arXiv:2304.09561v1 [math.RT] 19 Apr 2023

范畴 $\mathcal{O}$ ：截断电流李代数

MATTHEW CHAFFE 和 LEWIS TOPLEY

Abstract. 本文研究了复半单李代数所对应的截断电流李代数 $\mathfrak{g}_n$ 的 Bernstein–Gelfand–Gelfand 范畴 $\mathcal{O}$ 的一种类比。该范畴具有 Verma 模和单模，它们分别由在 $\mathfrak{g}$ 中选定的 Cartan 子代数上的截断电流的对偶空间参数化。我们的主要结果给出一个归纳过程，用于计算 $\mathfrak{g}_n$ 中 Verma 模内单模的合成重数，其依据是 $\mathfrak{l}$ 为 Levi 子代数时 $\mathfrak{l}_{n-1}$ 中相应的合成重数。因此，这些数可表示为 Kazhdan–Lusztig 多项式在 1 处取值的整数线性组合。这推广了第一作者近期的工作，其中讨论了 $n = 1$ 的情形。

1. 引言 Introduction

近年来，截断电流李代数已出现在文献的许多领域中，其受到广泛关注，很大程度上源于它们在有限维单李代数与相应非扭仿射李代数的真空抛物子代数之间起到插值作用。若 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 是某个复约化代数群的李代数，那么由 G 中多项式电流组成的群 $G[t]$ 是代数群（无限维）的，其元素为正则映射 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to G$。电流李代数 $\mathfrak{g}[t] := \mathrm{Lie}\, G[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ 同构于 $\mathfrak{g}$ 的 Kac–Moody 仿射化中一个极大抛物子代数的导出子代数，而第 n 个截断电流李代数 是商模 $\mathfrak{g}_n := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$。等价地， $\mathfrak{g}_n$ 可描述为 G 的第 n 阶喷射概形 J_nG 的李代数。

首个截断电流李代数 $\mathfrak{g}_1$ 出现在 Takiff 的研究中，因此通常称为 Takiff 李代数。他证明了对称不变代数 $S(\mathfrak{g}_1)^{\mathfrak{g}_1}$ 是由 2 rank($\mathfrak{g}$) 个变量 [Ta71], 生成的多项式代数，这推广了 Chevalley 的经典定理；该定理描述了 $S(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{g}_0}$。后来，Ra¨ıs– Tauvel 将 Takiff 的定理推广到了任意 n [RT92]。由于后者的工作是我们论文中的一个关键组成部分，我们将在第 2.2 节简要介绍他们的主要结果。最近，Macedo–Savage 将他们的工作进一步推广到截断多重电流的情形 [MS19], ； Panyushev–Yakimova 则证明，在温和假设下，对复李代数，运算 $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}_1$ 保持具有多项式对称不变量这一性质[PY20]。

这些关于不变量理论的研究在顶点代数理论中有重要应用。值得注意的是，描述与 $\mathfrak{g}$ 相关的临界能级普适仿射顶点代数的中心（又称 Feigin–Frenkel 中心）的第一步近似，是描述其半经典极限；该极限等于 $S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})^{\mathfrak{g}[t]}$。而后者又可描述为前一段中讨论的代数 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 的直接极限（例如参见 [Fr07, §3.4]或[Mo18, §6] ）。Arakawa–Premet 最近利用这一与 Feigin–Frenkel 中心的联系，借助仿射 W-代数 [AP17]，为中心化子的 Vinberg 问题给出了肯定的解答。我们还提及 Kamgarpour 的工作 [Ka16] ，其中讨论了这与几何朗兰兹纲领之间的关系。顶点 W-代数理论的另一项相关研究来自 Brundan–Kleshchev [BK06, §12], ：该研究指出，与幂零元相关的有限 W-代数 $\mathfrak{gl}_N$ ，当其所有 Jordan 块的大小均为 n 时，同构于截断 Yangian；后者允许将 $U(\mathfrak{g}_n)$作为滤过退化。

本文聚焦于截断电流代数的表示论。复约化李代数 $\mathfrak{g}$ 最著名的模范畴是伯恩斯坦–盖尔范德–盖尔范德（BGG）范畴 $\mathcal{O}$，这是一个包含所有最高权模的阿贝尔范畴（综述请参见 [Hu08]）。Wilson 将最高权模的概念推广到了所有截断电流 [Wi11], ，随后 Mazorchuck–S¨orderberg 引入了一个适用于 $\mathcal{O}$ Takiff $\mathfrak{sl}_2$ [李代数的范畴版本19]。该领域最近的发展是第一作者 [Ch23] 的工作，他对所有 Takiff 李代数的范畴进行了深入研究，最终证明，Verma 模中单模的合成重数可以通过涉及 Kazhdan–Lusztig 多项式的某些公式来确定。本文的结果将 *loc. cit.* 中的所有主要结果推广到了截断电流李代数 $\mathfrak{g}_n$的情形。

在引言余下部分中，我们固定 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，其中 G 是一个复约化代数群，并固定 $n > 0$。我们还固定一个三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ ，并记作 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$。由此得到一个三角

分解 $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{n}_n^- \oplus \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{n}_n^+$，我们称一个模是最高权 模，如果它由一个一维 $\mathfrak{b}_n$-模作为 $\mathfrak{g}_n$-模生成。这些一维模由 $\mathfrak{h}_n^*$参数化，而 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 所给出的一维模记为 $\mathbb{C}_\lambda$。我们将权为 λ的泛最高权模或*Verma* 模 定义为

$$M_\lambda := U(\mathfrak{g}_n) \otimes_{U(\mathfrak{b}_n)} \mathbb{C}_\lambda. \tag{1.1}$$

由于它在 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \otimes 1 \subseteq \mathfrak{h}_n$ 上是半单的，且 $\lambda|_{\mathfrak{h}}$-权空间为一维，因此它有唯一的极大子模和唯一的简单商模，我们将其记为 L_λ。

我们研究范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 中有限生成的 $\mathfrak{g}_n$-模，其中 $\mathfrak{n}_n^+$ 局部幂零地作用， $\mathfrak{h}$ 半单地作用，且 $\mathfrak{h}_n^{\geq 1}$:
$= \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) \subseteq \mathfrak{h}_n$ 局部有限地作用（见定义 3.1）。该范畴对商模和子模封闭，而单模恰为 $\{L_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{h}_n^*\}$。

BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 对于 $\mathfrak{g}$ 而言有一个特别好的性质：它是阿廷的；然而，这一性质对 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 并不成立。因此，我们利用形式特征定义合成重数 $[M : L_\mu]$ ：每个模 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 都有有限维的 $\mathfrak{h}$-权空间，其形式特征 $\operatorname{ch} M$ 可以唯一地表示为单模特征标的非负整数线性组合。我们称这些和式中的系数为 模 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的合成重数。我们将在第 6 节中进一步说明这一点，并给出 $[M : L_\lambda]$ 的描述（见引理 6.2），其思路与仿射李代数合成重数的描述相同 [Kac90，命题 9。7]。

现在陈述本文的主要结果，该结果直接由推论 6.8

定理 1.1。设 $n > 0$，设 G 是一个连通约化群，且 λ， $\mu \in \mathfrak{h}_n^*$。合成重数$[M_\lambda : L_\mu]$ 可以通过一个精确公式 (6.1) 表示为截断当前代数 $\mathfrak{l}_{n-1}$ 中的 *Verma* 模内单模的合成重数，其中 $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie}(L)$ 对应于某个 *Levi* 子群 $L \subseteq G$。

定理 1.1 给出了一个计算合成重数的归纳过程 $[M_\lambda : L_\mu]$ 对于 n阶截断当前代数，可以用 $\mathfrak{g}_0$的相应合成重数来表示。根据 Beilinson–Bernstein 和 Brylinski–Kashiwara 对 Kazhdan–Lusztig 猜想的证明（见 [HTT08]），我们知道，对于 $n = 0$ 合成重数 $[M_\lambda : L_\mu]$可通过某些 Kazhdan–Lusztig 多项式在 1 处的求值得到。因此，对于 $n > 0$ 这些值 $[M_\lambda : L_\mu]$ 可以用涉及这些 Kazhdan–Lusztig 多项式在 1 处的非负整数线性组合的公式来描述。值得探究的是，我们的公式是否在旗簇上具有自然的几何解释。

我们指出，本文的方法推广了 [第23]章中的方法。在引言的其余部分，我们将重点介绍其他一些主要结果，并说明论文的结构。

在第2 节中，我们引入贯穿全文的基本记号。随后回顾 Ra¨ıs–Tauvel [RT92] 关于 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 的工作，并用它来描述包络代数 $U(\mathfrak{g}_n)$ 的中心的生成元。

在第3 节中，我们描述范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的所有基本性质。我们还说明，该范畴可以分解为阿贝尔子范畴的直和，这些子范畴由 $\mathfrak{h} \otimes t^i$ 关于 $i = 1, \ldots, n$ 的广义特征空间参数化。广义特征值由 $(\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$参数化，并且对于 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$，我们将子范畴 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 称为 *Jordan* 块 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$。

在第 4 节中，我们介绍一种主要工具，用来简化对 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的 Jordan 块的研究。令$\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$，并令 $\mu_n :$
$= \mu|_{\mathfrak{h} \otimes t^n}$，我们以显然的方式将其视为 $\mathfrak{h}^*$ 中的一个元素。中心化子$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是一个包含 $\mathfrak{h}$的 Levi 子代数，我们假设它是某个标准抛物子代数 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$的 Levi 因子，且 $\mathfrak{r} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{n}^+$。在这种情况下，我们可以将模从 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{l}_n)$ 抛物诱导到 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$。类似地，反方向上也有一个取 $\mathfrak{r}_n$-不变量的函子。

以下结果的精确表述见定理4.1。

定理 1.2。若 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是标准 *Levi* 子代数，则抛物诱导与取 $\mathfrak{r}_n$-不变量构成准逆等价，介于 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{l}_n)$ 和 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$之间。

在 $\mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是标准 Levi 子代数的情况下，该定理使我们能够将对 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 的研究简化为 μ_n 支撑在 $\mathfrak{g}$的中心上的情形。另一个简单的归约（引理3.7）促使我们聚焦于 $\mu_n = 0$。

定理 1.2受到 Friedlander–Parshall 在李代数模表示论中的一个结果的启发[FP88，定理 3。2]。利用 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 中的模都具有带最高权截面的有限滤过这一事实（引理 3.3），证明很快归结为证明 $(\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 是正合的。这是证明中最困难的部分，需要仔细研究最高权模的中心特征（定理 4.2），而这最终取决于

我们在第 $U(\mathfrak{g}_n$ 节给出的 2.2 的中心描述。特别是，与 [Ch23 中讨论的 Takiff 情形相比，§4] RT [对中心元的描述92] 更难处理。

在第 5 节中，我们借助扭曲函子，去除了定理 1.2 中要求 $\mathfrak{l}$ 为标准 Levi 子代数的条件。扭曲函子最初由 Arkhipov [Ar01]引入，随后 Andersen–Stroppel $\mathcal{O}$ 在 $\mathfrak{g}$范畴中将其应用于 [AS03]。第一作者在 [Ch23],中将其用于 Takiff 李代数，并证明了与本文类似的约化结果。第 5节的主要结果是定理 5.9，它与命题6.7共同推出以下结论：

定理 1.3. $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 中的每个 *Jordan* 块都等价于 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 中的一个 *Jordan* 块，且 $\mathfrak{g}^{\mu_n}$ 为标准 *Levi* 子代数。

结合定理1.2 ，这使我们能够将对 Jordan 块 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 的研究归结为 $\mu_n = 0$的情形。定理 1.3 的证明与 [Ch23，定理 57] 类似；但其中若干证明，尤其是引理 5.15 和 5.16的证明，要复杂得多。因此，我们详细给出所有不同之处的论证，其余部分请读者参见同上文献。

在第6 节中，我们讨论了定义合成重数以及计算 Verma 模中简单模重数的问题。我们首先解释这些数的定义方式，并根据合成列对其进行诠释；这与 [Ch23，§6.1], 中的内容非常相似，只是引理6.2所考察的滤过结构比 Takiff 情形中的相应滤过更为复杂。最后，我们聚焦于块 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，其中$\mu_n = 0$。本节的主要结果是推论6.8 ，它是定理1.1的精确表述。

致谢。两位作者都感谢 Simon Goodwin 进行许多有益的交流。第一作者感谢英国工程与物理科学研究委员会提供博士生奖学金资助，第二作者的研究得到英国研究与创新署未来领袖奖学金的支持，资助编号为 MR/S032657/1、MR/S032657/2、MR/S032657/3。

2. Preliminaries

在本文中，所有向量空间、代数和代数簇均定义在 $\mathbb{C}$上。未加说明的张量积均取在 $\mathbb{C}$上。

2.1. 约化李代数与截断电流。自此我们固定一个秩为 r 的约化代数群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并选定一个极大环面 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$。Weyl 群 $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h})$ 记为W。令 $\Phi \subseteq \mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系，并令 Δ 为 Φ的一组单根，它们给出一组正根 $\Phi^+ = \Phi \cap \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha$。对于每个根 $\alpha \in \Phi$，我们都有一个一维根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$；对于正根α，我们固定三元组 $(e_\alpha$, h_α, $f_\alpha)$ 的选取，使得 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$、 $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 和 $h_\alpha := [e_\alpha, f_\alpha]$，满足 $\alpha(h_\alpha) = 2$。

这些数据给出了一个三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{2.1}$$

其中 $\mathfrak{n}^\pm := \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$。我们也用 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ 表示相应的 $\mathfrak{g}$.

