Siegel、Wilton 和 Hardy 结果的某些推广

PedroRibeiro，Semyon Yakubovich

arXiv:2304.09545v2 [math.NT] 7 May 2023

摘要

最近，Dixit 等人[22] 建立了 Hardy定理一个非常优美的推广，该定理涉及黎曼ζ函数在其临界线上所拥有的无穷多个零点。

通过引入一个涉及第一类贝塞尔函数和修正贝塞尔函数的 θ 函数的一般变换公式，我们将他们的结果推广到一类满足海克函数方程的狄利克雷级数。在此过程中，我们还发现了解析数论中经典恒等式的新推广。

C目录

1 引言与主要结果 4

1.1 定义 10

1.2 预备部分 结果 12

2 涉及贝塞尔函数的一般 theta 变换公式 16

2.1 狄利克雷级数的一般恒等式.18 2.2 一些有用的例子.29

3 与 $\zeta_\alpha(s)$相关的组合的零点 35

3.1 与 Theta函数幂相关的狄利克雷级数.35 3.2 求和公式.37 3.3 $\psi_\alpha(x,\ z)$ 的行为.40 3.4 一些补充引理.43 3.5 定理 1.1 的证明.43

4 与 $\zeta(s,Q)$ 相关的组合的零点 50

4.1 与二次型相关的指数和.51 4.2 $\psi_Q(x,z)$ 的行为 .53 4.3 定理 1.2 的证明.56

* 关键词：狄利克雷级数；求和公式；贝塞尔函数；Hardy定理；Jacobi theta函数；合流超几何函数*2020* 年数学主题分类：主要分类：11E45，11M41，33C10，33C15；次要分类：30B50，44A15 波尔图大学理学院数学系，Rua do Campo Alegre, 687；4169-007 葡萄牙波尔图。通讯作者邮箱：pedromanelribeiro1812@gmail.com

5 与 $L_k(s,\ \chi)$ 57 5.1 与狄利克雷特征相关的指数和.57 5.2 引理 1.3 的证明 .61 5.3 ψ_χ、$_k(x,\ z)$ 的行为.61 5.4 定理 1.3 的证明 .64

6 与 $L_f(s, p/q)$ 相关的组合的零点 66

1 引言与主要结果

令 $\zeta(s)$ 表示黎曼ζ函数，并定义 $\eta(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$。A. Dixit、N. Robles、A. Roy 和 A. Zaharescu [23] 证明了以下定理。

定理A： 设 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个由非零实数组成的序列，满足 $\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|<\infty$。此外，设 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个有界且由互不相同的实数组成的序列，并且能够取到其上下界。那么函数

$$F(s)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\,\eta\left(s+i\lambda_j\right):=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\,\pi^{-\frac{s+i\lambda_j}{2}}\Gamma\left(\frac{s+i\lambda_j}{2}\right)\zeta\left(s+i\lambda_j\right)$$

在临界线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上有无穷多个零点。

基于 Dixit [[19], p. 374, eq. (1.13)],给出的雅可比变换公式的一个积分表示，A. Dixit、R. Kumar、B. Maji 和 A. Zaharescu [22] 随后推广了上述结果，并证明了更一般的定理。

定理 B： 设 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$和 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$与定理A中的序列相同。此外，设 $\mathscr{R}$表示复平面中的区域[1]，其定义为 $\mathscr{R}:=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |\mathrm{Re}(z)|<\sqrt{\frac{\pi}{2}},\,|\mathrm{Im}(z)|<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$。

那么，对于任意 $z\in\mathscr{R}$，该函数

$$F_z(s)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\,\eta\left(s+i\lambda_j\right)\left\{{}_1F_1\left(\frac{1-(s+i\lambda_j)}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(\frac{1-(\overline{s}-i\lambda_j)}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\}\tag{1.1}$$

在临界线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上有无穷多个零点。

这两个定理的证明都采用了一个非常优雅的推广，即哈代研究实函数 $\eta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ [[32], [59], 第 X 章] 的矩的方法。其中，哈代的证明中的关键步骤之一是雅可比 theta 函数的变换公式，该函数通常定义为

$$\theta(x):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2x}=2\psi(x)+1,\tag{1.2}$$

其中 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2x}$。变换公式为：

$$x^{1/2}\left(1+2\psi(x)\right)=1+2\psi\left(\frac{1}{x}\right).\tag{1.3}$$

Jacobi 还证明，如果我们将 $\psi(x)$ 推广为如下形式的二变量函数，

$$\psi(x,z):=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2x}\cos\left(\sqrt{\pi x}\,n\,z\right),\quad \mathrm{Re}(x)>0,\ \ z\in\mathbb{C},\tag{1.4}$$

[1] [22] 中所示的区域实际上是 $|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)|<\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$，其中包含 $\mathscr{R}$，但本文仅关注如上述陈述中所示的矩形区域。

变换公式出现在 [[22], 第 312 页，公式 (2.6)]

$$\sqrt{x}\,(1+2\psi(x,z)) = e^{-z^2/4}\left(1+2\,\psi\left(\frac{1}{x},iz\right)\right). \tag{1.5}$$

Dixit [[19], 第 374 页，式 (1.13)] 认识到（1.5）可以通过涉及黎曼ζ函数的积分表示来实现，从而证明了优美的恒等式：

$$2x^{1/4}\psi(x,z) - x^{-1/4}e^{-z^2/4} = 2e^{-z^2/4}x^{-1/4}\,\psi\left(\frac{1}{x},\,iz\right) - x^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right){}_1F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2};\,\frac{1}{2};\,-\frac{z^2}{4}\right)x^{-\frac{it}{2}}\,dt. \tag{1.6}$$

这个公式在证明上述定理 B 中起到了根本作用（另见这篇非常有趣的综述 [20]，其中介绍了若干模形式变换公式的更多积分表示）。本文旨在探讨如何将定理 B 推广到满足海克函数方程的一类狄利克雷级数。

我们的方法是对 [22], 中所用方法的推广，但要使用该方法，我们需要对积分恒等式（1.6）作一般化表述。

尽管为了介绍本文的主要结果，我们沿用 Chandrasekharan、Narasimhan 和 Berndt [5, 18], 的框架，但这里只给出一些例子。

F对于任意 $\alpha > 0$，将 $r_\alpha(n)$ 定义为算术函数 [[56], 第 481 页，式 (1.6)]

$$\theta^\alpha(x) - 1 := \sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\,e^{-\pi n x}. \tag{1.7}$$

当 Re(s) 充分大时，我们可以形式化地考虑狄利克雷级数

$$\zeta_\alpha(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_\alpha(n)}{n^s}, \tag{1.8}$$

并通过 θ的变换公式 x来研究它(1.3)。ζ 函数（1.8）似乎是在 Lagarias 和 Rains 的一篇论文中引入的 [40] ，他们研究了包括其零点分布如何随指标 α变化在内的若干问题。Suzuki 证明了$\zeta_\alpha(s)$的解析延拓和函数方程，其中 $0<\alpha<1$，并由此推导出了一个类似于 Selberg-Chowla 的公式 [50] ，其中涉及它的系数。

当 $\alpha = k \in \mathbb{N}$ 时，很容易看出 $r_\alpha(n)$ 化为计算将 n 表示为 k 个平方之和的方式数的算术函数。此外，当 $\alpha = 1$ 时， $\zeta_1(s)$ 化为 $2\zeta(2s)$。与 $\zeta_k(s)$ 和 $\zeta(2s)$ 一样， $\zeta_\alpha(s)$ 满足函数方程

$$\eta_\alpha(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_\alpha(s) = \pi^{-\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)\,\zeta_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-s\right) := \eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-s\right),$$

from 由此可以得出， $\eta_\alpha(s)$ 在临界线 Re(s) $= \frac{\alpha}{4}$ 上为实数。 .

我们的首批结果之一是 本文将上述定理 B 推广到 $\zeta_\alpha(s)$。其表述如下 .

定理 1.1。 设 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个实数序列，满足 $\sum_j |c_j| < \infty$并且 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个有界且各项互不相同、并达到其上下界的实数序列。那么，对于任意满足以下条件的 z：

$$z \in \mathscr{D}_\alpha := \left\{ z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}, |Im(z)| < \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \right\}, \tag{1.9}$$

该函数

$$F_{z,\alpha}(s) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \pi^{-(s+i\lambda_j)} \Gamma\left(s+i\lambda_j\right)\, \zeta_\alpha(s+i\lambda_j) \left\{ {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2} - s - i\lambda_j;\, \frac{\alpha}{2};\, \frac{z^2}{4}\right) + {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2} - \overline{s} + i\lambda_j;\, \frac{\alpha}{2};\, \frac{\overline{z}^2}{4}\right) \right\} \tag{1.10}$$

在临界线 $Re(s) = \frac{\alpha}{4}$ 上有无穷多个零点。

特别地，对于 $\alpha = 1$，我们可以得到上述定理 B。对于 $\alpha = k \in \mathbb{N}$，我们的结果推广了 Siegel [52] 和 Landau [41] 的一个定理（另见 [33]），该定理指出，完备狄利克雷级数

$$\eta_k(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_k(s)$$

在其临界线[2] $\mathrm{Re}(s) = \frac{k}{4}$ 上有无穷多个零点。

证明定理 1.1 的一个主要构成部分是 Dixit 积分公式（1.6）的一种推广：正如本文例 2.1 所示，可以证明变换公式

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}\, e^{z^2/8} \sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\, e^{-\pi n x}\, J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\, n\, x}\, z) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\frac{z}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{e^{-z^2/8}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{x}} \\
&= \frac{e^{-z^2/8}}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\, e^{-\frac{\pi n}{x}}\, I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{x}}\, z\right) - \left(\sqrt{\pi x}\,\frac{z}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\sqrt{x}\, e^{z^2/8}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
= \left(\frac{\sqrt{\pi}z}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} &\frac{e^{z^2/8}}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-\frac{\alpha}{4}-it}\Gamma\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \zeta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\, {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}+it;\, \frac{\alpha}{2};\, -\frac{z^2}{4}\right)\, x^{-it}\, dt,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 $J_\nu(z)$ 和 $I_\nu(z)$ 表示第一类贝塞尔函数。现在，当$\alpha = 1$时，可以得到公式（1.6）。

由于（1.11）的证明是从一般观点出发完成的，类似于（1.11）的恒等式对其他狄利克雷级数同样成立。

例如，对于与二元二次型相关的 Epstein ζ 函数，也有其相应的版本：如果 $Q(m,n) = Am^2 + Bm\,n + Cn^2$ 是一个二元、整系数且正定的二次型，我们可以考虑狄利克雷级数

$$\zeta(s,Q) = \sum_{m,n\neq 0} \frac{1}{Q(m,n)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{1.12}$$

称为与 Q 相关的 Epstein ζ 函数。

1934年，Potter 和 Titchmarsh [46] 将 Hardy 的结果推广到了 $\zeta(s,Q)$。大约一年后，Kober [37]对他们的证明作了大幅简化，其思路与 Hardy 本人的证明更加相近。

在本文中，我们也能够 将定理 B 给出的结果推广到一类 ζ 函数（1.12） .

[2]事实上，Siegel 的结果非常精确，并且提供了关于复平面一个相当宽的条带上 $\zeta_k(s)$ 的零点的详细信息。

定理 1.2。设 $Q(x,\ y) = Ax^2 + Bx\,y + Cy^2$ 是一个二元、整系数且正定的二次型，并且设$\Delta := 4AC - B^2$。还假设 Q 是既约的，即 $gcd(A,\ B,\ C) = 1$，并且 $\sqrt{\Delta} \equiv 2$ 模 4。

考虑与 Q 相关的 *Epstein* ζ 函数，

$$\zeta(s,\, Q) = \sum_{m,n\neq 0} \frac{1}{(Am^2 + Bm\,n + Cn^2)^s},\quad Re(s) > 1. \tag{1.13}$$

若 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非零实数序列，满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$，且 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个有界的互异实数序列，并达到其界，且 z 满足条件：

$$z \in \mathscr{D}_Q := \left\{ z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}},\ |Im(z)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}} \right\}; \tag{1.14}$$

那么函数

$$F_{z,Q}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-(s+i\lambda_j)} \Gamma\left(s + i\lambda_j\right) \zeta(s + i\lambda_j,\, Q) \left\{ {}_1F_1\left(1 - s - i\lambda_j;\, 1;\, \frac{z^2}{4}\right) + {}_1F_1\left(1 - \overline{s} + i\lambda_j;\, 1;\, \frac{\overline{z}^2}{4}\right) \right\}$$

在临界线 $Re(s) = \frac{1}{2}$ 上有无穷多个零点。

Dirichlet L-函数的另一个自然推广。Dixit、Kumar、Maji 和 Zaharescu 在其论文末尾 [22] 给出了恒等式 (1.6) 的特征类比，并写道 “值得.....寻找定理 *2* /上文的定理 *B*/的特征类比”。

在对偶特征施加某些限制的条件下，我们成功证明了定理 B 的一个特征类比。事实上，受研究定理 1.1的启发，我们建立了一个更一般的结果。

为澄清我们的下一条陈述，请注意，类似于 $\zeta_\alpha(s)$，我们可以像 Suzuki[[56], 第 483 页，式（1.15）], 一样，定义一个与 θ 函数的幂相联系的新狄利克雷级数：

$$\theta(x,\chi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^\delta \chi(n)\, e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}},\quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{if } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{if } \chi(-1) = -1. \end{cases} \tag{1.15}$$

然而，为了对每个 $\alpha > 0$ 定义 $\theta^\alpha(x,\chi)$，必须确保 χ 为实数，并且满足对于每个 $x > 0$，$\theta(x,\chi) > 0$。

无论该条件是否成立，总可以取 $\theta(x,\chi)$ 的任意整数次幂，从而得到以下级数：

$$\theta^k(x,\chi) = \sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}} n_1^\delta \chi(n_1) \ldots n_k^\delta \chi(n_k)\, e^{-\frac{\pi(n_1^2+\ldots+n_k^2)\,x}{q}}.$$

因此，类似于与 $k-$ 个平方和相联系的狄利克雷级数，我们研究狄利克雷级数[3]的任意组合的零点

$$L_k(s,\chi) := \sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}} \frac{n_1^\delta \chi(n_1) \ldots n_k^\delta \chi(n_k)}{\left(n_1^2 + \ldots + n_k^2\right)^s},\quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}(1+\delta), \tag{1.16}$$

[3]请注意，零项 $(n_1, \ldots, n_k) = (0, \ldots, 0)$在这个狄利克雷级数的表达式中不会造成问题，因为非主特征在零点处为零。

它显然与 $\theta(x,\ \chi)$的幂相关。请注意，若 $k=1,\ L_1(s,\ \chi)=2\,L(2s-\delta,\ \chi)$。此外，$L_k(s,\ \chi)$可以看作 $\zeta_k(s)$的一个“特征类比”。参见下文的引理1.3，了解（1.16）满足的函数方程。

利用一类与 $L_k(s,\chi)$相关的变换公式，我们将研究 (1.16) 的解析延拓，并证明以下定理。

定理 1.3. 设 χ 是模 q 的本原狄利克雷特征，并定义 $\delta=0$ 若 χ 为偶数，且 $\delta=1$ 若 χ 为奇数。

此外，若 χ 为偶数，则假设 $q\neq 0$ 模 4。

对于 $L_k\left(s,\chi\right)$，设其由 *(1.16)* 给出，令

$$\eta_k\left(s,\chi\right):=\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k\left(s,\chi\right).$$

假设 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个实数序列，满足 $\sum_j|c_j|<\infty$，且 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$是一个有界的互异实数序列，并能取到其界。

此外，假设 z 满足以下条件：

$$z\in\mathscr{D}_q:=\left\{z\in\mathbb{C}:\,|Re(z)|<\sqrt{\frac{\pi}{2q}},\,|Im(z)|<\sqrt{\frac{\pi}{2q}}\right\}. \tag{1.17}$$

那么，由下式给出的函数 $F_{z,\ k,\ \chi}(s)$

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_j\,\eta_k\left(s+i\lambda_j,\chi\right)\left\{{}_1F_1\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s-i\lambda_j;\,k\left(\frac{1}{2}+\delta\right);\,\frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-\overline{s}+i\lambda_j;\,k\left(\frac{1}{2}+\delta\right);\,\frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\}$$

在临界线 $Re(s)=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)$ 上有无穷多个零点。

最后，我们考虑将定理 B 推广到与全模群尖点形式相关的狄利克雷级数。Wilton [62] 运用哈代方法证明，若 p 和 q 是两个满足 $p^2\equiv 1\ \mathrm{mod}\ q$ 的整数，则扭曲函数 $L-$,

$$L_\tau\left(s,\frac{p}{q}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)\,e^{\frac{2\pi ip}{q}n}}{n^s}, \tag{1.18}$$

其中 $\tau(n)$ 是拉马努金的 $\tau-$函数，在直线 $\mathrm{Re}(s)=6$ 上有无穷多个零点。由于 $\tau(n)$ 定义了权为 $k=12$ 的尖点形式的傅里叶系数，因此 Wilton 的证明自然可以推广到与不同尖点形式相关的 $L-$函数。最近，Meher、Pujahari 和 Shankhadhar [43] 运用 Wilton 的论证证明，级别为 $4N^2$ 的半整数权尖点形式的 $L-$函数在其临界线上有无穷多个零点。

由于任何形式为 (1.18) 的狄利克雷级数都满足海克函数方程，我们的一般形式体系使我们能够证明 Wilton 结果的以下推广。

定理 1.4. 设 $f(\tau)$ 是全模群上权 k 的尖点形式，其傅里叶系数为实数 $a_f(n)$。考虑狄利克雷级数：

$$L_f(s,p/q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)\,e^{\frac{2\pi ip}{q}n}}{n^s},\quad p^2\equiv 1 \mod q. \tag{1.19}$$

若 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非零实数序列，使得 $\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|<\infty$，且 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个有界的、取到其界且各项互不相同的实数序列，并且 z 满足以下条件：

$$z\in\mathscr{D}_q:=\left\{z\in\mathbb{C}\,:\,|Re(z)|<2\sqrt{\frac{\pi}{q}},\ |Im(z)|<2\sqrt{\frac{\pi}{q}}\right\}; \tag{1.20}$$

那么函数

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-s-i\lambda_j}\Gamma(s+i\lambda_j)\,L_f\left(s+i\lambda_j,\frac{p}{q}\right)\left\{{}_1F_1\left(k-s-i\lambda_j;\,k;\,\frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(k-\overline{s}+i\lambda_j;\,k;\,\frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\} \tag{1.21}$$

在临界线 $Re(s)=\frac{k}{2}$ 上有无穷多个零点。

我们想指出，可以将定理 B 推广到更多的狄利克雷级数。尽管本文不提供详细证明，但在以下情形中，我们也获得了与上述结果类似的结论：

1. 尽管 $L_k(s,\chi)$ 是狄利克雷级数 $\zeta_k(s)$ 的一个很好的特征类比，但构造 Epstein ζ 函数的特征类比还有其他方法。其中一种方法归功于 H. M. Stark [[54, 55]] （另见 [7] ，其中介绍了更多构造方法），他将（1.12）的特征类比引入为

$$L\left(s,\chi,Q\right):=\sum_{m,n\neq 0}\frac{\chi\left(Q(m,n)\right)}{Q(m,n)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>1, \tag{1.22}$$

并研究了其解析性质，其中 χ 为本原。对于该狄利克雷级数，在附加假设 $(q,\ \Delta)\ =1$ 以及 Δ 满足与下文相同的条件时，可以证明类似于定理

定理 1.2。

2. 与（1.22）的情形类似，我们可以对 Epstein ζ 函数的不同类似函数得到相应的结果，例如

$$\zeta\left(s,Q,\chi\right):=\sum_{m,n\neq 0}\frac{\chi(m)\,\chi(n)}{Q(m,n)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>1,$$

以及

$$\sum_{m_1,\ldots,m_{2k}\neq 0}\frac{\chi\left(m_1^2+\ldots+m_{2k}^2\right)}{\left(m_1^2+\ldots+m_{2k}^2\right)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>k.$$

3. 定理 1.4 还可以推广到 $L-$与尖点形式相关且由本原狄利克雷特征扭曲的函数。

4. 我们不考虑定理 1.2中的 Epstein ζ 函数，而是可以为狄利克雷级数 $\zeta(s)\,L(s,\chi)$ 证明一个类似的结果，其中 χ 是一个模数为完全平方数的奇本原狄利克雷特征。

本文结构如下。在接下来的小节中，我们将介绍狄利克雷级数相关的一些一般定义。我们还将在此给出本文所研究的主要 L-函数的函数方程，并介绍一些特殊函数的背景知识。

第 2 节旨在证明 theta变换公式的一个一般类比形式，由此可将（1.6）导出为一个特殊情形。我们还给出了一些有助于建立主要定理的例子。

在本文的其余各节中，我们将分别证明每个特殊定理。

1.1 定义

为了推广（1.6），我们需要以下定义。

定义 1.1。设 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是两个严格递增趋于 ∞ 的正数列，且 $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是两个不恒为零的复数列。考虑可表示为狄利克雷级数的函数 $\phi(s)$ 和 $\psi(s)$，其绝对收敛横坐标有限

$$\phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{\lambda_n^s}\quad\text{and}\quad\psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{\mu_n^s} \tag{1.23}$$

分别为 σ_a 和 σ_b。令 $\Delta(s)$ 表示以下三个伽马因子之一：$\Gamma(s)$、$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$，并令 $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ 和 r 在第一种情形下为任意正实数，在另外两种情形下为 1。

我们称 $\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 满足函数方程

$$\Delta(s)\,\phi(s)=\Delta(r-s)\,\psi(r-s), \tag{1.24}$$

如果存在一个具有以下性质的亚纯函数 $\chi(s)$：

1. $\chi(s)=\Delta(s)\,\phi(s)$ 当 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_a$ 且 $\chi(s)=\Delta(r-s)\,\psi(r-s)$ 当 $\mathrm{Re}(s)<r-\sigma_b$；
2. $\lim_{|\mathrm{Im}(s)|\to\infty}\chi(s)=0$ 在每个区间 $-\infty<\sigma_1\le\mathrm{Re}(s)\le\sigma_2<\infty$ 上一致地。
3. 奇点 $\chi(s)$ 至多为极点，且局限于某个紧集内。

我们称这一对函数 (ϕ,ψ) 可表示为狄利克雷级数 (1.23)，若其满足**海克函数方程**，即对于 $\Delta(s)=\Gamma(s)$，它们满足前述定义中的条件。(1.24) 的特殊情形写作

$$\Gamma(s)\,\phi(s)=\Gamma(r-s)\,\psi(r-s),\quad r>0. \tag{1.25}$$

类似地，如果函数对 $(\phi,\ \psi)$ 可表示为1.23，且具有有限的绝对收敛横坐标 σ_a 和 σ_b 满足**博赫纳函数方程**，则称它们满足函数方程

$$\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\phi(s)=\Gamma\left(\frac{1+\delta-s}{2}\right)\psi(1-s), \tag{1.26}$$

按照定义 1.1 的意义

在继续之前，我们将记 $\sum_{m,n\neq 0}$ 为对所有整数 m, n 的无穷和，其中这些整数不同时为零。多重和也采用相同的记号。每当我们对满足定义 $\phi(s)$ 1.1 以及函数方程（1.25）的狄利克雷级数 $\phi(s)$ 称「临界线」时，我们指的是 $\mathrm{Re}(s) = \frac{r}{2}$，它就是对称线。

我们所有定理中所考虑的狄利克雷级数至多以一个简单极点作为奇点。因此，为便于本文的分析，考虑上述定义的、奇点较少的狄利克雷级数子类将更为方便。现在我们给出两个定义来引入这些子类。

定义 1.2。设 $\phi(s)$ 是一个满足定义 1.1 且具有 $\Delta(s) = \Gamma(s)$ 的狄利克雷级数。我们称 $\phi(s)$ 属于类 $\mathcal{A}$，如果还满足：

1. $\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 在整个 $\mathbb{C}$ 上均为解析函数，但在 $s = r$ 处可能存在简单极点，其留数分别为 ρ和 $\rho^\star$。

注 1.1。由函数方程 (1.25) 以及前述定义中的附加条件，$\phi(0) = -\rho^\star\Gamma(r)$，而 $\psi(0) = -\rho\,\Gamma(r)$。特别地，如果 $\psi(s)$ 是整狄利克雷级数，则 $\phi(0) = 0$。同样明显，$\phi(s) \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\psi(s) \in \mathcal{A}$。引入这一类的目的是尽可能模拟具有给定特征的 Hecke狄利克雷级数类，该类是 $\mathcal{A}$ 的一个子类。类似的定义也曾在 [[3],第 221] 页中考虑过。

注释 1.2。由上述定义和函数方程（1.25）可知 $\phi(-n) = 0$ 对于每个$n \in \mathbb{N}$。

另一类 o　　与前一个狄利克雷级数相关的 f 级数定义如下。　　n:

定义 1.3。设 $\phi(s)$ 是一个满足定义 1.1 且具有 $\Delta(s) = \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right),\ \delta \in \{0, 1\},\ r = 1$(Bochner类) 的狄利克雷级数。我们称 $\phi(s)$ 属于类 $\mathcal{B}$，如果还满足：

1. 对于 $\delta = 0$，$\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处解析，但可能在 $s = 1$ 处有简单极点，其留数为 ρ和 $\rho^\star$。

2. 对于 $\delta = 1$，$\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 可以解析延拓为整狄利克雷级数。

注 1.3。注意，定义 1.3 在某种程度上模仿了狄利克雷 L–函数和 Riemann ζ–函数所具有的性质。注意，$\phi(s) = \pi^{-s/2}\zeta(s)$ 是属于类 $\mathcal{B}$ 的狄利克雷级数，其中 $\delta = 0$。

根据博赫纳狄利克雷级数的函数方程（1.26），很容易看出 $\phi(0) = -\frac{\rho^\star}{2}\sqrt{\pi}$，而$\psi(0) = -\frac{\rho}{2}\sqrt{\pi}$。特别地，如果 $\psi(s)$是整函数，那么 $\phi(0) = 0$。

注 1.4。如果 $\phi(s) \in \mathcal{B}$ 满足 $\delta = 0$，且其在简单极点 $s = 1$ 处的留数为 ρ，那么 $\phi'(s) := \phi(2s) \in \mathcal{A}$ 在 $s = 1/2$ 处有一个简单极点，留数为 $\rho/2$。此外，$\phi'(s)$ 满足海克函数方程（1.25），参数为 $r = 1/2$。

如果 $\phi(s) \in \mathcal{B}$ 满足 $\delta = 1$，则 $\phi'(s) := \phi(2s - 1) \in \mathcal{A}$。由于 $\phi(s)$ 在 $\delta = 1$时是整函数，$\phi'(s)$ 也将是整函数。此外，$\phi'(s)$ 满足海克函数方程（1.25），参数为 $r = 3/2$。

函数方程（1.25）和（1.26）可以转化为涉及数列的算术恒等式$a(n)$ 和 $b(n)$。从现在起，若 $\phi(s)$ 按照定义 1.1 的意义满足海克函数方程，且可由（1.23）中的第一个狄利克雷级数表示，我们将用 $\Phi(x)$和 $\Psi(x)$来表示广义函数

(1.2)

$$\Phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{-\lambda_n x}, \quad \Psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, e^{-\mu_n x} \quad \mathrm{Re}(x) > 0. \tag{1.27}$$

根据 Bochner 的定义，当 $\mathrm{Re}(x) > 0$ 时，令 $P(x)$ 表示剩余函数

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(s)\, \phi(s)\, x^{-s} ds, \tag{1.28}$$

其中 C 表示围绕 $\chi(s)$ 中定义 1.1所给出的奇点的一条或多条曲线。文献 [14] 已确立了 $\phi(s)$和 $\psi(s)$ (1.25) 的海克函数方程以及“模关系”

$$\Phi(x) = x^{-r} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) \tag{1.29}$$

等价。

值得注意的是，这一等价关系的发现源于 Riemann 的革命性论文 [49], ，其中首次证明了其中一个蕴含关系。

Berndt [[4], [6]] 建立了一个涉及修正贝塞尔函数的展开式，该展开式等价于（1.29）。他证明，如果 $x > 0$, 则有如下奇妙公式

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2)^s} = R(s,x) + 2x^{r-s} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{s-r}{2}}\, K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_n}\, x\right), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_a, \tag{1.30}$$

其中， $R(s,x)$ 表示函数 $\Gamma(w)\ \phi(w)\,\Gamma(s-w)\ x^{2w-2s}$ 在 $\Gamma(w)\ \phi(w)$的极点处的留数和。

