aj - A(\vartheta)(j+1)]\, A(\vartheta)^j \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-j-k-2} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left[\dot{B}^*(\vartheta, \vartheta_0) + j B^*(\vartheta, \vartheta_0)\, \dot{A}(\vartheta)\; A(\vartheta)^{-1} \right] A(\vartheta)^j\, \zeta_{t-j-1}, \\
\ddot{m}_t(\vartheta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[F_0(\vartheta, \vartheta_0) + j F_1(\vartheta, \vartheta_0) + j^2 F_2(\vartheta, \vartheta_0) \right] A(\vartheta)^j \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-j-k-2} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left[H_0(\vartheta, \vartheta_0) + j H_1(\vartheta, \vartheta_0) + j^2 H_2(\vartheta, \vartheta_0) \right] A(\vartheta)^j\, \zeta_{t-j-1}.
\end{aligned}
$$

有界函数 $F_i(\vartheta, \vartheta_0)$ $H_i(\vartheta, \vartheta_0)$ $i = 0$（1、2）可以通过对 $\dot{m}_{t-1}(\vartheta)$ 进行形式微分轻松计算。

由这些表示式、条件 $a^2 \in (0, 1)$ 以及函数$F_i(\cdot, \cdot)$ $H_i(\cdot, \cdot)$的有界性可知，高斯过程 $\dot{m}_{t-1}(\vartheta)$ 和 $\ddot{m}_{t-1}(\vartheta)$具有有界方差，且其协方差函数快速衰减。

例如，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-j-k-2} \right)^2 \\
&\quad = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j \sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta_{t-j-k-2} \sum_{l=0}^{\infty} l^2 A(\vartheta)^l \sum_{m=0}^{\infty} a^m \zeta_{t-m-l-2} \right) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j \sum_{l=0}^{\infty} l^2 A(\vartheta)^l \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a^k a^m \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\zeta_{t-j-k-2} \zeta_{t-m-l-2} \right) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j \sum_{l=0}^{\infty} l^2 A(\vartheta)^l\, a^{j-l} \sum_{k \geq l-j \geq 0}^{\infty} a^{2k} \\
&\quad = \frac{1}{1-a^2} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j \sum_{l \geq j}^{\infty} l^2 A(\vartheta)^l\, a^{j-l} a^{2(l-j)} \\
&\quad = \frac{1}{1-a^2} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 A(\vartheta)^j\, a^{-j} \sum_{l \geq j}^{\infty} l^2 \left[a A(\vartheta) \right]^l .
\end{aligned}
$$

回想一下,

$$\begin{aligned}\sum_{l\geq j}^{\infty} l^2\left[aA\left(\vartheta\right)\right]^l &= \left[\ln aA\left(\vartheta\right)\right]^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{l\geq j}^{\infty}\left[aA\left(\vartheta\right)\right]^{xl}\Big|_{x=1}\\ &= \left[\ln aA\left(\vartheta\right)\right]^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\left[aA\left(\vartheta\right)\right]^{xj}}{1-\left[aA\left(\vartheta\right)\right]^{x}}\right)\Big|_{x=1}.\end{aligned}$$

因此，可以精确计算矩 $\mathrm{E}_{\vartheta_0}\dot{m}_t(\vartheta)^2$ 和 $\mathrm{E}_{\vartheta_0}\ddot{m}_t\left(\vartheta\right)^2$，并且可以选择式（38）中的常数 C_1、C_2，使其不依赖于 $\vartheta_0\in\Theta$ 和 $t\geq 0$。

□

考虑归一化差值

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\left(\vartheta^{\star}_{t,T}-\vartheta_0\right) &= \sqrt{T}\left(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\\ &+\frac{\sqrt{T}}{\mathrm{I}_b(\vartheta^{*}_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left[\frac{\left[X_s-fm_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right]}{P(\vartheta^{*}_{\tau_T})}f\dot{m}_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right.\\ &\left.+\left(\left[X_s-fm_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right]^2-P(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right)\frac{\dot{P}(\vartheta^{*}_{\tau_T})}{2P(\vartheta^{*}_{\tau_T})^2}\right],\qquad t\in\left[\tau_T+2,T\right].\end{aligned}$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}X_s-fm_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T}) &= X_s-fm_{s-1}(\vartheta_0)+f\left[m_{s-1}(\vartheta_0)-m_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right]\\ &= \sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}\,\zeta_s\left(\vartheta_0\right)-(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)f\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)-\frac{f}{2}(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)^2\ddot{m}_{s-1}(\tilde{\vartheta}),\\ P(\vartheta^{*}_{\tau_T}) &= P(\vartheta_0)+(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)\dot{P}(\vartheta_0)+\frac{1}{2}(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)^2\ddot{P}(\tilde{\vartheta}),\\ \mathrm{I}_b(\vartheta^{*}_{\tau_T}) &= \mathrm{I}_b(\vartheta_0)+O\left(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\\ \left[X_s-fm_{s-1}(\vartheta^{*}_{\tau_T})\right]^2-P(\vartheta^{*}_{\tau_T}) &= P(\vartheta_0)\left[\zeta_s\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]-(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)\dot{P}\left(\vartheta_0\right)\\ &\quad-2(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)\sqrt{P(\vartheta_0)}\zeta_s\left(\vartheta_0\right)\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)+O\left((\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0)^2\right).\end{aligned}$$

将这些关系代入（37）可得

$$\begin{aligned}\vartheta^{\star}_{t,T} &= \vartheta^{*}_{\tau_T}\\ &+\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\frac{\left[2\zeta_s(\vartheta_0)f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)\sqrt{P(\vartheta_0)}+\left[\zeta_s(\vartheta_0)^2-1\right]\dot{P}(\vartheta_0)\right]}{2\left(t-\tau_T\right)\mathrm{I}_b(\vartheta_0)P(\vartheta_0)}\left(1+O\left(\vartheta^{*}_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\right)\end{aligned}$$

$$-\frac{(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0)}{(t-\tau_T)\,\mathrm{I}_b(\vartheta_0)}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\frac{f^2\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)}+\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right)+O\left((\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0)^2\right).$$

注意，如果 $t\to\infty$，那么根据大数定律和中心极限定理，在紧集上一致地有 $\mathbb{K}\subset\Theta$

$$\begin{aligned}
R_{1,T}&=\frac{1}{t}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\frac{f^2\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)}+\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right)\longrightarrow \mathrm{I}_b(\vartheta_0),\\
R_{2,T}&=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\mathrm{I}_b(\vartheta_0)-\frac{f^2\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)}-\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{D}(\vartheta_0)^2\right),\\
R_{3,T}&=\frac{1}{t}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\frac{f^2\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)}+\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}-\mathrm{I}_b(\vartheta_0)\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{tP(\vartheta_0)^2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(f^2\left[\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0,t)^2\right]\right)\right]^2\le C,
\end{aligned}$$

其中常数 $C>0$ 不依赖于 t 和 $\vartheta_0\in\mathbb{K}$。我们还具有一致收敛

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\frac{\left[2\zeta_s(\vartheta_0)f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)\sqrt{P(\vartheta_0)}+[\zeta_s(\vartheta_0)^2-1]\,\dot{P}(\vartheta_0)\right]}{2\left(t-\tau_T\right)\mathrm{I}_b(\vartheta_0)P(\vartheta_0)}\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_b(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

上确界 $\sup_{\vartheta_0\in\Theta}\mathrm{D}(\vartheta_0)^2<\infty$ 也可以计算，但我们不需要它。因此，若令 $t=vT$, $v\in(T^{\delta-1},1]$, 则

$$\begin{aligned}
\sqrt{t}\left(\vartheta^\star_{t,T}-\vartheta_0\right)&=\sqrt{t}\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\\
&+\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\frac{\left[2\zeta_s(\vartheta_0)f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)\sqrt{P(\vartheta_0)}+[\zeta_s(\vartheta_0)^2-1]\,\dot{P}(\vartheta_0)\right]}{2\left(\sqrt{t}-\tau_T\right)\mathrm{I}_b(\vartheta_0)P(\vartheta_0)}\left(1+O\left(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right)\right)\\
&-\frac{\sqrt{t}(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0)}{(t-\tau_T)\,\mathrm{I}_b(\vartheta_0)}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\frac{f^2\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)}+\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right)+O\left(\sqrt{t}(\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0)^2\right).
\end{aligned}$$