对于 $n \geq 1$，我们考虑截断当前代数 $\mathfrak{g}_n := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$。对于任意子代数 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$，我们有一个自然的截断电流嵌入 $\mathfrak{s}_n \subseteq \mathfrak{g}_n$。记作 $\mathfrak{s}_n^i := \mathfrak{s} \otimes t^i \subseteq \mathfrak{g}_n$。这给出了一个分次$\mathfrak{s}_n = \bigoplus_{i=0}^n \mathfrak{s}_n^i$。我们用 $\mathfrak{s}_n^{\geq m}$ 表示次数为 m，$m+1$，..... n 的分次分量之和。

对于 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $\alpha \in \Phi^+$，我们记作

$$\begin{aligned} x_i &:= x \otimes t^i, \\ e_{\alpha,i} &:= e_\alpha \otimes t^i, \\ f_{\alpha,i} &:= f_\alpha \otimes t^i, \\ h_{\alpha,i} &:= h_\alpha \otimes t^i \end{aligned} \tag{2.2}$$

我们经常需要考虑 $\mathfrak{g}_n$ 和 $\mathfrak{h}_n$ 的线性函数。若 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，则记作

$$\begin{aligned} \lambda_i &:= \lambda|_{\mathfrak{h}_n^i}, \\ \lambda_{\geq i} &:= \lambda|_{\mathfrak{h}_n^{\geq i}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

对于 $i = 0, \ldots, n$，我们通常通过显然的同一对应 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n^i$ 将 λ_i 视为 $\mathfrak{h}^*$ 的元素。如果 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，那么我们也可以将其视为 $\mathfrak{g}_n^*$ 的元素，方法是令 $\lambda(\mathfrak{n}_n^\pm) = 0$。

2.2. **对称不变量与包络代数的中心。** 我们分别用 $S(\mathfrak{g}_n)$ 和 $U(\mathfrak{g}_n)$ 表示 $\mathfrak{g}_n$ 的对称代数和包络代数。代数 $U(\mathfrak{g}_n)$ 配备了 Poincar´é–Birkhoff–Witt（PBW）滤过，其伴随分次代数为 gr $U(\mathfrak{g}_n) = S(\mathfrak{g}_n)$，即 $\mathfrak{g}_n$ 上的对称代数。本节将介绍包络代数的中心 $Z(\mathfrak{g}_n)$ 及其半经典极限。

$\mathfrak{g}_n$ 的伴随表示唯一地扩展为 $\mathfrak{g}_n$ 在 $S(\mathfrak{g}_n)$和 $U(\mathfrak{g}_n)$上的导子作用[Di77，命题 2.4。9]。中心 $Z(\mathfrak{g}_n)$等于 $U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$，并且识别 gr $U(\mathfrak{g}_n) = S(\mathfrak{g}_n)$ 是 $\mathfrak{g}_n$等变的。不变量代数 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 最早由 Ra¨ıs–Tauvel [RT92], 描述，现回顾如下。

我们定义一系列 $\partial^{(0)}$、……、$\partial^{(n)}$ 上的（向量空间）自同态 $S(\mathfrak{g}_n)$：令 $\partial^{(0)}$ 等于恒等映射，然后归纳地定义

$$\partial^{(k)}(x_j) = \begin{cases} \binom{j}{k} x_{j-k} & \text{if } j \geq k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\partial^{(k)}(fg) = \sum_{i+j=k} \partial^{(i)}(f)\partial^{(j)}(g). \tag{2.5}$$

对于 $x \in \mathfrak{g}$ 以及 $f,\ g \in S(\mathfrak{g}_n)$。这些自同态将用于构造在前引文中引入的基本不变量生成元。我们指出，此处定义的算子族（$\partial^{(0)}$、……、$\partial^{(n)}$）以及高阶导子的一个实例 [SH], ，但我们不会使用这一形式体系。

回顾切瓦利限制定理，它指出 $S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong S(\mathfrak{h})^W$。此外，Chevalley– Sheppard–Todd 定理表明，$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 是由 rank($\mathfrak{g}$) 个齐次元素生成的分次多项式代数。取这样一组元素 $p_1, ..., p_r$。

$\mathfrak{g}_n$ 的伴随表示稳定 $\mathfrak{g}_n^n$，且该作用经由映射 $\mathfrak{g}_n \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_n^{\geq 1} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ 分解。因此，我们有自然包含 $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow S(\mathfrak{g}_n^n)^{\mathfrak{g}_n}$。滥用记号，将 $p_1, ..., p_r$ 视为 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 中的元素。

定理 2.1。 [RT92，§3] 不变量代数 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 是由 $(n+1)r$ 个元素生成的多项式环

$$\{\partial^{(k)} p_j \mid j = 1, ..., r,\ k = 0, ..., n\}. \tag{2.6}$$

令 $d^{(k)}: S(\mathfrak{g}_n^n) \to S(\mathfrak{g}_n)$ 为偏导数 $\sum_x x_{n-k} \frac{d}{dx_n}$ 其中求和遍历 $\mathfrak{g}$ 的一组基。由定义（2.4）、（2.5）可直接推出，存在元素 $q_j^{(k)} \in S(\mathfrak{g}_n^{\geq n-k+1})$ 使得

$$\partial^{(k)} p_j = d^{(k)} p_j + q_j^{(k)} \text{ for } j = 1, ..., r,\ k = 0, ..., n. \tag{2.7}$$

关于（ [RT92，引理 3.2(ii)] ）的证明，请参阅2.7。下一个观察可由定义直接得出，我们将其记录为引理，以供后续使用。

引理 2.2。 映射 $d^{(k)}$ 将ad($\mathfrak{h}$)-不变元映为ad($\mathfrak{h}$)-不变元。 □

最后，我们给出包络代数 $Z(\mathfrak{g}_n)$ 的中心的描述。存在一个 $\mathfrak{g}_n$-模ω 同构：$S(\mathfrak{g}_n) \to U(\mathfrak{g}_n)$，称为对称化映射 [Di77，§2.4]。它由以下规则定义：

$$\omega : x^1 \cdots x^m \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} x^{\sigma 1} \cdots x^{\sigma m} \tag{2.8}$$

其中 $x^1,\ ……,\ x^m \in \mathfrak{g}_n$ 是任意元素，因此 $x^1 \cdots x^m \in S(\mathfrak{g}_n)$ 是一个次数为 m 的单项式，而 $\mathfrak{S}_m$ 表示作用在 m 个字母上的对称群。若 gr : $U(\mathfrak{g}_n) \to S(\mathfrak{g}_n)$ 是通过取关于 Poincar´e–Birkoff–Witt 滤过的最高次分量所定义的（非线性）映射，则

$$\text{gr} \circ \omega \text{ 在 } S(\mathfrak{g}_n) \text{的每个分次分量上都等于恒等映射。} \tag{2.9}$$

由于同构 $\omega : S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n} \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n} = Z(\mathfrak{g}_n)$保持滤过，我们可以描述 $Z(\mathfrak{g}_n)$。

推论 2.3。 $Z(\mathfrak{g}_n)$ 是由$(n+1)r$ 个元素生成的多项式代数

$$\{\omega(\partial^{(k)} p_j) \mid j = 1, ..., r,\ k = 0, ..., n\}. \tag{2.10}$$

证明。 令 $Z \subseteq Z(\mathfrak{g}_n)$ 为由元素 (2.10) 生成的子代数。由于包含关系 gr $Z \subseteq \text{gr}\, Z(\mathfrak{g}_n)$ 是等式，因此包含关系 $Z \subseteq Z(\mathfrak{g}_n)$ 也为等式。若这些元素满足非平凡的代数关系，则取 gr 并利用 (2.9)，可知元素 (2.6) 将满足非平凡关系。由定理 2.1 可知，(2.10) 代数独立。 □

3. Category $\mathcal{O}$ for Truncated Current Lie algebras

3.1. 关于 $\mathcal{O}$ 的定义及其基本性质。 我们先给出范畴 $\mathcal{O}$ 关于 $\mathfrak{g}_n$ 的定义。

定义 3.1。范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 是 $U(\mathfrak{g}_n)$-模的全子范畴，其对象为满足以下条件的 M：

($\mathcal{O}1$) M 有限生成。($\mathcal{O}2$) $\mathfrak{h}_n^0$ 在 M 上半单地作用。($\mathcal{O}3$) $\mathfrak{h}_n^{\geq 1} \oplus \mathfrak{n}_n^+$ 在 M 上局部有限地作用。

注意，$\mathcal{O}(\mathfrak{g}_0)$ 不过是 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ 的伯恩斯坦–盖尔范德–盖尔范德（BGG）O 类 $\mathcal{O}$.

关于 [Hu08] 对 $\mathcal{O}$ 的代数研究，我们建议读者参阅 [HTT08]，其中讨论了 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{D}$ 在旗簇上的 -模之间的关系。

不难看出，$\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 对子模、商模和有限直和封闭。此外，由（$\mathcal{O}1$），每个 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 都是诺特的，因为 $U(\mathfrak{g}_n)$ 是诺特的。

设 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 且 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$。定义权为 λ 的权空间

$$M^\lambda = \{v \in M \mid h_0 v = \lambda(h)v \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}. \tag{3.1}$$

由（$\mathcal{O}2$）可得 $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M^\lambda$，若赋予 $U(\mathfrak{g}_n)$ 根格的自然分次，则这是 M 的模分次。M^λ 中的元素称为权为 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的权向量。如果 是满足 的权向量，则称 为权为 λ 的极大向量。

现在令 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，并回顾 $\lambda_i := \lambda|_{\mathfrak{h}_n^i}$。如果 m 是权为 λ 的极大向量，我们称 $m \in M^{\lambda_0}$ 是权为 λ 的 最高权向量，并且

$$h \cdot m = \lambda(h)m \text{ for all } h \in \mathfrak{h}_n. \tag{3.2}$$

的权空间的以下基本性质$\mathfrak{g}_n$（ $M \in \mathcal{O}$）可以使用与 BGG 范畴 $\mathcal{O}$中相同的论证证明，见 [Hu08，§1。1]:

$$\begin{aligned} &\dim(M^\lambda) < \infty \text{ for all } \lambda \in \mathfrak{h}^*, \\ &\{\lambda \in \mathfrak{h}^* : M^\lambda \neq 0\} \subseteq \textstyle\bigcup_{\lambda \in I}(\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+) \text{ for some finite subset } I \subseteq \mathfrak{h}^*. \end{aligned} \tag{3.3}$$

如果 $m \in M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 是一个极大向量，那么根据（$\mathcal{O}3$），我们可以在 $U(\mathfrak{h}_n)v$ 中找到一个最高权向量。这证明了以下结果。