由于我们将在下一节中推广（1.29）（见下文的定理 2.1 和推论 2.2 ），因此自然需要寻求（1.30）的推广形式，该形式将在推论 2.4中给出。

1.2 预备结果

在本文的多个地方，我们都需要估计涉及狄利克雷级数 ϕ（s）的某些积分的渐近阶，该狄利克雷级数满足定义 1.1。为证明大部分步骤，我们将经常使用以下形式的斯特林公式

$$\Gamma(\sigma + it) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, t^{\sigma+it-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi t}{2} - it + \frac{i\pi}{2}(\sigma - \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{1}{12(\sigma+it)} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right), \tag{1.31}$$

当 $t \to \infty$ 时，关于 $-\infty < \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2 < \infty$ 一致成立。利用 $\Gamma(\overline{s}) = \Gamma(s)$ 这一事实，当 $t < 0$ 趋于 $-\infty$ 时，也可以写出类似的公式。显然，这一精确形式的直接推论是

$$|\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, |t|^{\sigma - \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \quad |t| \to \infty. \tag{1.32}$$

为了估计 $\phi(s)$ 在直线 $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ 上的阶，我们需要用到《 [[58], 》第 180 页第 5 节给出的经典 Phragmén-Lindelöf定理的一个版本65] （详见 [[48], 第 11] 页）。针对我们当前的需要，这个版本

表明，若 ϕ（s）满足海克函数方程（1.25），且其绝对收敛横坐标为 σ_a，那么当 $|t| \to \infty$时，

$$\phi(\sigma + it) = O\left(|t|^{\sigma_a + \delta - \sigma}\right), \quad r - \sigma_a - \delta \leq \sigma \leq \sigma_a + \delta. \tag{1.33}$$

接下来的几个引理主要涉及本文所研究的狄利克雷级数的解析延拓。

我们从 $\zeta_\alpha(s)$ 开始。θ 函数 $\vartheta_3(\tau)$: $= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}$是一个权为 $1\,2$、关于 theta 群 Γ_θ 具有乘子系统的模形式（见 [[40], 第 15-16] 页）。因此，对于每个 $\alpha > 0$, $\vartheta_3^\alpha(\tau)$ 都是同一群上具有乘子系统的权为 $\alpha/2$ 的模形式。

根据定义， $r_\alpha(n)$ 是 $\vartheta_3(\tau)$ 在尖点 $i\infty$ 处展开的傅里叶系数，即:

$$\vartheta_3^\alpha(ix) := \theta^\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\, e^{-\pi n\, x}, \quad x > 0. \tag{1.34}$$

了解这些系数如何出现会很有帮助：可以利用下式展开来计算它们

$$\begin{aligned}\vartheta_3^\alpha(ix) = \theta^\alpha(x) &= \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} 2^j \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} 2^j \sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{\infty} e^{-\pi\left(n_1^2+\ldots+n_j^2\right)x}.\end{aligned} \tag{1.35}$$

定义一个新的求和变量，例如 $m = n_1^2 + \ldots + n_j^2$，我们有，以这种方式分解 $n_i 1 \leq i \leq j\, n$ 的数量至多为 m。因此，对 j 的求和是有限的（事实上，是关于 α 的次数为 m 的多项式），所以我们可以将 $r_\alpha(m)$ 定义为

$$\sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} 2^j \sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{\infty} e^{-\pi\left(n_1^2+\ldots+n_j^2\right)x} := \sum_{m=1}^{\infty} r_\alpha(m)\, e^{-\pi m x}. \tag{1.36}$$

$r_\alpha(n)$ 在 $n \to \infty$ 时的增长阶由 Petersson 和 Lehner[40, 42, 56] 针对带有乘子系统的任意正实权模形式的傅里叶系数所作的经典估计决定。这些估计表明， $r_\alpha(n)$呈多项式增长，更确切地说，其形式为:

$$r_\alpha(n) \ll_\alpha \begin{cases} n^{\alpha/2-1} & \alpha > 4 \\ n^{\alpha/2-1}\log(n) & \alpha = 4 \\ n^{\alpha/4} & 0 < \alpha < 4. \end{cases} \tag{1.37}$$

另见 [[40], 第 18 页，定理 3.3。] 关于其常数与 α 无关的估计。这些界确定了 $\zeta_\alpha(s)$（见1.8）存在有限绝对收敛横坐标。

我们的第一个引理涉及式（1.8）的解析延拓，它应与 $\zeta_k(s)$ 的解析延拓相似。证明见 [[40], 第 11 页，定理 2.1。]。

引理 1.1。 设 $r_\alpha(n)$ 为由式（*1.34*）定义的序列。考虑狄利克雷级数：

$$\zeta_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_\alpha(n)}{n^s}, \quad Re(s) > \sigma_\alpha := \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \alpha \geq 4 \\ 1 + \frac{\alpha}{4} & 0 < \alpha < 4 \end{cases}.$$

然后， $\zeta_\alpha(s)$ 可解析延拓到整个复平面，成为一个在 $s = \frac{\alpha}{2}$ 处具有简单极点的亚纯函数，其留数为 $\mathrm{Res}_{s=\alpha/2}\zeta_\alpha(s) = \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}$。

此外，它满足海克函数方程：

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_\alpha(s) = \pi^{-\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)\,\zeta_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-s\right). \tag{1.38}$$

我们的下一个引理归功于 Paul Epstein [27, 28]，它给出了与任意正定二次型相关的 Epstein ζ 函数的解析延拓和函数方程。在陈述该引理之前，令 $\mathbf{x}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，并令 $Q(\mathbf{x})$ 表示一个关于 n 个变量的正定二次型。将 $Q(\mathbf{x})$ 写成矩阵形式：

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\,A\,\mathbf{x}, \tag{1.39}$$

其中 A是 一个由实数组成的对称 $n \times n$ 矩阵。定义 Q 的判别式为

$$D(Q) := \det(A),$$

并将伴随二次型 $Q^\dagger(\mathbf{x})$ 定义为

$$Q^\dagger(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\,A^\dagger\,\mathbf{x}, \tag{1.40}$$

其中 $A^\dagger$ 表示伴随 $\mathbf{m}$ A的矩阵。与 Q 相关的 Epstein ζ 函数由以下级数定义：

$$\zeta\left(s,\,\mathbf{g},\,\mathbf{h},\,Q\right) := \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n,\,\mathbf{m}+\mathbf{g}\neq\mathbf{0}} \frac{\exp\left(2\pi i\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{h}\right)}{Q\left(\mathbf{m}+\mathbf{g}\right)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}, \tag{1.41}$$

其中 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{h}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的向量。以下引理给出了（1.41）的解析性质（关于更为详细的表述，参见 [[51], 第 54 页, 定理 3]）。

引理 1.2。 *Epstein ζ 函数* $\zeta(s,\ \mathbf{g},\ \mathbf{h}\ \ Q)$ 可解析延拓至整个复平面，其形式如下：

1. 若整函数 $\mathbf{h} \notin \mathbb{Z}^n$;

2. 在 $s = \frac{n}{2}$处具有简单极点的亚纯函数 $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$。函数 $\zeta(s、\ \mathbf{g}、\ \mathbf{h}\ \ Q)$ 在 $s = n/2$ 处的留数为 $(2\pi)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/\sqrt{D(Q)}$。

此外， $\zeta(s,\,\mathbf{g},\,\mathbf{h}\ \ Q)$ 满足海克函数方程：

$$\left(\frac{2\pi}{D(Q)^{1/n}}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\zeta\left(s,\,\mathbf{g},\,\mathbf{h},\,Q\right) = e^{-2\pi i\mathbf{g}\cdot\mathbf{h}}\left(\frac{2\pi}{D(Q^\dagger)^{1/n}}\right)^{-\left(\frac{n}{2}-s\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\,\zeta\left(\frac{n}{2}-s,\mathbf{h},-\mathbf{g},Q^\dagger\right). \tag{1.42}$$

前面的函数方程对于研究我们的下一个结果非常有用。尽管该结果在此首次以引理的形式出现，但其证明将在小节 5.2 中给出。该结果涉及级数 (1.16) 的解析延拓。

引理 1.3。 设 χ 是模 q 的本原狄利克雷特征，并令 $\delta = 0$ 若 χ 为偶数，且 $\delta = 1$ 若 χ 为奇数。

若 $L_k(s,\chi)$ 是由下式给出的狄利克雷级数

$$L_k(s,\chi) := \sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}} \frac{n_1^{\delta}\chi(n_1)\ldots n_k^{\delta}\chi(n_k)}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s}, \quad Re(s) > \frac{k}{2}(1+\delta), \tag{1.43}$$

则 $L_k(s,\chi)$ 可解析延拓为整函数，并满足函数方程：

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k(s,\chi) = \frac{(-i)^{\delta k}G^k(\chi)}{q^{k/2}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)}\Gamma\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)L_k\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s,\overline{\chi}\right), \tag{1.44}$$

其中 $G(\chi)$ 表示高斯和

$$G(\chi) := \sum_{r=0}^{q}\chi(r)\,e^{2\pi i n\,r/q}. \tag{1.45}$$

我们将在第 5.2 小节证明这一结果，因为我们未能找到任何包含该结果的参考文献，具体而言是在$\delta = 1$的情形下。当然，当 $k = 1$时，（1.44）很容易化为狄利克雷 L级数的函数方程；而对于 $\delta = 0$ 的情形，它实际上源自 Berndt 的一个更一般结果 [7]。然而，对于 $\delta = 1$，（1.44）似乎尚未见诸文献。

作为引理部分的最后内容，设 $f(\tau)$ 是上半平面上权为 $k \geq 12$、定义在 SL(2,$\mathbb{Z}$) 上的尖点形式$\mathbb{H} := \{\tau\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$，其傅里叶展开为

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\,e^{2\pi i n\tau}. \tag{1.46}$$

那么，对于所有 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$SL(2,$\mathbb{Z}$), $\tau\in\mathbb{H}$ 和 $f(\tau)$ 均满足

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k\,f(\tau), \quad \lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} f(\tau) = 0. \tag{1.47}$$

以下引理归功于 Wilton [62], ，给出了与 $f(\tau)$ 相关联的扭曲狄利克雷级数的解析延拓。我们按照 Jutila 的著作 [[35], 第 14 页中引理 1.2.] 所呈现的相同形式引用 Wilton 的结果。

引理 1.4。 设 $f(\tau)$ 是全模群的一个权为 k 的全纯尖点形式，并设 $a_f(n)$ 是其傅里叶系数。此外，假设 p,q 是满足以下条件的整数 $(p,q) = 1$ 并考虑狄利克雷级数

$$L_f(s,p/q) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)\,e^{\frac{2\pi i p}{q}n}}{n^s}, \quad Re(s) > \frac{k+1}{2}. \tag{1.48}$$

则 $L_f(s,p/q)$ 可解析延拓为满足海克函数方程的整函数。

$$\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_f\left(s,\frac{p}{q}\right) = (-1)^{k/2}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-(k-s)}\Gamma(k-s)\,L_f\left(k-s,\,-\overline{p}/q\right), \tag{1.49}$$

其中 $\overline{p}$ 使得 $p\overline{p}\equiv 1$ 模 q。

在本文中，我们还需要贝塞尔函数的渐近公式。由[[61],第 199-202]页可见， J_ν（z）、 I_ν（z）和 K_ν（z）满足以下渐近展开：

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\nu,2n)}{(2z)^{2n}} - \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\nu,2n+1)}{(2z)^{2n+1}} \right\}, \tag{1.50}$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\nu,n)}{(2z)^n} + \frac{e^{-z\pm(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu,n)}{(2z)^n}, \tag{1.51}$$

$$K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu,n)}{(2z)^n}. \tag{1.52}$$

公式 (1.50) 和 (1.52) 在极限 $|z| \to \infty$， $|\arg(z)| < \pi$ 下成立。渐近展开式 (1.51) 在 $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$ 时取正号，在 $-\frac{3\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ 时取负号（另见 [[44], 第 223、249 和 252 页，关系式 10.7.3、10.25.3、10.30.4、10.30。5]）。这里，$(\nu,\ n)$ 表示汉克尔符号：

$$(\nu,n) := \frac{(-1)^n \cos(\pi\nu)}{\pi\, n!}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + n\right)\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu + n\right). \tag{1.53}$$

下文中，我们将在某些地方使用上述贝塞尔函数以及 Kummer函数的著名积分表示。为使论述清晰，我们只在需要时才引用这些表示。

2 涉及贝塞尔函数的一般 theta变换公式

为了证明引言中给出的所有定理，我们需要推导一个新的求和公式，该公式将雅可比公式（1.5）推广到关于参数 r 在函数方程（ 1.25 ）中的情形。

正如“模关系”（1.29）作为（1.3）的推广一样，在本节中，我们将尝试探究哪一种模变换可以推广（1.5）。

我们将把研究范围限制在属于类 $\mathcal{A}$（见上文定义 1.2 ）的狄利克雷级数上，尽管本节中的研究同样适用于奇点分布更为一般的狄利克雷级数。我们需要找到一种方法来研究下列对象的求和公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\alpha\lambda_n}\, J_{r-1}(\beta\sqrt{\lambda_n}), \quad r > 0, \tag{2.1}$$

其中 a（n） 和 λ_n 定义于定义 1.1中。这里， r 是海克函数方程（1.25）中出现的参数。

本研究采用一种积分表示，称为汉克尔公式（参见 [[16], 第 8 页，公式 (15)], [[15],第 155 页，公式 (3.10.3.2)] 另见 [[1], 第 221-222] 页的简要证明），

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-p^2t^2}\, J_\nu(at)\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) a^\nu}{2^{\nu+1} p^{s+\nu} \Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1\left(\frac{s+\nu}{2};\, \nu+1;\, -\frac{a^2}{4p^2}\right), \tag{2.2}$$

适用于 $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\nu)$、$\mathrm{Re}(p) > 0$、 $|\arg(a)| < \pi$。

显然，对于 $\nu = r-1$ 且 $\mathrm{Re}(s) > 1-r$、$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ 且 $|\arg(\beta)| < \pi$，前述公式的以下特殊情形成立

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-\alpha t} J_{r-1}(\beta\sqrt{t})\, dt = \frac{\Gamma\left(s+\frac{r-1}{2}\right)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\alpha^{s+\frac{r-1}{2}}\Gamma(r)}\, {}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \tag{2.3}$$

这表明反演公式现在在 $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$ 和 $\sigma, x > 0$ 时成立，

$$e^{-\alpha x} J_{r-1}(\beta\sqrt{x}) = \frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{r-1}{2}\right) {}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)(\alpha x)^{-s} ds, \tag{2.4}$$

这可以通过直接调用 Kummer函数的幂级数展开，并使用贝塞尔函数 $J_\mu(z)$ 的幂级数来证明。

为了表示（2.1）中给出的级数，我们需要右端（2.4）中的合流超几何函数的一个渐近公式，该公式在 $|s| \to \infty$ 时有效。根据 [[19], 第 379], 页中的推理，回顾一下，惠特克函数 $M_{\lambda,\ \mu}(z)$ 具有渐近公式 [[29],第 卷，第274], [[44],第 341 页，式 (13.21.1)]

$$M_{\lambda,\mu}(z) = \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\lambda^{-\mu-\frac{1}{4}}\Gamma\left(2\mu+1\right)\cos\left(2\sqrt{\lambda z} - \frac{\pi}{4} - \mu\pi\right) + O\left(|\lambda|^{-\mu-\frac{3}{4}}\right)$$

其中 $|\lambda| \to \infty$ 和 z 满足 $|\arg(\lambda z)| < 2\pi$。此外，根据其定义，

$$M_{\lambda,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-z/2}\, {}_1F_1\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2};\, 2\mu+1;\, z\right), \tag{2.5}$$

我们可以看到，将 λ替换为$\frac{1}{2}-s$、将 μ替换为 $\frac{r-1}{2}$，并将 z替换为 $-\frac{\beta^2}{4\alpha}$后，

$${}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) = \frac{e^{-\frac{\beta^2}{8\alpha}}\Gamma(r)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{s-\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4} - \pi\frac{r}{2}\right) + O\left(|s|^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\right), \tag{2.6}$$

其中 $|s| \to \infty$和 $|$满足 $\arg\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)| < 2\pi$。

就本文的目的而言，采用如下形式的一个较简单的界就足够了，

$$\left|{}_1F_1\left(\sigma+it+\frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right| \le A\,|t|^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}}\, e^{B\sqrt{|t|}} + O\left(|t|^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\right), \quad |t| \to \infty, \tag{2.7}$$

其中 A 和 B 是正数常数，仅依赖于 α、β、r 和 $c \le \sigma \le d$。

由于我们将使用 Mellin反演表示（2.4），其核中的合流超几何函数必须满足与海克函数方程（1.25）相容的变换公式。以下 Kummer 给出的公式 [[1], 第191页，式（4.1.11）] 将会派上用场

$${}_1F_1\left(a;\, c;\, x\right) = e^x\, {}_1F_1\left(c-a;\, c;\, -x\right). \tag{2.8}$$

2.1 狄利克雷级数的一般恒等式

现在我们可以证明以下定理。该定理颇具独立意义，因为它是一个关于一般狄利克雷级数的恒等式。

定理 2.1。设 $\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 是满足函数方程（*1.25*）的一对狄利克雷级数。此外，假设 $\phi(s) \in \mathcal{A}$，并记 ρ 为 $\phi(s)$ 在极点 $s = r$处的留数。

于是，当 $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ 且 $\beta \in \mathbb{C}$时，以下变换公式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\alpha\lambda_n}\, J_{r-1}(\beta\sqrt{\lambda_n}) = \frac{\phi(0)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\Gamma(r)} + \frac{\beta^{r-1}\rho}{2^{r-1}\alpha^r}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} + \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\mu_n/\alpha} I_{r-1}\left(\frac{\beta\sqrt{\mu_n}}{\alpha}\right). \quad (2.9)$$

注记 2.1。左端的级数显然在定义 $a(n)$ 和 λ_n 中为数列 1.1所规定的条件下收敛。右端级数的收敛性来自修正贝塞尔函数的汉克尔展开（1.51），该展开给出 $|I_\nu(z)| \ll_\nu e^{|\mathrm{Re}(z)|}/\sqrt{2\pi|z|}$ 为 $|z| \to \infty$。

证明。 取 $\mu >$最大值$\left\{\sigma_a - \frac{r}{2} + \frac{1}{2}, \sigma_b - \frac{r}{2} + \frac{1}{2}, \frac{r+1}{2}, \frac{3r}{2} - \frac{1}{2}\right\}$。根据（2.6）和（2.4），并利用绝对收敛性，可将级数（2.1）写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\alpha\lambda_n}\, J_{r-1}(\beta\sqrt{\lambda_n}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \phi\left(s + \frac{r-1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(s + \frac{r-1}{2}\right)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\alpha^{s+\frac{r-1}{2}}\Gamma(r)}\, {}_1F_1\left(s + \frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) ds. \quad (2.10)$$

现在，我们将沿正向取向的矩形围道 $\mathcal{R}$ 积分，该围道包含顶点 $\mu \pm iT$ 和$r - \mu \pm iT$，其中 $T > 0$。根据 μ 的选取，我们知道，直线 $\mathrm{Re}(s) = r - \mu$ 位于直线 $\mathrm{Re}(s) = \mu$的左侧。利用留数定理，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-iT}^{\mu+iT} \phi\left(s + \frac{r-1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(s + \frac{r-1}{2}\right)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\alpha^{s+\frac{r-1}{2}}\Gamma(r)}\, {}_1F_1\left(s + \frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{r-\mu+iT}^{\mu+iT} + \int_{r-\mu-iT}^{r-\mu+iT} + \int_{\mu-iT}^{r-\mu-iT}\right] \phi\left(s + \frac{r-1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(s + \frac{r-1}{2}\right)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\alpha^{s+\frac{r-1}{2}}\Gamma(r)}\, {}_1F_1\left(s + \frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) ds \\ + \sum_{\rho\in\mathcal{R}} \mathrm{Res}_{s=\rho}\left\{\phi\left(s + \frac{r-1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(s + \frac{r-1}{2}\right)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\alpha^{s+\frac{r-1}{2}}\Gamma(r)}\, {}_1F_1\left(s + \frac{r-1}{2};\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

显然，根据斯特林公式（1.32）、凸估计（1.33）和（2.6），水平线段上的积分 $[r - \mu \pm iT, \mu \pm iT]$ 当 $T \to \infty$时趋于零。此外，我们知道 ϕ（s）在 $s = r$处有一个简单极点，并且根据备注 1.2，在负整数处有零点。

由于 ${}_1F_1\left(z;\, r;\, -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$ 是关于变量 z 的整函数，因此上式求和中需要考虑的极点仅位于点 $\rho = \frac{1-r}{2}$ 和 $\rho = \frac{r+1}{2}$。将 (2.10) 中的被积函数记为 $\mathcal{I}_{\alpha,\ \beta}(s)$，可知这些极点处的留数分别为

$$\mathrm{Res}_{s=\frac{r+1}{2}}\left\{\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(s)\right\} = \frac{\beta^{r-1}\rho}{2^{r-1}\alpha^r}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \mathrm{Res}_{s=\frac{1-r}{2}}\left\{\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(s)\right\} = \frac{\phi(0)\beta^{r-1}}{2^{r-1}\Gamma(r)}. \quad (2.12)$$

令 $T \to \infty$ 代入（2.11），现在需要计算积分

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r-\mu-i\infty}^{r-\mu+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{r-1}{2}\right) \phi\left(s+\frac{r-1}{2}\right) {}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2}; r; -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \alpha^{-s}\, ds,$$

我们通过利用 $\phi(s)$(1.25) 所满足的泛函关系以及库默尔公式（2.8）来完成这一点,

$$ {}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2}; r; -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\, {}_1F_1\left(\frac{r+1}{2}-s; r; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \tag{2.13}$$

进行这样的变换，并将变量换回 $\psi(s)$ 的绝对收敛域（这得益于我们对 $\mu > \sigma_b - \frac{r}{2} + \frac{1}{2}$ 的选择），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r-\mu-i\infty}^{r-\mu+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{r-1}{2}\right) \phi\left(s+\frac{r-1}{2}\right) {}_1F_1\left(s+\frac{r-1}{2}; r; -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \alpha^{-s}\, ds \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{2\pi i\, \Gamma(r)} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \int\limits_{r-\mu-i\infty}^{r-\mu+i\infty} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}-s\right) \psi\left(\frac{r+1}{2}-s\right) {}_1F_1\left(\frac{r+1}{2}-s; r; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \alpha^{-s}\, ds \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{2\pi i\, \Gamma(r)} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \alpha^{-r} \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{1-r}{2}\right) \psi\left(s+\frac{1-r}{2}\right) {}_1F_1\left(s+\frac{1-r}{2}; r; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \alpha^{s}\, ds.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

现在，我们利用 $\psi(s)$ 作为狄利克雷级数的展开式（1.23），并结合合流超几何函数的幂级数展开。由于两个级数均绝对收敛，我们可以将（2.14）的右端写为

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \alpha^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma(r)} {}_1F_1\left(s+\frac{1-r}{2}; r; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right) (\alpha/\mu_n)^s ds \\
&= e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{r-1}{2}} \alpha^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{r-1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{1-r}{2}+k\right)}{\Gamma(r+k)\, k!} \frac{\beta^{2k}}{4^k \alpha^k} (\alpha/\mu_n)^s ds \\
&= e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{r-1} \alpha^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(r+k)\, k!} \left(\frac{\beta^2 \mu_n}{4\alpha^2}\right)^k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \Gamma(z)\, (\alpha/\mu_n)^z dz \\
&= e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{r-1} \alpha^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n) e^{-\mu_n/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(r+k)\, k!} \left(\frac{\beta\sqrt{\mu_n}}{2\alpha}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

回想其定义　　第一类修正贝塞尔函数[[57], 第233页，式（9.28）] ,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

我们立即看到，（2.15）中的后一个无穷级数由第一类修正贝塞尔函数表示。由此证明了（2.9）。

□

由于类 $\mathcal{B}$ 可以包含在类 $\mathcal{A}$中，即，如果 $\phi(s) \in \mathcal{B}$ 那么 $\phi(2s-\delta) \in \mathcal{A}$ (见注 1.4)，我们可以推导出以下在[[48], 引理 3.1。]中得到的公式。

推论 2.1。 设 $\phi(s)$ 是一个可表示为 *(1.23)* 并属于类 $\mathcal{B}$ 且 $\delta = 0$。那么，对于任意 $x > 0$ 以及 $Re(\alpha) > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$下列恒等式成立*</style}*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{-\alpha\lambda_n^2 x^2}\, \cos(\beta\lambda_n x) = \phi(0) + \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{\rho}{2\,x}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} + \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}\,x} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, e^{-\frac{\mu_n^2}{\alpha x^2}} \cosh\left(\frac{\beta\,\mu_n}{\alpha x}\right). \tag{2.16}$$

此外，如果 $\phi(s)$ 属于具有 $\delta = 1$ 的类 $\mathcal{B}$，则有相应的公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{-\alpha\lambda_n^2 x^2}\, \sin(\beta\lambda_n x) = \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}x} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, e^{-\frac{\mu_n^2}{\alpha\, x^2}} \sinh\left(\frac{\beta\mu_n}{\alpha\, x}\right). \tag{2.17}$$

证明。 设 $\phi'(s) = \phi(2s-\delta)$, $\delta \in \{0,1\}$。则 $\phi'(s)$ 满足海克函数方程

$$\Gamma(s)\ \phi'(s) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \delta - s\right)\ \psi'\left(\frac{1}{2} + \delta - s\right) \tag{2.18}$$

并属于类 $\mathcal{A}$，其（至多）在 $s = \frac{1}{2}$ 处有一个简单极点（如果 $\delta = 0$），留数为 $\rho/2$ （见上文备注1.4 ）。

一般而言，如果 $\phi(s)$ 和 $\psi(s) \in \mathcal{B}$ 可表示为（1.23），则 $\phi'(s)$ 和 $\psi'(s)$ 可以写成如下形式

$$\phi'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\,\lambda_n^{\delta}}{\lambda_n^{2s}}, \quad \psi'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)\,\mu_n^{\delta}}{\mu_n^{2s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_a/2.$$

由（2.18），我们可以应用求和公式（2.9），将其中的 $a(n)$ 替换为 $a(n)\lambda_n^{\delta}$，将 λ_n 替换为 λ_n^2，将 $b(n)$ 替换为$b(n)\,\mu_n^{\delta}$， μ_n 替换为 μ_n^2，最后将 ρ 替换为 $\rho/2$: 这就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,\lambda_n^{\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha\lambda_n^2}\, J_{\delta-\frac{1}{2}}(\beta\,\lambda_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}}\left\{\phi(0) + \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\right\}(1-\delta) + \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{\frac{1}{2}}\, e^{-\mu_n^2/\alpha}\, I_{\delta-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta\mu_n}{\alpha}\right). \tag{2.19}$$

现在使用贝塞尔函数 [[57], p.248], 的特定值

$$J_{\delta-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos(x) & \text{if } \delta = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin(x) & \text{if } \delta = 1 \end{cases}, \quad I_{\delta-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cosh(x) & \text{if } \delta = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sinh(x) & \text{if } \delta = 1 \end{cases}, \tag{2.20}$$

将（2.16）和（2.17）中的 α 和 β 分别替换为 αx^2 和βx后，立即得到这两个恒等式， $x > 0$。

□

注 2.2。 特别地，由于 $\phi(s) := \pi^{-s/2}\zeta(s) \in \mathcal{B}$ 根据注 1.3，对恒等式（2.16）的应用给出雅可比公式（1.5）。这似乎首次表明，一般公式（2.9）将成为（1.5）的真正类比。

恒等式（2.16）和（2.17）被用于 [[48], 定理 3.1。] 以推导出类 $\mathcal{B}$中狄利克雷级数的塞尔伯格-乔拉公式的一个推广。基于出现在（2.16）和（2.17）中的级数所具有的“类 θ”特征，我们现在给出一个定义，从而引入 θ 函数的新的一般类似物。

定义 2.1。 设 Re（x） >0， $y\in\mathbb{C}$ 并假设 ϕ（s） 是满足海克函数方程（1.25）的狄利克雷级数。我们将广义 θ–函数定义为如下级数

$$\Phi(x,y)=2^{r-1}\Gamma(r)\,y^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,\lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\lambda_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right). \tag{2.21}$$

接下来的推论实际上是将式（2.9）改写为紧凑形式，它给出了关于 $\Phi(x,y)$的变换公式。此外，与Dixit公式（1.6）一样，我们可以将这一模关系与一个涉及 $\phi(s)$和合流超几何函数的积分进行比较。

推论 2.2。 设 $Re(x)>0,\ y\in\mathbb{C}$ 并假设 $\phi(s)\in\mathcal{A}$。考虑广义*Theta*函数：

$$\Phi(x,y):=2^{r-1}\Gamma(r)\,y^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,\lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\lambda_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right) \tag{2.22}$$

and

$$\Psi\left(x,y\right):=2^{r-1}\Gamma(r)\,y^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\,\mu_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\mu_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\mu_n}\,y\right). \tag{2.23}$$

则 $\Phi(x,y)$ （分别为 $\Psi(x,y)$）具有以下性质：

1. 它关于 $y\in\mathbb{C}$ 是整函数，且关于 $Re(x)>0$解析；

2. 它满足变换公式

$$\Phi(x,y)=\phi(0)+\frac{\rho}{x^r}\Gamma(r)\,e^{-\frac{y^2}{4x}}+\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{x^r}\,\Psi\left(\frac{1}{x},\,\frac{iy}{x}\right). \tag{2.24}$$

此外，式（*2.24*）可以写成一个涉及 $\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1(s;\ \ r;\ \ -y^2/4x)$ 在$\phi(s)$的临界线上的积分形式，即：

$$\begin{aligned}x^{r/2}\Phi\left(x,y\right)-\frac{\rho\Gamma(r)}{x^{r/2}}\,e^{-\frac{y^2}{4x}}&=e^{-\frac{y^2}{4x}}x^{-r/2}\Psi\left(\frac{1}{x},\,i\,\frac{y}{x}\right)+\phi(0)\,x^{r/2}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\,\phi\left(\frac{r}{2}+it\right){}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt.\end{aligned} \tag{2.25}$$

证明。 我们首先证明 $\Phi(x,\ y)$ 满足第 1 项，即在 $y\in\mathbb{C}$ 中是整函数，并在半平面 $\mathrm{Re}(x)>0$中是解析的。我们将此证明分为两种情况： $r>\frac{1}{2}$ 或 $0<r\leq\frac{1}{2}$。对于第一种情况，若 $\mathrm{Re}(x)=\sigma\geq\sigma_0>0$ 且y 属于 $\mathbb{C}$中某个有界子集，例如包含于 $|y|\leq M$，那么定义 $\Phi(x,\ y)$ 的级数绝对且一致收敛，因为对于 $r>\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}|\Phi(x,y)|&\leq\Gamma\left(r\right)\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|e^{-\lambda_n\sigma_0}\left|\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}\,y}{2}\right)^{1-r}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right)\right|\\&\leq\frac{2\Gamma(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|e^{-\lambda_n\sigma_0}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{r-\frac{3}{2}}\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\,t\right)\right|\,dt\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|\,\exp\left(-\lambda_n\sigma_0+\sqrt{\lambda_n}\,M\right)<\infty,\end{aligned}$$

其中在第二个不等式中，我们使用了众所周知的傅里叶表示（由泊松提出） [[44], 第 224 页，公式 (10.9.4)]

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt)\,dt, \quad \mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},\ z\in\mathbb{C}, \tag{2.26}$$

以及狄利克雷级数 $\phi(s)$ 在某个半平面内收敛这一事实 .