请注意， $\delta\in\left(\frac{1}{2}\text{、}\ 1\right)$和矩估计量 $\vartheta^*_{\tau_T}$满足式（19）。因此，对于任意固定的 $v\in(0,1]$

$$\sqrt{t}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\vartheta^*_{\tau_T}-\vartheta_0\right|^2\le\frac{C\sqrt{t}}{\tau_T^2}\le\frac{C\sqrt{v}T^{1/2}}{T^{2\delta}}\longrightarrow 0.$$

此外，

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{t}\left(\vartheta_{\tau_T}^{*}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}_b(\vartheta_0)}\left[\mathrm{I}_b(\vartheta_0)-\frac{1}{t}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left(\frac{f^2\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)^2}{P(\vartheta_0)}+\frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right)\right]\\
&\quad=\frac{\sqrt{t}\left(\vartheta_{\tau_T}^{*}-\vartheta_0\right)}{\mathrm{I}_b(\vartheta_0)}\frac{1}{t}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left[\frac{f^2\dot{B}^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)^2}{\left[1-A\left(\vartheta_0\right)^2\right]P(\vartheta_0)}-\frac{f^2\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)^2}{P(\vartheta_0)}\right]\\
&\quad=\frac{\sqrt{t}\left(\vartheta_{\tau_T}^{*}-\vartheta_0\right)f^2}{\mathrm{I}_b(\vartheta_0)P(\vartheta_0)}\frac{1}{t}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left[\frac{\dot{B}^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)^2}{\left[1-A\left(\vartheta_0\right)^2\right]}-\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right)^2\right]\\
&\quad\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

因此，对于任意固定的 $v\in(0,1)$ 和 $t=vT$，在 $\vartheta_0\in\mathbb{K}$ 上一致成立

$$\sqrt{t}\left(\vartheta_{t,T}^{\star}-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_b(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

and

$$t\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\vartheta_{t,T}^{\star}-\vartheta_0\right)^2\longrightarrow\mathrm{I}_b(\vartheta_0)^{-1}.$$

□

注 7. </style}在 $\vartheta=f$、 $\vartheta=a$、 $\vartheta=\sigma^2$ 的情形下，一步极大似然估计过程可以按照相同的思路构造。我们不再给出相应的计算，因为这主要是对上述证明的重复。

如果未知参数是二维的，例如 $\vartheta=(f,a)^{\top}=(\theta_1,\theta_2)^{\top}$，那么二维一步最大似然估计过程 $\vartheta_{t,\ T}^{\star}=\left(\theta_{1,\ t,\ T}^{\star}、\ \theta_{2,\ t,\ T}^{\star}\right)^{\top}$ 可以按如下方式构造。引入矩估计量 $\theta_{\tau_T}^{*}=(\theta_{1,\ \tau_T}^{*}、\ \theta_{2,\ \tau_T}^{*})^{\top}$、 $\theta_{1,\ \tau_T}^{*}=f_{\tau_T}^{*}$和 $\theta_{2,\ \tau_T}^{*}=a_{\tau_T}^{*}$，其中 $\tau_T=\left[T^{\delta}\right]$、 $\delta\in(1/2、\ 1]$ 和

$$\begin{aligned}
\theta_{1,\tau_T}^{*}&=2^{-1/2}b^{-1}\left[S_{1,\tau_T}\left(X^{\tau_T}\right)\left(1+\theta_{2,\tau_T}^{*}\right)-2\sigma^2\right]^{1/2},\\
\theta_{2,\tau_T}^{*}&=\frac{S_{1,\tau_T}\left(X^{\tau_T}\right)+S_{2,\tau_T}\left(X^{\tau_T}\right)-\sigma^2}{S_{1,\tau_T}\left(X^{\tau_T}\right)-2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

记

$$M\left(\vartheta,t\right)=\theta_1 m_t\left(\vartheta\right),\ \dot{\mathrm{M}}\left(\vartheta,t\right)=\left(\dot{M}_f\left(\vartheta,t\right),\dot{M}_a\left(\vartheta,t\right)\right)^{\top},\ \dot{\mathrm{P}}\left(\vartheta\right)=\left(\dot{\mathrm{P}}_f\left(\vartheta\right),\dot{\mathrm{P}}_a\left(\vartheta\right)\right)^{\top}.$$

通过对该方程求导，我们得到 $M_f(\vartheta,t)$ 和 $M_a(\vartheta,t)$ 的方程

$$M\left(\vartheta,t\right)=\mathrm{A}\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta,t-1\right)+\mathrm{E}\left(\vartheta\right)M\left(\vartheta_0,t-1\right)+\mathrm{B}\left(\vartheta,\vartheta_0\right)\zeta_t\left(\vartheta_0\right),\qquad t\geq 1,$$

分别对 θ_1 和 θ_2 求导。函数 A (·)、E (·) 和 B (·, ·) 的定义见（35）。回顾一下，费 Fisher 信息矩阵 I (ϑ) 由关系式（33）、（34）和（36）定义。假设该矩阵在 $\vartheta \in \Theta$ 上一致非退化，则一步最大似然估计过程由以下等式给出

$$\vartheta_{t,T}^{\star} = \theta_{\tau_T}^{*} + \frac{\mathbf{I}(\theta_{\tau_T}^{*})^{-1}}{t-\tau_T} \sum_{s=\tau_T+1}^{t} \left[\frac{\left[X_s - M(\vartheta_{\tau_T}^{*}, s-1)\right]}{P(\vartheta_{\tau_T}^{*})} \dot{\mathrm{M}}(\vartheta_{\tau_T}^{*}, s-1) \right.$$
$$\left. + \left(\left[X_s - M(\vartheta_{\tau_T}^{*}, s-1)\right]^2 - P(\vartheta_{\tau_T}^{*}) \right) \frac{\dot{\mathrm{P}}(\vartheta_{\tau_T}^{*})}{2P(\vartheta_{\tau_T}^{*})^2} \right], \qquad t \in \left[\tau_T + 2, T\right]. \tag{39}$$

可以证明，对于任意 $v \in (0, T]$，若令 $t = vT$，则归一化差值服从渐近正态分布：

$$\sqrt{t}\left(\vartheta_{t,T}^{\star} - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \xi\left(\vartheta_0\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{I}(\theta_0)^{-1}\right),$$
$$t\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\|\vartheta_{t,T}^{\star} - \vartheta_0\right\|^2 \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\|\xi\left(\vartheta_0\right)\right\|^2.$$

5 最大似然估计与贝叶斯估计

考虑观测模型 (23)-(24)，其中未知参数为 $\vartheta = b \in \hat{\ }\tilde{\Theta} = (\alpha_b, \beta_b)$ $\alpha_b > 0$。下面我们研究由通常关系式定义的最大似然估计 ϑ_T 和贝叶斯估计 ϑ_T

$$L(\hat{\vartheta}_T, X^T) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\hat{\vartheta}, X^T), \qquad \tilde{\vartheta}_T = \frac{\int_\Theta \vartheta p\left(\vartheta\right) L(\hat{\vartheta}, X^T) \mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p\left(\vartheta\right) L(\hat{\vartheta}, X^T) \mathrm{d}\vartheta}.$$

这里 $p(\vartheta)$ $\vartheta \in \Theta$ 是连续函数，在 Θ 上为正的先验密度。

回顾记号

$$P\left(\vartheta\right) = \sigma^2 + f^2 \gamma_*\left(\vartheta\right), \qquad A\left(\vartheta\right) = \frac{a\sigma^2}{P\left(\vartheta\right)^2}$$
$$B^*\left(\vartheta, \vartheta_0\right) = \frac{af\gamma_*\left(\vartheta\right)\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}{P\left(\vartheta\right)}, \qquad \dot{B}^*\left(\vartheta_0, \vartheta_0\right) = \left.\frac{\partial B^*\left(\vartheta, \vartheta_0\right)}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{af\sigma^2\dot{\gamma}_*\left(\vartheta_0\right)}{P\left(\vartheta_0\right)^{3/2}}.$$
$$\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right) = \frac{f^2\dot{B}^*\left(\vartheta_0, \vartheta_0\right)^2}{\left[1 - A\left(\vartheta_0\right)^2\right] P\left(\vartheta_0\right)} + \frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)^2}$$
$$= \frac{f^2\dot{\gamma}_*\left(\vartheta\right)^2}{P\left(\vartheta_0\right)} \left[\frac{a^2\sigma^4}{P\left(\vartheta_0\right)^2 - a^2\sigma^4} + \frac{1}{2P\left(\vartheta_0\right)}\right].$$