引理 3.2。 [Ch23，推论 3。3] 设 $M \in \mathcal{O}$ 在 M 中含有一个权为 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的非零极大向量。则 M 含有一个权为 μ 的非零最高权向量，其中存在某个 $\mu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\mu_0 = \lambda$。□

3.2。 最高权模。 我们称 M 是权为 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 的最高权模，如果 M 由一个权为 λ 的最高权向量生成。关于最高权滤过的以下结果与 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的情形类似，见 [Hu08，推论 1。2]。证明与 [Ch23，引理 3 中的基本相同。

引理 3.3。 设 $M \in \mathcal{O}$（$\mathfrak{g}_n$）。则 M具有有限滤过 $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$，使得每个$M_{i+1}/M_i$ 都是最高权模。我们称这样的滤过为最高权滤过。□

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，我们定义权为 λ 的 Verma 模如下

$$M_\lambda := U(\mathfrak{g}_n) \otimes_{U(\mathfrak{b}_n)} \mathbb{C}_\lambda, \tag{3.4}$$

其中 $\mathbb{C}_\lambda$ 是一个一维 $U(\mathfrak{b}_n)$-模， $\mathfrak{h}_n$ 在其上的作用由 λ给出，而 $\mathfrak{n}_n$ 的作用为 0。Verma 模是泛最高权模，也就是说，每个最高权模都是某个 Verma 模的商模。

它们具有以下优良性质，是经典情形 $n = 0$的推广，参见 [Hu08，§1]:

(1) $M_\lambda^{\lambda_0} = 1$ 的维数，而因此，对于权为 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 的每个最高权模， $M^{\lambda_0} = 1$ 的维数也如此。(2) 每个最高权模 M 都有一个中心特征：对于每个 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，都存在一个同态$\chi_\lambda$： $Z(\mathfrak{g}_n) \to \mathbb{C}$，使得对于所有 $z \in Z(\mathfrak{g}_n)$ 以及所有 $m \in M$，都有 $z \cdot m = \chi_\lambda(z)m$；其中 M 是权为 λ 的最高权模。(3) M_λ 有唯一的极大子模和唯一的简单商模，记作 L_λ。

（4） 中的每个简单对象 $\mathcal{O}$（$\mathfrak{g}_n$）都与这些单模中的恰好一个同构（由引理 3.3）。因此，这些模

$$\{L_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{h}_n^*\}$$

给出 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 中单模同构类的一组完备代表。

3.3. **对 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的 Jordan 分解。** 研究 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 中的模，标准做法是考察具有固定中心特征的 $U(\mathfrak{g}$-模)。这一细化在更一般的情形中也很有用（见定理 4.2）；不过，作为初步处理，我们根据广义特征值将 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 分解。$\mathfrak{h}_n^{\geq 1}$。

取 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$，并取 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$。我们将特征值为 μ 的广义特征空间定义为

$$M^{(\mu)} = \{m \in M \mid (h - \mu(h))^k m = 0 \text{ for all } k \gg 0,\ h \in \mathfrak{h}_n^{\geq 1}\}.$$

以下结果是 [Ch23 引理 3.7]，的一个小幅推广。为方便读者，我们给出证明的概要。

引理 3.4。 每个 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 都具有一个 $\mathfrak{g}_n$-模的直和分解

$$M = \bigoplus_{\mu \in (\mathfrak{h}^*)^n} M^{(\mu)}. \tag{3.5}$$

证明。 由于 $\mathfrak{h}_n$保持 M的权空间不变，且这些权空间均为有限维，因此每个 M^λ都分解为关于 $\mathfrak{h}_n^{\geq 1}$的广义特征空间。因此 M 具有分解（3.5），只需证明每个直和项都是一个 $\mathfrak{g}_n$-模。这可通过直接计算得到，利用以下事实：$\mathfrak{g}$ 有一组关于 $\mathfrak{h}$ 的特征基（根空间分解），且 $\mathfrak{h}_n^{\geq 1}$在 $\mathfrak{g}_n$上幂零作用。 □

现在我们将权为 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$ 的 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$*Jordan* 块 定义为全子范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$，其对象为满足 $M = M^{(\mu)}$ 的模 M。于是得到如下*Jordan* 分解

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n) = \bigoplus_{\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*} \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n). \tag{3.6}$$

注 3.5。 不难看出，若 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 且 $\mu = \lambda|_{\mathfrak{h}_n^{\geq 1}}$，则 M_λ 和 L_λ 都属于 $\mathcal{O}^{(\mu)}$（$\mathfrak{g}_n$）（另见 [Ch23，引理 3。9]）。结合（3.6）以及 Verma 模具有唯一的极大子模、因而不可分解这一事实，可知 L_λ 不可能成为 M_ν 的子商，除非 $\lambda_{\geq 1} = \nu_{\geq 1}$

令 $\mathfrak{g}_n \to \mathfrak{g}_{n-1}$ 为核为 $\mathfrak{g}_n^n$ 的自然商映射，并考虑拉回函子

$$p : \mathcal{O}(\mathfrak{g}_{n-1}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n). \tag{3.7}$$

引理 3.6. 令 $\lambda \in \mathfrak{h}_{n-1}^*$ 并通过 $\nu(h_i) = \lambda(h_i)$ 定义 $\nu \in \mathfrak{h}_n^*$，其中 $i = 0, ..., n-1$，且对所有 $h \in \mathfrak{h}$，$\nu(h_n) = 0$。则作为 $\mathfrak{g}_n$-模，有 $p(L_\lambda) \cong L_\nu$。

证明. 显然， $p(L_\lambda)$ 是最高权为 ν 的简单最高权模，结论由此得证。 □

现在我们陈述并证明一些简单的等价关系，它们涉及 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的 Jordan 块，这些块由与一维 $\mathfrak{g}_n$-模作张量积得到。我们用 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 表示导出子代数。注意 $(\mathfrak{g}_n)' = (\mathfrak{g}')_n$，因此记号 $\mathfrak{g}'_n$ 的含义明确无歧义。

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，我们回顾记号 $\lambda_{\geq 1} := \lambda|_{\mathfrak{h}_n^{\geq 1}}$。任意这样的 λ 都可以通过 $\lambda(\mathfrak{n}_n^{\pm}) = 0$ 扩展为 $\mathfrak{g}_n^*$ 的一个元素；我们也可以滥用记号，将 $\mathfrak{h}_n^*$ 视为 $\mathfrak{g}_n^*$ 的一个子空间。对于 $\lambda \in \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}_n^*}(\mathfrak{g}'_n)$，令 $\mathbb{C}_\lambda$ 为由 λ给出的一个一维 $\mathfrak{g}_n$-模。

引理 3.7。 设 $\lambda, \nu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\lambda|_{\mathfrak{g}'_n} = \nu|_{\mathfrak{g}'_n}$。那么 $(\bullet) \otimes_{U(\mathfrak{g}_n)} \mathbb{C}_{\lambda-\nu}$ 和 $(\bullet) \otimes_{U(\mathfrak{g}_n)} \mathbb{C}_{\nu-\lambda}$ 是 $\mathcal{O}^{(\lambda_{\geq 1})}(\mathfrak{g}_n)$ 与 $\mathcal{O}^{(\nu_{\geq 1})}(\mathfrak{g}_n)$之间的准逆等价。

证明。 由于 $\pm(\lambda - \nu)$ 在 $\mathfrak{g}'_n$ 上为零，它定义了 $\mathfrak{g}_n$ 的一个一维表示，而所述函子是 $\mathfrak{g}_n$-模的准逆自等价。为完成证明，只需检查 $(\bullet) \otimes_{U(\mathfrak{g}_n)} \mathbb{C}_{\lambda-\nu}$ 将 $\mathcal{O}^{(\lambda_{\geq 1})}(\mathfrak{g}_n)$ 映到 $\mathcal{O}^{(\nu_{\geq 1})}(\mathfrak{g}_n)$，这可直接由定义得出。 □

4. 抛物诱导

本节证明定理 1.2，该定理使我们能够将范畴 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 与一个 Levi 子代数 $\mathcal{O}(\mathfrak{l}_n)$ 的 Jordan 块联系起来 $\mathfrak{l}$。回想一下，若 $\nu \in \mathfrak{h}^*$，则我们通过 ν 将其扩展为 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个元素，方式为 $\nu(\mathfrak{n}^{\pm}) = 0$，并记 $\mathfrak{g}^{\nu}$ 为余伴随中心化子。

定理 4.1。设 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$。假设中心化子 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\lambda_n}$ 具有标准 *Levi* 形式，并设 $\mathfrak{p} := \mathfrak{l} + \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{r}$是一个 *Levi* 因子为 $\mathfrak{l}$、幂零根为 $\mathfrak{r}$的抛物子代数。记 $\mu = \lambda_{\geq 1}$ （记号 (2.3)）。范畴$\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{l}_n)$ 和 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 等价。实现该等价的准逆函子是抛物诱导和 $\mathfrak{r}_n$-不变子：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind} \quad : \quad \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{l}_n) &\longrightarrow \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n) \\ M &\longmapsto U(\mathfrak{g}_n) \otimes_{U(\mathfrak{p}_n)} M \\ (\bullet)^{\mathfrak{r}_n} \quad : \quad \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n) &\longrightarrow \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{l}_n) \\ M &\longmapsto M^{\mathfrak{r}_n}. \end{aligned}$$

定理 4.1受到 Friedlander 和 Par- shall 在模表示论中的一个范畴等价的启发 [FP88，定理 2。1]。情形 $n = 1$ 归功于第一作者 [Ch23]，我们这里的方法是对其结果的推广。同上

我们注意到，Ind 是 $(\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 的左伴随，因为我们有逆同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}_n}(M, N^{\mathfrak{r}_n}) \underset{\eta}{\overset{\theta}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_n}(\mathrm{Ind}\, M, N)$$

由 $\theta(f)(u \otimes m) = u \cdot f(m)$ 以及 $\eta(g)(m) = g(1 \otimes m)$ 给出，适用于 $u \in U(\mathfrak{g}_n)$ 和 $m \in \quad M$.

令 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 表示范畴 $\mathcal{C}$ 的恒等自函子。为了证明伴随函子 Ind 和 $(\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 是等价，我们考虑该伴随的单位和余单位，例如参见 [HS97，II.7]。单位是自然变换 $\psi : \mathbb{1}_{\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)} \to (\bullet)^{\mathfrak{r}_n} \circ \mathrm{Ind}$，它通过将 η 应用于恒等映射$N^{\mathfrak{r}_n} \to N^{\mathfrak{r}_n}$得到；而余单位是自然变换 φ： $\mathrm{Ind} \circ (\bullet)^{\mathfrak{r}_n} \to \mathbb{1}_{\mathcal{O}(\mathfrak{l}_n)}$，通过将 θ应用于恒等映射 $\mathrm{Ind}\ M \to \mathrm{Ind}\ M$得到。特别地，我们有

$$\begin{aligned} \psi_M \quad &: \quad M \longrightarrow (\mathrm{Ind}\, M)^{\mathfrak{r}_n} \\ &\qquad m \longmapsto 1 \otimes m, \\ \varphi_N \quad &: \quad \mathrm{Ind}(N^{\mathfrak{r}_n}) \longrightarrow N \\ &\qquad u \otimes m \longmapsto u \cdot m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

为了完成定理 4.1 的证明，只需证明 ψ 和 φ都是自然等价。该证明见第 4.2节，很大程度上依赖于（$\bullet$）$^{\mathfrak{r}_n}$的正合性，这将占据第 4.1 节和第 4.2节的大部分篇幅。

4.1. 中心特征。如果两个 $\mathfrak{g}_n$-模具有不同的无穷小中心特征，那么它们之间不可能存在扩张。证明 $(\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 正合性的关键步骤是以下结果，它给出了扩张的消失判据。对于 $\nu \in \mathfrak{h}^*$，我们采用如下记号

$$\Phi_\nu := \{\alpha \in \Phi : \nu(h_\alpha) = 0\}.$$

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，回忆一下 χ_λ 这一中心特征记号，它在第 3.2 节的 (2) 中引入。