注意，2.26仅当 $J_{r-1}(z)$ 时才能使用$r>\frac{1}{2}$。为处理 $0<r\le\frac{1}{2}$ 的情况，我们只需对 $\Phi(x,y)$作平凡估计，即可得到

$$\begin{aligned}|\Phi(x,y)| &\le \Gamma(r)\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|e^{-\lambda_n\sigma_0}\left|\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}\,y}{2}\right)^{1-r} J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right)\right| \\ &\le \Gamma(r)\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|e^{-\lambda_n\sigma_0}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}\,|y|}{2}\right)^{1-r} I_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,|y|\right) < \infty,\end{aligned}$$

其中我们使用了众所周知的上界 $|J_\nu(z)|\le I_\nu(|z|)$，该上界对 $\nu\in\mathbb{R}$ 有效。最后一个级数的有限性源于关于 1.51 的众所周知的渐近估计（ $I_\nu(x)$， $x>0$ [[44], 第252页，公式（10.30(ii)）], 由此可得

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}\,|y|}{2}\right)^{1-r} I_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,|y|\right) \ll \exp\left(\sqrt{\lambda_n}\,M\right)\lambda_n^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}}|y|^{\frac{1}{2}-r}, \quad n\to\infty. \tag{2.27}$$

因此，对于半平面 $\mathrm{Re}(x)>0$ 中的每个固定 x，函数 $\Phi(x,\cdot)$ 都是整函数；对于每个固定的 $y\in\mathbb{C}$，函数 $\Phi(\cdot,y)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}(x)>0$ 中是全纯的。这就证明了上面的第 1 项。

现在，我们证明积分表示式（2.25），这立即给出（2.24）。我们从（2.25）右端的积分开始证明，将其变换为沿临界线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{r}{2}$ 的围道积分，

$$\begin{aligned}&\frac{y^{r-1}x^{-r/2}}{2^r\pi\,\Gamma(r)}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\phi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt = \\ &\quad = \frac{y^{r-1}}{2^{r-1}\,\Gamma(r)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{r}{2}-i\infty}^{\frac{r}{2}+i\infty}\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1\left(s;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-s}\,ds = \\ &\quad = \frac{y^{r-1}}{2^{r-1}\,\Gamma(r)}\,\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi i}\int_{\frac{r}{2}-i\infty}^{\frac{r}{2}+i\infty}\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1\left(r-s;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{-s}\,ds,\end{aligned}$$

其中我们使用了库默尔公式（2.13）。现在，我们将积分路径改为 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_a+\delta$，其中 δ为某个正数。这样，我们在一个（正向取向的）矩形围道上进行积分，其顶点为 $r/2\pm iT$和$\sigma_a+\delta\pm iT$，其中 T是一个（充分大的）正实数。当 $T\to\infty$ 时，由于斯特林公式（1.32）和（2.6），沿水平方向线段的积分趋于零。

进行这次平移时，由于 $\phi(s)$ 在 $s=r$ 处存在一个简单极点，我们得到其留数。

$$\mathrm{Res}_{s=r}\left\{\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1\left(r-s;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{-s}\right\} = \Gamma(r)\rho\,x^{-r}.$$

今后，由于 $\phi(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ 时绝对收敛，根据绝对收敛性，我们有

$$\frac{y^{r-1}}{2^{r-1}\,\Gamma(r)}\,\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi i}\int\limits_{\frac{r}{2}-i\infty}^{\frac{r}{2}+i\infty}\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1\left(r-s;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{-s}\,ds$$

$$=\frac{y^{r-1}}{2^{r-1}\,\Gamma(r)}\,\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_a+\delta-i\infty}^{\sigma_a+\delta+i\infty}\Gamma(s)\,\phi(s)\,{}_1F_1\left(r-s;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{-s}\,ds-\frac{y^{r-1}\rho}{2^{r-1}x^r}\,e^{-\frac{y^2}{4x}}$$

$$=\frac{y^{r-1}}{2^{r-1}\,\Gamma(r)}\,\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\int\limits_{\sigma_a+\delta-i\infty}^{\sigma_a+\delta+i\infty}\Gamma(s)\,{}_1F_1\left(r-s;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)(x\lambda_n)^{-s}\,ds-\frac{y^{r-1}\rho}{2^{r-1}x^r}\,e^{-\frac{y^2}{4x}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,e^{-\lambda_n x}J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right)-\frac{y^{r-1}\rho}{2^{r-1}x^r}\,e^{-\frac{y^2}{4x}},$$

wh这里在最后一步用到了积分表示（2.4）。这就证明了

$$\frac{y^{r-1}x^{-r/2}}{2^r\pi\,\Gamma(r)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\phi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,e^{-\lambda_n x}J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n}\,y\right)-\frac{y^{r-1}\rho}{2^{r-1}x^r}\,e^{-\frac{y^2}{4x}}.\tag{2.28}$$

将（2.28）两边乘以因子 $\Gamma(r)\,2^{r-1}y^{1-r}x^{r/2}$，并利用广义 theta 函数（2.22）的定义，可得

$$x^{r/2}\Phi(x,y)-\frac{\rho\Gamma(r)}{x^{r/2}}\,e^{-\frac{y^2}{4x}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\phi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt.\tag{2.29}$$

现在考察（2.29）右端的积分：由 $\phi(s)$ 的函数方程 (1.25) 和库默尔公式（2.8），可以将其改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\phi\left(\frac{r}{2}+it\right){}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\psi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}-it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{it}\,dt$$

$$=\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\psi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{it}\,dt.\tag{2.30}$$

但（2.30）中的最后一个积分实际上与（2.29）右端的积分相同，只需将其中的 x替换为 $1/x$， y 替换为 iy/x，并将 $\phi(s)$替换为 $\psi(s)$：因此（2.29）推出

$$x^{-r/2}\Psi\left(\frac{1}{x},\,i\,\frac{y}{x}\right)-\rho^\star\Gamma(r)\,x^{r/2}\,e^{\frac{y^2}{4x}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\psi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{it}\,dt,\tag{2.31}$$

其中 $\rho^\star$ 是在 $\psi(s)$ 于 $s=r$ 处的简单极点的留数。根据类 $\mathcal{A}$(参见上文备注 1.1) 的简单性质，我们知道 $\rho^\star\Gamma(r) = -\phi(0)$，使用（2.31）、（2.30）和（2.29）后可得：

$$e^{-\frac{y^2}{4x}}x^{-r/2}\Psi\left(\frac{1}{x},\,i\,\frac{y}{x}\right)+\phi(0)\,x^{r/2}=\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\psi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,\frac{y^2}{4x}\right)x^{it}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\phi\left(\frac{r}{2}+it\right){}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{y^2}{4x}\right)x^{-it}\,dt=x^{r/2}\Phi(x,y)-\frac{\rho\Gamma(r)}{x^{r/2}}\,e^{-\frac{y^2}{4x}},$$

从而完成我们的证明。 □

由于前述“模”关系（2.24）是 Bochner 的“模”关系（1.29）的类似形式，因此在下一个推论中我们指出，（1.29）确实可以由（2.9）推出。

推论2.3。 假设　　设 $\phi(s) \in \mathcal{A}$：那么对于任意 $Re(x) > 0$，*Bochner*公式（*1.29*）成立。　　*ce*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{-\lambda_n x} = \phi(0) + \rho\Gamma(r)\, x^{-r} + x^{-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, e^{-\mu_n/x}. \tag{2.32}$$

证明。 变换公式（2.24）表明，对于 $\mathrm{Re}(x) > 0$ 以及 $y \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(r)\, 2^{r-1} y^{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\lambda_n x}\, J_{r-1}(\sqrt{\lambda_n}\, y) = \phi(0) + \frac{\rho}{x^r}\Gamma(r)\, e^{-\frac{y^2}{4x}} + \\ + \frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{x}\, \Gamma(r)\, 2^{r-1} y^{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\frac{\mu_n}{x}}\, I_{r-1}\left(\frac{\sqrt{\mu_n} y}{x}\right).$$

我们已经看到，两边的级数对于包含在任意有界子集中的 y 都绝对且一致收敛。因此，我们可以令 $y \to 0^+$，并在两边交换极限与求和的次序。根据贝塞尔函数的极限关系 [[44], 第 223 页，公式 (10.7.3)],

$$\lim_{y\to 0} y^{-\nu} J_\nu(y) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \lim_{y\to 0} y^{-\nu} I_\nu(y) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \tag{2.33}$$

(2.32) 可立即得出。 □

由于恒等式 (1.29)、(1.30) 与海克函数方程等价，而 (2.24) 是 (1.29) 的推广，因此现在产生了一个有趣的问题：在此背景下，能否找到 (1.30) 的推广？下面的推论对此给出了肯定的回答。

推论 2.4。 设 $\phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 是两个满足定义 *1.2* 的狄利克雷级数，并设 σ_a 为 $\phi(s)$ 的绝对收敛横坐标。此外，设 x, y 为两个正实数，且 s 是任意一个满足 $Re(s) > \sigma_a$。

那么，下列恒等式成立

$$\frac{x^{s-r}}{2}\, \frac{\Gamma(s)\, y^{r-1}}{\Gamma(r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2 + y^2)^s}\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; r; \frac{4y^2\lambda_n}{(\lambda_n + x^2 + y^2)^2}\right) \\ = \frac{\rho\, y^{r-1}\, x^{r-s}\, \Gamma(s-r)}{2} + \frac{x^{s-r} y^{r-1} \phi(0)\, \Gamma(s)}{2\Gamma(r)\, (x^2+y^2)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{s+1}{2}-r}\, J_{r-1}(2\sqrt{\mu_n}\, y)\, K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_n}\, x\right). \tag{2.34}$$

此外，若 x 和 y 是两个正数，使得 $x > y$ 且 $Re(s) > \sigma_a$，则类似的恒等式成立：

$$\frac{x^{s-r}}{2}\, \frac{\Gamma(s)\, y^{r-1}}{\Gamma(r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2 - y^2)^s}\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; r; -\frac{4y^2\lambda_n}{(\lambda_n + x^2 - y^2)^2}\right) \\ = \frac{\rho\, y^{r-1} x^{r-s}\, \Gamma(s-r)}{2} + \frac{x^{s-r} y^{r-1} \phi(0)\, \Gamma(s)}{2\Gamma(r)\, (x^2-y^2)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \mu_n^{\frac{s+1}{2}-r}\, I_{r-1}(2\sqrt{\mu_n}\, y)\, K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_n}\, x\right). \tag{2.35}$$

证明。 由于 $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ 对 $x > 0$成立，只要保证（2.35）两端均收敛，便很容易看出（2.34）可推出（2.35）。事实上，由于 $x > y$ 以及渐近公式（1.51）和（1.52），（2.35）右端的级数对每个 $s \in \mathbb{C}$ 都绝对收敛 [[61], 第199页203],

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty. \tag{2.36}$$

为了说明左端（2.35）中的级数收敛，注意到当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{(\lambda_n + x^2 - y^2)^s}\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; r; -\frac{4y^2\lambda_n}{(\lambda_n + x^2 - y^2)^2}\right) \sim \frac{1}{(\lambda_n + x^2 - y^2)^s}$$

由于超几何函数因子趋于 1 （当 $\lambda_n \to \infty$ 时）。因此，如果 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$，则左端（2.35）中的级数绝对收敛。对于（2.34）两端的级数，也可作类似说明，而无需额外假设 $x > y$。

根据前面的说明，我们只需证明恒等式（2.34）。为此，我们先考察其右端的无穷级数，并利用第二类修正贝塞尔函数的著名表示式 [[31], , 见第 368], 页，公式 3.471.9。

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-\beta x}\, e^{-\frac{\gamma}{x}}\, dx = 2\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{s/2} K_s\left(2\sqrt{\beta\,\gamma}\right), \quad \mathrm{Re}(\beta),\, \mathrm{Re}(\gamma) > 0. \tag{2.37}$$

U将（2.37）代入（2.34）右端出现的无穷级数中，可得

$$\sum_{n=1}^\infty b(n)\, \mu_n^{\frac{s+1-2r}{2}}\, J_{r-1}(2\sqrt{\mu_n}\, y)\, K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_n}\, x\right) = \frac{x^{s-r}}{2} \int_0^\infty t^{s-r-1} e^{-x^2 t} \sum_{n=1}^\infty b(n)\, \mu_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\frac{\mu_n}{t}} J_{r-1}\left(2\sqrt{\mu_n}\, y\right)\, dt,$$

由于绝对收敛，可以交换求和与积分的次序。现在，我们对调 $\phi(s)$与 $\psi(s)$ 的角色，应用变换公式（2.9），得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty b(n)\, \mu_n^{\frac{s+1-2r}{2}}\, J_{r-1}(2\sqrt{\mu_n}\, y)\, K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_n}\, x\right) = \frac{x^{s-r}}{2} \int_0^\infty t^{s-r-1} e^{-x^2 t} \cdot \left\{\frac{\psi(0) y^{r-1}}{\Gamma(r)} + y^{r-1}\rho^\star\, t^r\, e^{-y^2 t}\right\} dt + \\ + \frac{x^{s-r}}{2} \int_0^\infty t^{s-r-1} e^{-x^2 t} \cdot \left\{t\, e^{-y^2 t} \sum_{n=1}^\infty a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\lambda_n t}\, I_{r-1}\left(2y\, t\, \sqrt{\lambda_n}\right)\right\} dt.\end{aligned} \tag{2.38}$$

第一个积分的计算很简单，其结果为:

$$\begin{aligned}\frac{x^{s-r}}{2} \int_0^\infty t^{s-r-1} e^{-x^2 t} \left\{\frac{\psi(0) y^{r-1}}{\Gamma(r)} + y^{r-1}\rho^\star\, t^r\, e^{-y^2 t}\right\} dt &= \frac{\psi(0)\, y^{r-1}\, x^{r-s}\, \Gamma(s-r)}{2\Gamma(r)} + \frac{x^{s-r} y^{r-1} \rho^\star\, \Gamma(s)}{2\,(x^2+y^2)^s} \\ &= -\frac{\rho\, y^{r-1}\, x^{r-s}\, \Gamma(s-r)}{2} - \frac{x^{s-r} y^{r-1} \phi(0)\, \Gamma(s)}{2\Gamma(r)\ (x^2+y^2)^s},\end{aligned} \tag{2.39}$$

其中我们用到了该类的简单性质 $\mathcal{A}$，即 $\psi(0) = -\rho\,\Gamma(r)$ 以及 $\rho^\star = -\phi(0)/\Gamma(r)$ (见注1.1)。为了计算第二个积分，我们利用绝对收敛性（由上文推论2.2的第1项保证）以及 [[15], 第191页，等式3.13.2中给出的积分。1],

$$\int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-Ax} I_\nu(Bx)\, dx = A^{-z-\nu} \left(\frac{B}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(z+\nu)}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_2F_1\left(\frac{z+\nu}{2}, \frac{z+\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{B^2}{A^2}\right), \tag{2.40}$$

当 Re(A) $>$ |Re(B)| 且 Re(z) $>$ –Re(ν) 时成立。

对（2.40）中的最后一个积分应用（2.38），可得

$$\int_0^\infty t^{s-r} e^{-x^2 t}\, e^{-y^2 t} \sum_{n=1}^\infty a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\, e^{-\lambda_n t}\, I_{r-1}\left(2y\, t\, \sqrt{\lambda_n}\right)\, dt = \sum_{n=1}^\infty a(n)\, \lambda_n^{\frac{1-r}{2}} \int_0^\infty t^{s-r}\, e^{-\left(x^2+y^2+\lambda_n\right)t}\, I_{r-1}\left(2yt\, \sqrt{\lambda_n}\right)\, dt$$

$$= \frac{\Gamma(s)\, y^{r-1}}{\Gamma(r)} \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{\left(\lambda_n + x^2 + y^2\right)^s}\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2},\, \frac{s+1}{2};\, r;\, \frac{4y^2\lambda_n}{\left(\lambda_n + x^2 + y^2\right)^2}\right), \tag{2.41}$$

这通过（2.40）是合理的，因为根据假设，Re(s) $> \sigma_a \geq \frac{r}{2} > 0$ 且 $x^2 + y^2 + \lambda_n > y^2 + \lambda_n > 2y\sqrt{\lambda_n}$。将（2.41）与（2.38）及（2.39）结合，即可证明公式（2.34）。

□

注 2.3。一个涉及乘积 $I_\nu(y)\, K_\nu(z)$ 的类似于（2.35）的公式由 Berndt、Dixit、Kim 和 Zaharescu 在 [11] 中发现，随后由三位作者和 Gupta 在定理 11 中将其推广到一类狄利克雷级数。 [[9],定理 11。1]。

在狄利克雷级数与 $k-$ 个平方数之和相关联的情形下加以限制， $\zeta_k(s)$，它们的恒等式写作[[11],第 315 页，定理 1.6。]

$$\sum_{n=1}^\infty r_k(n)\, I_\nu\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)\right)\, K_\nu\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}\right)^\nu + \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + \nu\right)}{\pi^{k/2} 2^{k-1} \Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^\infty \frac{r_k(n)}{\sqrt{n+\alpha}\,\sqrt{n+\beta}} \left(\frac{\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n+\beta}}{\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\beta}}\right)^\nu \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{n+\beta}}\right)^{k-2} {}_2F_1\left(1 - \frac{k}{2} + \nu,\, 1 - \frac{k}{2};\, \nu+1;\, \left(\frac{\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n+\beta}}{\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\beta}}\right)^2\right), \tag{2.42}$$

其中 Re($\sqrt{\alpha}$) $\geq \mathrm{Re}(\sqrt{\beta}) > 0$ 以及 Re(ν) > 0。对于，请比较公式（2.42）与下文中的（2.62）。 $\alpha = k$

我们的恒等式（2.35）及其推论（参见下文的（2.62））与（2.42）有些相似，但似乎彼此独立，因为在（2.42）中，要求贝塞尔函数的指标相同。在我们的公式（2.35）中，有一个自由复参数 s，尽管修正贝塞尔函数 $I_\nu(x)$ 的指标由函数方程确定，等于 $r-1$。对于（2.42），贝塞尔函数的指标保持相同，但它们与关于 $\zeta_k(s)$的函数方程无关，也就是说，它们不依赖于 k。

Berndt、Dixit、Kim 和 Zaharescu 得到的公式（2.42）可用于推广 Dixon 和 Ferrar 的已知公式[24–26]。例如，利用（2.42），他们得以证明这个优美的恒等式（见[[11],第 329 页，推论 4.6。]）

$$\frac{\beta^{\nu/2}\Gamma\left(\nu + \frac{k}{2}\right)}{2\pi^{\nu+\frac{k}{2}}} \sum_{n=0}^\infty \frac{r_k(n)}{(n+\beta)^{\nu+\frac{k}{2}}} = \sum_{n=0}^\infty r_k(n)\, n^{\nu/2} K_\nu\left(2\pi\sqrt{n\beta}\right), \tag{2.43}$$

这对任意正整数 $k > 1$ 及 Re($\sqrt{\beta}$)、Re(ν) > 0均成立。另一方面，由于 2.43 可由 Berndt 的一般贝塞尔展开 1.30立即得到，这是因为 $\zeta_k(s)$ 满足海克函数方程。

在一般情形下，我们现在证明，2.34) 蕴含 1.30)，其方式与类似公式 2.42) 得出 2.43) 相同。

推论 2.5. 设 $Re(s) > \sigma_a$ 且 $\phi(s)$ 是属于类 $\mathcal{A}$ 的狄利克雷级数。则对于每一个 $x > 0$，下列贝塞尔展开成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2)^s} = \frac{\rho\,\Gamma(r)\,x^{2r-2s}\,\Gamma(s-r)}{\Gamma(s)} + x^{-2s}\phi(0) + \frac{2x^{r-s}}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} b(m)\,\mu_m^{\frac{s-r}{2}}\,K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_m}\,x\right). \tag{2.44}$$

证明。 将（2.34）两边乘以 $\Gamma(r)\ y^{1-r}$：得到

$$\Gamma(r)\,y^{1-r} \sum_{m=1}^{\infty} b(m)\,\mu_m^{\frac{s+1-2r}{2}}\,J_{r-1}(2\sqrt{\mu_m}\,y)\,K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_m}\,x\right) + \frac{\rho\,\Gamma(r)\,x^{r-s}\,\Gamma(s-r)}{2} + \frac{x^{s-r}\phi(0)\,\Gamma(s)}{2\,(x^2+y^2)^s}$$
$$= \frac{x^{s-r}}{2}\,\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2 + y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\ \frac{s+1}{2};\ r;\ \frac{4y^2\lambda_n}{(\lambda_n + x^2 + y^2)^2}\right).$$

我们在推论 2.4 的证明开头已经说明，上述两个级数关于 y 在 $0 \le y < M$时均绝对且一致收敛。因此，令 $y \to 0^+$，利用（2.33）中的第一个极限关系，并回顾 ${}_2F_1$（a，b；c；0）$= 1$，我们得到恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda_n + x^2)^s} = \frac{\rho\,\Gamma(r)\,x^{2r-2s}\,\Gamma(s-r)}{\Gamma(s)} + x^{-2s}\phi(0) + \frac{2x^{r-s}}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} b(m)\,\mu_m^{\frac{s-r}{2}}\,K_{s-r}\left(2\sqrt{\mu_m}\,x\right),$$

这就是 Berndt公式（1.30）限定于类 $\mathcal{A}$。 □

由于（2.44）可视为沃森公式的一种推广 [[60], 第 299 页，式（4）], 现在我们看到，推论 2.4 也为类 $\mathcal{B}$ 给出了沃森公式的另一种类比。 [4]

推论 2.6. 设 $Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 是一个正定实二次型，即 $\Delta := 4AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$。此外，定义 $k := \sqrt{\Delta}/2A$。

如果 ϕ（s） 是属于 $\mathcal{B}$ 类的狄利克雷级数，且 s 是一个满足 Re（s） $> \frac{\sigma_a}{2}$ 的复数，则有以下公式：

$$-2\phi(0)\,C^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(A\lambda_n^2 + B\,\lambda_n + C)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(A\lambda_n^2 - B\,\lambda_n + C)^s} = \rho\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,A^{-s}k^{1-2s} +$$
$$+ \frac{4k^{\frac{1}{2}-s}A^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\mu_n^{s-\frac{1}{2}}\,\cos\left(\frac{B\mu_n}{A}\right)K_{s-\frac{1}{2}}\left(2k\,\mu_n\right), \quad \delta = 0, \tag{2.45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(A\lambda_n^2 + B\,\lambda_n + C)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(A\lambda_n^2 + B\,\lambda_n + C)^s} = -\frac{4k^{\frac{1}{2}-s}A^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{s-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{B\mu_n}{A}\right)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(2k\,\mu_n\right), \quad \delta = 1. \tag{2.46}$$

[4]推论 2.6 本质上见于 [[48], 例 5.1.，式（5.2）、（5.3）], ，尽管该文献对算术函数 $a(n)$ 还有一些额外假设。

证明。 从（2.45）开始，我们利用以下事实：如果 ϕ（s） $\in \mathcal{B}$ 且 $\delta = 0$，那么 ϕ（$2s$） $\in \mathcal{A}$ 且 $r = \frac{1}{2}$。因此，为了得到（2.45），我们首先在（2.34）中使用 ϕ（s），将其替换为 ϕ（$2s$）和 $r = \frac{1}{2}$。

借助高斯超几何函数的众所周知情形 [[47], 第 3 卷，第 461 页，式 (7.3.1.106)],

$$ {}_2F_1\left(a, a+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{z}\right)^{-2a} + \left(1-\sqrt{z}\right)^{-2a}\right], \tag{2.47} $$

式 (2.34) 的左端可化简为

$$ \frac{x^{s-\frac{1}{2}}}{2}\,\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{\left(\lambda_n^2+x^2+y^2\right)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{4y^2\lambda_n^2}{\left(\lambda_n^2+x^2+y^2\right)^2}\right) $$

$$ \frac{x^{s-\frac{1}{2}}}{4}\,\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\left\{\left(\lambda_n^2+2y\,\lambda_n+x^2+y^2\right)^{-s} + \left(\lambda_n^2-2y\,\lambda_n+x^2+y^2\right)^{-s}\right\},\ \mathrm{Re}(s) > \frac{\sigma_a}{2}. \tag{2.48} $$

另一方面 对于每个 $s \in \mathbb{C}$，我们可以将式 (2.34) 的右端写成如下形式 :

$$ \sum_{m=1}^{\infty} b(m)\,\mu_m^{s-\frac{1}{2}}\,\cos\left(2\mu_m y\right)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\,\mu_m\,x\right) + \frac{\sqrt{\pi}\,\rho\,x^{\frac{1}{2}-s}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{4} + \frac{x^{s-\frac{1}{2}}\,\phi(0)\,\Gamma(s)}{2\,\left(x^2+y^2\right)^s}, \tag{2.49} $$

其中我们使用了特殊情形 $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$ (2.20)，以及 $\phi(2s)$ 在 $\rho/2$ 处的留数为 $s = 1/2$ 这一事实（见注释 1.4）。

比较式 (2.48) 与式 (2.49) 可得公式：

$$ -\frac{2\phi(0)}{\left(x^2+y^2\right)^s} + \sum_{n=1}^{\infty}a(n)\left\{\left(\lambda_n^2+2y\,\lambda_n+x^2+y^2\right)^{-s} + \left(\lambda_n^2-2y\,\lambda_n+x^2+y^2\right)^{-s}\right\} = $$

$$ = \frac{\sqrt{\pi}\,\rho\,x^{1-2s}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} + \frac{4x^{\frac{1}{2}-s}}{\Gamma(s)}\sum_{m=1}^{\infty} b(m)\,\mu_m^{s-\frac{1}{2}}\cos\left(2\mu_m y\right)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\,\mu_m\,x\right). $$

将前一个等式两边同时乘以 A^{-s} 并定义 $y = \frac{B}{2A}$ 和 $x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}$: $= k$，立即得到（2.45）。

（2.46）的证明类似：在此情形下，注意 ϕ（$2s-1$） $\in \mathcal{A}$ 其中 $r = \frac{3}{2}$（见注释 1.4），因此只需在 2.34）中取 $r = \frac{3}{2}$。利用公式 [[47], 第 3 卷，第 461 页，等式（7.3.1.107）],

$$ {}_2F_1\left(a, a+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{2(2a-1)\sqrt{z}}\left\{\left(1-\sqrt{z}\right)^{1-2a} - \left(1+\sqrt{z}\right)^{1-2a}\right\}, $$