下文将展示（见（40）—（41））， 该测度族具有局部渐近正态性（LAN）。因此，我们有¯Hajek-Le Cam 下界：对于任意估计量 ϑ_T 以及任意 $\vartheta_0 \in \Theta$

$$\lim_{\nu \to 0} \varliminf_{T \to \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| \le \nu} T\mathbf{E}_\vartheta \left(\bar{\vartheta}_T - \vartheta\right)^2 \ge \mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)^{-1}.$$

利用这一界，我们可以给出如下定义

将渐近有效估计量 ϑ_T° 定义为满足以下等式的估计量

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu} T\mathbf{E}_\vartheta\left(\vartheta_T^\circ-\vartheta\right)^2=\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)^{-1}.$$

对所有 $\vartheta_0\in\Theta$均成立。

定理 2. 最大似然估计和贝叶斯估计是相合的、渐近正态的，

$$\sqrt{T}\left(\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right),\qquad\qquad\sqrt{T}\left(\tilde{\vartheta}_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right),$$

多项式矩收敛，且这两种估计量都是渐近有效的。

证明. 我们将借助一般定理 3.1.1 和 3.2.1 证明这些估计量具有上述性质；也就是说，我们将验证这些定理的条件对于我们的观测模型成立。引入归一化的（$\varphi_T=T^{-1/2}$）似然比函数

$$Z_T\left(u\right)=\frac{L(\vartheta_0+\varphi_T u,X^T)}{L(\vartheta_0,X^T)},\qquad u\in\mathbb{U}_T=\left(\sqrt{T}\left(\alpha_T-\vartheta_0\right),\sqrt{T}\left(\beta_T-\vartheta_0\right)\right)$$

因此，我们需要证明过程 $Z_T(u)$ $u\in\mathbb{U}_T$具有以下性质。

1. 过程 $Z_T(\cdot)$ 具有如下表示

$$Z_T\left(u\right)=\exp\left(u\Delta_T(\vartheta_0,X^T)-\frac{u^2}{2}\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)+r_T(\vartheta_0,u,X^T)\right),\qquad u\in\mathbb{U}_T,\tag{40}$$

其中，在紧集上 $\mathbb{K}\subset\Theta$，收敛$r_T(\vartheta_0,u,X^T)\to 0$成立，

$$\Delta_T(\vartheta_0,X^T)=\frac{1}{\sqrt{TP\left(\vartheta_0\right)}}\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)f\dot{m}_{t-1}\left(\vartheta_0\right)+\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)}{2\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}\right]$$

并且一致地在 $\mathbb{K}$上

$$\Delta_T(\vartheta_0,X^T)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)\right).\tag{41}$$

2. 存在常数 $C>0$ 使得

$$\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|Z_T\left(u_2\right)^{1/2}-Z_T\left(u_1\right)^{1/2}\right|^2\le C\left|u_1-u_2\right|^2.\tag{42}$$

3. 存在　存在一个常数 $\kappa>0$，并且对于任意 $N>0$，都存在一个常数 $C>0$，使得 t

$$\sup_{\vartheta_0\in\mathbb{K}}\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(Z_T\left(u\right)>e^{-\kappa u^2}\right)\le\frac{C}{|u|^N}.\tag{43}$$

下面验证 (40)-(41)。利用泰勒展开，我们可以写出（下方 $\vartheta_u = \vartheta_0 + \varphi_T u$）

$$\begin{aligned}\ln Z_T(u) &= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_u))^2}{P(\vartheta_u)} + \ln\frac{P(\vartheta_u)}{P(\vartheta_0)} - \frac{(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_0))^2}{P(\vartheta_0)}\right] \\ &= \frac{u}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\zeta_t(\vartheta_0)\, f\dot{m}_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{P(\vartheta_0)}} + \frac{\left(\zeta_t(\vartheta_0)^2 - 1\right)\dot{P}(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)}\right] \\ &\quad - \frac{u^2}{2T}\left[\frac{f^2\dot{m}_{t-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)} + \frac{\zeta_t(\vartheta_0)^2\dot{P}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^2} - \frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right] + O\left(T^{-1/2}\right).\end{aligned}$$

现在，表示式 (40)-(41) 可由中心极限定理和大数定律得出：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\zeta_t(\vartheta_0)\, f\dot{m}_{t-1}(\vartheta_0)}{\sqrt{P(\vartheta_0)}} + \frac{\left(\zeta_t(\vartheta_0)^2 - 1\right)\dot{P}(\vartheta_0)}{2P(\vartheta_0)}\right] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{I}_b(\vartheta_0)), \\ &\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{f^2\dot{m}_{t-1}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)} + \frac{\zeta_t(\vartheta_0)^2\dot{P}(\vartheta_0)^2}{P(\vartheta_0)^2} - \frac{\dot{P}(\vartheta_0)^2}{2P(\vartheta_0)^2}\right] \longrightarrow \mathrm{I}_b(\vartheta_0).\end{aligned}$$

记

$$\Pi(u) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_u))^2}{P(\vartheta_u)} + \ln\frac{P(\vartheta_u)}{P(\vartheta_0)} - \frac{(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_0))^2}{P(\vartheta_0)}\right]$$

并计算其导数

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}(u) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi(u) = \frac{\varphi_T}{2}\sum_{t=1}^{T}\Bigg[&\frac{2\left(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_u)\right) f\dot{m}_{t-1}(\vartheta_u)}{P(\vartheta_u)} - \frac{\dot{P}(\vartheta_u)}{P(\vartheta_u)} \\ &+ \frac{\left(X_t - fm_{t-1}(\vartheta_u)\right)^2\dot{P}(\vartheta_u)}{P(\vartheta_u)^2}\Bigg].\end{aligned}$$

注意，$X_t - fm_{t-1}(\vartheta_u) = \zeta_t(\vartheta_u)\sqrt{P(\vartheta_u)}\ t \geq 1$，其中 $\zeta_t(\vartheta_u)\ \ t \geq 1$ 在测度 P_{ϑ_u} 下是独立同分布随机变量 $\zeta_t(\vartheta_u) \sim \mathcal{N}(0,1)$。因此，以 P_{ϑ_u} 概率 1，我们有

$$\dot{\Pi}(u) = \varphi_T\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\zeta_t(\vartheta_u)\, f\dot{m}_{t-1}(\vartheta_u)}{\sqrt{P(\vartheta_u)}} + \frac{\left[\zeta_t(\vartheta_u)^2 - 1\right]\dot{P}(\vartheta_u)}{2P(\vartheta_u)}\right]$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\vartheta_u}\dot{\Pi}(u)^2 &= \varphi_T^2\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}_{\vartheta_u}\left[\frac{\zeta_t(\vartheta_u)\, f\dot{m}_{t-1}(\vartheta_u)}{\sqrt{P(\vartheta_u)}} + \frac{\left[\zeta_t(\vartheta_u)^2 - 1\right]\dot{P}(\vartheta_u)}{2P(\vartheta_u)}\right]^2 \\ &= \varphi_T^2\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{f^2\mathbf{E}_{\vartheta_u}\left[\zeta_t(\vartheta_u)^2\dot{m}_{t-1}(\vartheta_u)^2\right]}{P(\vartheta_u)} + \frac{\dot{P}(\vartheta_u)^2\mathbf{E}_{\vartheta_u}\left[\zeta_t(\vartheta_u)^2 - 1\right]^2}{4P(\vartheta_u)^2}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{f^2\mathbf{E}_{\vartheta_u}\left[\dot{m}_{t-1}\left(\vartheta_u\right)^2\right]}{P\left(\vartheta_u\right)} + \frac{\dot{P}\left(\vartheta_u\right)^2}{2P\left(\vartheta_u\right)^2}\right]$$
$$= \frac{f^2\dot{B}\left(\vartheta_u,\vartheta_u\right)^2}{P\left(\vartheta_u\right)\left(1-A\left(\vartheta_u\right)\right)^2} + \frac{\dot{P}\left(\vartheta_u\right)^2}{2P\left(\vartheta_u\right)^2} \leq C.$$