定理 4.2。设 $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\lambda_{\geq 1} = \lambda'_{\geq 1}$，且 $\mathfrak{g}^{\lambda_n}$ 为标准 *Levi* 形式。那么 $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ 当且仅当 $\lambda_0 - \lambda'_0 \in \mathbb{C}\Phi_{\lambda_n}$。

推论 4.3。如果 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 不可分解，且 $\mathfrak{g}^{\mu_n}$ 为标准 *Levi* 形式，那么存在唯一的陪集 $\Xi_M \in \mathfrak{h}^*/\mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$，使得如果 N 是 M 中权为 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 的最高权子商，那么 $\lambda_{\geq 1} = \mu$ 和 $\lambda_0 + \mathbb{C}\Phi_{\mu_n} = \Xi_M$。

在继续之前，我们说明如何由定理 4.2 推出推论。利用引理 3.4 中的 Jordan 分解，结合注记 3.5，我们看到，不可分解模的所有子商都属于同一个 Jordan 块 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，这证实了 $\lambda_{\geq 1} = \mu$。由于 M 具有有限维权空间（3.3）且不可分解，因此它具有广义中心特征；也就是说，存在唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$，属于 $Z(\mathfrak{g}_n)$，使得$\mathfrak{m}^k M = 0$ 对于 $k \gg 0$。因此，所有最高权子商都具有相同的中心特征（§3.2，（2））。现在，推论4.3 由定理 4.2得出。

注记 4.4. 稍后我们将看到，定理4.2 和推论 4.3 在不要求标准 Levi 型假设的情况下仍然成立。这由定理 1.3 得出。然而，由于后一条定理依赖于定理 4.2 ，我们保留这一假设，以明确这些依赖关系。

现在我们着手证明定理 4.2。回忆第 2.2 节，对称不变量 $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 由代数独立的齐次元素 $p_1, ..., p_r$生成。此外，存在一个嵌入 $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$，使得 $S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n}$ 由 $r(n+1)$ 个元素 $\partial^{(k)}p_j$，$j = 1, ..., r$，$k = 0, ..., n$生成。存在一个线性映射$\omega : S(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}_n} \to Z(\mathfrak{g}_n)$，我们尤其关注中心元

$$z_i^{(j)} := \omega(\partial^{(j)}p_i) \quad \text{for } i = 1, ..., r.$$

现在令 $U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{h}}$ 为 $\mathfrak{h}$ 在伴随作用下的不变子代数。再令 $U(\mathfrak{g}_n)\mathfrak{n}_n^+$ 为由 $\mathfrak{n}_n^+$ 生成的左理想。交集 $U(\mathfrak{g}_n)\mathfrak{n}_n^+ \cap U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{h}}$ 实际上是 $U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{h}}$ 的一个理想，不难看出，模掉这个理想所得的商模同构于 $U(\mathfrak{h}_n)$。按照 [Hu08, §1.7] 中的观察，我们逐字可见，χ_λ 与复合映射重合

$$U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{h}} \to U(\mathfrak{h}_n) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_n^*] \xrightarrow{\text{ev}_\lambda} \mathbb{C} \tag{4.2}$$

其中 ev_λ 表示在 λ 处的求值。这使我们能够对任意 $p \in U(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{h}}$考虑 $\chi_\lambda(p)$，而不仅仅是 $p \in Z(\mathfrak{g}_n)$。

现在，对于 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$，我们定义两个映射 $\mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}^r$。对于 $\nu \in \mathfrak{h}^*$，我们使用记号 $(\nu,\ \mu)$ 表示 $\mathfrak{h}_n^*$ 中的元素，其在 $\mathfrak{h}_n^0$ 上限制为 ν，在 $\mathfrak{h}_n^{\geq 1}$ 上限制为 μ。第一个映射

$$\xi_\mu(\nu) := (\chi_{(\nu,\mu)} \circ \omega \circ d^{(n)}p_1, ..., \chi_{(\nu,\mu)} \circ \omega \circ d^{(n)}p_r) \in \mathbb{C}^r$$

而第二个映射为

$$\eta_\mu(\nu) := (\theta_{(\nu,\mu)}(p_1), ..., \theta_{(\nu,\mu)}(p_r)) \in \mathbb{C}^r$$

其中 $\theta_{(\nu,\mu)}$ 表示复合映射

$$S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_n^*] \to \mathbb{C}$$

并且 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ 是沿着 $\mathfrak{g}^*$ 的三角分解进行的限制，而第二个映射是将 $d^{(n)}$ 限制到 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$，第三个映射则是求值 $\text{ev}_{(\nu,\mu)}$。

引理 4.5. $\xi_\mu(\nu) - \eta_\mu(\nu)$ 仅依赖于 μ。

证明。注意，我们有一个李代数嵌入 $\mathfrak{g}_1 \hookrightarrow \mathfrak{g}_n$ 由 $x_0 \mapsto x_0$ 和 $x_1 \mapsto x_n$ 对所有 $x \in \mathfrak{g}$给出。我们有 $\xi_\mu(\nu) - \eta_\mu(\nu) \in S(\mathfrak{g}_1) \subseteq S(\mathfrak{g}_n)$，由此断言可归结为 $n = 1$的情形。这已在 [Ch23，引理 4.6(b)]中证明。□

引理 4.6。 对于满足 $\lambda_{\geq 1} = \lambda'_{\geq 1}$ 的 $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}_n^*$，$\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ 当且仅当 $\chi_\lambda(z_i^{(n)}) = \chi_{\lambda'}(z_i^{(n)})$ 对 $i = 1, ..., r$ 均成立。

证明。由于中心 $Z(\mathfrak{g}_n)$ 由元素 $\omega(\partial^{(k)}p_j)$ 生成，因此 $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ 当且仅当特征在这些元素上的取值相同。所以，只要我们能证明对于所有 $j = 0$，……，$n-1$，$\chi_\lambda(z_i^{(j)}) = \chi_{\lambda'}(z_i^{(j)})$，证明便告完成。

我们有 $p_i \in S(\mathfrak{g}_n^n)$，由（2.4）和（2.5）可得 $\partial^{(j)}p_i \in S(\mathfrak{g}_n^{\geq n-j})$。根据 ω (2.8) 的定义，我们有 $z_i^{(j)} \in U(\mathfrak{g}_n^{\geq n-j})$。因此，$\chi_\lambda(z_i^{(j)})$ 仅取决于 $\lambda_{\geq n-j}$。由于 χ_λ 恰好是复合映射（4.2），故已得到所需结论。证明至此完成。□

定理*4.2*的证明。设 λ，λ' 满足该定理的假设。由引理4.6，我们只需证明$\chi_\lambda(z_i^{(n)}) = \chi_{\lambda'}(z_i^{(n)})$ 对所有 i 等价于关于 λ_0，λ'_0的条件。

由（2.7）可得 $z_i^{(n)} = \omega(d^{(n)}p_j) + \omega(q_i^n)$。由于 $q_i^n \in S(\mathfrak{g}_n^{\geq 1})$，由（2.8）可知，对于所有 $i = 1, ..., r$，$\chi_\lambda(z_i^{(n)}) = \chi_{\lambda'}(z_i^{(n)})$ 当且仅当 $\chi_\lambda \circ \omega \circ d^{(n)}(p_j) = \chi_{\lambda'} \circ \omega \circ d^{(n)}(p_j)$。注意，第二个等式是良定义的，因为 $d^{(n)}$ 将 $\mathfrak{h}$-不变量映为 $\mathfrak{h}$-不变量（引理 2.2），且 ω 是 $\mathfrak{h}_n$-等变的，并且 χ_λ 与复合映射（4.2）一致。

由于 $\mu := \lambda_{\geq 1} = \lambda'_{\geq 1}$ 我们可以应用引理 4.5，从而得到中心特征相同当且仅当$\eta_\mu(\lambda_0) = \eta_\mu(\lambda'_0)$。令 $\pi : \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*/W \cong \mathbb{C}^r$ 为商映射。由 Chevalley限制定理[CGi10, 3.1.37] 可知，我们可以将其写成坐标形式 $\pi(\nu) = (p_1|_{\mathfrak{h}^*}(\nu) ..., p_r|_{\mathfrak{h}^*}(\nu))$。现在，通过直接比较这两个定义，很容易看出 $\eta_\mu(\lambda_0)$ 与商映射 π的微分 $d_{\lambda_n}\pi(\lambda_0)$一致。

由 [Ch23，引理 4.6(e)] 可知 $\ker\eta_\mu = \ker d_{\lambda_n}\pi = \mathbb{C}\Phi_{\lambda_n}$。这意味着 $\eta_\mu(\lambda_0) = \eta_\mu(\lambda_0')$ 当且仅当 $\lambda_0 - \lambda_0' \in \mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$（这里使用了标准 Levi 子代数中的中心化子这一事实）。证明完毕。□

4.2. **不变式函子的正合性**。本节中，我们固定一个标准抛物子代数 $\mathfrak{p}$，它属于 $\mathfrak{g}$，因此我们选定的正根空间都包含在 $\mathfrak{p}$ 中。取一个 Levi 分解 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{r}$。本节的主要结果是，$(\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 在 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 上是正合的，条件是 $\mathfrak{g}^{\mu_n} = \mathfrak{l}$。首先，我们需要下面的引理。

命题 4.7。设 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 是一个不可分解模，且 $\Xi_M \in \mathfrak{h}^*/\mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$ 是由M 在推论 *4.3*中确定的陪集。若 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是一个标准 *Levi* 子代数，则

$$M^{\mathfrak{r}_n} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_M} M^\nu.$$

证明。由于 M 是不可分解的，并且有一个最高权为 λ 的最高权子商，我们有 $\lambda_n = \mu_n$。由于$\mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是标准抛物子代数的 Levi 因子，因此有 $\mathfrak{r} =$ 张成空间$\{e_\alpha : \alpha \in \Phi^+ \backslash \Phi_{\lambda_n}\}$。由引理 3.3，我们有一个有限滤过 $0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$，使得 M_i/M_{i-1}的最高权为 $\lambda^{(i)} \in \mathfrak{h}_n^*$。根据 (3.3)， M的权属于集合 $\bigcup_{i=1}^k \{\lambda_0^{(i)} - \sum_{\beta\in\Phi^+} k_\beta\beta \mid k_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。此外，由推论 4.3，存在一个元素 $\Xi_M \in \mathfrak{h}^*/\mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$，使得对所有 i都有 $\lambda_0^{(i)} + \mathbb{C}\Phi_{\mu_n} = \Xi_M$。因此，对于任意选择的 i， M的权实际上属于集合 $\lambda^{(i)} + \mathbb{C}\Phi_{\mu_n} - \sum_{\beta\in\Phi^+}\mathbb{Z}_{\geq 0}\beta$。

特别地，若 $\nu \in \mathfrak{h}^*$ 满足 $\nu \in \lambda_0 + \Phi_{\lambda_n}$，则对于任意 $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_{\lambda_n}$和任意 i， $\nu + \alpha$ 都不属于 $\lambda_0^{(i)} - \sum_{\beta\in\Phi^+}\mathbb{Z}_{\geq 0}\beta$。因此 $\mathfrak{r}_n \cdot M^\nu = 0$。

反过来，设 $v \in M^{\mathfrak{r}_n}$ 的权为 $\nu \in \mathfrak{h}^*$。由于 $\mathfrak{h}_n$ 的作用是局部有限的，且保持权空间不变，我们可以在 $U(\mathfrak{h}_n)\cdot v$ 中找到一个权为 ν 、关于 $\mathfrak{h}_n$ 的公共特征向量。设其特征值为 $\lambda' \in \mathfrak{h}_n^*$ （根据假设 $\lambda_0' = \nu$）。于是， $M_{\lambda'}$ 的一个商模作为子模出现在 M中。所有最高权模都是不可分解的（它们都有唯一的极大子模），这迫使 M 的广义中心特征为 $\chi_{\lambda'}$。现在，由定理 4.2 可知 $\nu \in \lambda_0' + \mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$。由推论 4.3 可知，$\lambda_0'$和 λ_0 属于 $\mathfrak{h}^*$ 模 $\mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$的同一个陪集，因此 $\nu \in \lambda_0 + \mathbb{C}\Phi_{\mu_n}$。□