经过一些简单化简后，我们看到（2.34）的左端可化为

$$ \frac{x^{s-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi y}}\,\Gamma(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\left\{\frac{1}{\left(\lambda_n^2-2y\lambda_n+x^2+y^2\right)^{s-1}} - \frac{1}{\left(\lambda_n^2+2y\lambda_n+x^2+y^2\right)^{s-1}}\right\}, \tag{2.50} $$

当 $\mathrm{Re}(s) > \frac{\sigma_a}{2}$。

关于（2.34）的右端，注意当 $\delta = 1$ 属于类 $\mathcal{B}$时，有 $\rho = \phi(0) = 0$，因此只需化简涉及贝塞尔函数的级数。

对于每个 $s \in \mathbb{C}$，这个级数可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{s-1}\,J_{\frac{1}{2}}(2\mu_n\,y)\,K_{s-\frac{3}{2}}(2\mu_n\,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{s-\frac{3}{2}}\,\sin(2\mu_n\,y)\,K_{s-\frac{3}{2}}(2\mu_n\,x),\tag{2.51}$$

其中我们使用了 $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$ (2.20)。比较两边的式子 (2.50) 和 (2.51)，并将 s 替换为 $s+1$，定义 $y=\frac{B}{2A}$ 和 $x=\frac{\sqrt{\Delta}}{2A}:=k$，我们得到 (2.46)。

□

注 2.4. 前一个推论多少让人联想到经典的 Epstein ζ 函数塞尔伯格–乔拉公式 [2, 50]。作为沃森公式的推广，预期公式（2.34）可用于推导吉南德和科什利亚科夫公式的新类比式 [10, 12, 13, 30, 39, 45, 53], ，以及经典 Epstein ζ 函数的新扩展。我们将在别处展开这项研究；就本文而言，使用公式（2.25）已足够。

2.2 一些有用的例子

在他们的论文 [[22], 第 312] 页中，Dixit、Kumar、Maji 和 Zaharescu 使用了 Jacobi $\psi-$ 函数的一种变体，其形式为

$$\psi(x,z):=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\cos(\sqrt{\pi\,x}\,nz),\quad \mathrm{Re}(x)>0,\quad z\in\mathbb{C}.\tag{2.52}$$

此处考察的参数 z 与他们定理陈述中出现的参数完全相同（见上文公式（1.1））。因此，为了推广他们的结果，我们需要将广义 theta 函数（2.22）转化为依赖于新参数 2.52）这一更对称的形式 z。

这由以下定义给出：

定义 2.2。设 $\phi(s)$ 是属于定义 $\mathcal{A}$ 所述类 $\mathcal{A}$ 的任意狄利克雷级数，其中定义 1.2。那么，对于 $\mathrm{Re}(x)>0$ 且 $z\in\mathbb{C}$，我们定义与 $\phi(s)$ 相关联的广义雅可比 ψ–函数如下：

$$\psi_\phi(x,z):=2^{r-1}\,\Gamma(r)\left(\sqrt{x}\,z\right)^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,\lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\lambda_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n x}\,z\right)=\Phi\left(x,\sqrt{x}\,z\right),\tag{2.53}$$

其中 $\Phi(x,\ y)$ 由式（2.22）给出。类似地，还可以定义：

$$\tilde{\psi}_\phi(x,z):=2^{r-1}\Gamma(r)\,\left(\sqrt{x}\,z\right)^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\mu_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\mu_n x}\,z\right)=\Psi\left(x,\sqrt{x}\,z\right).\tag{2.54}$$

借助这个新参数 $z\in\mathbb{C}$，我们注意到变换公式（2.24）可以改写为

$$\begin{aligned}\psi_\phi(x,z)&:=2^{r-1}\,\Gamma(r)\,x^{\frac{1-r}{2}}z^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,\lambda_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\lambda_n x}\,J_{r-1}\left(\sqrt{\lambda_n x}\,z\right)\\ =\phi(0)+\frac{\rho}{x^r}\Gamma(r)\,e^{-\frac{z^2}{4}}+2^{r-1}\Gamma(r)\,z^{1-r}\,x^{-\frac{r+1}{2}}\,e^{-z^2/4}\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,\mu_n^{\frac{1-r}{2}}\,e^{-\frac{\mu_n}{x}}\,I_{r-1}\left(\sqrt{\frac{\mu_n}{x}}\,z\right)&:=\\ :=\phi(0)+\frac{\rho\Gamma(r)}{x^r}\,e^{-\frac{z^2}{4}}+\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{x^r}\,\tilde{\psi}_\phi\left(\frac{1}{x},iz\right).\end{aligned}\tag{2.55}$$

此外，恒等式（2.25）采用以下新形式：

$$x^{r/2}\psi_\phi(x,z)-\frac{\rho\Gamma(r)}{x^{r/2}}\,e^{-\frac{z^2}{4}}=e^{-\frac{z^2}{4}}\,x^{-r/2}\,\tilde{\psi}_\phi\left(\frac{1}{x},iz\right)+\phi(0)\,x^{r/2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{r}{2}+it\right)\,\phi\left(\frac{r}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{r}{2}+it;\,r;\,-\frac{z^2}{4}\right)x^{-it}\,dt. \tag{2.56}$$

这对每个 $z\in\mathbb{C}$ 且 $\mathbf{Re}(x)>0$ 都成立。

例 2.1。设 $\alpha>0$ 和 $r_\alpha(n)$ 分别定义为展开式（1.34）的系数。回顾与之对应的狄利克雷级数：

$$\zeta_\alpha(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_\alpha(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\sigma_\alpha:=\begin{cases}\alpha/2 & \text{if } \alpha\geq 4\\ 1+\frac{\alpha}{4} & \text{if } 0<\alpha<4\end{cases}. \tag{2.57}$$

由引理 1.1可知，$\phi(s)=\pi^{-s}\zeta_\alpha(s)$ 满足海克函数方程（1.25），参数为 $r=\frac{\alpha}{2}$，且属于 $\mathcal{A}$类。

对于这个特殊例子，雅可比 ψ–函数（2.53）的类似形式为

$$\psi_\alpha(x,z):=2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi x}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sum_{n=1}^{\infty}r_\alpha(n)\,n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\,e^{-\pi n\,x}\,J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\,n\,x}\,z),\ \mathrm{Re}(x)>0,\quad z\in\mathbb{C} \tag{2.58}$$

注意，我们可以利用（2.52）从（2.58）中恢复经典雅可比函数。利用特殊情形

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos(x),\quad r_1(n)=\begin{cases}2 & \text{if } n \text{ is a square}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

由（2.58）和（2.20）可得

$$\psi_1(x,z):=\sqrt{2\pi z}\,(\pi x)^{1/4}\,\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-\pi n^2\,x}\,J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\pi\,x}\,n\,z)=2\,\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}\,\cos\left(\sqrt{\pi x}\,n\,z\right):=2\,\psi(x,z).$$

由变换公式（2.55），我们看到下述恒等式成立

$$\psi_\alpha(x,z)=-1+\frac{e^{-z^2/4}}{x^{\alpha/2}}+\frac{e^{-z^2/4}}{x^{\alpha/2}}\,\psi_\alpha\left(\frac{1}{x},\,iz\right). \tag{2.59}$$

再次注意，当 $\alpha=1$时，我们便得到（1.5）。

此外，我们可以将（2.59）写成合适的积分形式（2.56）。注意，$\phi(s):=\pi^{-s}\zeta_\alpha(s)$ 的临界线 $(s)=\frac{\alpha}{4}$，因此（2.56）给出了如下表示

$$x^{\frac{\alpha}{4}}\psi_\alpha(x,z)-x^{-\alpha/4}\,e^{-\frac{z^2}{4}}=e^{-\frac{z^2}{4}}x^{-\alpha/4}\,\psi_\alpha\left(\frac{1}{x},\,i\,z\right)-x^{\alpha/4}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}+it;\,\frac{\alpha}{2};\,-\frac{z^2}{4}\right)\,x^{-it}\,dt, \tag{2.60}$$

其中

$$\eta_\alpha(s)=\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta_\alpha(s). \tag{2.61}$$

表示式（2.60）在证明下面的定理 1.1 时将非常有用。

由推论 2.4我们可以推导出这个奇妙的公式

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_\alpha(n)}{(n+x^2+y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\,\frac{s+1}{2};\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{4n\,y^2}{(n+x^2+y^2)^2}\right)$$
$$=\frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(s-\frac{\alpha}{2})\,x^{\alpha-2s}}{\Gamma(s)}+\frac{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\pi^{s+1-\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-s}y^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}r_\alpha(n)\,n^{\frac{s+1-\alpha}{2}}\,J_{\frac{\alpha}{2}-1}(2\pi\sqrt{n}y)\,K_{s-\frac{\alpha}{2}}\left(2\pi\sqrt{n}\,x\right),\qquad(2.62)$$

对每一对正数均成立的 正数 x 和 y 和 s 这样的 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_\alpha$，其中 σ_α 由（2.57）给出 .

当 $\alpha=1$ 我们得到 Kober 提出的沃森公式的一个推广 [[38], 第614]: 由于 $r_1(n)=2$ 仅当n 是一个完全平方数时才成立，因此我们可以采用导出推论 2.6 的证明过程中的步骤，得到公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n^2+2y\,n+x^2+y^2)^s}=\frac{\sqrt{\pi}x^{1-2s}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}+\frac{4\pi^s}{x^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-\frac{1}{2}}\,\cos(2\pi n\,y)\,K_{s-\frac{1}{2}}\,(2\pi\,n\,x)\,,\qquad(2.63)$$

这对于每一个实部$(s)\ >\frac{1}{2}$ 和正的 x 以及 y均成立。令 $y=0$ 在（2.63）中取值，即可推出沃森公式 [60]。

例 2.2. 设 Q 是一个实的二元正定二次型，并设 $\Delta:=4AC-B^2$ 是其判别式。与 Q (1.12) 相关联的 Epstein ζ 函数满足海克函数方程

$$\eta_Q(s):=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s,Q)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s,Q):=\eta_Q(1-s).$$

因此，我们可以将前面的形式体系应用于这对狄利克雷级数。

$$\phi(s)=\psi(s)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_Q(n)}{n^s},\quad\mathrm{Re}(s)>1,\qquad(2.64)$$

其中，$r_Q(n)$ 表示 n by Q 的表示数。由于 $\zeta(s,Q)$ 在 $s=1$ 处有一个留数为$2\pi/\sqrt{\Delta}$的简单极点， $\phi(s)$ 在 $s=1$ 处有一个留数为 1 的简单极点。此外， $\phi(0)=-1$。

由（2.53），我们可以将雅可比 ψ–函数（2.53）写成如下形式:

$$\psi_Q(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}r_Q(n)\,e^{-\frac{2\pi nx}{\sqrt{\Delta}}}\,J_0\left(\sqrt{\frac{2\pi nx}{\Delta^{1/2}}}\,z\right),\quad\mathrm{Re}(x)>0,\ \ z\in\mathbb{C}.\qquad(2.65)$$

利用（2.24），（2.65）的变换公式为

$$\sqrt{x}\,\psi_Q(x,z)-\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{x}}=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{x}}\,\psi_Q\left(\frac{1}{x},\,iz\right)-\sqrt{x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_Q\left(\frac{1}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+it;\,1;\,-\frac{z^2}{4}\right)x^{-it}\,dt,\qquad(2.66)$$

其中

$$\eta_Q(s):=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s,Q).\qquad(2.67)$$

与前一个公式（2.60）一样，（2.66）将在定理 1.2 的证明中发挥重要作用。

还可以得到更多恒等式。通过直接应用推论 2.4 ，我们可以推导出以下公式：

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_Q(n)}{(n+x^2+y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\,\frac{s+1}{2};\,1;\,\frac{4ny^2}{(n+x^2+y^2)^2}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{x^{2-2s}}{s-1}+\frac{2x^{1-s}}{\Gamma(s)}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^s\sum_{n=1}^{\infty}r_Q(n)\,n^{\frac{s-1}{2}}\,J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{n}{\Delta}}\,y\right)\,K_{s-1}\left(4\pi\,\sqrt{\frac{n}{\Delta}}\,x\right),$$

这似乎是新的。

例 2.3. 设 χ 是模 q的本原狄利克雷特征。若 χ 为偶数，我们定义 $\delta=0$ ；若 χ 为奇数，则取 $\delta=1$。本例中，我们考虑狄利克雷级数

$$L_k\left(s,\chi\right):=\sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}}\frac{n_1^{\delta}\,\chi(n_1)\ldots n_k^{\delta}\,\chi(n_k)}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}(1+\delta).$$

首先注意到， $L_k\left(s,\chi\right)$ 可改写为

$$L_k\left(s,\chi\right):=\sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}}\frac{n_1^{\delta}\,\chi(n_1)\ldots n_k^{\delta}\,\chi(n_k)}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{k,\chi}(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}(1+\delta),$$

其中， $r_{k,\chi}(n)$ 是 $r_k(n)$ 的特征类比，

$$r_{k,\chi}(n):=\sum_{n_1^2+\ldots+n_k^2=n}n_1^{\delta}\chi(n_1)\,\cdot\ldots\cdot\,n_k^{\delta}\,\chi(n_k),\tag{2.68}$$

其中求和遍历了 n 表示为若干平方数之和的任意分解。

本文将在第 5.2 小节证明， $L_k(s,\chi)$ 可以解析延拓为满足海克函数方程的整函数

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k\left(s,\chi\right)=\frac{(-i)^{\delta k}G^k(\chi)}{q^{k/2}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)}\Gamma\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)\,L_k\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s;\,\overline{\chi}\right).\tag{2.69}$$

因此，我们可以将前面的公式应用于这一对狄利克雷级数

$$\phi(s):=\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{k,\chi}(n)}{n^s},\quad \psi(s):=\frac{(-i)^{\delta k}G^k(\chi)}{q^{k/2}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{k,\overline{\chi}}(n)}{n^s}.\tag{2.70}$$

根据定义（2.53），我们可以考虑与雅可比的 ψ–函数相关联的类比对象 L_k（s， χ），

$$\psi_{\chi,k}(x,z):=2^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}}x\,z\right)^{1-\frac{k}{2}-k\delta}\sum_{n=1}^{\infty}r_{k,\chi}(n)\,n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\,e^{-\frac{\pi n}{q}x}\,J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}n\,x}\,z\right).\tag{2.71}$$

当 $k=1$, (2.71) 化为论文末尾给出的雅可比 ψ–函数的特征类比[[22], 第 321] 页以及 [[21], 定理 1.3。]。事实上，由于 $r_{1,\chi}(n)\ =2\sqrt{n}^{\delta}\chi(\sqrt{n})$ 仅当 n 是一个完全平方数时，我们看到 (2.71) 给出

$$\psi_{\chi,1}(x,z):=2^{\frac{1}{2}+\delta}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}}x\,z\right)^{\frac{1}{2}-\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,\sqrt{n}\,e^{-\frac{\pi n^2}{q}x}\,J_{\delta-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}x}\,n\,z\right)$$
$$=\begin{cases}2\,\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,e^{-\frac{\pi n^2}{q}x}\,\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}x}\,n\,z\right) & \delta=0\\ \frac{2}{z}\sqrt{\frac{q}{\pi x}}\,\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,e^{-\frac{\pi n^2}{q}x}\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}x}\,n\,z\right) & \delta=1.\end{cases}$$

由于 $\phi(0) = \rho = 0$ 对于 $\phi(s)$ 由 (2.70) 给出，我们可以从一般公式推导出：

$$\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\chi}(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\, e^{-\frac{\pi n}{q}x}\, J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}n\,x}\,z\right) = \frac{(-i)^{\delta k}G^k(\chi)}{q^{k/2}}\,\frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\overline{\chi}}(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\, e^{-\frac{\pi n}{q\,x}}\, I_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{qx}}\,z\right)$$

根据关系式（2.56），可将其改写为

$$x^{\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}}\,\psi_{\chi,k}(x,z) = \frac{(-i)^{\delta k}G^k(\chi)\,e^{-\frac{z^2}{4}}}{q^{k/2}}\,x^{-\frac{k}{4}-\frac{k}{2}\delta}\,\psi_{\overline{\chi},k}\left(\frac{1}{x}, iz\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right)\cdot {}_1F_1\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it;\,\frac{k}{2}+k\delta;\,-\frac{z^2}{4}\right)x^{-it}\,dt, \tag{2.72}$$

其中

$$\eta_k(s,\chi) := \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k(s,\chi)\,. \tag{2.73}$$

由推论 2.4，我们可以推导出（2.62）的特征类比，即：

$$\frac{q^{k/2}i^{\delta k}}{G^k(\chi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{k,\chi}(n)}{(n+x^2+y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\,\frac{s+1}{2};\,\frac{k}{2}+k\delta;\,\frac{4y^2n}{(n+x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)}{\Gamma(s)\,y^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,x^{s-\frac{k}{2}-k\delta}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{1+s-\frac{k}{2}-k\delta}\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\overline{\chi}}(n)\,n^{\frac{s+1-k}{2}-k\delta}\,J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\frac{2\pi\sqrt{n}}{q}y\right)K_{s-\frac{k}{2}-k\delta}\left(\frac{2\pi\sqrt{n}}{q}\,x\right). \tag{2.74}$$

如果 $k = 1$ 且 $\delta = 0$，我们还可以利用特殊情形（2.47）得到沃森公式的特征类比，该公式在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 时成立，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\chi(n)}{(n^2+2yn+x^2+y^2)^s} = \frac{4\,x^{\frac{1}{2}-s}\,G(\chi)}{\Gamma(s)\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}+s}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi}(n)\,n^{s-\frac{1}{2}}\,\cos\left(\frac{2\pi n}{q}y\right)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi n}{q}x\right).$$

令上面的 $y = 0$，我们重新推导出 Berndt、Dixit 和 Sohn 给出的公式 [[10], 第 56 页，公式 (2.9。)]。

当 $k = 1$ 和 $\delta = 1$时，我们看到 $L_1(s,\ \chi) = 2\,L(2s-1,\ \chi)$，其中 χ 是一个奇狄利克雷特征。在这种情况下，(2.74) 蕴含恒等式：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\chi(n)}{(n^2+2yn+x^2+y^2)^s} = -\frac{4i\,x^{\frac{1}{2}-s}\,G(\chi)}{\Gamma(s)\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{s+\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi}(n)\,n^{s-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{2\pi n}{q}y\right)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi n}{q}x\right),$$

当 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 时有效。这是沃森公式的另一种类似形式。

例 2.4. 设 $f(\tau)$ 是一个权为 $k \geq 12$ 的全模群全纯尖点形式，并且 $L_f(s)$ 是与之相关的 $L-$函数，

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}. \tag{2.75}$$

根据引理 1.4 ，我们知道 $L_f(s)$ 可以解析延拓为一个满足函数方程的整函数

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,L_f(s) = (-1)^{k/2}\ (2\pi)^{-(k-s)}\ \Gamma(k-s)\,L_f(k-s). \tag{2.76}$$

由前面的结果，我们　　可以设想雅可比 ψ–函数（2.53）的如下类比形式　　m

$$\psi_f(x,z) := (k-1)!\left(\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,z\right)^{1-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{\frac{1-k}{2}}\,e^{-2\pi n\,x}\,J_{k-1}\left(\sqrt{2\pi n\,x}\,z\right),\ \mathrm{Re}(x)>0,\ z\in\mathbb{C}. \tag{2.77}$$

此外，我们可以建立如下公式

$$x^{\frac{k}{2}}\psi_f(x,z) = (-1)^{k/2}\,e^{-\frac{z^2}{4}}x^{-k/2}\,\psi_f\left(\frac{1}{x},\,iz\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_f\left(\frac{k}{2}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{2}+it;\,k;\,-\frac{z^2}{4}\right)x^{-it}dt, \tag{2.78}$$

其中

$$\eta_f(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,L_f(s). \tag{2.79}$$

此外，当 $\mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}$ 且 $x, y > 0$，推论 2.4 的以下特殊情形成立：

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)}{(n+x^2+y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\,\frac{s+1}{2};\,k;\,\frac{4n\,y^2}{(n+x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \frac{2\,(2\pi)^{s+1-k}\,(k-1)!\,(-1)^{k/2}}{\Gamma(s)\,y^{k-1}x^{s-k}}\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)\,n^{\frac{s+1}{2}-k}\,J_{k-1}(4\pi\sqrt{n}\,y)\,K_{s-k}\left(4\pi\sqrt{n}\,x\right).\end{aligned} \tag{2.80}$$

例如，　例如，当 $L_f(s)$ 是与拉马努金的 τ–函数关联的狄利克雷级数时　　，

$$L_\tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s) > \frac{13}{2},$$

我们从（2.80）得出

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(n+x^2+y^2)^s}\,{}_2F_1\left(\frac{s}{2},\,\frac{s+1}{2};\,12;\,\frac{4ny^2}{(n+x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \frac{2\times 11!\times(2\pi)^{s-11}}{\Gamma(s)\,y^{11}x^{s-12}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,n^{\frac{s-23}{2}}\,J_{11}(4\pi\sqrt{n}\,y)\,K_{s-12}\left(4\pi\sqrt{n}\,x\right),\ x,y>0,\ \mathrm{Re}(s)>\frac{13}{2},\end{aligned}$$

这似乎是新的（关于一个配套公式，参见 [[9], 式（13.1）] 。

例 2.5。 设 $f(\tau)$ 是一个权为 k 的全模群全纯尖点形式，且 $a_f(n)$ 是其傅里叶系数。另假设 p， q 是满足 $(p,\ q) = 1$ 的整数，并考虑狄利克雷级数

$$L_f(s, p/q) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)\,e^{\frac{2\pi ip}{q}n}}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}.$$

我们由引理 1.4 知 $L_f(s,\ p/q)$ 是整函数，并满足函数方程：

$$\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_f\left(s,\frac{p}{q}\right) = (-1)^{k/2}\ \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-(k-s)}\Gamma(k-s)\,L_f\left(k-s,\,-\overline{p}/q\right),$$

其中 $\overline{p}$ 满足 $p\overline{p}\equiv 1$ 模 q。

由此，我们可以如下构造雅可比的类似物 ψ–函数（2.53）

$$\psi_{f,p/q}(x,z) := (k-1)!\left(\sqrt{\frac{\pi x}{2q}}\,z\right)^{1-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\,e^{\frac{2\pi i p}{q}n}\,n^{\frac{1-k}{2}}\,e^{-\frac{2\pi n}{q}x}\,J_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{q}x}\,z\right), \tag{2.81}$$

在 $\mathrm{Re}(x) > 0$ and $z \in \mathbb{C}$ 时定义。

显然，$\psi_{f,\ p/q}(x,\ z)$ (2.55) 的变换公式明确写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\,e^{\frac{2\pi i p}{q}n}\,n^{\frac{1-k}{2}}\,e^{-\frac{2\pi n}{q}x}\,J_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{q}x}\,z\right) = \frac{(-1)^{k/2}\,e^{-z^2/4}}{x}\sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\,e^{-\frac{2\pi i \overline{p}}{q}n}\,n^{\frac{1-k}{2}}\,e^{-\frac{2\pi n}{qx}}\,I_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{qx}}\,z\right), \tag{2.82}$$

并且它有如下积分表示,

$$x^{k/2}\psi_{f,p/q}(x,z) = \frac{e^{-z^2/4}(-1)^{k/2}}{x^{k/2}}\,\psi_{f,-\frac{\overline{p}}{q}}\left(\frac{1}{x}, iz\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_f\left(\frac{k}{2}+it, \frac{p}{q}\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{2}+it;\,k;\,-\frac{z^2}{4}\right)\,x^{-it}dt, \tag{2.83}$$

其中

$$\eta_f\left(s, \frac{p}{q}\right) := \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_f\left(s, \frac{p}{q}\right). \tag{2.84}$$

3 与 $\zeta_\alpha(s)$ 相关的组合的零点

3.1 与 θ 函数的幂相关的狄利克雷级数 s

哈代的证明中其定理的核心在于，雅可比的 θ–函数满足

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{4}^-}\frac{d^n}{d\omega^n}\,\theta\left(e^{2i\omega}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

如果我们将 $\theta(x)$ 在（3.1）中的传统作用替换为类似物 $\psi_\alpha(x,\ z)$，我们将在下文看到，对极限（3.1）的研究可以通过计算

$$\lim_{\delta \to 0^+}\psi_\alpha(i+\delta, z).$$

然而，考察 $\psi_\alpha(i+\delta, z)$与研究级数是相同的

$$2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,r_\alpha(n)\,n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\,e^{-\pi n\,\delta}\,J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\,n\,(i+\delta)}\,z) \tag{3.2}$$

当 $\delta \to 0^+$时。对于 $\alpha = 1$，这项研究是在[[22], p. 314] 完成的，而且这是一个较容易的情形，因为 $r_1(n) = 2$ 若 n是完全平方数，则其值为此，否则为零。事实上，表达式（3.2）可化简为

$$\psi_1(i+\delta, z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi n^2\delta}\,\cos\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,n\,z\right),$$

一旦将前面的级数按 n偶数项和 n 奇数项分开，就可以直接计算为

$$\psi_1(i+\delta,z)=2\,\psi_1\left(4\delta,\sqrt{\frac{i+\delta}{\delta}}\,z\right)-\psi_1\left(\delta,\sqrt{\frac{i+\delta}{\delta}}\,z\right).$$

因此，一旦应用 $\delta\to 0^+$ 的变换公式（2.59），对极限 ψ_1（x， z）的研究就完成了!