因此，我们可以写成

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|Z_T\left(u_2\right)^{1/2} - Z_T\left(u_1\right)^{1/2}\right|^2 = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial u}Z_T\left(u\right)^{1/2}\mathrm{d}u\right|^2$$
$$\leq \frac{\left(u_2-u_1\right)}{4}\int_{u_1}^{u_2}\mathbf{E}_{\vartheta_0}Z_T\left(u\right)\dot{\Pi}\left(u\right)^2\mathrm{d}u = \frac{\left(u_2-u_1\right)}{4}\int_{u_1}^{u_2}\mathbf{E}_{\vartheta_u}\dot{\Pi}\left(u\right)^2\mathrm{d}u$$
$$\leq C\left(u_2-u_1\right)^2,$$

其中常数 $C>0$ 可以选取为与 ϑ_0 无关。估计式 **(42)** 也得到了证明。

为验证最后一个估计式 **(43)**，我们写出

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(Z_T\left(u\right) > e^{-\kappa u^2}\right) = \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\Pi\left(u\right) > -\kappa u^2\right)$$
$$= \mathbf{P}_{\vartheta_0}\Big(\Pi\left(u\right) - \mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right) > -\kappa u^2 - \mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right)\Big).$$

注意到

$$-2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right) = \sum_{t=1}^{T}\frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Big[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)} - f\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right) - m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]\Big]^2}{P\left(\vartheta_u\right)}$$
$$+ T\ln\frac{P\left(\vartheta_u\right)}{P\left(\vartheta_0\right)} - \sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2$$
$$= \frac{f^2}{P\left(\vartheta_u\right)}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right) - m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]^2$$
$$+ T\left(1 + \ln\frac{P\left(\vartheta_0\right)}{P\left(\vartheta_u\right)} - \frac{P\left(\vartheta_0\right)}{P\left(\vartheta_u\right)}\right).$$

考虑 u 的两个区域。首先，假设 $\left|u\varphi_T\right| \leq \nu$，并带有一些较小的 $\nu>0$。然后，利用 ϑ_0 附近的展开式，我们可以写出

$$-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right) = \left(\frac{u^2f^2\dot{B}^*\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_u\right)\left(1-A\left(\vartheta_0\right)^2\right)} + \frac{u^2\dot{P}\left(\vartheta_0\right)^2}{2P\left(\vartheta_0\right)^2}\right)\left(1+o\left(\nu\right)\right)$$
$$= \frac{u^2}{2}\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)\left(1+o\left(\nu\right)\right) \geq \frac{u^2}{4}\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right) \geq \kappa_1 u^2$$

当 ν 足够小时。注意,

$$\inf_{\vartheta\in\Theta} \mathrm{I}_b(\vartheta) > 0$$

并且常数 κ_1 可以选择为不依赖于 ϑ_0。

令 $|u\varphi_T| \geq \nu$。考虑两个方程之差

$$\begin{aligned} m_{t-1}(\vartheta_0) &= am_{t-2}(\vartheta_0) + B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)\zeta_{t-1}(\vartheta_0), \\ m_{t-1}(\vartheta_u) &= A(\vartheta_u)m_{t-2}(\vartheta_u) + [a - A(\vartheta_u)]m_{t-2}(\vartheta_0) + B^*(\vartheta_u,\vartheta_0)\zeta_{t-1}(\vartheta_0), \end{aligned}$$

并写作

$$\begin{aligned} m_{t-1}(\vartheta_u) - m_{t-1}(\vartheta_0) = A(\vartheta_u)[m_{t-2}(\vartheta_u) - m_{t-2}(\vartheta_0)] \\ + [B^*(\vartheta_u,\vartheta_0) - B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)]\zeta_{t-1}(\vartheta_0). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\vartheta_0}[m_{t-1}(\vartheta_u) - m_{t-1}(\vartheta_0)]^2 = A(\vartheta_u)^2 \mathbf{E}_{\vartheta_0}[m_{t-2}(\vartheta_u) - m_{t-2}(\vartheta_0)]^2 \\ + [B^*(\vartheta_u,\vartheta_0) - B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)]^2. \end{aligned}$$

我们假设 $m_t(\vartheta_u)$ 和 $m_t(\vartheta_0)$ 是平稳过程。因此

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}[m_{t-1}(\vartheta_u) - m_{t-1}(\vartheta_0)]^2 = \frac{[B^*(\vartheta_u,\vartheta_0) - B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)]^2}{1 - A(\vartheta_u)^2}$$

and

$$-2\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi(u) = \frac{Tf^2[B^*(\vartheta_u,\vartheta_0) - B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)]^2}{1 - A(\vartheta_u)^2} + T\left(1 + \ln\frac{P(\vartheta_0)}{P(\vartheta_u)} - \frac{P(\vartheta_0)}{P(\vartheta_u)}\right).$$

记为

$$G(\vartheta_u,\vartheta_0) = \frac{f^2[B^*(\vartheta_u,\vartheta_0) - B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)]^2}{2\left(1 - A(\vartheta_u)^2\right)} + \frac{1}{2}\left(1 + \ln\frac{P(\vartheta_0)}{P(\vartheta_u)} - \frac{P(\vartheta_0)}{P(\vartheta_u)}\right)$$

并证明

$$g(\vartheta_0,\nu) = \inf_{|\vartheta-\vartheta_0|\geq\nu} G(\vartheta,\vartheta_0) > 0.$$

为此，只需验证

$$\inf_{|\vartheta-\vartheta_0|\geq\nu} |P(\vartheta) - P(\vartheta_0)| > 0.$$

由于 $|P(\vartheta)-P(\vartheta_0)|=f^2\,|\gamma_*(\vartheta)-\gamma_*(\vartheta_0)|$，我们检查条件 $\dot{\gamma}_*(\vartheta)>0$。我们有（见（27））

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_*(\vartheta)&=\vartheta+\frac{\left(4\left[f^2\vartheta^2-\sigma^2\left(1-a^2\right)\right]f^2\vartheta+8\vartheta\sigma^2f^2\right)}{f^2\left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right)-f^2\vartheta^2\right)^2+4\vartheta^2\sigma^2f^2\right]^{1/2}}\\&=\vartheta+\frac{\left[4f^2\vartheta^2+4\sigma^2\left(1+a^2\right)\right]f^2\vartheta}{f^2\left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right)-f^2\vartheta^2\right)^2+4\vartheta^2\sigma^2f^2\right]^{1/2}}>0\end{aligned}\tag{44}$$

and

$$\inf_{\vartheta_0\in\Theta}g\left(\vartheta_0,\nu\right)>0.$$

因此，利用关系 $T\geq u^2/(\beta_b-\alpha_b)^2$，我们可以写出

$$\inf_{|u|\geq\nu\sqrt{T}}\left(-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right)\right)\geq g\left(\vartheta_0,\nu\right)T\geq\frac{g\left(\vartheta_0,\nu\right)u^2}{\left(\beta_b-\alpha_b\right)^2}=\kappa_2u^2.$$

我们有

$$\begin{aligned}\Pi\left(u\right)-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right)&=\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\left(\frac{P\left(\vartheta_u\right)-P\left(\vartheta_0\right)}{2P\left(\vartheta_u\right)}\right)\\&\quad+\sum_{t=1}^{T}\frac{f\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}{P\left(\vartheta_u\right)}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right)-m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]\\&\quad-\sum_{t=1}^{T}\frac{f^2\left(\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right)-m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]^2-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right)-m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]^2\right)}{2P\left(\vartheta_u\right)}\\&=\Pi_1\left(u\right)+\Pi_2\left(u\right)-\Pi_3\left(u\right),\end{aligned}$$