推论 4.8. 设 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$ 满足 $\mathfrak{g}^{\mu_n} = \mathfrak{l}$ 是一个标准 *Levi* 子代数。则函子$(\bullet)^{\mathfrak{r}_n} : \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n) \to \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n^{\mu_n})$ 是正合的。

证明. 只需取一个满射态射 $M \to N$于 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 中，并证明限制 $M^{\mathfrak{r}_n} \to N^{\mathfrak{r}_n}$是满射的。不失一般性，可以假设 M, N 是不可分解的。非零映射 $M \to N$ 的存在迫使 $\Xi_M = \Xi_N$。由于 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的对象是 $\mathfrak{h}$-半单的，因此 $M \to N$ 在 $\mathfrak{h}$-权空间上是满射的，结论现由命题 4.7 立即得出。□

定理 *4.1* 的证明. 令 φ_M 和 ψ_N 为来自（4.1）的伴随态射。

注意，由于 PBW 定理， $U(\mathfrak{g}_n)$ 在 $U(\mathfrak{p}_n)$ 上是自由的，因此 Ind 是正合函子。此外，$\bullet)^{\mathfrak{r}_n}$ 由推论 4.8 可知是正合的。如果我们能验证 φ_M 和 ψ_N 在最高权模上是同构，那么利用最高权滤过长度的标准论证（引理 3.3）即可得出： φ_M和 ψ_N 对所有 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 以及所有 $N \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n^{\mu_n})$ 都是同构。

对于最高权模 ψ_M，映射 M 是同构，这由命题 4.7 可知。

现在设 $N \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 是一个最高权模，其最高权生成元为 v。由于 $\mathfrak{r}_n \cdot v = 0$，可知 $1 \otimes v$ 属于 φ_N 的像，因此 φ_N 是满射。为证明单射，令 $K = \ker(\varphi_N)$，并考虑短正合列 $K \to \mathrm{Ind}(N^{\mathfrak{r}_n}) \to N$。根据推论 4.8，我们还有另一个短正合列$K^{\mathfrak{r}_n} \to \mathrm{Ind}(N^{\mathfrak{r}_n})^{\mathfrak{r}_n} \to N^{\mathfrak{r}_n}$。

现在令 $M = N^{\mathfrak{r}_n}$，它是由 v 生成的最高权 $\mathfrak{g}_n^{\mu_n}$-模。映射 $\mathrm{Ind}(M)^{\mathfrak{r}_n} \to M$是 $U(\mathfrak{g}_n)$-等变映射，由 $1 \otimes m \mapsto m$ 唯一确定。因此它是 ψ_M 的左逆，而我们已经证明 ψ_M 是双射。由此可得 $K^{\mathfrak{r}_n} = 0$；但由于 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 中每个非零对象都含有非零最高权向量，因此可得 $K = 0$，所以对于最高权 N， φ_N 是同构。

证明至此完成。□

5. 扭曲函子

5.1. **扭曲函子的定义**。现在我们开始证明定理 1.3，推广第一作者 [Ch23， §5]的结果。本节中，我们固定一个单根 $\alpha \in \Delta$ 并为简洁起见采用记号 $U := U(\mathfrak{g}_n)$。

回顾一下，非交换环 S 中的右 Ore 集 R 是一个乘法封闭的元素集合，使得对于所有 $r \in R$ 和 $s \in S$，存在 $r' \in R$ 和 $s' \in S$，满足 $rs' = sr'$。左 Ore 集的定义与此对偶。为了使 R 关于 S 存在右商环，必须满足 S 是右 Ore 集。当 R 没有零因子时，该条件也足够；当 S 既是右 Ore 集又是左 Ore 集时，左右分式域同构；这些事实的综述参见 [MR01，§2。1] 。

另回忆记号 $e_{\alpha,i}$，$h_{\alpha,i}$，$h_{\alpha,i}$，见（2.2）。令 F_α 为由 $\{f_{\alpha,0}, ..., f_{\alpha,n}\}$生成的乘法集，并注意这些元素彼此可交换。下述结果的证明与[Ch23中的引理 5 几乎完全相同。1]。

引理 5.1。 F_α 是 U中的左右 *Ore* 集。 □

现在我们希望显式构造关于 F_α 的局部化 U 。根据前面的说明，它确实存在。考虑 U-代数 $U_\alpha := U[F_\alpha^{-1}]$，它由符号 $\{f_{\alpha,i}^{-1} \mid i = 0, 1, ..., n\}$ 自由生成，并满足关系 $f_{\alpha,i} f_\alpha^{-1}{}_{,i} = 1$。

我们引入一些记号来描述 U_α 的一组基。如果

$$\begin{aligned} &k : \Phi^+ \times \{0, 1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ &l : \Delta \times \{0, 1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ &m : \Phi^+ \setminus \{\alpha\} \times \{0, 1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

若它们是任意的集合映射，则令

$$v(k, l, m) = \Big(\prod_{i=0}^{n} \prod_{\beta \in \Phi^+} e_{\beta,i}^{k_{\beta,i}}\Big)\Big(\prod_{i=0}^{n} \prod_{\beta \in \Delta} h_{\beta,i}^{l_{\beta,i}}\Big)\Big(\prod_{i=0}^{n} \prod_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}} f_{\beta,i}^{m_{\beta,i}}\Big) \in U \tag{5.2}$$

其中，乘积是按照对 $\mathfrak{g}$ 的基的一种固定排序取的。更简洁地说，这些元素恰好是 U 中不含 F_α 因子的 PBW 单项式。

Le命题 *5.2*。*(1)* U_α 是 U 关于 *Ore* 集 F_α 的（左、右）局部化。*(2)* U_α 的一组基由元素 $f_{\alpha,0}^{i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{i_n} v(k, l, m)$ 给出，其中 $i_j \in \mathbb{Z}$ 和 k, l, m 如 *(5.1)* 所示。*(3)* U_α 的一组基由元素 $v(k, l, m) f_{\alpha,0}^{i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{i_n}$ 给出，其中 $i_j \in \mathbb{Z}$ 和 k, l, m 如 *(5.1)* 所示。

证明。 U_α 根据构造满足局部化的泛性质，因此根据 [MR01，推论 2.1，4]它同构于左、右局部化。这证明了 (1)，并且还意味着 U 嵌入U_α之中，且 U_α 是一个整环。

注意， U_α 由 $\mathfrak{g}_n$ 和 F_α^{-1}中的无序单项式张成。利用左 Ore 条件，我们可以将任意此类单项式改写为由式 (2) 所述形式的单项式张成的空间。此外，若后者之间存在线性相关，我们可以在左侧乘以 F_α 中的适当元素，从而得到 U中的 PBW 单项式之间的线性相关，而这种线性相关必为零。这就证明了 (2)，而 (3) 可由对称论证得到。□

我们需要 U_α的生成元之间更精确的关系。

引理 5.3。 对于任意 i、$j \in \mathbb{Z}$，在 U_α中，下列关系对任意 $h \in \mathfrak{h}$ 以及任意 $\beta \in \Phi^+ \setminus \{$均成立 $\alpha\}$:

$$[e_{\alpha,i}, f_{\alpha,j}^{-1}] = -f_{\alpha,j}^{-2} h_{\alpha,i+j} - 2 f_{\alpha,j}^{-3} f_{\alpha,i+2j}. \tag{5.3}$$

$$[h_i, f_{\alpha,j}^{-1}] = \alpha(h) f_{\alpha,j}^{-2} f_{\alpha,i+j}. \tag{5.4}$$

$$[e_{\beta,i}, f_{\alpha,j}^{-1}] = a f_{\alpha,j}^{-2} e_{\beta-\alpha,i+j} + b f_{\alpha,j}^{-3} e_{\beta-2\alpha,i+2j} + c f_{\alpha,j}^{-4} e_{\beta-3\alpha,i+3j} \tag{5.5}$$

对某些 a、b、$c \in \mathbb{C}$。我们采用如下约定：$f_{\alpha,i} = 0$ 当 $\gamma \notin \Phi$ 或 $i > n$时。

证明。通过乘以$f_{\alpha,j}$，可以验证这些关系，从而得到在 U中成立的表达式。我们给出式（5.3）的计算；其余关系的证明类似。利用 U 中的关系，我们有：

$$f_{\alpha,j}^3 e_{\alpha,i} = f_{\alpha,j}^2 e_{\alpha,i} f_{\alpha,j} - f_{\alpha,j} h_{\alpha,i+j} f_{\alpha,j} - 2 f_{\alpha,i+2j} f_{\alpha,j}.$$

然后，我们在左侧乘以 $f_{\alpha,j}^{-3}$ 并在右侧乘以 $f_{\alpha,j}^{-1}$ 从而得到（5.3）。 □

令 $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ 为引理 5.2(2) 中出现的单项式所张成的空间，其中 $i_j \geq 0$ 对某个 $j = 0$，……，n。使用与证明 [Ch23，引理 5.3] 后半部分所用论证相同的论证，我们看到 V_α也可以对称地定义为引理 5.2(3) 中出现的单项式在满足条件 $i_j \geq 0$ 对某个 j 的情况下所张成的空间。再次使用与 同上 相同的论证，我们得到如下结论。

引理 5.4。 V_α是 U_α的一个 U-U-子双模。 □

现在考虑 U-U-双模

$$S_\alpha := U_\alpha/V_\alpha. \tag{5.6}$$

由引理 5.2，可知 S_α 的一组基为

$$\{f_{\alpha,0}^{i_0}\dots f_{\alpha,n}^{i_n}v(k,l,m) \mid \text{ for } v,k,l,m \text{ as per (5.1), (5.2) and } i_j<0 \text{ for all } j\} \tag{5.7}$$

另一组基为:

$$\{v(k,l,m)f_{\alpha,0}^{i_0}\dots f_{\alpha,n}^{i_n} \mid \text{ for } v,k,l,m \text{ as per (5.1), (5.2) and } i_j<0 \text{ for all } j\} \tag{5.8}$$

稍微滥用一下记号，我们用同一个符号表示 U_α 中的元素及其在 S_α 中的陪集。

现在我们选取 $\mathfrak{g}$的一个特殊自同构。本节中始终固定的单根 α 导出一个反射 $s_\alpha \in W = N_G(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$。我们任意将 s_α 提升为 $N_G(\mathfrak{h})$中的一个元素，它通过伴随表示定义了 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构。我们将这个自同构记为 ϕ_α。

注意， ϕ_α 在根空间上的作用为 s_α，也就是说，它将 $\mathfrak{g}_\beta$ 映射到 $\mathfrak{g}_{s_\alpha(\beta)}$ 并保持 $\mathfrak{h}$不变。此外，如有必要，对e_α 和 f_α 重新缩放后，我们可以假设:

$$\phi_\alpha(e_\alpha) = f_\alpha$$
$$\phi_\alpha(f_\alpha) = e_\alpha.$$

我们按规则 $\phi_\alpha(x_i) = \phi_\alpha(x)_i$ 对 $x \in \mathfrak{g}$ 的所有取值，将 ϕ_α 扩展为 $\mathfrak{g}_n$ 的一个自同构。

若 M 是一个左 U-模，我们将通过 ϕ_α 扭曲 M 上的左作用所得到的模记为 $\phi_\alpha(M)$，并将此作用记为 $\cdot_\alpha$。更确切地说，若 $m \in M$ 且 $u \in U$，则 $u \cdot_\alpha m := \phi_\alpha(u) \cdot m$。类似地，我们也可以通过 ϕ_α^{-1} 扭曲作用，并在这种情况下使用记号 $\cdot_{\alpha^{-1}}$。

令 $\mathcal{C}$ 为 U-模的全子范畴，其对象是 $\mathfrak{h}$-半单模。下一个结果的证明与 [Ch23，引理 5.9] 相同。

引理 5.5。 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 *Serre* 子范畴。 □

我们定义一个 函子 $\mathcal{H}$，从 U-模到 $\mathcal{C}$，其定义为：令 $\mathcal{H}(M)$ 等于 M 中所有 $\mathfrak{h}$-权空间之和。

现在我们通过如下方式定义 $\mathcal{C}$ 的两个自函子

$$T_\alpha M := \phi_\alpha(S_\alpha \otimes_U M) \tag{5.9}$$

$$G_\alpha M := \mathcal{H}(\mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))). \tag{5.10}$$