通过考察（3.2），可以看出，对于一般的 n，采用先前的技巧（即，将关于偶数和奇数 $\alpha>0$的求和分开）可能会很困难，因此我们需要更多关于系数 （-1）$^n r_\alpha$（n）以及与之对应的狄利克雷级数的信息。这项研究将通过一系列重要的引理展开。

这些引理涉及某些雅可比 theta 函数变体的幂。与 ϑ_3（τ）（1.35）的情形一样，我们可以考虑其余 theta 常数的任意幂，

$$\vartheta_2(\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}e^{\pi i\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},\quad \vartheta_4(\tau)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau n^2},\quad \mathrm{Im}(\tau)>0, \tag{3.3}$$

并通过取 $i\infty$处的

$$\theta_2(x):=\vartheta_2(ix)=2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 x},\quad \theta_4(x):=\vartheta_4(ix)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi n^2 x}.$$

由雅可比公式（1.5）可知， θ_2（x）与 θ_4（x）通过变换公式相联系

$$\theta_2\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}\,\theta_4\left(x\right). \tag{3.4}$$

类似于 r_α（n）的算术函数源于对 θ_2（x）和 θ_4（x）的幂的研究。例如，对（1.35）和（1.36）中的计算稍作修改，我们可以将 θ_2^α（x）的傅里叶系数定义如下:

$$\begin{aligned}\vartheta_2^\alpha(ix):=\theta_2^\alpha(x)&=\left(2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\pi x\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^\alpha=\left(2\,e^{-\frac{\pi x}{4}}+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi x(n+\frac{1}{2})^2}\right)^\alpha\\&=2^\alpha e^{-\frac{\pi\alpha x}{4}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi x\left(n^2+n\right)}\right)^\alpha=2^\alpha\,e^{-\frac{\pi\alpha x}{4}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi x\left(n^2+n\right)}\right)^j\\&:=\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{r}_\alpha(m)\,e^{-\pi\left(m+\frac{\alpha}{4}\right)x}\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，我们将新的求和变量取为 $m:=n_1(n_1+1)+\ldots+n_j(n_j+1)$。类似于 $r_\alpha(n)$，可以证明系数 $\tilde{r}_\alpha(n)$[5] 关于 n呈多项式增长。还要注意，根据构造， $\tilde{r}_\alpha(0)=2^\alpha$ 。

今后，引入与系数 $\tilde{r}_\alpha(n)$ 相关的狄利克雷级数是有意义的，也就是说，对于某个有限的 $\tilde{\sigma}_\alpha$，我们定义

$$\tilde{\zeta}_\alpha(s):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{r}_\alpha(n)}{\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\tilde{\sigma}_\alpha. \tag{3.6}$$

[5]继续我们的推理并不一定需要形如 (1.37) 的界。只需验证 Lagarias 和 Rains [[40], 第 18 页，定理 3.3。] 的论证适用于 $\vartheta_2(\tau)$。见下文的引理 3.1。

我们还可以为 $\theta_4(x)$ 的任意正幂引入一个狄利克雷级数。再次按照 (1.35) 进行:

$$\begin{aligned}\vartheta_4^\alpha(ix) := \theta_4^\alpha(x) &= \left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi n^2 x}\right)^\alpha \\ &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\,2^j\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi n^2 x}\right)^j \\ &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\,2^j\sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_j}\,e^{-\pi(n_1^2+\ldots+n_j^2)\,x} \\ &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\,2^j\sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{\infty}(-1)^{n_1^2+n_2^2+\ldots+n_j^2}\,e^{-\pi(n_1^2+\ldots+n_j^2)\,x}.\end{aligned}$$

现在，如果我们定义一个新的求和变量 $m = n_1^2 + \ldots + n_j^2$，那么对 j 的有限求和恰好与定义（1.36）时得到的结果相同，只是多了一个包含 $(-1)^m$ 的因子。根据（1.36），我们得到

$$\begin{aligned}\theta_4^\alpha(x) &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\,2^j\sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{\infty}(-1)^{n_1^2+n_2^2+\ldots+n_j^2}\,e^{-\pi(n_1^2+\ldots+n_j^2)\,x} \\ &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,r_\alpha(m)\,e^{-\pi m x}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

上述计算表明，$(-1)^n r_\alpha(n)$ 是 $\vartheta_4^\alpha(\tau)$ 在尖点 $i\infty$ 处的傅里叶展开的系数。

与这些系数相联系的狄利克雷级数为:

$$\zeta_\alpha^\star(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,r_\alpha(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_\alpha := \begin{cases}\alpha/2 & \text{if } \alpha \geq 4\\ 1+\frac{\alpha}{4} & \text{if } 0<\alpha<4.\end{cases} \tag{3.8}$$

在下一小节中，我们通过一个函数方程将狄利克雷级数（3.6）和（3.8）联系起来，并重新证明一个关于其系数的求和公式。

3.2 求和公式

˜为建立狄利克雷级数 $\zeta_\alpha^\star(s)$ 与 $\zeta_\alpha(s)$之间的联系，我们需要确认后者确实是一个狄利克雷级数，也就是说，$\tilde{\sigma}_\alpha$ 在（3.6）中是有限的。下一个引理给出 $\tilde{r}_\alpha(n)$的一个估计，其思路与 [40] 中得到的界相似。

引理 3.1。设 $\alpha > 0$ and $\tilde{r}_\alpha(n)$ 由（*3.5*）定义。则，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$\tilde{r}_\alpha(n)$ 满足估计式

$$|\tilde{r}_\alpha(n)| < 540\,(2n)^{\alpha/2}. \tag{3.9}$$

因此，由（*3.6*）定义的狄利克雷级数在右半平面 $Re(s) > \tilde{\sigma}_\alpha := \frac{\alpha}{2}+1$。

证明。 我们的证明不过是对 [[40], 定理 3.3., 第 19 页，式（3.12）]的简单改写。令 $\varphi_2(q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}$对于 $|q|<1$: 利用柯西积分公式，可得如下界

$$|\tilde{r}_\alpha(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2^\alpha\left(Re^{i\phi}\right) R^{-n}e^{-in\phi}\,d\phi\right| \le R^{-n}\max_{\phi\in[-\pi,\pi]}\left|\varphi_2^\alpha\left(Re^{i\phi}\right)\right|$$
$$= R^{-n}\left(\max_{\phi\in[-\pi,\pi]}\left|\varphi_2\left(Re^{i\phi}\right)\right|\right)^\alpha, \quad 0<R<1,$$

因为根据假设有 $\alpha>0$ 。显然，对于每个 $\phi\in[-\pi,\pi]$,

$$\left|\varphi_2\left(Re^{i\phi}\right)\right| \le \varphi_2(R),$$

这立即给出

$$|\tilde{r}_\alpha(n)| \le R^{-n}\,\varphi_2^\alpha(R), \tag{3.10}$$

对于任意选定的 $R\in(0,1)$。对于每个 n，取 $R:=R(n)=e^{-\pi A/n}$ 对于固定的 $A>1$。则（3.10）得到

$$|\tilde{r}_\alpha(n)| \le e^{\pi A}\,\varphi_2^\alpha\left(e^{-\pi A/n}\right) = e^{\pi A}\,\theta_2^\alpha\left(\frac{A}{n}\right) = e^{\pi A}\left(\frac{n}{A}\right)^{\alpha/2}\theta_4^\alpha\left(\frac{n}{A}\right)$$
$$= \frac{e^{\pi A}}{A^{\alpha/2}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi k^2\frac{n}{A}}\right\}^\alpha n^{\alpha/2} \le \frac{e^{\pi A}\,n^{\alpha/2}}{A^{\alpha/2}}\left\{1+\frac{2}{e^{\pi n/A}-1}\right\}^\alpha$$
$$\le \frac{e^{\pi A}}{A^{\alpha/2}}\left\{1+\frac{2}{e^{\pi/A}-1}\right\}^\alpha n^{\alpha/2}. \tag{3.11}$$

其中，我们使用了（3.4）以及对定义 $\theta_4(x)$的级数所作的初等界估计。现在，只需在（3.9）中取 $A=2$ ，即可由（3.11）得到所需的估计（3.9）。 □

˜我们的下一个引理给出了 ζ 函数 $\zeta_\alpha^\star(s)$ 和 $\zeta_\alpha(s)$ 的函数方程。

引理 3.2. 设 $r_\alpha(n)$ 和 $\tilde{r}_\alpha(n)$分别由（*1.36*）和（*3.5*）给出。

于是，由（*3.8*）定义的狄利克雷级数可以解析延拓为满足海克函数方程的整函数

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_\alpha^\star(s) = \pi^{-\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-s\right)\,\tilde{\zeta}_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-s\right), \tag{3.12}$$

˜其中 $\zeta_\alpha(s)$ 由（*3.6*）给出。

证明。 我们在上文已经推导出，$(-1)^n r_\alpha(n)$ 是傅里叶展开的系数 $\vartheta_4^\alpha(\tau)$ 在尖点$i\infty$处的情形。由此显然可知，梅林变换成立

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_\alpha^\star(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x)-1\right\}dx, \quad \mathrm{Re}(s)>\sigma_\alpha,$$

其中 σ_α 由（3.8）明确给出。按照 Riemann 的论文 [49, 59], ，我们研究$\zeta_\alpha^\star$（s）的函数方程：事实上，对于 Re（s） $>\sigma_\alpha$,

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_\alpha^\star(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x)-1\right\}dx = \int_0^1 x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x)-1\right\}dx + \int_1^\infty x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x)-1\right\}dx. \tag{3.13}$$

利用（3.4）中给出的雅可比公式（1.5）的一个特殊情形，

$$\theta_4^\alpha(1/x) - 1 = x^{\alpha/2}\,\theta_2^\alpha(x) - 1,$$

我们看到，(3.13) 右端的第一个积分可以写成：

$$\int_0^1 x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x) - 1\right\}\,dx = \int_1^\infty x^{-s-1}\left\{\theta_4^\alpha\left(1/x\right) - 1\right\}\,dx = \int_1^\infty x^{\frac{\alpha}{2}-s-1}\theta_2^\alpha(x)\,dx - \frac{1}{s}. \tag{3.14}$$

结合 (3.13) 和 (3.14) 可得表示式

$$\pi^{-s}\Gamma\left(s\right)\,\zeta_\alpha^\star(s) = \int_1^\infty \left[x^{s-1}\left\{\theta_4^\alpha(x) - 1\right\} + x^{\frac{\alpha}{2}-s-1}\,\theta_2^\alpha(x)\right]\,dx - \frac{1}{s}. \tag{3.15}$$

(3.15) 右端的积分对每个 $s \in \mathbb{C}$ 都绝对收敛，因此它表示 $s \in \mathbb{C}$ 的整函数。因此，前面的表示式给出了 $\zeta_\alpha^\star(s)$ 作为整函数的解析延拓。此外，由于 $\Gamma(s)$ 在 $s = 0$ 处有一个简单极点，显然 $\zeta_\alpha^\star(0) = -1$。

˜我们可以对 $\zeta_\alpha(s)$进行同样的计算。我们发现，当 $\mathrm{Re}(s) > \tilde{\sigma}_\alpha$ 时：$= \frac{\alpha}{2} + 1$ (见上文的 (3.6))

$$\begin{aligned}
\pi^{-s}\Gamma(s)\,\tilde{\zeta}_\alpha(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\,dx \\
&= \int_1^\infty x^{-s-1}\theta_2^\alpha(1/x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}\,\theta_2^\alpha(x)\,dx \\
&= \int_1^\infty x^{-s-1}\left(x^{\alpha/2}\left(\theta_4^\alpha(x) - 1\right) + x^{\alpha/2}\right)\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\,dx \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{\alpha}{2}-s-1}\left(\theta_4^\alpha(x) - 1\right) + x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\right)\,dx + \int_1^\infty x^{-s-1+\frac{\alpha}{2}}dx \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{\alpha}{2}-s-1}\left(\theta_4^\alpha(x) - 1\right) + x^{s-1}\theta_2^\alpha(x)\right)\,dx + \frac{1}{s-\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

˜由此可见，$\zeta_\alpha(s)$ 可以延拓到复平面，成为一个在 $s = \frac{\alpha}{2}$ 处具有简单极点、留数为 $\pi^{\alpha/2}/\Gamma(\alpha/2)$的亚纯函数。此外，在反射 $s \longleftrightarrow \frac{\alpha}{2} - s$下，(3.12) 两端的右端可以相互转换。这意味着函数方程 (3.12)，并完成了证明。

□

由于函数方程（3.12）成立，我们可以预期求和公式（2.9）也必须成立。下一个引理正好给出了这一点。

引理 3.3。 设 $r_\alpha(n)$ 是 $\theta^\alpha(x)-1$ 的级数展开的系数，并且 $\tilde{r}_\alpha(n)$ 由 (3.5) 定义。则对于 $Re(x)>0$ 以及任意 $y\in\mathbb{C}$，下列恒等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, r_\alpha(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\, e^{-\pi n x}\, J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\, n}\, y) = -\frac{y^{\frac{\alpha}{2}-1}\pi^{\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma(\alpha/2)} + \\ + \frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{r}_\alpha(n)\,\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\, e^{-\frac{\pi}{x}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)} I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}\, y}{x}\right). \tag{3.17}$$

证明。 根据前面的结果，我们知道这对狄利克雷级数

$$\phi(s)=\pi^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r_\alpha(n)}{n^s},\quad \psi(s)=\pi^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{r}_\alpha(n)}{\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)^s},$$

满足海克函数方程（1.25）。因此，将求和公式（2.9）或（2.24）应用于这一对级数后，只需作简单代换 $r=\frac{\alpha}{2}$，$\rho=0$（因为 $\phi(s)$ 根据前面的引理是整函数）以及 $\phi(0)=-1$，即可得到（3.17）。

□

3.3 $\psi_\alpha(x,\ z)$ 的行为

利用前面的引理 3.3 ，我们现在能够证明， $\psi_\alpha(x,\ z)$ 在 x趋近虚轴时，其行为与经典雅可比 theta 函数相同。现在我们给出本文最重要的结果之一。

引理 3.4。 设 $\alpha>0$ 和 $r_\alpha(n)$ 为 $\theta^\alpha(x)$ (1.34) 的傅里叶展开系数。对于 $Re(x)>0$ 以及 $z\in\mathbb{C}$，令 $\psi_\alpha(x,\ z)$ 表示雅可比 $\psi-$函数 (2.58) 的类似函数，

$$\psi_\alpha(x,z)=2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi x}\, z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\, e^{-\pi n\, x}\, J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\, n\, x}\, z). \tag{3.18}$$

于是，对于满足条件的任意 z：

$$z\in\mathscr{D}_\alpha:=\left\{z\in\mathbb{C}\,:\,|Re(z)|<\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}},\,|Im(z)|<\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}\right\}, \tag{3.19}$$

且对每个 $m\in\mathbb{N}_0$，均有：

$$\frac{d^m}{d\omega^m}\left(1+\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\to 0,\quad as\quad \omega\to\frac{\pi}{4}^-. \tag{3.20}$$

证明。 注意到 $e^{2i\omega}\to i$ 当 $\omega\to\frac{\pi}{4}^-$ 沿着满足 $\mathrm{Re}(e^{2i\omega})$、$\mathrm{Im}(e^{2i\omega})>0$. 因此，我们可以将 $e^{2i\omega}$写作 $i+\delta$，其中 $\delta\to 0$ 沿区域 $|\arg(\delta)|<\frac{\pi}{2}$中的任意路径。作此变量代换并应用 Faà di Bruno 公式，我们可以写成

$$\frac{d^m}{d\omega^m}\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)=(2i)^m\sum_{b_1,\ldots,b_m}\frac{m!}{b_1!\cdot\ldots\cdot b_m!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{i+\delta}{j!}\right)^{b_j}\frac{d^{b_1+\ldots+b_m}}{d\delta^{b_1+\ldots+b_m}}\psi_\alpha\left(i+\delta,z\right), \tag{3.21}$$

其中求和遍历所有满足 $b_1+2b_2+\ldots+mb_m=m$ 的非负整数 b_1、...、b_m。

因此，为了证明（3.20），我们将计算

$$\psi_\alpha(i+\delta,\,z) = 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sum_{n=1}^{\infty} r_\alpha(n)\,n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\,e^{-\pi n\,(i+\delta)}\,J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\,n\,(i+\delta)}\,z)$$

$$= 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,r_\alpha(n)\,n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\,e^{-\pi n\,\delta}\,J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\sqrt{\pi\,n\,(i+\delta)}\,z).$$

利用前面的公式（3.17），结合 $x=\delta$ 和 $y=\sqrt{i+\delta}\,z$，我们得到

$$1+\psi_\alpha(i+\delta,z) = 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\delta}\,\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{r}_\alpha(n)\,\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})\,(i+\delta)}\,z}{\delta}\right) \tag{3.22}$$

注意，只要证明（3.20）右端关于 δ的任意导数沿区域 $|\arg(\delta)|<\frac{\pi}{2}$内任意路径，当 $\delta\to 0$ 时趋于零，（3.20）便得以确立。我们先证明（3.20）对 $m=0$ 成立，其余情形即可类推。为验证这一点，我们利用如下事实：$\psi_\alpha(x,z)$ 作为 x 和 $\mathrm{Re}(x)>0$ 的函数，在 $z\in\mathbb{C}$ [6] 内是解析的，因此只需估计级数的每一项在 $\delta\to 0^+$ 时的大小。

与推论 2.2类似，我们将证明分为两种情形：$\alpha>1$ 或 $0<\alpha\le 1$。对于第一种情形，我们使用修正贝塞尔函数的积分表示 [[44], 第252页，式（10.32.2）], ，该表示与泊松积分（2.26）相关

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,e^{zt}dt,\quad \mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2},\ z\in\mathbb{C}, \tag{3.23}$$

由此可以立即得到界（其中 $\nu>-\frac{1}{2}$ 和 $z\in$ 为实数 $\mathbb{C}$）

$$\left|\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(z)\right| \le \frac{e^{|\mathrm{Re}(z)|}}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{3.24}$$

利用（3.24）、引理 3.1 以及 $\tilde{r}_\alpha(0)=2^\alpha$这一事实，我们可以简单地将 $|1+\psi_\alpha\,(i+\delta,\ z)\,|$ 界定如下：

$$|1+\psi_\alpha(i+\delta,z)| \le \delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)}{4\delta}}\,\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{r}_\alpha(n)|\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}\,\exp\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}}{\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|\right)$$

$$< 2^\alpha\delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)}{4\delta}}\,e^{-\frac{\pi\alpha}{4\delta}}\,\exp\left(\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|\right)+$$

$$+\,540\,\delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)}{4\delta}}\,\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{\alpha/2}\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}\,\exp\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}}{\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|\right).$$

因此，要证明（3.20），只需证明：对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $z\in\mathscr{D}_\alpha$（见条件（3.19））,

$$\lim_{\delta\to 0^+}\,\delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,\exp\left(-\frac{\pi}{\delta}\,\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}}{\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|-\frac{\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)}{4\delta}\right)=0. \tag{3.25}$$

利用 $\mathrm{Re}\,\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\to\mathrm{Re}(\sqrt{i}\,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z))$ 在 $\delta\to 0^+$ 时的事实，以及 $\mathrm{Re}\,\left((i+\delta)\,z^2\right)\to -2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$ 在该极限下同样成立这一事实，我们得到

$$\lim_{\delta\to 0^+}\,\delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)}{4\delta}}\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}\,\exp\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}}{\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|\right)$$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}\,\delta^{-\frac{\alpha}{2}}\,\exp\left[-\frac{\pi}{\delta}\left(\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n+\frac{\alpha}{4}}-\frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{2\pi}\right)\right]. \tag{3.26}$$

[6] $\psi_\alpha(x,z)$ 的解析性当然是推论 2.2 中给出的更一般结果的直接推论。

注意，指数项是变量 $X=\sqrt{n+\frac{\alpha}{4}}$ 的二次多项式，该多项式的具体形式为

$$P(X)=X^2-\frac{|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2\pi}}\,X-\frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{2\pi}. \tag{3.27}$$

我们知道，对于给定的 $X_0\in\mathbb{R}_{>0}$、 $P(X_0)>0$ 如果 $X_0>$ 上确界 $\{y\in\mathbb{R}:\ \ P(y)=0\}$。计算多项式 $P(X)$ 的零点是一项简单的任务，因此关于 X_0 的先前条件归结为：

$$P(X_0)>0\ \text{ if }\ \frac{|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)|}{2\sqrt{2\pi}}+\frac{|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)|}{2\sqrt{2\pi}}<X_0. \tag{3.28}$$

由于指数中的多项式对 $X=\sqrt{n+\frac{\alpha}{4}}$、 $n\in\mathbb{N}_0$ 有定义，要保证 $P\left(\sqrt{n+\frac{\alpha}{4}}\right)>0$ 对每个 $n\in\mathbb{N}_0$ 都成立，一个充分条件是 z 必须满足

$$|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)|+|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)|<\sqrt{2\pi\alpha}, \tag{3.29}$$

如果 $z\in\mathscr{D}_\alpha=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \ |\text{实部}(z)|<\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}},\ \ |\text{虚部}(z)|<\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}\right\}$，那么实际上确实如此。因此，在此假设下，可以看到（3.26）中的极限在 $\delta\to0^+$时趋于零。因此，

$$1+\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\to0\quad\text{as}\quad\omega\to\frac{\pi}{4}^-\ \text{and}\ \ z\in\mathscr{D}_\alpha.$$

最后，由于 $\exp(-A/\delta)\ \ A>0$ 随着 δ^N 当 $\delta\to0^+$趋于零的速度快于任何幂次时， δ的任意导数（关于 ψ_α $(i+\delta,\ \ z)$ 在此极限下都会趋于零，从而证明对于每个 3.20） $m\geq1$式 $\alpha>1$的引理证明到此结束。

现在假设 $0<\alpha\leq1$：那么仍需采用相同的论证，但我们无法对 3.23） $I_{\frac{\alpha}{2}-1}(z)$调用积分表示式。与式（3.25）中一样，我们需要计算以下极限

$$\lim_{\delta\to0^+}\left|2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\delta}\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})\,(i+\delta)}\,z}{\delta}\right)\right| \tag{3.30}$$

对于每个固定的 $n\in\mathbb{N}_0$，可利用修正贝塞尔函数众所周知的汉克尔展开来完成（见 [[44], 第255页，式（10.40.5）] 以及上文的式（1.51）

$$I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\,\frac{\cos(\pi\nu)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac12+\nu+n\right)\,\Gamma\left(\frac12-\nu+n\right)}{(2z)^n n!}+\frac{e^{-z+(\nu+\frac12)\pi i}}{\sqrt{2\pi z}}\,\frac{\cos(\pi\nu)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac12+\nu+n\right)\,\Gamma\left(\frac12-\nu+n\right)}{(2z)^n n!}, \tag{3.31}$$

该展开在 $-\frac{\pi}{2}<\arg(z)<\frac{3\pi}{2}$, $|z|\to\infty$ 时成立。或者，在范围 $-\frac{3}{2}\pi<\arg(z)<\frac{\pi}{2}$, $|z|\to\infty$ 内，我们有如下展开

$$I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\,\frac{\cos(\pi\nu)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac12+\nu+n\right)\Gamma\left(\frac12-\nu+n\right)}{(2z)^n\,n!}+\frac{e^{-z-(\nu+\frac12)\pi i}}{\sqrt{2\pi z}}\,\frac{\cos(\pi\nu)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac12+\nu+n\right)\,\Gamma\left(\frac12-\nu+n\right)}{(2z)^n n!}. \tag{3.32}$$

<escape>无论如何，由（3.31）和（3.32）以及实数 ν，均可得到如下简单的界</escape>

$$|I_\nu(z)|\leq2\left(\frac{e^{\mathrm{Re}(z)}}{\sqrt{2\pi|z|}}+\frac{e^{-\mathrm{Re}(z)}}{\sqrt{2\pi|z|}}\right)\leq\sqrt{\frac{8}{\pi|z|}}\,\exp\left(|\mathrm{Re}(z)|\right) \tag{3.33}$$

这对每个 $|z|>M$ 都成立，只要 M 足够大。

现在我们将（3.33）应用于（3.30），并得到：当 $\delta>0$ 足够小时，存在某个固定的 $n\in\mathbb{N}_0$，且对每个 $z\in\mathscr{D}_\alpha$，

$$\left|2^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\left(\sqrt{\pi(i+\delta)}\,z\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\delta}\,e^{-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)}I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})\,(i+\delta)}\,z}{\delta}\right)\right|$$

$$<\frac{\pi^{-\frac{\alpha+1}{4}}\,2^{\frac{\alpha}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,|z|^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)^{1/4}\,\sqrt{\delta}}\,\exp\left(-\frac{\pi}{\delta}\left(n+\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{\sqrt{\pi(n+\frac{\alpha}{4})}}{\delta}\,\left|\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\right|-\frac{\mathrm{Re}((i+\delta)z^2)}{4\delta}\right).$$

请注意，如果 z 任意接近原点，这并不会造成问题，因为我们假设 $0<\alpha\leq 1$。因此，要证明（3.30）趋于零，我们只需遵循之前相同的思路，因为指数项与前一种情形（3.26）中的完全相同，并且涉及二次多项式（3.27）。因此，条件$z\in\mathscr{D}_\alpha$ 需要在这一范围内保持成立，其中 α，这就完成了（3.20）的证明。

□

3.4 一些附加引理

引理3.4 已经完全证明后，我们可以开始证明定理1.1。在此之前，我们先给出两个附加引理，其中一个是引理3.4的直接推论。

引理 3.5。设 $h:\ \mathbb{C}\longmapsto\mathbb{C}$ 是一个解析函数。那么，对于任意 $z\in\mathscr{D}_\alpha$ （*3.19*）以及任意的 $m\in\mathbb{N}_0$，我们有

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\,\frac{d^m}{d\omega^m}\left\{h(\omega)\,\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}=-2\,h^{(m)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right).\tag{3.34}$$

证明。 应用导数的莱布尼茨公式，可得

$$\frac{d^m}{d\omega^m}\left\{h(\omega)\,\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}=\sum_{k=0}^{m}\left(\begin{array}{c}m\\k\end{array}\right)\,\frac{d^{m-k}}{d\omega^{m-k}}h(\omega)\,\frac{d^k}{d\omega^k}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right).\tag{3.35}$$

因此，令 $\omega\to\frac{\pi}{4}^-$，由引理 3.4 可知，$k\geq 1$ 阶导数 $\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},\ z\right)$ 当 $\omega\to\frac{\pi}{4}^-$ 时趋于零。因此，唯一保留下来的项对应于 $k=0$，这立即给出（3.34）。

□

由于我们的证明将紧密沿用 [22], 中的论证，因此我们还需要克罗内克引理 [34]。

引理 3.6。若 $x\notin\mathbb{Q}$，则小数部分序列 $(\{n\,x\})_{n\in\mathbb{N}}$ 在区间 $(0,\ 1)$中稠密。

3.5 定理 1.1 的证明

以下证明将用到前述引理和积分表示，但其主要思想源自 Hardy，以及 Dixit 等人在论文 [22, 23] 中对其论证所作的一种变体。

我们首先使用例 2.1 (2.60 中给出的积分表示，将其中的 x 替换为 $e^{2i\omega}$，$-\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{4}$。我们得到公式

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}+it;\,\frac{\alpha}{2};\,-\frac{z^2}{4}\right)\,e^{2\omega t}\,dt=e^{\frac{i\omega\alpha}{2}}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)-e^{-\frac{i\omega\,\alpha}{2}}e^{-z^2/4}.$$

现在我们可以对被积函数应用库默尔公式（2.8），得到

$$\frac{e^{-z^2/8}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-it;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt=e^{\frac{i\omega\alpha}{2}}\,e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)-e^{-\frac{i\omega\,\alpha}{2}}e^{-z^2/8}. \tag{3.36}$$

现在，如果我们在前一个等式的右端加上并减去项 $e^{-z^2/8}\,e^{i\omega\alpha/2}$，我们将（3.36）重写为如下形式

$$\frac{e^{-z^2/8}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-it;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt=-2\,e^{-z^2/8}\,\cos\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)+e^{\frac{i\omega\alpha}{2}}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right). \tag{3.37}$$

<escape>在得到类似于（3.37）这样的恒等式后，我们的证明结构几乎逐行遵循 [22] 。由于我们希望研究 $\eta_\alpha(s+i\lambda_j)\,{}_1F_1(s+i\lambda_j;\ \ \frac{\alpha}{2};\ \ \frac{z^2}{4})$ 的无穷组合的零点，因此我们通过变量代换得到</escape>

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-z^2/8}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+i(t+\lambda_j)\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-i(t+\lambda_j);\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt&=\\
=\frac{e^{-z^2/8}e^{-2\omega\lambda_j}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-it;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt&=\\
=e^{-2\omega\lambda_j}\left\{-2\,e^{-z^2/8}\,\cos\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)+e^{\frac{i\omega\alpha}{2}}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}&=\\
=-\,e^{-z^2/8}\,e^{-2\omega\lambda_j+i\,\frac{\omega\alpha}{2}}-\,e^{-z^2/8}\,e^{-2\omega\lambda_j-i\,\frac{\omega\alpha}{2}}+e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right).&
\end{aligned} \tag{3.38}$$

现在按照 Hardy 自己的证明方法进行 [32], ，令我们取 p–(p– 阶导数，对 ω：由于（3.38）左侧的积分关于 $\omega\in(-\pi/4,\,\pi/4)$ 绝对且一致收敛，因此可以应用莱布尼茨法则，推导出以下等式：

$$\begin{aligned}
\frac{2^p\,e^{-z^2/8}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^p\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+i\,(t+\lambda_j)\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-i\,(t+\lambda_j);\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt&=\\
=-\,e^{-z^2/8}\left(-2\lambda_j+i\frac{\alpha}{2}\right)^p\,e^{-2\omega\lambda_j+i\,\frac{\omega\alpha}{2}}-\,e^{-z^2/8}\left(-2\lambda_j-i\frac{\alpha}{2}\right)^p\,e^{-2\omega\lambda_j-i\,\frac{\omega\alpha}{2}}+&\\
+\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}.&
\end{aligned} \tag{3.39}$$

现在我们考虑变量代换,

$$\frac{i\alpha}{2}-2\lambda_j:=r_j\,e^{i\theta_j},\ \ 0<\theta_j<\frac{\pi}{2}, \tag{3.40}$$

并使用这些新坐标，将（3.39）写成更合适的形式

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^p\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+i\,(t+\lambda_j)\right)\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-i\,(t+\lambda_j);\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt&=\\
=-4\pi\,\left(\frac{r_j}{2}\right)^p\,e^{-2\omega\lambda_j}\,\cos\left(p\,\theta_j+\frac{\omega\alpha}{2}\right)+\frac{2\pi}{2^p}\,e^{z^2/8}\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}.&
\end{aligned} \tag{3.41}$$

为了应用哈代方法，我们需要使（3.41）左侧的被积函数为实函数，以便计算其符号的变化。如果我们再加上另一个积分，就可以做到这一点

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+i\left(t+\lambda_j\right)\right)\, {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}+i\left(t+\lambda_j\right);\, \frac{\alpha}{2};\, \frac{\overline{z}^2}{4}\right) e^{2\omega t}\, dt,$$

其被积函数是（3.41）中被积函数的复共轭。

对（3.41）两边取实部，乘以 $c_j \in \ell^1$ 并对 j求和，我们可以形式上得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{2\omega t}\, dt = -\frac{8\pi}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, r_j^p e^{-2\omega\lambda_j}\, \left[\cos\left(p\,\theta_j+\frac{\omega\alpha}{2}\right)\right]+ \\ +\frac{4\pi}{2^p}\,\mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}\right),\end{aligned} \tag{3.42}$$

其中$F_{z,\ \alpha}$（s）是由（1.10）给出的函数,

$$F_{z,\alpha}(s)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\,\eta_\alpha\left(s+i\lambda_j\right)\left\{{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2}-s-i\lambda_j;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2}-\overline{s}+i\lambda_j;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\},$$