其中对于任意整数 $N\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_1\left(u\right)\right|^{2N}&=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\left(\frac{P\left(\vartheta_u\right)-P\left(\vartheta_0\right)}{2P\left(\vartheta_u\right)}\right)\right|^{2N}\\&=\left|u\varphi_T\dot{P}(\tilde{\vartheta}_u)\right|^{2N}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}\left[\zeta_t\left(\vartheta_0\right)^2-1\right]\right|^{2N}\leq C\left|u\right|^{2N},\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_2\left(u\right)\right|^{2N}&=\frac{f^{2N}P\left(\vartheta_0\right)^N}{P\left(\vartheta_u\right)^{2N}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\left[m_{t-1}\left(\vartheta_u\right)-m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\right]\right|^{2N}\\&\leq C\left|u\right|^{2N}T^{-N}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\dot{m}_{t-1}(\tilde{\vartheta}_u)\right|^{2N}\leq C\left|u\right|^{2N},\end{aligned}$$

and

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_3\left(u\right)\right|^{2N}=\frac{f^{4N}\left|u\right|^{4N}\varphi_T^{4N}}{2^{2N}P\left(\vartheta_u\right)^{2N}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}\left[\dot{m}_{t-1}(\tilde{\vartheta}_u)^2-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\dot{m}_{t-1}(\tilde{\vartheta}_u)^2\right]\right|^{2N}$$

$$\leq C\left|u\right|^{4N}\varphi_T^{4N}T^N=C\left|u\right|^{2N}\ \frac{\left|u\right|^{2N}}{T}\leq C\left|u\right|^{2N}. \tag{46}$$

这里我们两次使用了该估计值

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\sum_{t=1}^{T}K_t\left(\vartheta\right)\right|^{2N}\leq CT^N,$$

这对于具有有界方差和指数混合的中心化高斯时间序列 $K_t(\vartheta)\ \ t\geq 1$ 成立。我们还使用了关系式 $|u\varphi_T|\ <\ \beta_b-\alpha_b$。请注意，(45)-(46) 中的所有常数 $C>0$ 均可选为与 ϑ_0 无关。

记 $\kappa=2(\kappa_1\wedge\kappa_2)$。现在，根据切比雪夫不等式和 (45)-(46)

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(Z_T\left(u\right)>e^{-\kappa u^2}\right)\leq\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\left|\Pi\left(u\right)-\mathbf{E}_{\vartheta_0}\Pi\left(u\right)\right|\geq\frac{\kappa u^2}{2}\right)$$

$$\leq\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\left|\Pi_1\left(u\right)\right|\geq\frac{\kappa u^2}{6}\right)+\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\left|\Pi_2\left(u\right)\right|\geq\frac{\kappa u^2}{6}\right)+\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\left|\Pi_3\left(u\right)\right|\geq\frac{\kappa u^2}{6}\right)$$

$$\leq\frac{6^{2N}}{\kappa u^{2N}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_1\left(u\right)\right|^{2N}+\frac{6^{2N}}{\kappa u^{2N}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_2\left(u\right)\right|^{2N}\frac{6^{2N}}{\kappa u^{2N}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\Pi_3\left(u\right)\right|^{2N}\leq\frac{C}{u^{2N}}.$$

因此，条件 (40)-(43) 得到验证，而文献 [9] 中定理 3.1.1 和 3.2.1 的估计量 ϑ_T 和 ϑ_T 均具备定理 2 中提到的所有性质。

□

6 自适应滤波器

给定部分可观测系统

$$\begin{aligned}X_t&=f\,Y_{t-1}+\sigma\,w_t,\qquad X_0,\qquad t=1,2,\ldots,\\Y_t&=a\,Y_{t-1}+b\,v_t,\qquad Y_0.\end{aligned}$$

回顾一下，如果模型 $\vartheta=(f,\sigma^2,a,b)$ 的所有参数均已知，那么条件期望 $m(\vartheta,t)=\mathrm{E}_\vartheta(Y_t|X_s,s\leq t)$ 的平稳版本 $m_t(\vartheta)$ 满足以下方程（参见 (28)、(27)）

$$m_t\left(\vartheta\right)=am_{t-1}\left(\vartheta\right)+\frac{af\gamma_*\left(\vartheta\right)}{\sigma^2+f^2\gamma_*\left(\vartheta\right)}\left[X_t-fm_{t-1}\left(\vartheta\right)\right],\quad m_0\left(\vartheta\right),\quad t\geq 1, \tag{47}$$

$$\gamma_*\left(\vartheta\right)=\frac{1}{2f^2}\left[f^2b^2-\sigma^2\left(1-a^2\right)\right]+\frac{1}{2f^2}\left[\left(\sigma^2\left(1-a^2\right)-b^2f^2\right)^2+4f^2b^2\sigma^2\right]^{1/2}.$$

考虑随机函数 $m_t(\vartheta)\ \ t\geq 1$ 在其中一个参数未知时的近似问题。

6.1 未知参数 b

假设值 $f>0$, $a^2\in[0,1)$ 和 $\sigma^2>0$ 已知，唯一的未知参数是 $\vartheta=b\in\Theta=(\alpha_b,\beta_b)$, $\alpha_b>0$。下面提出的构造与 [16] 和 [17] 中针对类似连续时间模型（如 (8)-(9)）所讨论的解直接对应。首先，根据观测值 $X_0,X_1,\ldots,X_{\tau_T}$，我们计算 MME $\vartheta^*_{\tau_T}=b^*_{\tau_T}$, $\tau_T=\left[T^\delta\right],\delta\in(\frac{1}{2},1)$（见 (19)）

$$\vartheta^*_{\tau_T}=2^{-1/2}f^{-1}\left[\left(\frac{1}{\tau_T}\sum_{s=1}^{\tau_T}\left[X_s-X_{s-1}\right]^2+\sigma^2\right)(1+a)\right]^{1/2}. \tag{48}$$

接下来，我们定义一步最大似然估计过程（见（37））

$$\vartheta^\star_{t,T}=\vartheta^*_{\tau_T}+\frac{1}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)}\sum_{s=\tau_T+1}^{t}\left[\frac{\left[X_s-fm_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T})\right]}{P(\vartheta^*_{\tau_T})}f\dot m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T})\right.$$
$$\left.+\left(\left[X_s-fm_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T})\right]^2-P(\vartheta^*_{\tau_T})\right)\frac{\dot P(\vartheta^*_{\tau_T})}{2P(\vartheta^*_{\tau_T})^2}\right],\quad t\in\left[\tau_T+1,T\right]. \tag{49}$$

这里，$m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T},s-1)$ $s\geq\tau_T+1$ 满足方程（47），其中 b 替换为 $\vartheta^*_{\tau_T}$，而 $\dot m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T},s-1)$ $s\geq\tau_T+1$ 由对 b 求方程（47）的导数后，再将 b 替换为 $\vartheta^*_{\tau_T}$ 得到。因此，对于 $s>\tau_T+1$，我们可以写成

$$m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T})=P(\vartheta^*_{\tau_T})^{-1}\left[a\sigma^2m_{s-2}(\vartheta^*_{\tau_T})+af\gamma_*(\vartheta^*_{\tau_T})X_{s-1}\right], \tag{50}$$

$$\dot m_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T})=P(\vartheta^*_{\tau_T})^{-2}a\sigma^2\left[P(\vartheta^*_{\tau_T})\dot m_{s-2}(\vartheta^*_{\tau_T},s-2)-f^2\dot\gamma_*(\vartheta^*_{\tau_T})\,m_{s-2}(\vartheta^*_{\tau_T})\right]$$
$$+\frac{af\sigma^2\dot\gamma_*(\vartheta)}{P(\vartheta)^2}X_{s-1}. \tag{51}$$

这里，$P(\vartheta)=\sigma^2+f^2\gamma_*(\vartheta)$，费舍尔信息为

$$\mathrm{I}_b(\vartheta)=\frac{\dot P_b(\vartheta_0)^2\left[P(\vartheta_0)^2+a^2\sigma^4\right]}{2P(\vartheta_0)^2\left[P(\vartheta_0)^2-a^2\sigma^4\right]},$$

其中，$A(\vartheta)=P(\vartheta)^{-1}a\sigma^2$（见（32））。

我们借助过程$m^\star_{t,\,T}$引入自适应卡尔曼滤波器，定义如下

$$\hat m_{t,T}=P(\vartheta^\star_{t-1,T})^{-1}\left[a\sigma^2m^\star_{t-1,T}+af\gamma_*(\vartheta^\star_{t-1,T})X_t\right],\qquad t\in\left[\tau_T+1,T\right]. \tag{52}$$