注意， U 在 $G_\alpha M$ 上的作用由下式给出

$$(u \cdot f)(s) = f(s \cdot u) \text{ for } u \in U,\ f \in G_\alpha M,\ s \in S_\alpha.$$

另请注意，若 M， $N \in \mathcal{C}$ 且 $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\ N)$，则 $T_\alpha(\chi)\colon T_\alpha M \to T_\alpha N$和 $G_\alpha(\chi)\colon G_\alpha M \to G_\alpha N$由下式给出

$$T_\alpha(\chi)(s \otimes m) = s \otimes \chi(m) \text{ for } s \in S_\alpha,\ m \in M,$$
$$G_\alpha(\chi)(\rho) = \chi \circ \rho \text{ for } \rho \in \mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))).$$

为证明这些函子定义良好，唯一非平凡的验证是对任意 $M \in \mathcal{C}$， $T_\alpha M \in \mathcal{C}$。对于$M \in \mathcal{C}$，我们看到 $T_\alpha M$由以下元素张成： $\{f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes w\colon\ i_j > 0,\ w \in \mathcal{H}(M)\}$。对于 $w \in M^\lambda$和 $h \in \mathfrak{h}$，我们有

$$\begin{aligned} h \cdot_\alpha (f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes w) &= (s_\alpha(h) f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n}) \otimes w \\ &= f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n}(s_\alpha(h) - (i_0+\dots+i_n)\alpha(h)) \otimes w \\ &= f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes (s_\alpha(h) - (i_0+\dots+i_n)\alpha(h))w \\ &= f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes (s_\alpha(\lambda) - (i_0+\dots+i_n)\alpha)(h)w \\ &= (s_\alpha(\lambda) - (i_0+\dots+i_n)\alpha)(h)(f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes w). \end{aligned}$$

总之，对于任意权为 λ 的 $w \in M$，我们有

$$f_{\alpha,0}^{-i_0}\dots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes w \in (T_\alpha M)^{s_\alpha(\lambda)-(i_0+\dots+i_n)\alpha}. \tag{5.11}$$

特别是， $T_\alpha M$ 由权向量张成，并且 $\mathfrak{h}$也是 [Ch23，引理 54]几乎相同的计算可以证明以下结果。

引理 5.6。 设 $g \in \mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))$。那么， g具有权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$当且仅当 $g(f_{\alpha,0}^{-i_0}\cdots f_{\alpha,n}^{-i_n})$具有权$\lambda+(i_0+\cdots+i_n)\alpha$，且对所有 $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，在 $\phi_\alpha^{-1}(M)$ 中成立；这又当且仅当此向量在 M 中具有权 $s_\alpha(\lambda)-(i_0+\cdots+i_n)\alpha$。

我们立即得到以下推论。

推论 5.7. 设 $g \in \mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))$，则 g 是权向量，当且仅当对所有 $i, j \geq 0$，$g(f_\alpha^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-i_n}{}_{,n})$ 都是权向量。特别地，$G_\alpha(M)$ 是这类向量 g 的直和。

引理 5.8. T_α 是右正合的，而 G_α 是左正合的。

证明. 对任意复数域上的模 $M \in U$-模

$$\phi_\alpha(S_\alpha \otimes_U M) \cong \phi_\alpha(S_\alpha) \otimes_U M$$

且 $(\bullet) \otimes_U M$ 是右正合的，因此 T_α 是右正合的。

类似地，G_α 是两个左正合函子的复合：$\mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(\bullet))$ 和 $\mathcal{H}$，因此它也是左正合的。□

5.2. **范畴各块之间的扭曲函子** $\mathcal{O}$。注意，Weyl 群在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用自然延伸为在 $(\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$ 上的作用，该作用通过 $(\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^* = (\mathfrak{h}^*)^{\oplus n}$ 对角地作用，而这个向量空间为 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$ 的 Jordan 块编目。保留上一节的记号，现在可以准确地陈述定理1.3。

定理 5.9。设 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$ 满足 $\mu(h_{\alpha,n}) \neq 0$。函子 T_α 和 G_α 从（5.9）限制为函子

$$\begin{aligned} T_\alpha &: \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n) \longrightarrow \mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n) \\ G_\alpha &: \mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n) \longrightarrow \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n). \end{aligned}$$

它们构成一对互为拟逆的等价函子。

定理5.9 的证明将分解为一系列引理，我们将在本节中逐一陈述并证明这些引理。更准确地说，该定理可由引理 5.10、5.13、5.16、5.17和5.18直接推出。

在本节余下部分，我们固定 α，并令 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$ 满足 $\mu(h_{\alpha,n}) \neq 0$。

下一个结果是定理 5.9 证明的第一步，也是 [Ch23，引理 5.3] 的推广。这里给出的证明是一种替代性的、更简短的论证。

引理 5.10。T_α 限制为一个函子 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n) \to \mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n)$。

证明。对于 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，我们令 $l(M)$ 表示滤过的最小长度 $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{k-1} \subseteq M_k = M$，使得其各个截段都是最高权模（参见引理 3.3）。我们有一个正合列：

$$0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$$

并且由于 T_α 是右正合的，我们有一个正合列

$$T_\alpha M_1 \to T_\alpha M \to T_\alpha(M/M_1) \to 0$$

利用引理 5.5 以及 $T_\alpha M_1$ 是一个最高权模这一事实，我们可以将断言 $T_\alpha(M) \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n$归约到 $l(M) = 1$，即 M 是一个最高权模的情形。

在证明的其余部分中，我们固定一个 M，其权为 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，并令 $v \in M$ 为 M的最高权生成元。我们将证明 $f_\alpha^{-1}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-1}{}_{,n} \otimes v$是最高权向量，且生成 $T_\alpha M$，从而完成引理的证明。

为说明该向量是极大的，利用式 (5.11) 可知 $e_{\alpha,i} f_\alpha^{-1}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-1}{}_{,n} \otimes v \in T_\alpha M$属于一个 $\mathfrak{h}$-特征子空间，而该特征值不是 $T_\alpha M$ (对任意 $i \geq 0$ 和 $\alpha \in \Phi^+$) 的权。为说明它确实是最高权向量，可以利用式 (5.4) 证明 h_i 通过 $s_{\alpha_i}(h_i)$ 作用。

为说明 $f_\alpha^{-1}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-1}{}_{,n} \otimes v$生成 $T_\alpha M$，我们利用以下事实：$Uv = M$且 S_α有两个基，分别为 (5.7) 和 (5.8)，据此可验证 $T_\alpha M$中的每个元素都属于由集合 $\{f_{\alpha,0}^{-i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes v \mid i_k > 0\}$生成的子模。令 L 表示该集合的张成空间。注意，它是一个 $(\mathfrak{sl}_2)_n$-模，其中 $(\mathfrak{sl}_2)_n$ 是定义在 $\mathfrak{sl}_2 = \langle e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha \rangle$上的截断当前代数。为完成当前证明，我们将证明 L 是一个单 $(\mathfrak{sl}_2)_n$-模。

令 $\mathfrak{t}_n \subseteq (\mathfrak{sl}_2)_n$表示 $h_{\alpha,0}, \ldots, h_{\alpha,n}$上的张成空间，并令 $\gamma = \lambda|_{\mathfrak{t}_n} \in \mathfrak{t}_n^*$给出在 $f_\alpha^{-1}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-1}{}_{,n} \otimes v$上的作用。若 M_γ 表示最高权为 γ 的 Verma 模，则存在非零同态 $M_\gamma \to L$，且权空间的维数相同。因此，只需证明 Verma 模 M_γ 是单的。由 (5.4) 可知，$\gamma(h_{\alpha,n}) = (s_\alpha \lambda)(h_{\alpha,n}) \neq 0$，因此可以应用定理 4.1，得到 $\mathcal{O}^{(\gamma \geq 1)}((\mathfrak{sl}_2)_n)$ 等价于 $\mathcal{O}^{(\gamma \geq 1)}(\mathfrak{t}_n)$。在后一个范畴中，所有最高权模都是单的，从而 M_γ 是单的，正如所需。这就完成了证明。□

考虑阿贝尔李代数 $\mathfrak{a} = \langle f_{\alpha,0}, \dots, f_{\alpha,n} \rangle$ 包含于 $\mathfrak{g}_n$，并令 $A :=$张成空间$\{f_{\alpha,0}^{-i_0} \dots f_{\alpha}^{-i_n} : i_0, \dots, i_n > 0\} \subseteq S_\alpha$，它是 $U(\mathfrak{a})$-$U(\mathfrak{a})$-双子模 S_α。根据 5.7）和（5.8）中 S_α的两个基的描述，我们得到 U-$U(\mathfrak{a})$-双模同构

$$S_\alpha \cong U \otimes_{U(\mathfrak{a})} A,$$

以及 $U(\mathfrak{a})$-U-双模的一个同构

$$S_\alpha \cong A \otimes_{U(\mathfrak{a})} U.$$

特别地，对于任意左 U-模 M，我们有左 $U(\mathfrak{a})$-模的一个同构 s

$$S_\alpha \otimes_U M \cong (A \otimes_{U(\mathfrak{a})} U) \otimes_U M \cong A \otimes_{U(\mathfrak{a})} M.$$

回顾一下， $\mu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\mu(h_{\alpha,\ n}) \neq 0$。

引理 5.11。 [Ch23，引理 5。13] 令 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}$。令 $m \in M^\lambda \backslash \{0\}$ 对于某个 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$。则以下各条件等价：

(a) 在 $T_\alpha M$ 中，有 $f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,\ 0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n} \otimes m = 0$。(b) 对于任意向量空间 V 以及 $U(\mathfrak{a})$-平衡映射 φ：$A \times M \to V$，我们有 $\varphi(f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,\ 0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n},\ m) = 0$。(c) 存在 m_0、 $\dots m_n \in M$，使得 $m = f_{\alpha,\ 0}^{i_0} \cdot m_0 + \cdots + f_{\alpha,\ n}^{i_n} \cdot m_n$。

以下事实仅依赖于 $f_{\alpha,i}$ 在 S_α 中存在逆元。证明从略。

引理 5.12。 [Ch23，引理 5。15] 设 $M \in U$-模。那么 $S_\alpha \otimes M$ 的任意元素都可写成如下形式$f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n} \otimes m$，其中 i_0、……、$i_n > 0$ 和 $m \in M$ 满足条件。

引理 5.13。 [Ch23，引理 5.7(b)] 对于任意 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，映射 $\psi_M : M \to G_\alpha T_\alpha M$ 定义为 $\psi_M(m)(s) = s \otimes m$ 是一个同构。

引理5.14。 [Ch23，引理 5。16] 设 M 是一个 U-模，并设 $A \subseteq S_\alpha$ 和 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 如引理 *5.11*中所述。令$\varphi : A \to M$是一个 $U(\mathfrak{a})$-同态。那么 φ唯一地扩张为一个 U-同态 $\varphi : S_\alpha \to M$。

下一个结果是 [Ch23，引理 5。17], 不过，我们给出证明，因为在当前情形下证明更为复杂。

引理 5.15。设 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，并设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 的一个子集，满足：

(1) 无论哪个 $i_k \leq 0$，$(i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$。*(2)* 若 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$，则对任意 $0 \leq k \leq n$，$(i_0, \dots, i_k - 1, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$。并设 $\{m_{i_0,\dots,i_n} \in M : (i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{I}\}$ 是 M 的一个元素集合，满足：*(i)* 无论哪个 $i_k \leq 0$，$m_{i_0,\dots,i_n} = 0$。*(ii)* 若 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$，则 $e_{\alpha,k} \cdot m_{i_0,\dots,i_n} = m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots,i_n}$

于是存在一个 $U(\mathfrak{a})$-同态 $\varphi : A \to \phi_\alpha^{-1}(M)$，使得 $\varphi(f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n}) = m_{i_0,\dots,i_n}$；由引理*5.14*，该同态可扩张为一个 U-同态 $\varphi : S_\alpha \to \phi_\alpha^{-1}(M)$。此外，若存在 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，使得对于所有 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$，$m_{i_0,\dots,i_n}$ 的权为 $\lambda - (i_0 + \cdots + i_n)\alpha$，那么我们可以选择 φ 也为权，因而属于 $G_\alpha M$。