我们现在将研究其零点。

不过在此之前，我们通过类似于 [[22], 第 316]页所述的推理来证明（3.42）。根据斯特林公式以及对 ζ_α（s）的凸估计（由一般的 Phragmén-Lindelöf原理（1.33）得到），我们知道

$$\left|\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \ll_\alpha\ |t|^{A(\alpha)}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|},\quad |t|\to\infty.$$

这与 Kummer函数（2.6）的渐近估计一起,

$$\left|{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-it;\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)\right| \ll_{\alpha,z}\ |t|^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}\exp\left(|z|\sqrt{|t|}\right),\quad |t|\to\infty,$$

得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_j\,\eta_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}+i\left(t+\lambda_j\right)\right)\mathrm{Re}\left({}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4}-i\left(t+\lambda_j\right);\,\frac{\alpha}{2};\,\frac{z^2}{4}\right)\right)\right| \ll_{\alpha,z} C_\lambda\,|t|^{B(\alpha)}\,e^{-\frac{\pi}{2}|t|+|z|\sqrt{|t|}}\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|<\infty \tag{3.43}$$

这里我们用到了以下事实：$(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个有界序列，且$(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1$。项 C_λ 仅表示一个正数常数，它取决于序列的界$(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$。这一观察现在使我们能够在推导等式左端（3.42）的过程中交换积分与求和次序。

完全相同的推理也可用于证明该过程

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}=\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\},$$

用于等式（3.42）右端的

现在的策略是令 $\omega \to \frac{\pi}{4}^-$ 作用于（3.42）两边。研究右端在此极限下的行为，前述引理必不可少。由于 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1$，显然函数

$$h_\alpha(\omega) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\frac{i\omega\alpha}{2} - 2\omega\lambda_j}$$

对每个 $\omega \in \mathbb{C}$ 都是解析的。因此，根据引理 3.5,

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{d^p}{d\omega^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{\frac{i\omega\alpha}{2}-2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\} &= \lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{h_\alpha(\omega)\,\left(e^{-z^2/8}+e^{z^2/8}\,\psi_\alpha\left(e^{2i\omega},z\right)\right)\right\}\\ &= -2\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\frac{i\alpha}{2}-2\lambda_j\right)^p e^{\frac{i\pi\alpha}{8}-\frac{\pi}{2}\lambda_j} = -2\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, r_j^p\, e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_j}\, e^{i\left(\frac{\pi\alpha}{8}+p\,\theta_j\right)}, \qquad (3.44)\end{aligned}$$

其中在最后一步中，我们只考虑了坐标（3.40）。

回到恒等式（3.42），由（3.44）可得,

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{-\infty}^{\infty} t^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)e^{2\omega t}\,dt &= -\frac{8\pi}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j^p\, e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_j}\left[\cos\left(p\,\theta_j+\frac{\pi}{8}\alpha\right)+\mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\,e^{i\left(\frac{\pi\alpha}{8}+p\,\theta_j\right)}\right)\right]\\ &= -\frac{8\pi}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j^p e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_j}\left[\cos\left(p\,\theta_j+\frac{\pi}{8}\alpha\right)\left(1+\mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right)\right)-\sin\left(p\theta_j+\frac{\pi}{8}\alpha\right)\,\mathrm{Im}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right)\right].\end{aligned} \qquad (3.45)$$

现在，如果我们再次沿用 [22] 并令

$$u_z := 1+\mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right),\quad v_z := \mathrm{Im}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right), \qquad (3.46)$$

我们便能将（3.45）的右端写成适当的形式

$$-\frac{8\pi}{2^p}\,w_z\sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j^p\, e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_j}\,\cos\left(p\theta_j+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right),\ \text{for}\ \ w_z=\sqrt{u_z^2+v_z^2},\ \ \beta_z := \arctan\left(\frac{v_z}{u_z}\right). \qquad (3.47)$$

由于前一个表达式中的所有参数都由狄利克雷级数（α）或陈述中所取的序列 $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$确定，唯一的自由参数是整数 p，它表示对（3.38）两边求导的次数。因此，前一个表达式可以看作一个实数序列，记作 $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$。

只需对[[22], 第317页至321], 中给出的论证作少量修改，我们现在证明，由 $((s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ 定义的序列（3.47）在无穷多个 p取值处变号。

由于 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 取得其界且由互异元素构成，我们知道存在某个正整数M ，使得

$$|\lambda_M| = \max_{j\in\mathbb{N}}\left\{|\lambda_j|\right\},\quad \lambda_j\neq\lambda_M\ \ \text{for}\ j\neq M\implies r_j<r_M\ \ \text{for}\ j\neq M, \qquad (3.48)$$

其中我们使用了坐标变换（3.40）。现在注意到，我们可以将（3.47）中的级数写成

$$-\frac{8\pi}{2^p}\, w_z\, c_M r_M^p\, e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_M}\, \cos\left(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\,\{1+E(X,z)+H(X,z)\}\,, \tag{3.49}$$

其中

$$E(X,z):=\sum_{j\neq M,\, j\leq X}\frac{c_j}{c_M}\, e^{-\frac{\pi}{2}(\lambda_j-\lambda_M)}\left(\frac{r_j}{r_M}\right)^p\,\frac{\cos\left(p\theta_j+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)}{\cos\left(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)}$$

and

$$H(X,z):=\sum_{j\neq M,\, j> X}\frac{c_j}{c_M}\, e^{-\frac{\pi}{2}(\lambda_j-\lambda_M)}\left(\frac{r_j}{r_M}\right)^p\,\frac{\cos\left(p\theta_j+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)}{\cos\left(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)},$$

其中， X 是一个较大的参数，稍后将确定其取值。

现在我们将看到，作为 p 的函数，$\cos\!\big(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\big)$ 的符号将在 (3.49) 中占主导地位，从而使 (3.45) 左侧积分的符号无穷多次改变。

我们将这一事实的证明分为两部分：第一部分证明 $\frac{\theta_M}{2\pi}\notin\mathbb{Q}$ 的情形，第二部分说明情形 $\frac{\theta_M}{2\pi}\in\mathbb{Q}$ 最终可归结为前者。

1. 假设 $\frac{\theta_M}{2\pi}\notin\mathbb{Q}$：根据克罗内克引理（见引理 3.6），$\left(\left\{n\,\frac{\theta_M}{2\pi}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 (0,1) 的稠密子集。

$$\left(\cos\left(n\,\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\cos\left(2\pi\,\left\{\frac{n\,\theta_M}{2\pi}\right\}+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

由于函数 $f(X)=\cos(X+a)$ 的连续性和满射性，它是 $[-1,1]$ 的稠密子集。因此，我们可以找到两个整数序列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\cos\left(2\pi\,\left\{\frac{q_n\,\theta_M}{2\pi}\right\}+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\to\frac{1}{2},\quad \cos\left(2\pi\,\left\{\frac{r_n\,\theta_M}{2\pi}\right\}+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\to-\frac{1}{2},\ \text{as } n\to\infty. \tag{3.50}$$

因此，当 N_0 足够大且 $p\in(q_n)_{n\geq N_0}\cup(r_n)_{n\geq N_0}$ 时，我们有不等式

$$\left|\cos\left(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right)\right|\geq\frac{1}{3}.$$

由于 $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是有界的 并且能取到其界，在此 N_0 的取值下，我们有 $H(X,z)$ 的界 ，

$$|H(X,z)|\leq\frac{3}{|c_M|}\,e^{\frac{\pi}{2}\max_{k,\ell}|\lambda_k-\lambda_\ell|}\sum_{j\neq M,\, j>X}|c_j|<\frac{1}{3},$$

一旦我们取足够大的 $X\geq X_0$。对于 X 的相同取值，我们对 $E(X,z)$ 作如下界定

$$|E(X,z)|\leq\frac{3\mu_X^p}{|c_M|}\,e^{\frac{\pi}{2}\max_{k,\ell}|\lambda_k-\lambda_\ell|}\sum_{j\neq M,\, j\leq X}|c_j|,$$

其中

$$\mu_X=\max_{j\leq X}\left\{\frac{r_j}{r_M}\right\}.$$

根据（3.48）我们知道 $\mu_X<1$ 因此，当 N_0 足够大且 $p\geq$ 最大 $\{q_{N_0},r_{N_0}\}$ 时，

$$|E(X,z)|<\frac{1}{3}.$$

因此，对于我们对 N_0 和 X 的选择，$1+E(X,\ z)+H(X,\ z)>\frac{1}{3}$，因此，对于 $p\in(q_n)^{n\geq N_0}\bigcup(r_n)^{n\geq N_0}$ 并根据（3.45）、（3.49），极限

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{-\infty}^{\infty}t^pF_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)e^{2\omega t}\,dt$$

必须具有相同的符号 （作为依赖于 $p\in(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\cup(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的序列）与该序列 e

$$\left(s'_p\right)_{p\in(q_n)\cup(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}:=-\frac{8\pi}{2^p}\,w_z\,c_M r_M^p\,e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_M}\,\cos\left(p\theta_M+\frac{\pi\alpha}{8}+\beta_z\right),$$

根据构造，其符号会无限次变化（3.50）。

2. 现在我们处理 $\frac{\theta_M}{2\pi}\in\mathbb{Q}$ 的情形，作出与 [[22], 第 320-321] 页相同的说明。注意，对于固定的小量 $\delta>0$，定理 1.1 等价于如下陈述：$F_{z,\alpha}(s+i\delta)$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{\alpha}{4}$ 上有无穷多个零点。不过，在前面的论证过程中，我们只需将序列 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的各项替换为 $\lambda_j^\star:=\lambda_j+\delta$。但在这项新的分析中，我们需要将 (3.40) 改写为 $\frac{i\alpha}{2}-2\lambda_j^\star=r_j^\star\,e^{i\theta_j^\star}$。由于我们可以自由选择 δ，可根据无理数在实数轴上的稠密性，以使 $\frac{\theta_M^\star}{2\pi}\notin\mathbb{Q}$ 的方式取值。因此，若我们在假设 $\frac{\theta_M}{2\pi}\notin\mathbb{Q}$ 下证明定理 1.1，就很容易看出，同样的策略也适用于 $\frac{\theta_M}{2\pi}\in\mathbb{Q}$。

我们现在可以完成定理 1.1 的证明了。反设 $F_{z,\alpha}(s)$ 在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{\alpha}{4}$ 上只有有限个零点。

在此假设下，存在某个 $T_0>0$，使得以下情形之一成立：
1. $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)>0$ 当 $|t|>T_0$ 时；2. $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)<0$ 当 $|t|>T_0$ 时；3. $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)>0$ 当 $t>T_0$ 时，且当 $t<-T_0$ 时 $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)<0$；4. $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)<0$ 当 $t>T_0$ 时，且当 $t<-T_0$ 时 $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)>0$。

但是，如果在证明中将 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 替换为 $(-c_j)_{j\in\mathbb{N}}$，第二个矛盾假设很容易归结为第一个。类似地，第四个假设归结为第三个。因此，为完成证明，我们只需处理上述情形 1. 和 3.。

根据假设 1. 和 3.，我们知道，对于 $t>T_0$，$F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)>0$：这意味着以下不等式：

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{T_0}^{T}t^pF_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)e^{2\omega t}\,dt\leq\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{T_0}^{\infty}t^pF_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)e^{2\omega t}\,dt:=L_{z,p}(T_0),\tag{3.51}$$

其中 $L_{z,p}(T_0)$ 根据（3.45）存在且有限。因此，对于每个 $T\geq T_0$，以下不等式成立

$$\int_{T_0}^{T}t^p\,F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)e^{\frac{\pi}{2}t}\,dt\leq L_{z,p}\left(T_0\right).\tag{3.52}$$

但由于 $T \geq T_0$ 是任意的，(3.52) 可推出

$$\int_{T_0}^{\infty} t^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} \, dt \leq L_{z,p}\left(T_0\right). \tag{3.53}$$

利用（3.53）以及反证假设 1. 或 3. 之一，我们现在证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} \, dt < \infty. \tag{3.54}$$

事实上，由于假设 1. 和 3. 意味着 $F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) = \left|F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right|$ 对于 $t > T_0$ 和 $F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) = \pm\left|F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right|$ 对于[7] $t < -T_0$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} t^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt &= \int_{0}^{\infty} \left\{F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p dt \\
&= \int_{0}^{T_0} \left\{F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p dt \\
&\quad + \int_{T_0}^{\infty} \left\{\left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} \pm (-1)^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right)\right| \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p dt.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

如果 $F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) > 0$ 对于 $t < -T_0$（上面的条件 1.），我们取 p 为偶整数；如果 $F_{z,\ \alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) < 0$ 对于 $t < -T_0$（上面的条件 3.），我们假设 p 为奇数。无论哪种情况，（3.55）中的第二个积分可化简为

$$\int_{T_0}^{\infty} \left\{\left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} + \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right)\right| \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt - \int_{-T_0}^{T_0} |t|^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt, \tag{3.56}$$

因此，结合（3.55）和（3.56），

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} t^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt + \int_{-T_0}^{T_0} |t|^p \, \left|F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)\right| \, e^{\frac{\pi}{2}t} dt \\
&\quad - \int_{0}^{T_0} \left\{F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p dt < \infty,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

证明（3.54）。

现在我们可以自由地使用控制收敛定理：根据（3.45）、（3.49）和（3.54），

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty} \left\{t^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \, e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p \, t^p \, F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \, e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} \, t^p \, dt \\
&= -\frac{8\pi}{2^p} \, w_z \, c_M r_M^p \, e^{\frac{\pi}{2}\lambda_M} \, \cos\left(p\theta_M + \frac{\pi\alpha}{8} + \beta_z\right) \, \{1 + E(X,z) + H(X,z)\}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

[7]这里，+ 符号是在假设 1 下成立的，而 − 符号是在假设 3 下成立的。

但我们已经看到，存在无穷多个整数 $p \in (q_n)_{n\geq N_0} \bigcup (r_n)_{n\geq N_0}$ 使得 (3.58) 的右端为负；也就是说，存在无穷多个 p 满足

$$\int_{T_0}^{\infty} \left\{ F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t} \right\} t^p dt < -\int_{0}^{T_0} \left\{ F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t} \right\} t^p dt <$$

$$< T_0^p \int_0^{T_0} \left| F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t} \right| dt \leq K(T_0)\, T_0^p, \tag{3.59}$$

其中 K 仅取决于 T_0，而与 p无关。根据我们关于 $F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right)$ 的假设（1. 或 3.）（并根据适用的是 1. 还是 3. 来选择 p ），我们知道存在某个 $\epsilon := \epsilon(T_0) > 0$，使得

$$F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t} = \left| F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \right| e^{\frac{\pi}{2}t} + \left| F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \right| e^{-\frac{\pi}{2}t}$$
$$\geq \epsilon(T_0), \quad \forall t \in [2T_0,\, 2T_0+1]\,.$$

这就证明了下界：

$$\int_{T_0}^{\infty} \left\{ F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t} \right\} t^p dt >$$
$$> \int_{2T_0}^{2T_0+1} \left\{ \left| F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}+it\right) \right| e^{\frac{\pi}{2}t} + \left| F_{z,\alpha}\left(\frac{\alpha}{4}-it\right) \right| e^{-\frac{\pi}{2}t} \right\} t^p dt \geq \epsilon\,(T_0)\,\,(2T_0)^p\,. \tag{3.60}$$

比较 (3.59) 与 (3.60)，我们得出不等式

$$2^p \leq \frac{K(T_0)}{\epsilon(T_0)}$$

对于 $p \in (p_n)_{n\geq N_0} \cup (q_n)_{n\geq N_0}$ 的无穷多个值必须成立。这显然荒谬，因为我们可以让 p 任意大。 ■

4 与 $\zeta(s,Q)$ 相关的组合的零点

本节将运用前文的全部工作，证明定理 1.1 的一个版本，其中 $\zeta_\alpha(s)$被替换为与一个二元、整系数且正定二次型相关的 Epstein ζ 函数。为了调整定理 1.1证明中的工作，并应用求和公式 (2.9)，我们需要一些关于 Epstein ζ 函数经加性特征 $e^{2\pi i n p/q},\, p/q \in \mathbb{Q}$ 扭曲的引理。

下一小节中的第一个引理本质上见于 [[17], 定理 2 和 3] ，Jutila 曾利用该引理推导出与[36]中的 Epstein ζ 函数相关的指数和。

不过，为了与我们论文中引入的记号相一致，并便于将下一个结果应用于我们的求和公式，我们将给出其简要证明。

4.1 与二次型相关的指数和

引理 4.1。 设 $(p,\ q)=1$和 $Q(m,\ n)=Am^2+Bm\,n+Cn^2$是一个判别式为 $\Delta:=4AC-B^2$的二元正定整系数二次型。考虑周期 *Epstein* ζ 函数，

$$\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right):=\sum_{m,n\neq 0}\frac{\exp\left(-\frac{2\pi ip}{q}\left(Am^2+Bm\,n+Cn^2\right)\right)}{(Am^2+Bm\,n+Cn^2)^s},\quad Re(s)>1. \tag{4.1}$$

然后， $\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)$ 至多可以解析延拓为一个亚纯函数，其在 $s=1$ 处有一个简单极点，留数为

$$Res_{s=1}\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{\Delta}}\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-\frac{2\pi ip}{q}Q(k_1,k_2)} \tag{4.2}$$

（如果前一个值为零，则 $\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)$ 是整函数）。

此外，它满足如下函数方程

$$\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-(1-s)}\Gamma\left(1-s\right)\,\tilde{\zeta}\left(1-s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right), \tag{4.3}$$

˜其中 ζ（s；Q；p/q）表示狄利克雷级数

$$\tilde{\zeta}\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right):=\sum_{m,n\neq 0}\frac{b_Q(m,n,p/q)}{Q(m,n)^s},\quad Re(s)>1, \tag{4.4}$$

with

$$b_Q(m,n,p/q):=\frac{1}{q}\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-\frac{2\pi ip}{q}Q(k_1,k_2)}\,e^{\frac{2\pi i}{q}(mk_1+nk_2)}. \tag{4.5}$$

证明。当 Re（s）>1，我们先将（4.1）写成

$$\begin{aligned}\zeta\left(s,\,Q,\,\frac{p}{q}\right):&=\sum_{m,n\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\frac{p}{q}Q(m,n)}}{Q(m,n)^s}=\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{p}{q}Q(k_1,k_2)}\sum_{\ell_1,\ell_2\neq 0}\frac{1}{Q\left(\ell_1q+k_1,\,\ell_2q+k_2\right)^s}\\&=q^{-2s}\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{p}{q}Q(k_1,k_2)}\sum_{\ell_1,\ell_2\neq 0}\frac{1}{Q\left(\ell_1+\frac{k_1}{q},\,\ell_2+\frac{k_2}{q}\right)^s}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

注意，关于 ℓ_1，ℓ_2 的无穷级数定义良好，因为分母不可能为零。当 Re（s）>1时，它表示 Epstein ζ 函数（1.41）

$$\zeta\left(s,\,\mathbf{g},\,\mathbf{h},\,Q\right):=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n,\,\mathbf{m}+\mathbf{g}\neq\mathbf{0}}\frac{\exp\left(2\pi i\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{h}\right)}{Q\left(\mathbf{m}+\mathbf{g}\right)^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{n}{2} \tag{4.7}$$

当 Q 为二进制且 $\mathbf{h}=(0,0)$时。根据上面的引理 1.2，对于 $\mathbf{h}\notin\mathbb{Z}^n$，$\zeta\left(s,\ \mathbf{g},\ \mathbf{h}\ \ Q\right)$ 可以解析延拓为整函数。然而，如果 $\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^n$，$\zeta(s,\ \mathbf{g},\ \mathbf{h}\ \ Q)$ 可解析延拓到复平面成为一个在 $s=n/2$ 处具有简单极点且留数为

$$\mathrm{Res}_{s=\frac{n}{2}}\zeta\left(s,\,\mathbf{g},\,\mathbf{h},\,Q\right)=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{D(Q)}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{4.8}$$

对于 $n=2$，我们知道 $D(Q)$ 可化为二元二次型的判别式 $\Delta := 4AC - B^2$ 因此，当 $\mathrm{Re}(s)>1$时，我们可将 (4.6) 化为

$$\zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right) = q^{-2s} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{p}{q} Q(k_1,k_2)}\, \zeta\left(s,\, \frac{\mathbf{k}}{q},\, \mathbf{0},\, Q\right), \tag{4.9}$$

这证明了 $\zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right)$ 可解析延拓为一个亚纯函数，其在 $s=1$ 处有一个简单极点，留数为

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right) = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{\Delta}} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} e^{-\frac{2\pi i p}{q} Q(k_1,k_2)}.$$

这证明了引理的第一部分。为证明第二部分，我们使用 Epstein ζ 函数的函数方程（1.42）

$$\left(\frac{2\pi}{D(Q)^{1/n}}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \zeta\left(s,\, \mathbf{g},\, \mathbf{h},\, Q\right) = \exp\left(-2\pi i\, \mathbf{g}\cdot\mathbf{h}\right) \left(\frac{2\pi}{D(Q^\dagger)^{1/n}}\right)^{s-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right) \zeta\left(\frac{n}{2}-s, \mathbf{h},\, -\mathbf{g},\, Q^\dagger\right), \tag{4.10}$$

其中 $Q^\dagger$ 是伴随二次型（1.40）。由于 $\mathbf{h}=(0,0)$ 且 Q 是二元的，$\zeta\left(s, \mathbf{0}, -\frac{\mathbf{k}}{q}, Q^\dagger\right) = \zeta\left(s, \mathbf{0}, \mathbf{k}\, q,\quad Q\right)$，因此由（4.6）以及前述函数方程（4.10）结合 $n=2$ 和 $D(Q)=\Delta$，可得

$$\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-(1-s)} \Gamma(1-s)\, \frac{1}{q} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{p}{q} Q(k_1,k_2)}\, \zeta\left(1-s,\, \mathbf{0},\, \frac{\mathbf{k}}{q},\, Q\right). \tag{4.11}$$

现在，对于 $\mathrm{Re}(s)>1$，容易看出

$$\frac{1}{q} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{p}{q} Q(k_1,k_2)}\, \zeta\left(s,\, \frac{\mathbf{k}}{q},\, \mathbf{0},\, Q\right) = \frac{1}{q} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{p}{q} Q(k_1,k_2)} \sum_{m,n\neq 0} \frac{e^{\frac{2\pi i}{q}(m\,k_1+n\,k_2)}}{Q\,(m,n)^s} =$$

$$= \sum_{m,n\neq 0} \frac{1}{Q(m,n)^s}\, \frac{1}{q} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} \exp\left(-2\pi i\, \frac{p}{q} Q\,(k_1,\, k_2) + \frac{2\pi i}{q}\,(m\,k_1+n\,k_2)\right) = \sum_{m,n\neq 0} \frac{b_Q(m,n,p/q)}{Q(m,n)^s},$$

从而证明了（4.3）。 □

注 4.1。注意，$\zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right)$ 和 $\tilde{\zeta}\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right)$ 都可以写成关于一个求和变量的狄利克雷级数。不难看出，若 $r_Q(n)$ 表示 n被 Q表示的个数，则

$$\zeta\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_Q(n)\, \exp\left(-\frac{2\pi i p}{q} n\right)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s)>1 \tag{4.12}$$

and

$$\tilde{\zeta}\left(s,\, Q,\, \frac{p}{q}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}_Q(n,p/q)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s)>1, \tag{4.13}$$

其中

$$\tilde{b}_Q(n,p/q) := \frac{1}{q} \sum_{Q(\alpha,\beta)=n} \sum_{k_1,k_2=0}^{q-1} \exp\left(-\frac{2\pi i p}{q} Q(k_1,k_2) + \frac{2\pi i}{q}(\alpha k_1+\beta k_2)\right). \tag{4.14}$$

在上述定义中，我们对满足以下条件的整数对求和：$(\alpha,\ \beta)$ 使得 $Q(\alpha,\ \beta) = n$。注意到$\lfloor b_Q(n,\ p/q)$ $| \le r_Q(n)$，因此右端（4.13）中的狄利克雷级数在 $\mathrm{Re}(s)>1$时绝对收敛。

根据前一个引理，自然会想到将定理 2.1 中给出的求和公式不仅应用于$\zeta(s,\ Q)$（如例 2.2中所做的那样），还应用于 $\zeta(s,\ Q,\ p/q)$。下一个结果给出了我们求和公式的一个特殊情形，这将在定理 1.2的证明中起关键作用。

引理 4.2。设 $Q(m,\ n)\ =\ Am^2+Bm\,n+Cn^2$ 是一个整系数正定二次型，且 $\Delta:\ =4AC-B^2$ 是其判别式。那么，对于任意 $Re(x)\ >0,\ \ y\in\mathbb{C}$ 以及 $(p,\ q)\ =1$，下列求和公式成立

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}r_Q(n)\,exp\left(-\frac{2\pi ip}{q}n\right)\,e^{-\frac{2\pi n\,x}{q\sqrt{\Delta}}}\,J_0\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\,y}{\sqrt{q}\Delta^{1/4}}\right)$$
$$=\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{qx}\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-\frac{2\pi ip}{q}Q(k_1,k_2)}+\frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_Q(n,p/q)\,e^{-\frac{2\pi n}{q\sqrt{\Delta}\,x}}\,I_0\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\,y}{\sqrt{q}\,\Delta^{1/4}\,x}\right).\tag{4.15}$$

~其中 $b_Q(n,\ p/q)$ 由（*4.14*）明确给出。

证明。由于函数方程（4.3）成立，且 $\zeta(s,\ \ Q,\ \ p/q)$ 的解析延拓满足类 $\mathcal{A}$的所有性质，我们可以对这对狄利克雷级数应用（2.9）：

$$\phi(s)=\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{2\pi ip}{q}n\right)\,r_Q(n)}{n^s},\ \ \mathrm{Re}(s)>1$$

and

$$\psi(s)=\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{b}_Q(n,p/q)}{n^s},\ \ \mathrm{Re}(s)>1.$$

在此框架下，由（4.2）可知，$\phi(s)$ 的留数为 $\rho=q^{-1}\sum_{k_1}^{q-1},\ _{k_2=0}e^{-\frac{2\pi ip}{q}Q}{}_{(k_1,\ k_2)}$。要计算$\phi(0)$，只需知道 $\zeta(0,\ \ Q,\ \ p/q)$。为此，我们使用（4.11）：将该等式两边乘以 s，并令 $s\to 0$，得到

$$\zeta\left(0,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)=\lim_{s\to 0}\,s\,\left(\frac{2\pi q}{\sqrt{\Delta}}\right)^{s-1}\Gamma\left(1-s\right)\,\frac{1}{q}\sum_{k_1,k_2=0}^{q-1}e^{-2\pi i\,\frac{p}{q}Q(k_1,k_2)}\,\zeta\left(1-s,\,\mathbf{0},\,\frac{\mathbf{k}}{q},\,Q\right)$$
$$=\lim_{s\to 0}\,s\,\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{s-1}\Gamma\left(1-s\right)\frac{1}{q}\left\{\zeta\left(1-s,\,\mathbf{0},\,\mathbf{0},\,Q\right)+\sum_{k_1,k_2\neq 0}^{q-1}e^{-2\pi i\,\frac{p}{q}Q(k_1,k_2)}\,\zeta\left(1-s,\,\mathbf{0},\,\frac{\mathbf{k}}{q},\,Q\right)\right\}.$$

如果 $k_1\neq 0$或 $k_2\neq 0$，则 $\mathbf{k}/q\notin\mathbb{Z}^2$，因此第二个求和中的每个狄利克雷级数 $\zeta(1-s,\ \mathbf{0},\ \mathbf{k}/q,\ \ Q)$根据引理 1.2都是整函数。因此，唯一的奇点来自 $\zeta(1-s,\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \ Q)$在 $s=0$，从而得到

$$\zeta\left(0,\,Q,\,\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{2\pi}{q\sqrt{\Delta}}\right)^{-1}\,\frac{1}{q}\,\lim_{s\to 1}\left(s-1\right)\zeta\left(s,\,\mathbf{0},\,\mathbf{0},\,Q\right)=-1,\tag{4.16}$$

其中我们使用了 (　　4.8）。求和公式（2.9）立即得出（4.15）。 □

4.2 $\psi_Q(x,\ \ z)$

利用前面的引理，我们现在可以研究与 ψ–相关联的雅可比$\zeta(s,\ \ Q)$函数的类似物的行为。下面的引理在当前情形下本质上与3.4 中的引理相同。

引理 4.3。设 $Q(m,\ n) = Am^2 + Bm\,n + Cn^2$ 是一个二元、整系数且正定的二次型，并设$\Delta :\ = 4AC - B^2$。另外假设 Q 是既约的，即，$gcd(A,\ B,\ C) = 1$ 且 $\sqrt{\Delta} \equiv 2$ 模 4。考虑与 ψ–相关联的广义雅可比 Q 函数（见例 *2.2*），

$$\psi_Q(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n)\, e^{-\frac{2\pi n x}{\sqrt{\Delta}}}\, J_0\left(\sqrt{\frac{2\pi n x}{\Delta^{1/2}}}\, z\right), \quad Re(x) > 0,\ z \in \mathbb{C}. \tag{4.17}$$