对于较大的 T 值，我们必须将 $m^\star_{t,\,T}$ 与 $m(\vartheta_0,t)$ 进行比较。下文中，$\eta_{t,\,T}=\sqrt{t}\left[\vartheta^\star_{t,T}-\vartheta_0\right]$以及 $\dot B^*(\vartheta_0,\vartheta_0)=-f^{-1}\sqrt{P(\vartheta_0)}\,\dot A(\vartheta_0)=P(\vartheta_0)^{-3/2}af\sigma^2\dot\gamma_*(\vartheta_0)$。

定理 3。 设 $t=[vT]$， $v\in(0,\ 1]$、 $k=t-\tau_T+2$ 和 $T\to\infty$。则有以下关系成立

$$\sqrt{t}\left[m^{\star}_{t,T}-m_t\left(\vartheta_0\right)\right]=\dot{B}^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)\sum_{m=0}^{k}A\left(\vartheta_0\right)^{m}\eta_{t-m-1,T}\,\zeta_{t-m}\left(\vartheta_0\right)+o\left(1\right),$$

$$t\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[m^{\star}_{t,T}-m_t\left(\vartheta_0\right)\right]^{2}\longrightarrow S^{\star}_{b}\left(\vartheta_0\right)^{2}\equiv\frac{\dot{B}^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)^{2}}{\mathrm{I}_b\left(\vartheta_0\right)\left(1-A\left(\vartheta_0\right)^{2}\right)}. \tag{53}$$

这里 $o(1)$ 和 (53) 在紧集上一致收敛 $\mathbb{K}\subset\Theta$。

证明。 回顾一下,

$$m_t\left(\vartheta_0\right)=A(\vartheta_0)m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)+f^{-1}\left[a-A(\vartheta_0)\right]X_t,$$
$$m^{\star}_{t,T}=A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\hat{m}_{t-1,T}+f^{-1}\left[a-A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\right]X_t.$$

因此，对于 $\delta_{t,\ T}=\sqrt{t}\left[m^{\star}_{t,T}-m_t\left(\vartheta_0\right)\right]$， 我们有方程

$$\begin{aligned}\delta_{t,T}&=A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\delta_{t-1,T}+\sqrt{t}\left[A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})-A(\vartheta_0)\right]m_{t-1}\left(\vartheta_0\right)\\&\quad+f^{-1}\sqrt{t}\left[A(\vartheta_0)-A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\right]X_t\\&=A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\delta_{t-1,T}+f^{-1}\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}\sqrt{T}\left[A(\vartheta_0)-A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\right]\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\\&=A(\vartheta^{\star}_{t-1,T})\delta_{t-1,T}-f^{-1}\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}\dot{A}(\tilde{\vartheta}_{t-1})\sqrt{t}\left[\vartheta^{\star}_{t-1,T}-\vartheta_0\right]\zeta_t\left(\vartheta_0\right)\\&=A(\vartheta_0)\ \delta_{t-1,T}+\dot{B}^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)\ \eta_{t-1,T}\,\zeta_t\left(\vartheta_0\right)+\varepsilon_t,\qquad t\in\left[\tau_T+1,T\right],\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_t=O\left(\vartheta^{\star}_{t-1,\ T}-\vartheta_0\right)=O\left(T^{-1/2}\right)$。

记 $A\equiv A\left(\vartheta_0\right)$ $B^{*}\equiv B^{*}\left(\vartheta_0,\vartheta_0\right)$ $\zeta_t=\zeta_t\left(\vartheta_0\right)$, 并进行 $k=t-\tau_T+2$ 次迭代

$$\begin{aligned}\delta_{t,T}&=A\,\delta_{t-1,T}+\dot{B}^{*}\,\eta_{t-1,T}\,\zeta_t+\varepsilon_t\\&=A^{2}\,\delta_{t-2,T}+A\dot{B}^{*}\,\eta_{t-2,T}\,\zeta_{t-1}+\dot{B}^{*}\,\eta_{t-1,T}\,\zeta_t+A\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=A^{k+1}\delta_{t-k,T}+\dot{B}^{*}\sum_{m=0}^{k}A^{m}\eta_{t-m-1,T}\,\zeta_{t-m}+\sum_{m=0}^{k}A^{m}\varepsilon_{t-m}.\end{aligned}$$

因此，当 t 和 $k=t-\tau_T+2$ 取较大值时，我们有如下表示:

$$\delta_{t,T}=\dot{B}^{*}\sum_{m=0}^{k}A^{m}\eta_{t-m-1,T}\,\zeta_{t-m}+o\left(1\right).$$

注意，$\eta_{t-m-1,\ T}$和 ζ_{t-m}彼此独立。因此，如果 $t=[vT]$、 $T\to\infty$，则

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\delta^{2}_{t,T}=\dot{B}^{*2}\sum_{m=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}A^{m+l}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[\eta_{t-m-1,T}\,\zeta_{t-m}\eta_{t-l-1,T}\,\zeta_{t-l}\right]+o\left(1\right)$$

$$= \dot{B}^{*2} \sum_{m=0}^{k} A^{2m} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left[\eta_{t-m-1,T}^2 \zeta_{t-m}^2 \right] + o(1) = \dot{B}^{*2} \sum_{m=0}^{k} A^{2m} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left[\eta_{t-m-1,T}^2 \right] + o(1)$$

$$= \frac{\dot{B}^{*2}}{\mathrm{I}_b(\vartheta_0)} \sum_{m=0}^{k} A^{2m} \frac{t}{t-m-1} + o(1)$$

$$\longrightarrow \frac{\dot{B}^*(\vartheta_0, \vartheta_0)^2}{\mathrm{I}(\vartheta_0)} \sum_{m=0}^{\infty} A^{2m} = \frac{\dot{B}^*(\vartheta_0, \vartheta_0)^2}{\mathrm{I}_b(\vartheta_0)\left(1 - A(\vartheta_0)^2\right)}.$$

□

注8. 自适应卡尔曼滤波器由关系式（48）—（52）给出，其中唯一的一步最大似然估计过程（49）采用非递归形式。我们也将该估计量写成递归形式。记

$$S_{t,T}(\vartheta^*_{\tau_T}) = \frac{1}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)} \sum_{s=\tau_T+1}^{t} \left[\frac{\left[X_s - fm_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]}{P(\vartheta^*_{\tau_T})} f\dot{m}_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right.$$
$$\left. + \left(\left[X_s - fm_{s-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]^2 - P(\vartheta^*_{\tau_T}) \right) \frac{\dot{P}(\vartheta^*_{\tau_T})}{2P(\vartheta^*_{\tau_T})^2} \right].$$

于是我们可以写成

$$\vartheta^\star_{t,T} = \vartheta^*_{\tau_T} + S_{t,T}(\vartheta^*_{\tau_T}) = \frac{\vartheta^*_{\tau_T}}{t-\tau_T} + \frac{\left(t-1-\tau_T\right)}{\left(t-\tau_T\right)} \left[\vartheta^*_{\tau_T} + S_{t-1,T}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)} \left[\frac{\left[X_t - fm_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]}{P(\vartheta^*_{\tau_T})} f\dot{m}_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right.$$
$$\left. + \left(\left[X_t - fm_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]^2 - P(\vartheta^*_{\tau_T}) \right) \frac{\dot{P}(\vartheta^*_{\tau_T})}{2P(\vartheta^*_{\tau_T})^2} \right]$$
$$= \frac{\vartheta^*_{\tau_T}}{t-\tau_T} + \left(1 - \frac{1}{t-\tau_T}\right) \vartheta^\star_{t-1,T} + \frac{\left[X_t - fm_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right] f\dot{m}_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T})}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right) P(\vartheta^*_{\tau_T})}$$
$$+ \frac{\left(\left[X_t - fm_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right]^2 - P(\vartheta^*_{\tau_T}) \right) \dot{P}(\vartheta^*_{\tau_T})}{2\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right) P(\vartheta^*_{\tau_T})^2}, \quad t \in \left[\tau_T + 1, T\right].$$