证明。我们归纳地为 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \backslash \mathcal{I}$ 构造元素 $m_{i_0,\dots,i_n}$，使得对于任意 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$，$m_{i_0,\dots,i_n}$ 满足上述条件 (i) 和 (ii)。接着注意到，(i) 和 (ii) 保证令 $\varphi(f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n}) = m_{i_0,\dots,i_n}$ 可定义一个 $U(\mathfrak{a})$-同态 $\varphi : A \to \phi_\alpha^{-1}(M)$，因为只需验证：对于任意 $0 \leq k \leq n$ 和 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$，$m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots i_n} = f_{\alpha,k} \cdot_{\alpha^{-1}} \varphi(f_{\alpha}^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_{\alpha}^{-i_n}{}_{,\ n}) = f_{\alpha,k} \cdot_{\alpha^{-1}} m_{i_0,\dots,i_n} = e_{\alpha,k} \cdot m_{i_0,\dots,i_n}$。

为构造这样的 $m_{i_0,\dots,i_n}$，令 $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \backslash \mathcal{I}$使得 $i_0 + \cdots + i_n$ 在$\mathbb{Z}^{n+1} \backslash \mathcal{I}$的元素中是极小的。于是特别地，对于每个 $0 \leq k \leq n$，$(i_0, \dots, i_k - 1, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$。令 $(\mathfrak{sl}_2)_n$ 为由 $e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha$ 张成的 $\mathfrak{sl}_2$ 副本上的截断当前代数，并令 N 为由 $\{m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots,i_n}$ 生成的 $(\mathfrak{sl}_2)_n$-模：$0 \leq k \leq n\}$，因此 $N \in \mathcal{O}^{(\mu)}((\mathfrak{sl}_2)_n)$。这里我们稍微滥用了记号，将 μ 与限制到 $\mathfrak{h}_n \cap (\mathfrak{sl}_2)_n$的对象认同。然后我们使用以下断言来构造 $m_{i_0,\dots,i_n} \in N \subseteq M$，使得 $e_{\alpha,k} \cdot m_{i_0,\dots,i_n} = m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots,i_n}$。

断言 $(*)$。考虑以下映射：

$$N \xrightarrow{\theta_1} N^{n+1} \xrightarrow{\theta_2} N^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

由 $\theta_1(x) = (e_{\alpha,\ 0} \cdot x,\ \dots,\ e_{\alpha,\ n} \cdot x)$ 和 $\theta_2(y_0,\ \dots,\ y_n) = (e_{\alpha,\ k} \cdot y_l - e_{\alpha,\ l} \cdot y_k)_{0 \leq k < l \leq n}$ 给出。则 $\ker(\theta_2) = \mathrm{im}(\theta_1)$。此外，若 $(y_0,\ \dots,\ y_n) \in \ker(\theta_2)$ 且 $y_k \in N \cap M^\lambda$ 对所有 $0 \leq k \leq n$ 都成立，则存在 $x \in M^{\lambda - \alpha}$，使得$\theta_1(x) = (y_0,\ \dots,\ y_n)$。

我们现在证明这一断言，这需要分几步完成。

首先注意到 $\theta_2 \circ \theta_1 = 0$，因此显然 $\ker(\theta_2) \supseteq \operatorname{im}(\theta_1)$。所以我们只需证明 $\operatorname{im}(\theta_1) \supseteq \ker(\theta_2)$。在断言的证明中，我们用 e_k 表示 $e_{\alpha,\ k}$。

我们先处理 $n = 1$ 且 $N = M_\gamma$ 是 Verma 模的情形。在这种情况下，我们按以下方式将这些映射限制到某些权空间上（对任意 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$）：

$$N^\lambda \xrightarrow{\theta_1} (N^{\lambda+\alpha})^2 \xrightarrow{\theta_2} N^{\lambda+2\alpha}$$

现在，要么 $\dim(N^{\lambda+\alpha}) = 0$，此时 $\operatorname{im}(\theta_1) = \ker(\theta_2)$ 自动成立；要么这些权空间的维数满足 $\dim(N^\lambda) = n+1$、$\dim(N^{\lambda+\alpha}) = n$ 和 $\dim(N^{\lambda+2\alpha}) = n-1$。因此，结合维数以及 $\ker(\theta_2) \supseteq \operatorname{im}(\theta_1)$ 这一事实，只需证明 θ_1 是单射且 θ_2 是满射。我们可以计算出，e_1 对基向量 $f_1^i f_0^j \otimes 1$ 的作用为：

$$e_1 \cdot (f_1^i f_0^j \otimes 1) = \mu j f_1^i f_0^{j-1} \otimes 1 - j(j-1) f_1^{i+1} f_0^{j-2} \otimes 1 \tag{5.12}$$

因此，考虑 $\theta_2(x,\ 0)$，可知 θ_2 利用（5.12）和归纳论证是满射。还可知 $e_1 \cdot v = 0$当且仅当 $v = f_1^i \otimes 1$。由于 $\mu \neq 0$，可以证明 $e_0 \cdot f_1^i \otimes 1 \neq 0$，因此 θ_1 是单射，符合要求。

现在讨论 $n \geq 1$ 和 $N = M_\lambda$ 是 μ-Jordan 块中的 Verma 模的情形，因此 $\lambda|_{\geq 1} = \mu$。我们使用以下事实，这些事实可通过计算 M_λ的基元素 $f_0^{i_0} \dots f_n^{i_n} \otimes 1$上 e_n的作用，并回顾 $\mu(h_\alpha) \neq 0$来验证：

（a） $e_n \cdot N = N$，这需要结合（5.12）进行归纳论证。（b） $e_n \cdot m = 0$当且仅当 $m \in$张成空间 $\{f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n} \otimes 1 :\ i_1,\ \dots\dots,\ i_n \geq 0\}$。后者作为一个$U(\langle e_0, \dots, e_{n-1}\rangle)$-模，与定义在张成空间 $\{e_{\alpha,i}, h_{\alpha,i}, f_{\alpha,i} \mid i = 0, \dots, n-1\} \cong (\mathfrak{sl}_2)_{n-1}$上的 Verma 模 M_γ同构，其中 $\gamma(h_{\alpha,\ i}) := \mu(h_{\alpha,\ i+1})$。（c）反复应用（b），可知对于任意 $k \geq 1$，对于所有 $k \leq l \leq n$，$e_l \cdot m = 0$ 当且仅当$m \in$张成空间$\{f_{n-k+1}^{i_{n-k+1}} \dots f_n^{i_n} \otimes 1 :\ i_{n-k+1},\ \dots\dots,\ i_n \geq 0\}$。

为使记号稍微简洁一些，我们将记 $\mathfrak{a}_{(i)} = \langle e_0, \dots, e_i\rangle$，将 $(\mathfrak{sl}_2)^{(i)}$ 记作李代数 $((\mathfrak{sl}_2)_\alpha)_i$，并将 $\gamma_{(i)}$ 记作由 $\gamma_{(i)}(h_{\alpha,\ j}) := \mu(h_{\alpha,\ n-i})$ 给出的 $\operatorname{span}\{h_{\alpha,0}, \dots, h_{\alpha,i}\}$ 的特征。

现在设 $(y_0,\ \dots,\ y_n) \in \ker(\theta_2)$，即对于所有 $0 \leq k,\ l \leq n$，都有 $e_k \cdot y_l - e_l \cdot y_k = 0$。由事实 (a)，显然存在一个$x_n$ 使得 $e_n \cdot x_n = y_n$。接着我们归纳地构造 x_k，使得对于 $2 \leq k \leq n$，都有 $e_l \cdot x_k = y_l$。注意，情形 $k = 0,\ 1$ 将在紧接着的补充论证中处理，随后我们将得到 $x_0,\ \dots,\ x_n$，使得 $\theta(x_0,\ \dots,\ x_n) = (y_0,\ \dots,\ y_n)$。

假设我们已经构造了 x_{k+1}，使得对所有 $k+1 \leq l \leq n$，都有 $e_l \cdot x_{k+1} = y_l$。对于任意 $k+1 \leq l \leq n$，考虑$e_l \cdot (e_k \cdot x_{k+1} - y_k) = e_k \cdot (e_l \cdot x_{k+1}) - e_l \cdot y_k = e_k \cdot y_l - e_l \cdot y_k = 0$。因此，根据事实 (c)，我们有 $e_k \cdot x_{k+1} - y_k \in$的张成空间$\{f_{n-k}^{i_{n-k}} \dots f_n^{i_n} \otimes 1 :\ i_{n-k},\ \dots\dots,\ i_n \geq 0\}$。但作为一个 $U(\mathfrak{a}_{(k)})$-模，它与 $M_{\gamma_{(k)}}$同构，因此根据事实 (a)，存在 $x_k' \in$ 的张成空间$\{f_{n-k}^{i_{n-k}} \dots f_n^{i_n} \otimes 1 :\ i_{n-k},\ \dots\dots,\ i_n \geq 0\}$，使得 $e_k \cdot x_k' = e_k \cdot x_{k+1} - y_k$；并且根据事实 (c)，对所有 $k+1 \leq l \leq n$，都有 $e_l \cdot x_k' = 0$。令 $x_k = x_{k+1} - x_k'$，可知 $e_k \cdot x_k = e_k \cdot x_{k+1} - e_k \cdot x_k' = e_k \cdot x_{k+1} - (e_k \cdot x_{k+1} - y_k) = y_k$，且对于 $k+1 \leq l \leq n$，我们有 $e_l \cdot x_k = e_l \cdot x_{k+1} - e_l \cdot x_k' = y_l - 0$。因此，我们已经构造出具有所需性质的 x_k。

现在考虑 $y_1' = e_1 \cdot x_2 - y_1$ 和 $y_0' = e_0 \cdot x_2 - y_0$。对于 $2 \leq l \leq n$，我们有 $e_l \cdot y_1' = e_l \cdot (e_1 \cdot x_2 - y_1) = e_1 \cdot y_1 - e_l \cdot y_1 = 0$，类似地 $e_l \cdot y_0' = 0$，因此 $y_0',\ y_1' \in$张成空间$\{f_{n-1}^{i_{n-1}} f_n^{i_n} \otimes 1 :\ i_{n-1},\ i_n \geq 0\}$ 它与作为 $U(\langle e_0, e_1\rangle)$-模的 $M_{\gamma_{(1)}}$(Verma 模 over $(\mathfrak{sl}_2)^{(1)}$) 同构。此外，由于 $(y_0, \dots, y_n) \in$ 核 θ，我们有 $e_0 \cdot y_1' - e_1 \cdot y_0' = 0$，因此可以应用此前证明的情形：$N$ 是 Verma 模且 $n = 1$，从而找到 x'，使得 $e_0 \cdot x' = y_0'$、$e_1 \cdot x' = y_1'$，并且对于 $2 \leq l \leq n$有 $e_l \cdot x' = 0$。然后令 $x = x_2 - x'$，则有 $\theta_1(x) = (y_0, \dots, y_n)$。

如果 N 不是 Verma 模，令 $0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_{k-1} \subseteq N_k = N$ 为 N 的一个滤过，使得每个商模都是最高权模。由于 $\mu(h_\alpha) \neq 0$，根据 [Wi11, 7.1]，这些最高权模实际上都必须是 Verma 模。于是，给定 $(y_0, \dots, y_n) \in \ker(\theta_2)$，在商模 N/N_{k-1}中存在$x \in N$，使得对所有 $0 \leq l \leq n$都有 $e_l \cdot x + N_{k-1} = y_l + N_{k-1}$。因此，对所有 $0 \leq l \leq n$都有 $e_l \cdot x - y_l \in N_{k-1}$。但是，对所有 $0 \leq l, l', \leq n$，$e_{l'} \cdot (e_l \cdot x - y_l) = e_l \cdot (e_{l'} \cdot x - y_{l'})$，所以通过对 k应用归纳法，存在 $x' \in N_{k-1}$，使得对所有 $0 \leq l \leq n$都有$e_l \cdot x' = e_l \cdot x - y_l$。注意，在最后这一步论证中，我们用到了这样一个事实：$y_l' := e_l \cdot x - y_l$给出了一个元素集合，它们都属于 θ的核，因此可以应用归纳假设。因此，对所有 $0 \leq l \leq n$都有$e_l \cdot (x - x') = y_l$，所以 $\operatorname{im}(\theta_1) \supseteq \ker(\theta_2)$，证毕。