于是，对每个满足条件的 z：

$$z \in \mathscr{D}_Q := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |Re(z)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}},\ |Im(z)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}} \right\}, \tag{4.18}$$

每个 $m \in \mathbb{N}_0$ 以及每个解析函数 h:　$\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$，都有渐近公式

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{d^m}{d\omega^m} \left\{ h(\omega) \left(e^{-z^2/8} + e^{z^2/8}\, \psi_Q\left(e^{2i\omega}, z\right) \right) \right\} = -2\, h^{(m)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \sinh\left(\frac{z^2}{8}\right). \tag{4.19}$$

证明。 我们按照引理 3.4 的证明进行。由引理 3.5 和推论 2.2，只需计算 $\psi_Q(i+\delta,\ z)$当 $\delta \to 0^+$ 时的情形。注意到

$$1 + \psi_Q(i+\delta, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n)\, e^{-\frac{2\pi n i}{\sqrt{\Delta}}}\, e^{-\frac{2\pi n \delta}{\sqrt{\Delta}}}\, J_0\left(\sqrt{\frac{2\pi n(i+\delta)}{\Delta^{1/2}}}\, z\right).$$

将前面的求和公式（4.15）应用于 $p = 1,\ q = \sqrt{\Delta},\ x = \sqrt{\Delta}\,\delta$和 $y = \sqrt{i+\delta}\, z\, \Delta^{1/4}$，可得

$$1 \ + \ \psi_Q(i+\delta, z) = \frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\Delta\,\delta} \sum_{k_1,k_2=0}^{\sqrt{\Delta}-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q(k_1,k_2)} + \frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\sqrt{\Delta}\,\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_Q\left(n, 1/\sqrt{\Delta}\right) e^{-\frac{2\pi n}{\Delta^{3/2}\delta}}\, I_0\left(\frac{\sqrt{2\pi n(i+\delta)}}{\Delta^{3/4}}\, \frac{z}{\delta}\right) \tag{4.20}$$

要得到结论（4.19），我们需要证明（4.20）的右端在 $\delta \to 0^+$ 时以指数速度趋于零。为此，需要消去涉及 δ^{-1} 的余项。

现在我们证明，在上述条件下，余项（4.2）为零：根据假设，我们知道 $\sqrt{\Delta}$是一个整数，且 $\sqrt{\Delta}^2 + B^2 = 4AC$。由于两个奇数之和不能被 4 整除，这便自动表明 B 和 $\sqrt{\Delta}$ 必为偶数。

由于 $(A,\ B,\ C)\ = 1$ 且 B 为偶数，因此 A 或 C 至少有一个为奇数。不失一般性，假设 A 为奇数。现在我们计算高斯和（4.2），只考虑关于 k_1的求和。我们将看到，如果 $\sqrt{\Delta} \equiv 2$ 模 4，这个和就为零。事实上

$$\begin{aligned} \sum_{k_1,k_2=0}^{\sqrt{\Delta}-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q(k_1,k_2)} &= \sum_{k_2=0}^{\sqrt{\Delta}} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\sqrt{\Delta}/2-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q(k_1,k_2)} + \sum_{k_1=\sqrt{\Delta}/2}^{\sqrt{\Delta}-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q(k_1,k_2)} \right\} \\ &= \sum_{k_2=0}^{\sqrt{\Delta}} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\sqrt{\Delta}/2-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q(k_1,k_2)} + \sum_{k_1=0}^{\sqrt{\Delta}/2-1} e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} Q\left(k_1+\frac{\sqrt{\Delta}}{2},k_2\right)} \right\}. \end{aligned}$$

然而，很容易验证的是，

$$Q\left(k_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2},\, k_2\right) = Q\left(k_1, k_2\right) + \sqrt{\Delta}\left(\frac{A}{4}\sqrt{\Delta} + A\,k_1 + \frac{B}{2}k_2\right), \tag{4.21}$$

因此,

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}}Q\left(k_1+\frac{\sqrt{\Delta}}{2},\,k_2\right)\right)=\exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}}Q(k_1,k_2)-2\pi i\left(\frac{A}{4}\sqrt{\Delta}+A\,k_1+\frac{B}{2}k_2\right)\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}}Q(k_1,k_2)\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi i}{2}A\sqrt{\Delta}\right)=-\exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}}Q(k_1,k_2)\right),$$

因为 A 是奇数且 $\sqrt{\Delta}\equiv 2$ 模 4。因此,

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{\sqrt{\Delta}-1}e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}}Q(k_1,k_2)}=0,$$

因此,我们的求和公式可化为

$$1+\tilde{\psi}_Q(i+\delta,z)=\frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\sqrt{\Delta}\,\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_Q\left(n,1/\sqrt{\Delta}\right)e^{-\frac{2\pi n}{\Delta^{3/2}\delta}}\,I_0\left(\frac{\sqrt{2\pi n(i+\delta)}}{\Delta^{3/4}}\,\frac{z}{\delta}\right).\tag{4.22}$$

现在只需沿用引理 3.4 的证明:我们需要证明

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left|\frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\delta}\,e^{-\frac{2\pi n}{\Delta^{3/2}\delta}}\,I_0\left(\frac{\sqrt{2\pi n(i+\delta)}}{\Delta^{3/4}}\,\frac{z}{\delta}\right)\right|=0$$

对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}$。为此,我们只需利用简单的估计(3.24),并回顾 $\mathrm{Re}\left(\sqrt{i+\delta}\,z\right)\to\mathrm{Re}(\sqrt{i}\,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}($ $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z))$ 以及 $\mathrm{Re}\left((i+\delta)\,z^2\right)\to-2\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$ 分别为 $\delta\to 0^+$,因此前一个方程中的项有如下界:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{2\pi}{\Delta^{3/2}\delta}\left(n-\frac{\Delta^{3/4}}{2\sqrt{\pi}}\left|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)\right|\sqrt{n}-\frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)\,\Delta^{3/2}}{4\pi}\right)\right).$$

与之前一样,该表达式 指数中是一个以$X=\sqrt{n}$ 为变量的二次多项式,形式为 m

$$P(X)=X^2-\frac{\Delta^{3/4}}{2\sqrt{\pi}}\left|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)\right|X-\frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)\,\Delta^{3/2}}{4\pi}.$$

计算出 $P(X)$ 的最大值零点后,我们知道,$P(X)$ 在点 $X=X_0$ 处为正的一个充分条件是

$$\frac{\Delta^{3/4}}{4\sqrt{\pi}}\left[\left|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)\right|+\left|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\right|\right]<X_0.\tag{4.23}$$

因此,我们希望(4.23)对每个 $X_0=\sqrt{n}$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$都成立。如果满足以下条件,则该式成立:

$$\left|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)\right|+\left|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\right|<\frac{4\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}},\tag{4.24}$$

每当.....时, $z\in\mathscr{D}_Q=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \left|\text{实部}(z)\right|<\frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}},\ \ \left|\text{虚部}(z)\right|<\frac{2\sqrt{\pi}}{\Delta^{3/4}}\right\}$。现在只需按照引理3.4 和3.5 即可推导出(4.19)。

□

注 4.2. 请注意，条件（4.24）是为确保（4.23）对每个 $X_0 = \sqrt{n},\ \ n \in \mathbb{N}$均成立而提出的。但此条件可以放宽，并替换为

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)| + |\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| < \frac{4\sqrt{\pi\, m_Q}}{\Delta^{3/4}}, \tag{4.25}$$

其中 m_Q 是满足 $\tilde{b}_Q\left(m_Q, 1/\sqrt{\Delta}\right) \neq 0$的最小整数。例如，当 $Q(m,\ n) = Q_0(m,\ n)$：$= m^2 + n^2$，$\Delta = 4$时，条件（4.18）不会化简为（1.9）（当 $\alpha = 2$时）。这是因为

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{Q_0}\left(1, \frac{1}{2}\right) &:= \frac{1}{2} \sum_{\alpha^2+\beta^2=1} \sum_{k_1,k_2=0}^{1} \exp\left(-\pi i\, \left(k_1^2 + k_2^2\right) + \pi i\, (\alpha k_1 + \beta k_2)\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

而 $\tilde{b}_{Q_0}(2,\ 1/2) \neq 0$。因此，$m_{Q_0} = 2$，于是（4.25）现在化简为（1.9）。通过记号和变量排列的练习，可以很容易地验证，当 $Q(m,\ n) = m^2 + n^2$时，（4.22）化简为（3.17）。

4.3 定理 1.2的证明

现在，我们的定理 1.2 的证明与定理1.1的证明几乎相同（计算有所不同）。因此，我们将简要说明主要步骤。从例 2.2中给出的积分表示（2.66）开始，将其中的 $x = e^{2i\omega}$替换为 $-\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4}$，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_Q\left(\frac{1}{2} + it\right)\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + it;\, 1;\, -\frac{z^2}{4}\right) e^{2\omega t}\, dt = e^{i\omega}\, \psi_Q\left(e^{2i\omega}, z\right) - e^{-i\omega}\, e^{-z^2/4}.$$

根据库默尔公式（2.8），加上并减去项 $e^{-z^2/8}\, e^{i\omega}$，可得

$$\frac{e^{-z^2/8}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_Q\left(\frac{1}{2} + it\right)\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - it;\, 1;\, -\frac{z^2}{4}\right) e^{2\omega t}\, dt = -2\, e^{-z^2/8}\, \cos(\omega) + e^{i\omega}\left(e^{-z^2/8} + e^{z^2/8}\, \psi_Q\left(e^{2i\omega}, z\right)\right), \tag{4.26}$$

它与3.37）对于 $\alpha = 2$的情形类似。因此，我们可以采用上一节中的相同计算：将变量 t 改为 $t + \lambda_j$，在等式两边分别求导 p 次，并利用记号（3.40），可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} t^p \eta_Q\left(\frac{1}{4} + i\,(t + \lambda_j)\right)\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - i\,(t + \lambda_j);\, 1;\, \frac{z^2}{4}\right) e^{2\omega t}\, dt \\ &= -4\pi \left(\frac{r_j}{2}\right)^p e^{-2\omega\lambda_j}\, \cos(p\,\theta_j + \omega) + \frac{2\pi}{2^p}\, e^{z^2/8}\, \frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{i\omega - 2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8} + e^{z^2/8}\, \psi_Q\left(e^{2i\omega}, z\right)\right)\right\}.\end{aligned}$$

继续以相同的方式论证，我们便可充分证明该等式（参见上文的（3.42））

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, F_{z,Q}\left(\frac{1}{2} + it\right)\, e^{2\omega t}\, dt = -\frac{8\pi}{2^p} \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, r_j^p e^{-2\omega\lambda_j}\, \left[\cos(p\,\theta_j + \omega)\right] + \\ + \frac{4\pi}{2^p}\, \mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\, \frac{d^p}{d\omega^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{i\omega - 2\omega\lambda_j}\left(e^{-z^2/8} + e^{z^2/8}\, \psi_Q\left(e^{2i\omega}, z\right)\right)\right\}\right),\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中

$$F_{z,Q}(s)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-(s+i\lambda_j)}\Gamma\left(s+i\lambda_j\right)\zeta(s+i\lambda_j,\,Q)\left\{{}_1F_1\left(1-s-i\lambda_j;\,1;\,\frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(1-\overline{s}+i\lambda_j;\,1;\,\frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\}.$$

令 $\omega\to\frac{\pi}{4}^-$，由上文的引理 4.3 （即关系式（4.19））可知，式（4.27）的右端可简化为:

$$-\frac{8\pi}{2^p}\sum_{j=1}^{\infty}c_j r_j^p e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_j}\left[\cos\left(p\,\theta_j+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\mathrm{Re}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right)\right)-\sin\left(p\theta_j+\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{Im}\left(e^{z^2/8}\,\sinh\left(\frac{z^2}{8}\right)\right)\right],$$

这与式（3.45）的右端完全相同，其中 $\alpha=2$。因此，从这里开始，证明完全沿用定理 1.1的证明思路。 ■

5 与 $L_k(s,\ \chi)$相关的组合的零点

与前几节类似，为了研究 $L_k(s,\ \chi)$ 的零点，我们需要一个引理，用以给出某个周期狄利克雷级数的解析延拓。该级数包含有关 $\psi_{k,\ \chi}(x,\ z)$ （2.71）的行为的信息。

在证明这样一个重要的引理之前，我们首先需要一个辅助结果，这将作为下一个引理给出。

尽管下一个结果的证明相当标准，而且这是关于 $\delta=0$ 的一个已知结果（见上文引理 1.2 ），我们仍对 $\delta=1$ 的情形给出证明，因为这或许能给一些读者带来启发。尽管证明很直接，我们仍未找到明确陈述该结果的参考文献。

5.1 与狄利克雷特征相关的指数和

引理 5.1. 设 $\delta\in\{0,1\}$ 且 $0<a_i<1$ 对每个 $i\in\{1,...,k\}$考虑狄利克雷级数

$$\varphi_{k,\delta}(s;a_1,...,a_k):=\sum_{n_1,...,n_k\in\mathbb{Z}}\frac{(n_1+a_1)^{\delta}\cdot...\cdot(n_k+a_k)^{\delta}}{\left((n_1+a_1)^2+...+(n_k+a_k)^2\right)^s},\quad Re(s)>\frac{k}{2}\left(1+\delta\right).\tag{5.1}$$

则 $\varphi_{k,\ \delta}(s;\ \ a_1,\ ...,\ a_k)$ 具有以下性质:

1. 若 $\delta=0$，则它可解析延拓为一个亚纯函数，在 $s=\frac{k}{2}$ 处有一个简单极点，留数为 $Res_{s=k/2}\ \varphi_{k,\ 0}(s;\ \ a_1,\ ...,\ a_k)=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$。

2. 若 $\delta=1$，则它可解析延拓为一个整函数。

此外，它满足以下函数方程:

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\varphi_{k,\delta}(s;\,a_1,...,a_k)=(-i)^{\delta k}\,\pi^{-\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)}\Gamma\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)\,\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s;\,a_1,...,a_k\right),\tag{5.2}$$

其中，当 $Re(s)>\frac{k}{2}(1+\delta)$ 时，$\tilde{\varphi}_{k,\delta}(s;\ a_1,...,a_k)$ 可写成狄利克雷级数

$$\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(s;\,a_1,...,a_k\right)=\sum_{n_1,...,n_k\neq0}\frac{n_1^{\delta}\cdot...\cdot n_k^{\delta}\,e^{2\pi i(n_1,...,n_k)\cdot(a_1,...,a_k)}}{\left(n_1^2+...+n_k^2\right)^s}.\tag{5.3}$$

此外，$\tilde{\varphi}_{k,\ \delta}$ （$s;\ \ a_1,\ .....,\ a_k$）无论 δ 取何值，都可以解析延拓为整函数。

证明。 注意，条件 $0 < a_i < 1$ 意味着多重级数（5.1）对任意 $(n_1, \ldots\ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ 都有定义。还需注意，对于 $\delta = 0$，该结果已为人所知，因为狄利克雷级数（5.1）被约化为 Epstein ζ 函数（1.41），即

$$\varphi_{k,0}(s; a_1, ..., a_k) = \zeta\left(s, \mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{I}_k\right),$$

其中，$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k)$，$\mathbf{I}_k$ 表示对角二次型 $n_1^2 + ... + n_k^2$。$\varphi_{k,0}(s; a_1, ..., a_k)$ 的极点源自 Epstein ζ 函数在 $s = k/2$ 处的极点。此外，我们有

$$\tilde{\varphi}_{k,0}\left(s; a_1, ..., a_k\right) = \zeta\left(s, \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{I}_k\right).$$

由于 $(a_1, ..., a_k) \notin \mathbb{Z}^k$，由 Epstein ζ 函数的解析延拓可知 $\tilde{\varphi}_{k,0}\left(s; a_1, ..., a_k\right)$必为整函数。函数方程（5.2）是（1.42）的直接推论。

现在我们关注 $\delta = 1$ 的情形。首先将（5.1）写成 Mellin 变换

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\varphi_{k,1}(s; a_1, ..., a_k) = \int_0^\infty x^{s-1} \prod_{j=1}^{k} \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} (n_j + a_j)\, e^{-\pi(n_j + a_j)^2 x}\, dx, \quad \mathrm{Re}(s) > k, \tag{5.4}$$

因此，（5.2）的证明依赖于对每个因子应用泊松求和公式。这是标准做法，对每个 $j \in \{1, ..., k\}$，我们得到

$$\sum_{n_j \in \mathbb{Z}} (n_j + a_j)\, e^{-\pi(n_j + a_j)^2 x} = -\frac{i}{x^{3/2}} \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} n_j\, \exp\left(-\frac{\pi}{x} n_j^2 + 2\pi i\, n_j\, a_j\right). \tag{5.5}$$

因此，将（5.4）中的积分拆分为 (0,1) 和 $(1, \infty)$，并在第一个积分上应用（5.5），便得到如下表示：

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\varphi_{k,1}(s; a_1, ..., a_k) = \int_1^\infty x^{s-1} \sum_{n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}} (n_1 + a_1) \cdot ... \cdot (n_k + a_k)\, \exp\left(-\pi\left((n_1 + a_1)^2 + ... + (n_k + a_k)^2\right) x\right) dx$$

$$+ \int_1^\infty x^{\frac{3}{2}k - s - 1}\, (-i)^k \sum_{n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}} n_1 \cdot ... \cdot n_k \cdot \exp\left(-\pi x\left(n_1^2 + ... + n_k^2\right) + 2\pi i\, (n_1, ..., n_k) \cdot (a_1, ..., a_k)\right) dx,$$

即 当我们将 s 替换为 $\frac{3k}{2} - s$，并将 $\varphi_{k,1}(s; a_1, ..., a_k)$ 替换为 $\tilde{\varphi}_{k,1}(s; a_1, ..., a_k$ 后保持不变).

此外，上述等式中给出的积分的一致收敛性和绝对收敛性保证了 $\varphi_{k,1}(s; a_1, ..., a_k)$ 和 $\tilde{\varphi}_{k,1}(s; a_1, ..., a_k)$ 是关于 s 的整函数。

□

下一个引理的作用类似于上一节中的引理 3.2 和 4.1。

引理 5.2。 设 χ 是模 q 的狄利克雷特征，且 p 是满足 $(p, q) = 1$的整数。如果 χ 为偶数，则定义$\delta = 0$。否则，如果 χ 为奇数，则令 $\delta = 1$。

考虑狄利克雷级数

$$L_k(s, \chi, p/q) := \sum_{n_1, ..., n_k \neq 0} \frac{n_1^\delta\, \chi(n_1) \ldots n_k^\delta\, \chi(n_k)}{\left(n_1^2 + ... + n_k^2\right)^s}\, e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(n_1^2 + ... + n_k^2\right)}, \quad Re(s) > \frac{k}{2}(1 + \delta). \tag{5.6}$$

那么 $L_k(s, \chi, p/q)$ 具有以下性质：

1. 若 χ 为偶函数，则可将其解析延拓为至多具有一个简单极点的亚纯函数，该极点位于 $s=k/2$，其留数为

$$Res_{s=k/2}L_k(s,\chi,p/q)=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)(2q)^k}\left(\sum_{r=1}^{2q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}\right)^k. \tag{5.7}$$

特别地，若 p、q 为奇整数，则 $L_k(s,\chi,p/q)$ 是整函数。

2. 若 χ 为奇数，则可将其解析延拓为一个整函数。

此外，它满足函数方程

$$\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k(s,\chi,p/q)=(-i)^{\delta k}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-\left(k\left(\frac12+\delta\right)-s\right)}\Gamma\left(k\left(\frac12+\delta\right)-s\right)\tilde{L}_k\left(k\left(\frac12+\delta\right)-s,\chi,p/q\right), \tag{5.8}$$

~其中 $L_k(s,\chi,p/q)$ 可表示为级数

$$\tilde{L}_k(s,\chi,p/q)=\sum_{n_1,...,n_k\neq0}\frac{b_\chi(n_1,...,n_k;\,p/q)\cdot n_1^\delta\cdot...\cdot n_k^\delta}{\left(n_1^2+...+n_k^2\right)^s},\quad Re(s)>\frac{k}{2}(1+\delta), \tag{5.9}$$

with

$$b_\chi(n_1,...,n_k;\,p/q):=(2q)^{-\frac{k}{2}}\sum_{r_1,...,r_k=0}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot...\cdot\chi(r_k)\,\exp\left(-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+...+r_k^2\right)+2\pi i\,(n_1,...,n_k)\cdot\left(\frac{r_1}{2q},...,\frac{r_k}{2q}\right)\right). \tag{5.10}$$

*Furt*此外，*(5.9)* 无论 χ的奇偶性如何，均可延拓为整函数 .

证明。 由于算术函数 $\chi(n)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}n^2}$的周期为 $2q$，我们可以将级数（5.6）按模 $2q$的剩余类分解，得到:

$$L_k(s,\chi,p/q):=\sum_{n_1,...,n_k\neq0}\frac{n_1^\delta\chi(n_1)...\,n_k^\delta\chi(n_k)}{\left(n_1^2+...+n_k^2\right)^s}e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(n_1^2+...+n_k^2\right)}=$$

$$=(2q)^{k\delta-2s}\sum_{r_1,...,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot...\cdot\chi(r_k)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+...+r_k^2\right)}\sum_{m_1,...,m_k\in\mathbb{Z}}\frac{\left(m_1+\frac{r_1}{2q}\right)^\delta\cdot...\cdot\left(m_k+\frac{r_k}{2q}\right)^\delta}{\left(\left(m_1+\frac{r_1}{2q}\right)^2+...+\left(m_k+\frac{r_k}{2q}\right)^2\right)^s}$$

$$=(2q)^{k\delta-2s}\sum_{r_1,...,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot...\cdot\chi(r_k)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+...+r_k^2\right)}\varphi_{k,\delta}\left(s;\frac{r_1}{2q},...,\frac{r_k}{2q}\right),\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}(1+\delta), \tag{5.11}$$

其中 $\varphi_{k,\delta}(s;\ a_1,...,a_k)$ 由（5.1）给出。现在我们应用前面的引理：若 $\delta=1$，即若 χ 是奇狄利克雷特征，则 $L_k(s,\chi,p/q)$ 是整函数，因为 $\varphi_{k,1}(s;\ a_1,...,a_k)$ 是整函数。

另一方面，如果 χ是偶数，那么 $L_k(s,\chi,p/q)$在 $s=k/2$处必有一个简单极点，其留数由式（5.7）明确给出，这是由引理 5.1的第 1 项得出的。

特别地，如果 χ 是偶数，且 p、q 是奇数整数，

$$\sum_{r_1,...,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot...\cdot\chi(r_k)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+...+r_k^2\right)}=\left(\sum_{r=1}^{2q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}\right)^k$$

$$=\left(\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}+\sum_{r=q+1}^{2q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}\right)^k=\left(\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}-\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)\,e^{-\frac{\pi ip}{q}r^2}\right)^k=0,$$

这表明，在这些条件下， $L_k(s,\chi,p/q)$ 必须是整函数。

该函数　　丢番图方程（5.8）现在可由（5.3）推出：利用（5.11）和（5.3），我们得到

$$\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s}\Gamma(s)\,L_k(s,\chi,p/q)=\frac{(-i)^{\delta k}}{(2q)^{k/2}}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)}\Gamma\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)\times$$
$$\times\sum_{r_1,\ldots,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\;\times e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+\ldots+r_k^2\right)}\,\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s;\,\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right).$$

但对于 $\mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}(1+\delta)$,

$$\frac{1}{(2q)^{k/2}}\sum_{r_1,\ldots,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+\ldots+r_k^2\right)}\,\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(s;\,\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right)=$$

$$=\sum_{n_1,\ldots,n_k\neq 0}\frac{n_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot n_k^{\delta}}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s}\,(2q)^{-\frac{k}{2}}\sum_{r_1,\ldots,r_k=0}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\,\exp\left(-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+\ldots+r_k^2\right)+2\pi i\,(n_1,\ldots,n_k)\cdot\left(\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right)\right)$$

$$=\sum_{n_1,\ldots,n_k\neq 0}\frac{b_\chi(n_1,\ldots,n_k;\,p/q)\,n_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot n_k^{\delta}}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s}=\tilde{L}_k\,(s,\chi,p/q).$$

˜最后，我们只需证明 $L_k(s,\chi,p/q)$ 是整函数：这源于先前将 $L_k(s,\chi,p/q)$ 表示为总和的˜表达式

$$\frac{1}{(2q)^{k/2}}\sum_{r_1,\ldots,r_k=1}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+\ldots+r_k^2\right)}\,\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(s;\,\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right).$$

由于 $0<r_j/(2q)<1$，我们知道 $\tilde{\varphi}_{k,\delta}\left(s;\,\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right)$ 总是整函数（无论 δ 是 0 还是 1），因此 ˜$L_k(s,\chi,p/q)$ 也必定是整函数。

□

注 5.1。注意，我们可以将定义（5.6）和（5.9）的多重级数写成仅含一个求和变量的狄利克雷级数。事实上，我们可以将（5.6）写成狄利克雷级数

$$L_k(s,\chi,p/q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{k,\chi}(n)\,e^{-\frac{i\pi p}{q}n}}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}\,(1+\delta)\,,\tag{5.12}$$

其中 $r_{k,\ \chi}(n)$ 由（2.68）明确给出。我们还可以将（5.9）写成

$$\tilde{L}_k\,(s,\chi,p/q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{b}_{k,\chi}(n,\,p/q)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>\frac{k}{2}(1+\delta),\tag{5.13}$$

˜其中 $b_{k,\ \chi}(n,p/q)$ 为

$$(2q)^{-\frac{k}{2}}\sum_{n_1^2+\ldots+n_k^2=n}n_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot n_k^{\delta}\sum_{r_1,\ldots,r_k=0}^{2q-1}\chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\,\exp\left(-\frac{i\pi p}{q}\left(r_1^2+\ldots+r_k^2\right)+2\pi i\,(n_1,\ldots,n_k)\cdot\left(\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right)\right).\tag{5.14}$$

注 5.2。注意　　在引理 χ 5 的证明中，我们没有使用特征 的本原性。　　2.