因此，一步最大似然估计过程的递归方程为

$$\vartheta^\star_{t,T} = \frac{\vartheta^*_{\tau_T}}{t-\tau_T} + \left(1 - \frac{1}{t-\tau_T}\right) \vartheta^\star_{t-1,T} + \frac{\left[X_t - fm_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T}) \right] f\dot{m}_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T})}{\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right) P(\vartheta^*_{\tau_T})}$$

$$+\frac{\left(\left[X_t - f m_{t-1}(\vartheta^*_{\tau_T})\right]^2 - P(\vartheta^*_{\tau_T})\right)\dot{P}(\vartheta^*_{\tau_T})}{2\mathrm{I}_b(\vartheta^*_{\tau_T})\left(t-\tau_T\right)P(\vartheta^*_{\tau_T})^2}, \quad t\in\left[\tau_T+1, T\right]. \tag{54}$$

现在，自适应卡尔曼滤波器 (48)、(50)–(52)、(54) 已采用递归形式。

注9. $\vartheta = f$、 $\vartheta = a$ 和 $\vartheta = \sigma^2$ 的情形也可以用类似的方法研究。若考虑二维情形，例如 $\vartheta = (f,\ a)$，则相应的自适应卡尔曼滤波器也可以写出。初步矩估计量 $\vartheta^*_{\tau_T} = (f^*_T,\ a^*_T)^\top$ 在(20)-(21)中定义；费舍尔信息矩阵见(33)、(34)和(36)，一步最大似然估计过程见(39)， $\dot{m}_f\left(\vartheta_T、\ t\right)$ 和 $\dot{m}_a\left(\vartheta_T、\ t\right)$ 的方程很容易写出。$m^\star_{t,\ T}$ 的方程与上文(52)中给出的形式完全相同。

注10. 同样可以验证其渐近正态性

$$\sqrt{t}\left(m^\star_{t,T} - m\left(\vartheta_0, t\right)\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, S^\star_b\left(\vartheta_0\right)^2\right).$$

7 渐近效率

我们有相同的系统

$$\begin{aligned} X_t &= f\, Y_{t-1} + \sigma\, w_t, \qquad & X_0, \qquad & t = 1, 2, \ldots, \\ Y_t &= a\, Y_{t-1} + b\, v_t, \qquad & Y_0. & \end{aligned}$$

其中，参数 f, a, b, σ^2 满足条件 $\mathscr{A}_0$。

自适应滤波器由 (52) 给出，我们想知道近似误差 $\mathrm{E}_\vartheta\left|m^\star_{t,T} - m(\vartheta, t)\right|^2$ 是否渐近最小？像这种情况通常会提出所有估计量 $\bar{m}_t$ 的风险极小极大下界，假设 $\bar{m}_t$ 基于截至时间 t 的观测值，即这些估计量依赖于 $X^t = (X_s, s = 0, 1, \ldots, t)$。

回顾一些记号

$$A\left(\vartheta_0\right) = \frac{a\sigma^2}{\sigma^2 + f^2\gamma_*\left(\vartheta_0\right)}, \qquad B^*\left(\vartheta_0, \vartheta_0\right) = \frac{a\sigma^2 f\dot{\gamma}_*\left(\vartheta_0\right)}{\left[\sigma^2 + f^2\gamma_*\left(\vartheta_0\right)\right]^{3/2}}$$

以及 $\dot{m}(\vartheta_0, \cdot)$ 的方程

$$\dot{m}\left(\vartheta, t\right) = A\left(\vartheta_0\right)\dot{m}\left(\vartheta_0, t-1\right) + B^*\left(\vartheta_0, \vartheta_0\right)\zeta_t\left(\vartheta_0\right),$$

还要回顾一下 $\eta^\star_{t,T}(\vartheta_0) = \sqrt{vT}\left(\vartheta^\star_{t,T} - \vartheta_0\right), t = vT, v \in (0, 1]$ 的渐近表示

$$\eta^\star_{t,T}\left(\vartheta_0\right) = \frac{\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}}{\sqrt{tP\left(\vartheta_0\right)}}\sum_{s=1}^{t}\left[\zeta_s\left(\vartheta_0\right) f\dot{m}_{s-1}\left(\vartheta_0\right) + \left[\zeta_s\left(\vartheta_0\right)^2 - 1\right]\frac{\dot{P}\left(\vartheta_0\right)}{2\sqrt{P\left(\vartheta_0\right)}}\right] + o\left(1\right). \tag{55}$$

最大似然估计 $\hat{}\eta_t(\vartheta_0) = \sqrt{t}\left(\hat{}\vartheta_t - \vartheta_0\right), v \in (0,1]$ 和贝叶斯估计 $\tilde{\eta}_t(\vartheta_0) = \sqrt{t}\left(\tilde{\vartheta}_t - \vartheta_0\right)$，$t = vT, v \in (0,1]$ 的类似表示为

$$\hat{\eta}_t(\vartheta_0) = \frac{\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}}{\sqrt{tP(\vartheta_0)}} \sum_{s=1}^{t} \left[\zeta_s(\vartheta_0) f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0) + \left[\zeta_s(\vartheta_0)^2 - 1\right] \frac{\dot{P}(\vartheta_0)}{2\sqrt{P(\vartheta_0)}} \right] + o(1),$$
$$\tilde{\eta}_t(\vartheta_0) = \frac{\mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}}{\sqrt{tP(\vartheta_0)}} \sum_{s=1}^{t} \left[\zeta_s(\vartheta_0) f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0) + \left[\zeta_s(\vartheta_0)^2 - 1\right] \frac{\dot{P}(\vartheta_0)}{2\sqrt{P(\vartheta_0)}} \right] + o(1). \quad (56)$$

定理 2 中建立的归一化似然比 $Z_T(\cdot)$ 的性质 (40)-(43) 对应于 [9], 中定理 3.1.2 和 3.2.2 的充分条件，其中证明了一般情形下的此类表示。

引入极限 (53)

$$S_b^{\star}(\vartheta)^2 = \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}_{\vartheta}\left[\dot{m}(\vartheta,t)^2 \tilde{\eta}_t(\vartheta)^2\right] = \frac{\dot{B}^*(\vartheta,\vartheta)^2}{\mathrm{I}(\vartheta)\left(1 - A(\vartheta)^2\right)}. \quad (57)$$

由于 $\tilde{\eta}_{t、T}(\vartheta)$ 和 $\eta^{\star}_{t、T}(\vartheta)$ 的渐近表示相似（见 (55) 和 (56)），因此极限 (53) 和 (57) 也相同。

定理 4。 设定理 *2* 的条件成立。则有以下极小极大下界：对于 $m(\vartheta、t)$ 的任意估计量 $\bar{m}_{t、T}$（见下文 $t = vT$）

$$\lim_{\nu\to 0} \varliminf_{T\to\infty} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu} t\mathbf{E}_{\vartheta}\left|\bar{m}_{t,T} - m(\vartheta,t)\right|^2 \ge S_b^{\star}(\vartheta_0)^2.$$

证明。 下面给出的证明基于 [9] 中定理 1.9.1 的证明，并已在 [17] 中针对连续时间观测的情形发表。证明相当简短，为便于阅读，现将其重复如下。我们有初等估计

$$\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu} \mathbf{E}_{\vartheta}\left|\bar{m}_{t,T} - m(\vartheta,t)\right|^2 \ge \int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_{\vartheta}\left|\bar{m}_{t,T} - m(\vartheta,t)\right|^2 p_{\nu}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

这里，函数 $p_{\nu}(\vartheta)$ $\vartheta_0 - \nu < \vartheta < \vartheta_0 + \nu$是在区间 $[\vartheta_0 - \nu, \vartheta_0 + \nu]$上的正连续密度。若将与该密度 $p_{\nu}(\cdot)$ 对应的 $m(\vartheta,t)$ 的贝叶斯估计量记为 $\tilde{m}_t$，则

$$\tilde{m}_t = \int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} m(\theta,t)\, p_{\nu}\left(\theta|X^t\right)\mathrm{d}\theta, \qquad p_{\nu}\left(\theta|X^t\right) = \frac{p_{\nu}(\theta)\, L(\theta,X^t)}{\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} p_{\nu}(\theta)\, L(\theta,X^t)\,\mathrm{d}\theta}$$

and

$$\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_{\vartheta}\left|\bar{m}_{t,T} - m(\vartheta,t)\right|^2 p_{\nu}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \ge \int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_{\vartheta}\left|\tilde{m}_t - m(\vartheta,t)\right|^2 p_{\nu}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