在下一小节中，我们将看到，在这一附加假设下，并令 $p=0$ 代入（5.8），即可得到论文开篇给出的函数方程（1.43）。

5.2 引理证明1.3

由于 χ 是本原特征，我们知道高斯和可分解为

$$G(n,\overline{\chi}) := \sum_{j=1}^{q-1} \overline{\chi}(j)\, e^{2\pi i n j/q} = \chi(n)\, G(\overline{\chi}), \tag{5.15}$$

其中 $G(\chi) := G(1,\chi)$。

<escape>通过狄利克雷级数表示式（5.6）和（1.43），我们显然有 $L_k(s,\ \chi) = L_k(s,\ \chi,\ 0)$。由于（5.7）在 $p=0$时为零，因此我们得出 $L_k(s,\ \chi)$ 是整函数。为了证明函数方程（1.44），我们考察（5.8），可得</escape>

$$\left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s} \Gamma(s)\, L_k(s,\chi) = (-i)^{\delta k} \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right)} \Gamma\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s\right) \tilde{L}_k\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s,\chi,0\right). \tag{5.16}$$

因此，剩下的就是简化。 ˜出 的表达式 $L_k(s,\ \chi,\ p/q)$，(5.9)，当 $p=0$：由 (5.10，我们知道

$$\tilde{L}_k\left(s,\chi,0\right) = (2q)^{-\frac{k}{2}} \sum_{n_1,\ldots,n_k\neq 0} \sum_{r_1,\ldots,r_k=0}^{2q-1} \chi(r_1)\cdot\ldots\cdot\chi(r_k)\, \exp\left(2\pi i\ (n_1,\ldots,n_k)\cdot\left(\frac{r_1}{2q},\ldots,\frac{r_k}{2q}\right)\right) \frac{n_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot n_k^{\delta}}{\left(n_1^2+\ldots+n_k^2\right)^s}, \tag{5.17}$$

对于 $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}(1+\delta)$。现在，对于每一对 (n_j, r_j)，得到的高斯和为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{r_j=0}^{2q-1} \chi(r_j)\, \exp\left(2\pi i\, n_j\, \frac{r_j}{2q}\right) = \sum_{r_j=1}^{q-1} \chi(r_j)\, \exp\left(2\pi i\, n_j\, \frac{r_j}{2q}\right) + \sum_{j=1}^{q-1} \chi(r_j)\, \exp\left(2\pi i\, n_j\, \frac{r_j+q}{2q}\right) \\
&= \left(1+(-1)^{n_j}\right) \sum_{r_j=1}^{q-1} \chi(r_j)\, \exp\left(2\pi i\, n_j\, \frac{r_j}{2q}\right) = \begin{cases} 2\sum_{r_j=1}^{q-1} \chi(r_j)\, \exp\left(2\pi i\, m_j\, \frac{r_j}{q}\right) = 2\, G\left(m_j,\chi\right) & n_j = 2m_j \\ 0 & n_j \ \text{odd}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

因此，只有当5.17式中关于$(n_1,\ldots,n_k)$的求和中每个n_j都是偶整数时，该求和才不为零：令 $n_j = 2m_j$，由（5.17）和（5.18）可得，

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_k\left(s,\chi,0\right) &= (2q)^{-\frac{k}{2}} 2^{-2s+k(\delta+1)} \sum_{m_1,\ldots,m_k\neq 0} \frac{G\left(m_1,\chi\right) m_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot G\left(m_k,\chi\right) m_k^{\delta}}{\left(m_1^2+\ldots+m_k^2\right)^s} \\
&= \frac{G^k(\chi)}{q^{k/2}}\, 2^{-2s+k\delta+\frac{k}{2}} \sum_{m_1,\ldots,m_k\neq 0} \frac{\overline{\chi}(m_1) m_1^{\delta}\cdot\ldots\cdot\overline{\chi}(m_k) m_k^{\delta}}{\left(m_1^2+\ldots+m_k^2\right)^s} \\
&= \frac{G^k(\chi)}{q^{k/2}}\, 2^{-2s+k\delta+\frac{k}{2}}\, L_k\left(s,\overline{\chi}\right),
\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中在第二步中我们用到了以下事实： χ 是本原（5.15）。将（5.19）与（5.16）结合，得到（1.44）。 ■

5.3 ψ_{χ}的行为，$k(x,\ z)$

我们最后证明，在（2.71）中给出的 Jacobi ψ–函数具有与前面函数相同的性质。我们从一个涉及 $r_{k,\chi}(n)$ 的求和公式开始。

˜引理 5.3。 设 χ 为模 q 的本原狄利克雷特征，并设 $r_{k,\ \chi}(n)$ 以及 $b_{k,\ \chi}(n,\ p/q)$ 为式（*2.68*）和式（*5.14*）中给出的算术函数。

进一步假设，当 χ 为偶数时， $q \neq 0$ 模 4 。

然后，对于每个 $Re(x) > 0$ 以及 $y \in \mathbb{C}$，以下变换公式成立 e

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\chi}(n)\, e^{-\frac{i\pi}{q}n}\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\, e^{-\frac{\pi}{2q}n\,x}\, J_{k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2q}}\, y\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{y^2}{4x}}}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{\delta k} \tilde{b}_{k,\chi}\left(n,\, 1/q\right)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\, e^{-\frac{\pi n}{2q\,x}}\, I_{k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2q}}\, \frac{y}{x}\right). \tag{5.20}$$

证明。 对这对狄利克雷级数（它们满足海克函数方程，并且根据引理 5.2属于类 $\mathcal{A}$ ）应用求和公式（2.9）或（

$$\phi(s) = \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s} L_k\left(s, \chi, 1/q\right) := \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{k,\chi}(n)\, e^{-\frac{i\pi}{q}n}}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}(1+\delta) \tag{5.21}$$

and

$$\psi(s) = \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s} (-i)^{\delta k}\, \tilde{L}_k\left(s, \chi, 1/q\right) = \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{\delta k}\, \tilde{b}_{k,\chi}(n,\, 1/q)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}(1+\delta). \tag{5.22}$$

这要求进行简单的代换 $\lambda_n = \frac{\pi n}{2q}$， $\mu_n = \frac{\pi n}{2q}$， $a(n) = r_{k,\ \chi}(n)\ e^{-\frac{i\pi p}{q}n}$， $b(n) = (-i)^{\delta k}\tilde{b}_{k,\ \chi}(n,\ 1/q)$以及 $r = k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)$ 在（2.9）中。

我们首先研究.....的可能性这些极点 $\phi(s)$可能具有：如果 χ 是奇数，则由引理 5.2 可知 $\phi(s)$ 是整函数 .

现在假设 χ 为偶数。由于不存在这样的本原特征（模 q）： $q \equiv 2$ 模 4，因此我们要求 $q \neq 0$ 在 χ 为偶数时模 4，这实际上意味着 q 必须为奇数。根据引理5.2的第 1 项，我们知道在此假设下 $\phi(s)$ 必为整函数。

因此， $\rho = 0$ 无论 χ 是偶数还是奇数。为了应用（2.9），我们还需要求出 $\phi(0)$。由于 $\phi(s) \in \mathcal{A}$和 $\psi(s)$ 由（5.21）给出的都是整函数，根据注释1.1 可知 $\phi(0)$ 必定为零。

<escape>最后，将 $\rho = \phi(0) = 0$ 代入（2.9）中，我们便可推导出（5.20）。</escape> □

现在我们证明上一节中引理3.4 和4.3 的类似结果。

引理 5.4. 设 χ 是模 q 的本原狄利克雷特征，且 $r_{k,\chi}(n)$ 由（*2.68*）定义。对于 $Re(x) > 0$和 $z \in \mathbb{C}$，考虑雅可比函数（ $\psi-$函数（*2.71*）的类似形式：

$$\psi_{\chi,k}(x,z) := 2^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}}x\,z\right)^{1-\frac{k}{2}-k\delta} \sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\chi}(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\, e^{-\frac{\pi n}{q}x}\, J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}n\,x\,z}\right).$$

此外，设 h： $\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ 是一个解析函数，并假设 z 满足以下条件：

$$z \in \mathscr{D}_\chi := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |Re(z)| < \sqrt{\frac{\pi}{2q}},\ |Im(z)| < \sqrt{\frac{\pi}{2q}} \right\}. \tag{5.23}$$

那么：

1. 如果 χ 是偶数且 $q \neq 0$ 模 **4** 或

2. 若 χ 为奇数且模数任意,

渐近行为发生:

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{d^m}{d\omega^m} \left\{ h(\omega)\, \psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},\, z\right) \right\} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \tag{5.24}$$

证明。按照引理3.4 和3.5 的证明（特别参见（3.21）和（3.35））（并将其中的δ–记号改为 ϵ），我们只需考察 $\psi_{\chi,\ k}(i+\epsilon, z)$在 $\epsilon \to 0^+$时的行为。由（2.71），$\psi_{\chi,\ k}(i+\epsilon, z)$的表达式为

$$\begin{aligned}
&2^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}(i+\epsilon)}\,z\right)^{1-\frac{k}{2}-k\delta} \sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\chi}(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\, e^{-\frac{\pi n}{q}(i+\epsilon)}\, J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}n(i+\epsilon)}\,z\right) \\
&= 2^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}(i+\epsilon)}\,z\right)^{1-\frac{k}{2}-k\delta} \sum_{n=1}^{\infty} r_{k,\chi}(n)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{k\delta}{2}}\, e^{-\frac{\pi n}{q}i}\, e^{-\frac{\pi n}{q}\epsilon}\, J_{\frac{k}{2}+k\delta-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}n(i+\epsilon)}\,z\right).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

我们可以将求和公式（5.20）应用于（5.25）的右端，其中（5.20）中的 x 被替换为 2ϵ，而 y 被替换为 $\sqrt{2}\,(i+\epsilon)\ z$。由此得到如下变换:

$$\begin{aligned}
\psi_{\chi,k}(i+\epsilon, z) =& 2^{\frac{k}{2}+k\delta-1}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+k\delta\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{q}(i+\epsilon)}\,z\right)^{1-\frac{k}{2}-k\delta} \frac{e^{-\frac{(i+\epsilon)z^2}{4\epsilon}}}{2\epsilon} \times \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{\delta k}\, \tilde{b}_{k,\chi}\left(n,\, 1/q\right)\, n^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\, e^{-\frac{\pi n}{4q\epsilon}}\, I_{k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n(i+\epsilon)}{q}}\,\frac{z}{2\epsilon}\right).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

如果我们像之前一样对 $I_\nu(z)$ 进行估计（见（3.24）），确保（5.26）当 $\epsilon \to 0^+$ 时趋于零的一个充分条件是

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{-\frac{k}{2}-k\delta}\, \exp\left(-\frac{\pi n}{4q\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\sqrt{\frac{\pi n}{q}}\,\frac{|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{2\epsilon} \right) = 0.$$

但通过考察二次多项式（变量为 $\sqrt{n}$），

$$P(X) = X^2 - X\sqrt{\frac{2q}{\pi}}\,|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)| - \frac{2q\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{\pi},$$

可以看出，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $P(\sqrt{n}) > 0$ 当且仅当:

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)| + |\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| < \sqrt{\frac{2\pi}{q}}, \tag{5.27}$$

只要 z 满足条件 (5.23) 即可。 □

注 5.3。与定理 1.1的表述不同，(5.23) 中的定义域不依赖于 k。与˜注 4.2类似，若要扩大此定义域，就需要进一步了解算术函数 $b_{k,\ \chi}(n,\ \ 1/q)$。与 (4.25) 类似，(5.27) 可以替换为:

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)| + |\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| < \sqrt{\frac{2\pi\, m_{\chi,k}}{q}},$$

˜其中 $m_{\chi,\ k}$ 是使得 $b_{k,\ \chi}(n,\ 1/q)\ \neq 0$成立的最小整数。

5.4 定理1.3的证明

由于狄利克雷级数 $L_k(s,\ \chi)$ 是整函数，定理 1.1 的证明过程变得更简单，因为我们不需要像表达式（3.45）中那样统计余项的符号变化。

我们将看到本例中的证明是如何进行的：从例2.3中得到的积分表示（2.72 ）出发，并将其中的 x 替换为 $e^{2i\omega}$，$-\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{4}$：

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it;\,\frac{k}{2}+k\delta;\,-\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt=e^{i\omega k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\,\psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},z\right).$$

From 利用库默尔公式，我们可以将前一个等式改写成对称形式：

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-it;\,\frac{k}{2}+k\delta;\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt=e^{i\omega k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\,e^{z^2/4}\,\psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},z\right),\tag{5.28}$$

这多少让人想起（3.36）和（4.26）中给出的前几步。不过在当前情形下，情况要简单得多，因为（5.28）的右端没有余项。

作变量代换 $t\to t+\lambda_j$，并对 ω 求导 p 次后，我们便可得到：

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^p\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+i\,(t+\lambda_j),\chi\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-i(t+\lambda_j);\,\frac{k}{2}+k\delta;\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt\\=\frac{2\pi}{2^p}\,e^{z^2/4}\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{i\omega k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-2\omega\lambda_j}\,\psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},z\right)\right\}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

现在我们要作一个重要说明：为了应用哈代方法，（5.29）左边的被积函数必须是 t 的实函数。

在前两种情况下，只需取超几何因子的实部即可保证这一点。然而，在这种情况下，我们注意到函数

$$\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right)$$

并非实值函数。这一点可以从函数方程（1.44）的不对称性中轻易看出，

$$\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right)=\left(\frac{(-i)^\delta G(\chi)}{\sqrt{q}}\right)^k\,\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-it,\overline{\chi}\right).\tag{5.30}$$

然而，由于 $|G(\chi)/\sqrt{q}|=1$，我们可以将 $(-i)^\delta\,G(\chi)/\sqrt{q}:=e^{i\gamma}$ 写成某个实数 γ，然后设：

$$\tilde{\eta}_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right):=e^{-i\gamma k/2}\,\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\chi\right).\tag{5.31}$$

现在，由（5.30）可清楚看出，$\tilde{\eta}_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\ \chi\right)$ 是实值函数，且其零点与 $\eta_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it,\ \chi\right)$的零点完全相同。因此，我们可以将（5.29）的两边乘以 $e^{-i\gamma k/2}$，得到：

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^p\,\tilde{\eta}_k\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+i\,(t+\lambda_j),\chi\right)\,{}_1F_1\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-i(t+\lambda_j);\,\frac{k}{2}+k\delta;\,\frac{z^2}{4}\right)e^{2\omega t}\,dt\\=\frac{2\pi e^{-i\gamma k/2}}{2^p}\,e^{z^2/4}\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{e^{i\omega k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-2\omega\lambda_j}\,\psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},z\right)\right\}.\end{aligned}$$

我们取超几何因子的实部，乘以 $c_j \in \ell^1$ 并对 j求和：采用与定理1.1的证明中相同的论证方式，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \, \tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{2\omega t}\, dt = \frac{4\pi}{2^p}\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\gamma k/2+z^2/4}\,\frac{d^p}{d\omega^p}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, e^{i\omega k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-2\omega\lambda_j}\cdot \psi_{\chi,k}\left(e^{2i\omega},z\right)\right\}\right], \quad (5.32)$$

其中

$$\tilde{F}_{z,k,\chi}(s) := e^{-i\gamma k/2}\, F_{z,k,\chi}(s),$$

其中 $F_{z,\ k,\ \chi}(s)$ 为

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \eta_k\left(s+i\lambda_j,\chi\right)\left\{{}_1F_1\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-s-i\lambda_j;\, k\left(\frac{1}{2}+\delta\right);\, \frac{z^2}{4}\right)+{}_1F_1\left(k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)-\overline{s}+i\lambda_j;\, k\left(\frac{1}{2}+\delta\right);\, \frac{\overline{z}^2}{4}\right)\right\}.$$

˜若我们证明实值函数 $F_{z,\ k,\ \chi}(s)$ 有无穷多个零点，则结论成立。这可仿照定理 1.1 的证明：对两边取极限 $\omega \to \frac{\pi}{4}^-$ 并利用 (5.24)，可得

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{4}^-}\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, \tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{2\omega t}\, dt = 0. \quad (5.33)$$

若现在假设被积函数只有有限个零点，我们便可沿用先前的推理（见上文 (3.55)、(3.56) 和 (3.57)）证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \left|\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+i\left(t+\lambda_j\right)\right)\right| e^{\frac{\pi}{2}t}\, dt < \infty$$

因此，由 (5.33) 和控制收敛定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, \tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t}\, dt = 0.$$

仿照 (3.59) 和 (3.60)，可得

$$\begin{aligned}&\int_{T_0}^{\infty}\left\{\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t}+(-1)^p\,\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} t^p dt\\ =&-\int_{0}^{T_0}\left\{\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t}+(-1)^p\,\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} t^p dt \le K(T_0)\, T_0^p \end{aligned} \quad (5.34)$$

其中 T_0 是一个（足够大的）参数，使得$\tilde{F}_{z,\ k,\ \chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right)\neq 0$ 当 $t > T_0$。完全按照（3.60）中的推导，我们可以得出下界：

$$\int_{T_0}^{\infty}\left\{\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}+it\right) e^{\frac{\pi}{2}t}+(-1)^p\,\tilde{F}_{z,k,\chi}\left(\frac{k}{4}+\frac{k\delta}{2}-it\right) e^{-\frac{\pi}{2}t}\right\} t^p dt \ge \epsilon(T_0)\,(2T_0)^p. \quad (5.35)$$

比较（5.34）和（5.35），我们得出

$$2^p \leq \frac{K(T_0)}{\epsilon(T_0)}$$

对无穷多个 p 值都必须成立，这是荒谬的。 ■

注 5.4. 显然，从证明中可以看出，我们只需要序列 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 有界这一条件，但我们并未用到它能取到其界这一事实。因此，可以放宽定理 1.3陈述中的后一条件。定理 1.4 也有类似的评论

6 与 $L_f(s,\ p/q)$相关的组合的零点

在本节最后，我们通过证明定理 1.4 来推广 Wilton 的结果。我们将从简从略，因为与前几节不同，我们不需要为所研究的狄利克雷级数构造“指数求和公式”。本节的基本狄利克雷级数为：

$$L_f(s,p/q) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)\, e^{\frac{2\pi i p}{q} n}}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}, \quad (p,q)=1, \tag{6.1}$$

其中 $a_f(n)$ 是尖点形式 $f(\tau)$ 的傅里叶系数，并假设它们为实数。由 $L_f(s,\ p/q)$ 的函数方程可得（见上文（1.49）和（2.84））：

$$\eta_f\left(s, \frac{p}{q}\right) = (-1)^{k/2}\, \eta_f\left(k-s,\, -\frac{\overline{p}}{q}\right),$$

可以验证，只有当 $p^2 \equiv 1$ 模 q 时，$\eta_f(k/2+it, p/q)$ 才是实数（或纯虚数）。

因此，从现在起，我们将假设 $p^2 \equiv 1$ 模 q。由于 $L_f(s,p/q)$ 是整函数，我们预计定理 1.4 的证明与定理 1.3 的证明完全相同，因此我们将省略该证明。

本节的唯一目的是说明，雅可比的 ψ–函数对于 $L_f(s,p/q)$, (2.81), 当 $x \to i$ 沿着半圆 $|x|=1$, $\mathrm{Re}(x) > 0$ 时，会以指数速度趋于零。这是我们论文的最后一个结果。证明了这一点之后，只要按照上一节的思路，定理 1.4 就会自动得到证明。

引理 6.1。 设 $f(\tau)$ 是全模群上权为 k 的尖点形式。考虑狄利克雷级数：

$$L_f(s,p/q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)\, e^{\frac{2\pi i p}{q} n}}{n^s}, \quad (p,q)=1, \ p^2 \equiv 1 \mod q$$

及其对应的雅可比 ψ–函数，

$$\psi_{f,p/q}(x,z) := (k-1)! \left(\sqrt{\frac{\pi x}{2q}}\, z\right)^{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\, e^{\frac{2\pi i p}{q} n}\, n^{\frac{1-k}{2}}\, e^{-\frac{2\pi n}{q} x}\, J_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{q}}\, x\, z\right),$$

定义于 $Re(x) > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$。

进一步假设 z 属于以下区域:

$$z \in \mathscr{D}_q := \left\{ z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < 2\sqrt{\frac{\pi}{q}},\ |Im(z)| < 2\sqrt{\frac{\pi}{q}} \right\}. \tag{6.2}$$

那么，对于满足 z （*6.2*）的任意 $m \in \mathbb{N}_0$、任意解析函数 h： $\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$，都有如下关系成立:

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{d^m}{d\omega^m} \left\{ h(\omega)\, \psi_{f,p/q}\left(e^{2i\omega}, z\right) \right\} = 0. \tag{6.3}$$

证明。 证明是直接的 因为我们已经得到了符合所需形式的变换（2.82）。事实上 ,

$$\psi_{f,p/q}(i+\delta, z) = (k-1)!\, 2^{k-1} (\sqrt{i+\delta}\, z)^{1-k} \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\, e^{\frac{2\pi i\,(p-1)}{q} n}\, n^{\frac{1-k}{2}}\, e^{-\frac{2\pi n}{q}\delta}\, J_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{q}\,(i+\delta)}\, z\right).$$

Appl将（2.82）中的 x 替换为 δ，并将 z 替换为 $\frac{\sqrt{i+\delta}}{\sqrt{\delta}} z$，再将 p 替换为 $p-1$，即可得到:

$$\begin{aligned} \psi_{f,p/q}(i+\delta, z) = (k-1)!\, 2^{k-1} (\sqrt{i+\delta}\, z)^{1-k} \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{\frac{1-k}{2}} \frac{e^{-\frac{(i+\delta)z^2}{4\delta}}}{\delta} (-1)^{k/2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\, e^{-\frac{2\pi i\, R\, n}{q}}\, n^{\frac{1-k}{2}}\, e^{-\frac{2\pi n}{q\delta}}\, I_{k-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi n\,(i+\delta)}{q}}\, \frac{z}{\delta}\right), \end{aligned}$$

其中 R满足 $R\ (p-1)\ \equiv 1$模 q。由界（3.24）以及引理 3.4和 3.5中的工作，（6.3）的证明再次归结为证明

$$\lim_{\delta \to 0^+} \delta^{-1} \exp\left(-\frac{2\pi n}{q\delta} + \sqrt{\frac{2\pi n}{q}}\, \frac{|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}\delta} + \frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{2\delta} \right) = 0.$$

但要使其成立，一个充分条件是 z 满足（6.2）。 □

利益披露声明: 作者声明，他们不存在利益冲突。

致谢: 两位作者均获得了部分资助。CMUP 是 LASI 的成员，该机构由科学与技术基金会（FCT），公共机构通过国家资金资助，项目编号为 UIDB/00144/2020 和UIDP/00144/2020。

第一作者还感谢葡萄牙科学技术基金会（FCT）通过博士奖学金 2020.07359.BD 提供的支持。

参考文献

[1] G. Andrews、R. Askey 和 R. Roy，《特殊函数》，剑桥大学出版社（1999年） [平装版： 2000].[2] P. T. Bateman 和 E. Grosswald，关于 Epstein ζ 函数，《算术学报》9（1964年），365–373.[3] B. C. Berndt，算术恒等式与海克函数方程，《爱丁堡数学学会会刊》16（1969年），221–226.[4] ———，广义狄利克雷级数与海克函数方程，《爱丁堡数学学会会刊》15（1967年），309–313.[5] ———，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式 I，《美国数学学会会刊》137（1969年），345–359.[6] ———，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式 III，《美国数学学会会刊》146（1969年），323–348.[7] ———，《某些狄利克雷级数的函数方程》，《美国数学学会会刊》29（1971年），457–460.[8] B. C. Berndt、A. Dixit、R. Gupta、A. Zaharescu，与满足海克函数方程的狄利克雷级数相关的一类恒等式，《美国数学学会会刊》150（2022年），4785–4799.[9] B. C. Berndt、A. Dixit、R. Gupta 和 A. Zaharescu，涉及修正贝塞尔函数与一类算术函数的两个一般级数恒等式，《加拿大数学杂志》（2022年），1—31.[10] B. C. Berndt、A. Dixit、J. Sohn，拉马努金、科什利亚科夫和吉南定理的特征类比，《应用数学进展》46（2011年），54—70.[11] B. C. Berndt、S. Kim、A. Zaharescu，平方和与贝塞尔函数乘积，《数学进展》338（2018年），305–338.[12] B. C. Berndt、S. Kim、A. Zaharescu，Koshliakov公式的类比，《拉马努金125》，《当代数学》627，K. Alladi、F. Garvan 和 A. J. Yee 编，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年，41–48.[13] B. C. Berndt、Y. Lee 和 J. Sohn，拉马努金失落的笔记本中的 Koshliakov公式与吉南公式，《数论综述》，《数学发展》17（2012年），21-42.[14] S. Bochner，模关系的一些性质，《数学年刊》53（1951年），332-360.[15] Yu. A. Brychkov、O. I. Marichev、N. V. Savischenko，《梅林变换手册》，CRC出版社，2019年.[16] H. Buchholz，《合流超几何函数》，《施普林格自然哲学丛书》第15卷，施普林格出版社，柏林—海德堡，1969年.[17] T. Callahan 和 A. Smith，二次型的 L 函数，《美国数学学会会刊》217（1976年），297—309.[18] K. Chandrasekharan 和 R. Narasimhan，海克函数方程与算术恒等式，《数学年刊》74（1961年），1-23.[19] A. Dixit，一般 theta 变换公式的类比，《爱丁堡皇家学会会刊》A辑143（2013年），371–399.[20] A. Dixit，拉马努金生成模形式变换公式的巧妙方法，载于：《斯里尼瓦瑟·拉马努金的遗产》，《RMS讲义系列》20（2013年），第163–179页.[21] A. Dixit、A. Roy、A. Zaharescu，黎斯型判据与 theta 变换类比公式，《数论杂志》160（2016年），385–408.[22] A. Dixit、R. Kumar、B. Maji 和 A. Zaharescu，Riemann Ξ 函数与有界垂直平移下合流超几何函数的组合的零点，《数学分析及其应用杂志》466（2018年），307–323.[23] A. Dixit、N. Robles、A. Roy 和 A. Zaharescu，有界垂直平移下 Riemann ξ 函数组合的零点，《数论杂志》149（2015年），404–434.[24] A. L. Dixon、W. L. Ferrar，格点求和公式，《牛津数学季刊》2（1931年），31-54.[25] ———，圆上格点的一些求和 I，《牛津数学季刊》5（1934年），48–63.[26] ———，圆上格点的一些求和 II，《牛津数学季刊》5（1934年），172–185.[27] P. Epstein，论一般 ζ 函数理论，《数学年刊》56（1903年），615–644[28] ———，论一般 ζ 函数理论 II，《数学年刊》63（1907年），205–216.

[29] A. Erdélyi、W. Magnus、F. Oberhettinger、F. G. Tricomi，《高等超越函数》，第**1**、**2** 和**3**卷，麦格劳-希尔，纽约

约克、伦敦和多伦多，1953年。[30] A. P. Guinand，关于黎曼 ζ函数的一些快速收敛级数，《牛津数学季刊》6（1955年），156—160。[31] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第7版，学术出版社，圣迭戈，2007年。[32] G. H. Hardy，关于黎曼函数 $\zeta(s)$ 的零点，《科学院报告》158（1914年），1012–1014。[33] E. Hecke，关于具有函数方程的狄利克雷级数及其在临界线上的零点，巴伐利亚科学院数学与自然科学部，第2卷（1937年），73–95。[34] G. H. Hardy、E. M. Wright，《数论导引》，牛津大学出版社，牛津，第6版，2008年。[35] M. Jutila，指数和理论中的一种方法讲义，塔塔基础研究院数学讲义80（施普林格，柏林/海德堡/纽约/东京，1987年）。[36] M. Jutila，与二次型相关的指数和，《数论》（编者：Richard A. Mollin，Walter de Gruyter and Co，柏林/纽约，1990年），271–286。[37] H. Kober，Epstein ζ函数的零点，《伦敦数学会会刊》42（1936年），1–8。[38] ———，某些贝塞尔级数的变换公式及其与ζ函数的关系，《数学杂志》39（1934年），609–624。[39] N. S. Koshliakov，关于Voronoï求和公式，《数学通讯》58（1929年），30—32（俄文）。[40] J.C. Lagarias 和 E. Rains，关于数域的二变量ζ函数，《傅里叶研究所年刊》53（2003年），1-68。[41] E. Landau，关于Hardy发现具有实部 1 2 的ζ函数的无穷多个零点，《数学年刊》76（1915年），212–243。[42] J. Lehner，负维自守形式的傅里叶系数的大小，《美国数学会通报》61（1961年），603-606。[43] J. Meher、S. Pujahari 和 K. Shankhadhar，半整数权尖点形式所附L函数的零点，《美国数学会会刊》147（2019年），131–143。[44] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert、C. W. Clark（编），《NIST数学函数手册》，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[45] F. Oberhettinger 和 K. L. Soni，关于一些等价于涉及黎曼ζ函数的函数方程的关系，《数学杂志》127（1972年），17–34。[46] H. S. A. Potter、E. C. Titchmarsh，Epstein ζ函数的零点，《伦敦数学会会刊》（第2辑）39（1935年），372-384。[47] A. P. Prudnikov、Yu. A. Brychkov 和 O. I. Marichev，《积分与级数》：第1卷：初等函数，Gordon and Breach，纽约，1986年；第2卷：特殊函数，Gordon and Breach，纽约，1986年；第3卷：更多特殊函数，Gordon and Breach，纽约，1989年。[48] P. Ribeiro 和 S. Yakubovich，关于Epstein ζ函数及一类狄利克雷级数的零点，预印本见arXiv:2112.10561v2。[49] B. Riemann，《给定大小以下素数的个数》（德文原题Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse的译文）。[50] A. Selberg 和 S. Chowla，关于Epstein ζ函数，《纯粹与应用数学杂志》227（1967年），86-110。[51] C. L. Siegel，高等解析数论讲义，塔塔基础研究院，孟买，1961年。[52] ———，对狄利克雷L级数和Epstein ζ函数论的贡献，《数学年刊》44（1943年），143–172。[53] K. Soni，与Koshliakov公式推广相关的一些关系，《美国数学学会会刊》17（1966年），543–551。[54] H. M. Stark，二次型的L函数和特征和。一，《算术学报》14（1968年），35–50。[55] H. M. Stark，二次型的L函数和特征和。二，《算术学报》15（1968年），307–317。

[56] M. Suzuki，几个自守L函数的乔拉–塞尔伯格公式类比，《纯粹数学高级研究，**49**（2007年），479–506。[57] N. M. Temme，《特殊函数：数学物理经典函数导论》，Wiley-Interscience，纽约，1996年。[58] E. C. Titchmarsh，《函数论》，第2版，牛津大学出版社，伦敦，1939年。[59] E. C. Titchmarsh，《黎曼ζ函数论》，第2版，克拉伦登出版社，牛津，1986年。[60] G. N. Watson，某些自反函数（1），《牛津数学季刊》（牛津），**2**（1931年），298–309。[61] ———，《贝塞尔函数论》，第2版，剑桥大学出版社，伦敦，1966年。[62] J. R. Wilton，关于拉马努金的算术函数 $\tau(n)$的一点注记，《剑桥哲学学会数学论文集》**25**（1929年），121–129。