贝叶斯估计 $\tilde{m}_t$ 的渐近行为可描述如下（下文中， $\theta_u = \vartheta + \varphi_t u, \varphi_t = t^{-1/2}, \mathbb{U}_\nu = \left(\sqrt{t}(\vartheta_0 - \nu - \vartheta) \quad \sqrt{t}(\vartheta_0 + \nu - \vartheta)\right)$ ）

$$\begin{aligned}\tilde{m}_t &= \frac{\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} m(\theta,t)\, p_\nu(\theta)\, L(\theta, X^t)\mathrm{d}\theta}{\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} p_\nu(\theta)\, L(\theta, X^t)\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} m(\theta_u,t)\, p_\nu(\theta_u)\, L(\theta_u, X^t)\mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu(\theta_u)\, L(\theta_u, X^t)\,\mathrm{d}u} \\ &= m(\vartheta,t) + \varphi_t \dot{m}(\vartheta,t)\, \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u p_\nu(\theta_u)\, \frac{L\left(\theta_u, X^t\right)}{L(\vartheta, X^t)}\mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu(\theta_u)\, \frac{L(\theta_u, X^t)}{L(\vartheta, X^t)}\mathrm{d}u}\,(1 + o(1)) \\ &= m(\vartheta,t) + \varphi_t \dot{m}(\vartheta,t)\, \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u p_\nu(\vartheta)\, Z_t(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} p_\nu(\vartheta)\, Z_t(u)\,\mathrm{d}u}\,(1 + o(1)).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{t}\left(\tilde{m}_t - m(\vartheta,t)\right) &= \dot{m}(\vartheta,t)\, \frac{\int_{\mathbb{U}_\nu} u Z_t(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\nu} Z_t(u)\,\mathrm{d}u}\,(1 + o(1)) \\ &= \dot{m}(\vartheta,t)\, \frac{\Delta_t(\vartheta, X^t)}{\mathrm{I}(\vartheta)}\,(1 + o(1)),\end{aligned}$$

其中（见引理1）

$$\Delta_t\left(\vartheta, X^t\right) = \frac{1}{\sqrt{tP(\vartheta_0)}} \sum_{s=1}^{t} \left[\zeta_s(\vartheta_0)\, f\dot{m}_{s-1}(\vartheta_0) + \left[\zeta_s(\vartheta_0)^2 - 1\right] \frac{\dot{P}(\vartheta_0)}{2\sqrt{P(\vartheta_0)}}\right].$$

回顾一下， $Z_t(u) \Rightarrow Z(u) = \exp\left(u\Delta(\vartheta) - \frac{u^2}{2}\mathrm{I}(\vartheta)\right)$ 且

$$\frac{\int_{\mathcal{R}} u Z(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{\mathcal{R}} Z(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\Delta(\vartheta)}{\mathrm{I}(\vartheta)}.$$

此外，贝叶斯估计的紧集上一致 $\mathbb{K} \subset (\vartheta_0 - \nu, \vartheta_0 + \nu)$ 矩收敛使我们可以写成

$$t\mathbf{E}_\vartheta\left(\tilde{m}_t - m(\vartheta,t)\right)^2 \to \lim_{t\to\infty} t\mathbf{E}_\vartheta\left[\dot{m}(\vartheta,t)^2\left(\tilde{\vartheta}_t - \vartheta\right)^2\right] = S_b^\star(\vartheta)^2$$

同样成立。

上述关系的详细证明可在定理 3.2.1 和 3.2.2 的证明中找到，位于 [9]

因此

$$t\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} \mathbf{E}_\vartheta\left|\tilde{m}_t - m(\vartheta,t)\right|^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \longrightarrow \int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} S_b^\star(\vartheta)^2\, p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

并且作为 $\nu \to 0$

$$\int_{\vartheta_0-\nu}^{\vartheta_0+\nu} S_b^\star(\vartheta)^2 p_\nu(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \longrightarrow S_b^\star(\vartheta_0)^2.$$

□

我们称估计量 $m_{t,\ T}^\circ, \tau_T < t \le T$渐近有效，如果对于所有 $\vartheta_0 \in \Theta, t = vT$，任意 $v \in [\varepsilon_0, 1]$

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\le\nu} t\mathbf{E}_\vartheta \left|m_{t,T}^\circ - m(\vartheta,t)\right|^2 = S_b^\star(\vartheta_0)^2.$$

这里 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$。

定理5。 估计量 $m_t^\star$， $\tau_T < t \le T$是渐近有效的。

证明。 该证明由定理 3 的一致收敛（53）得出。

□

参考文献

[1] Almagbile, A., Wang, J. 和 Ding, W.（2010年）评估 GPS/INS 集成中自适应卡尔曼滤波方法的性能。《全球定位系统期刊》9, 1, 33-40.[2] Bell, B.M. 和 Cathey, F.（1993年）将迭代卡尔曼滤波更新作为高斯-牛顿法。《*IEEE*自动控制汇刊》， 38, 2, 294-297.[3] Bickel, P.J.、Ritov, Y. 和 Rydén, T.（1998年）一般隐马尔可夫模型最大似然估计量的渐近正态性。《统计年刊》， 26, 4, 1614-1635.[4] Brown, S.D. 和 Rutan, S.C.（1985年）自适应卡尔曼滤波。《美国国家标准局研究杂志》90, 6, 403-407.[5] Cappé, O.、Moulines, E. 和 Rydén, T.（2005年）《隐马尔可夫模型中的推断》。Springer，纽约。[6]Chui, C.K. 和 Chen, G.（1987年）《实时应用中的卡尔曼滤波》。Springer，柏林。[7] Dedecker, J.、Doukhan, P.、Lang, G.、Leon, J.R.、Louhichi, S. 和 Prieur, C.（2007年）《弱依赖：示例与应用》。Springer，纽约。[8] Haykin, S.（2014年）《自适应滤波理论》。 第五版，培生教育，波士顿。

[9] Ibragimov, I.A. 和 Khasminskii R. Z.（1981年）《统计估计——渐近理论》。Springer，纽约。[10] Jazwinski, A.H.（1970年）《随机过程与滤波理论》。 学术出版社，纽约。[11] Kalman, R.E.（1960年）线性滤波与预测问题的新方法。*ASME*《基础工程学报》，82, 35-45.[12] Khasminskii, R.Z. 和 Kutoyants, Yu.A.（2018年）隐马尔可夫电报过程的参数估计。《伯努利》，24, 3, 2064-2090.[13]Kutoyants, Yu.A.（1994年）《小噪声下动力系统的辨识》。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特。[14] Kutoyants, Yu.A.（2019年）隐含遍历奥恩斯坦–乌伦贝克过程的参数估计。《电子统计学报》，13, 4508-4526.[15] Kutoyants, Yu.A.（2019年）隐含奥恩斯坦–乌伦贝克过程的参数估计。《多元分析杂志》，169, 1, 248-269.[16] Kutoyants, Yu. A.（2022年）隐马尔可夫过程的波动率估计与自适应滤过”，*arXiv:2010.07603*，已投稿[17] Kutoyants, Yu. A.（2023年）隐含遍历奥恩斯坦–乌伦贝克过程与自适应滤波器。*arXiv:2304.08857*，已投稿。[18] Kutoyants, Yu.A. 和 Zhou, L.（2021年）受扰随机微分方程中隐含高斯过程的参数估计，《电子统计学报》，15, 211-234.[19] Liptser, R.S. 和 Shiryayev, A.N.（2001年）《随机过程统计学，第一卷：一般理论》。第二版，Springer，纽约。[20] Mohamed, A.H. 和 Schwarz, K.P.（1999年）用于惯性导航系统/全球定位系统的自适应卡尔曼滤波 《大地测量学杂志》，73, 5月, 193-203.[21] Sayed, A.H.（2008年）《自适应滤波器》。约翰·威立父子出版公司，新泽西州。[22] Yang, Y. 和 Gao, W.（2006年）一种最优自适应卡尔曼滤波器。《大地测量学杂志》，80, 177-183.[23] Yu, X. 和 Li, J.（2021年）具有加性噪声与乘性噪声的线性系统的自适应卡尔曼滤波器。《*LaTeX* 类文件期刊》14, 8, 1-11。