最后，若 $y_0, \dots, y_n \in M^\lambda \cap N$，则给定满足 $\theta_1(x) = (y_0, \dots, y_n)$ 的 $x \in N \subseteq M$，通过考察权空间，我们可以用 x 在 $\lambda - \alpha$ 权空间中的分量 $x^{\lambda-\alpha}$ 替换它，并且 $\theta_1(x) = \theta_1(x^{\lambda-\alpha})$，从而证明断言 $(*)$ 的最后一部分。

由于对所有 $0 \le k < l \le n$，$e_{\alpha,k} \cdot m_{i_0,\dots,i_l-1,\dots,i_n} = m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots,i_l-1,\dots i_n} = e_{\alpha,l} \cdot m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots i_n}$，因此该断言允许我们选取 $m_{i_0,\dots,i_n}$，使得对所有 $0 \le k \le n$，$e_{\alpha,k} \cdot m_{i_0,\dots,i_n} = m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots i_n}$；若 $m_{i_0,\dots,i_k-1,\dots,i_n}$ 对所有 $0 \le k \le n$ 都具有权 λ，则我们可以选取 $m_{i_0,\dots,i_n}$，使其具有权 $\lambda - \alpha_\circ$ 因此，通过归纳地应用这一过程，对于所有 $(i_0,\dots,i_n)$，我们都能构造出 $\in \mathbb{Z}^{n+1}$ 个满足条件 (i) 和 (ii) 的元素 $m_{i_0,\dots,i_n} \in M_\circ$

假设存在 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 使得 $\mathrm{wt}(m_{i_0,\dots,i_n}) = \lambda - (i_0 + \cdots + i_n)\alpha$ 对所有 $(i_0,\dots,i_n) \in \mathcal{I}$成立。根据构造，$m_{i_0,\dots,i_n}$ 对所有 $(i_0,\dots,i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$都是权，因此由推论 5.7 我们构造出的向量是一个权向量。□

现在我们准备好证明定理 5.9 的一个主要组成部分。

引理 5.16. 对于任意 $N \in \mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n)$，映射 $\epsilon_N\colon\ T_\alpha G_\alpha N \to N$定义为 $\epsilon_N(s \otimes g) = g(s)$是一个同构.

证明。首先证明 ϵ_N是一个同态。设 $u \in U$，设 $s \in S_\alpha$，并设 $g \in G_\alpha N_\circ$ 于是

$$u \cdot \epsilon_N(s \otimes g) = u \cdot g(s) = \phi_\alpha^{-1}\phi_\alpha(u) \cdot g(s) = g(\phi_\alpha(u) \cdot s) = \epsilon_N((\phi_\alpha(u) \cdot s) \otimes g) = \epsilon_N(u \cdot (s \otimes g))$$

因此 ϵ_N 显然是一个 U-同态。

现在设 $m \in N$是一个权向量，并选取 $a_0,\dots,a_n$，使得对每个 k，都有 $e_{\alpha,k}^{a_k} \cdot m = 0$。设

$$\mathcal{I} = \{(i_0,\dots,i_n) : i_k \le 0 \text{ for some } k \text{ or } i_k \le a_k \text{ for all } k\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$$
$$m_{i_0,\dots,i_n} = e_{\alpha,0}^{a_0-i_0} \dots e_{\alpha,n}^{a_n-i_n} \cdot m \text{ if } i_k \le a_k \text{ for all } k$$
$$m_{i_0,\dots,i_n} = 0 \text{ otherwise.}$$

于是我们可以利用引理 5.15构造 $\varphi \in \mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))$，它是一个权向量，因此属于 $G_\alpha N$，且满足 $\varphi(f_{\alpha,0}^{-a_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-a_n}) = m_\circ$ 因此 $\epsilon_N(f_{\alpha,0}^{-a_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-a_n} \otimes \varphi) = m$，所以 ϵ_N是满射。

现在证明 ϵ_N是单射。根据引理 5.12， $T_\alpha G_\alpha N$中的任意元素都可写为 $f_{\alpha,0}^{-i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes g$，其中某个 $g \in G_\alpha N_\circ$ 假设 $\epsilon_N(f_{\alpha,0}^{-i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-i_n} \otimes g) = g(f_{\alpha,0}^{-i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-i_n}) = 0_\circ$ 不妨设 g是权（即一个 $\mathfrak{h}$-特征向量）。否则，可将 g 写成若干 $g_\lambda \in (G_\alpha N)^\lambda$之和；考察权空间可知，它们都满足$g_\lambda(f_{\alpha,0}^{-i_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-i_n}) = 0$，然后对每个 g_λ应用以下论证。

注意到

$$g(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = 0 \text{ if either } j_k \le 0 \text{ for some } 0 \le k \le n \text{ or all } j_k \le i_k. \tag{5.13}$$

现在选择

$$\mathcal{I} = \left\{(j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \begin{array}{c} j_k \le i_k \text{ for all } 0 \le k \le n-1 \text{ or } j_n \le i_n \\ \text{or } j_k \le 0 \text{ for some } 0 \le k \le n \end{array}\right\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$$
$$m_{j_0,\dots,j_n} = g(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) \text{ if } j_k \le i_k \text{ for all } 0 \le k \le n-1$$
$$m_{j_0,\dots,j_n} = 0 \text{ if } j_n \le i_n \text{ or } j_k \le 0 \text{ for some } 0 \le k \le n$$

然后将引理 5.15应用于此，我们构造 $g_n \in \mathrm{Hom}_U(S_\alpha, \phi_\alpha^{-1}(M))$，它是一个权向量（因此属于$G_\alpha N$），满足:

(a) $g_n(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = 0$ if $j_n \le i_n$
(b) $g_n(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = g(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n})$ if $j_k \le i_k$ for all $0 \le k \le n-1$

注意，这两个条件并不互斥，但根据（5.13），它们是一致的。

由 (a)，我们可以通过令 $g'_n \in G_\alpha N(f_{\alpha,0}^{-j_0} \cdots f_{\alpha,n-1}^{-j_{n-1}} f_{\alpha,n}^{-j_n+i_n}) = g_n(f_{\alpha,0}^{-j_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-j_n})$ 来定义 $g'_n \in G_\alpha N$，因此 $g_n = f_{\alpha,n}^{i_n} \cdot g'_{n\circ}$ 由 (b)，如果某个 $j_k \le 0$，或者如果对所有 $0 \le k \le n-1$ 都有 $j_k \le i_k$，则有 $(g-g_n)(f_{\alpha,0}^{-j_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = 0_\circ$

现在我们通过归纳地定义 $g_s \in G_\alpha N$：

$$\mathcal{I} = \{(j_0,\dots,j_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \ j_k \le i_k \text{对所有 } 0 \le k \le s-1, \text{ 或 } j_s \le i_s, \text{ 或 } j_k \le 0 \text{ 对某个 } 0 \le k \le n\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$$
$$m_{j_0,\dots,j_n} = (g - g_n - \cdots - g_{s+1})(f_{\alpha,0}^{-j_0} \cdots f_{\alpha,n}^{-j_n}) \text{ 若对所有 } 0 \le k \le s-1, \ \ j_k \le i_k$$
$$m_{j_0,\dots,j_n} = 0 \text{ 若 } j_s \le i_s, \text{ 或对某个 } 0 \le k \le n, \ \ j_k \le 0$$

元素 $g - g_n - \cdots - g_{s+1}$满足与 (5.13) 类似的条件，这意味着 $m_{j_0,\dots,j_n}$的定义是一致的。

这 g_s 满足:

(a) $g_s(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = 0$ if $j_s \le i_s$
(b) $g_s(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n}) = (g - g_n - \cdots - g_{s+1})(f_{\alpha,0}^{-j_0} \dots f_{\alpha,n}^{-j_n})$ if $j_k \le i_k$ for all $0 \le k \le s-1$

由 (a)，我们可以将其写成以下形式：$g_s = f_{\alpha,s}^{i_s} \cdot g_s'$其中某个 $g_s' \in G_\alpha N$。由 (b) 可知，$(g - g_n - \cdots - g_s)(f_\alpha^{-j_0}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-j_n}{}_{,n}) = 0$，若 $j_k \le i_k$对所有 $0 \le k \le s-1$均成立。因此我们可见，$g = f_\alpha^{-i_0}{}_{,0} \cdot g_0' + \cdots + f_\alpha^{-i_n}{}_{,n} \cdot g_n'$其中某个$g_0', \dots, g_n' \in G_\alpha N$，所以 $f_\alpha^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-i_n}{}_{,n} \otimes g = \sum (f_\alpha^{-i_0}{}_{,0} \cdots f_\alpha^{-i_n}{}_{,n}) \otimes f_{\alpha,k}^{i_k} g_k' = 0$。因此，$\epsilon_N$是单射。□

下一个引理的证明与 [Ch23，引理 5.8], 几乎完全相同，因此为简洁起见，我们略去证明。

引理 5.17。 G_α 限制为一个函子 $\mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n) \to \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$。

下一个结果可通过逐字遵循 [Ch23，引理 5.8(e)] 中的论证来验证。

引理 5.18。 这些变换

$$\psi : \mathrm{id}_{\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)} \to G_\alpha T_\alpha$$

and

$$\epsilon : T_\alpha G_\alpha \to \mathrm{id}_{\mathcal{O}^{(s_\alpha(\mu))}(\mathfrak{g}_n)}$$

是自然的。

最后，定理 5.9 由合并引理 5.10、5.13、5.16、5.17 和 5.18可得。

6. Composition Multiplicities

6.1. 合成重数的定义。 设 $M \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_n)$。我们将 M 的特征 定义为函数 $\mathrm{ch}(M) : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$，它将 λ映射为 $\dim(M^\lambda)$；并将 M的支撑 记为 $\mathrm{supp}(M)$，定义为集合 $\mathrm{supp}(M) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : M^\lambda \neq 0\}$。

我们利用以下结果定义 $k_\lambda(M)$ 的合成重数 M 对应于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$；其陈述和证明与 [Ch23，引理 6.1] 或 [MSo19，命题 8]非常相似。

引理 6.1。 设 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\ge 1})^*$。对于任意 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$，存在唯一的 $\{k_\lambda(M) \in \mathbb{Z}_{\ge 0} : \lambda \in \mathfrak{h}_n^*, \lambda_{\ge 1} = \mu\}$，我们称之为合成重数，使得

$$\mathrm{ch}(M) = \sum k_\lambda(M)\, \mathrm{ch}(L_\lambda)$$

我们对这些对象给出另一种解释，这种解释更接近阿廷范畴中的合成重数概念。以下结果是 [Ch23，引理 6.2] 的自然推广。

引理 6.2. 设 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\ge 1})^*$ 和 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$。则存在 $\mathcal{I} \subseteq (\mathbb{Z}_{\ge 0})^n$，以及一个由 M 按字典序的 $\mathcal{I}$ 索引的递降滤过，使得：

(a) 若 $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_k, \dots, i_n) \in \mathcal{I}$ 且 $i_k > 0$，则 $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_k - 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{I}$。
(b) 每个商模$M_{(i_1,\dots,i_n-1)}/M_{(i_1,\dots,i_n)}$ 都是单对象。(c) 所有 $M_{(i_1,\dots,i_n)}$ 的交集为 0。

此外，对于任意这样的滤过，L_λ 恰好作为商模出现 $M_{(i_1,\dots,i_n-1)}/M_{(i_1,\dots,i_n)}$ $k_\lambda(M)$ 次。

证明。 首先注意，由定理 4.1 和 5.9 可将问题归结为以下情形 $\mu(\mathfrak{h}_n^n) = 0$。

回顾记号 $\mathfrak{g}_n^n = \mathfrak{g} \otimes t^n \subseteq \mathfrak{g}_n$。

首先假设 $n = 1$。此时 M有一个滤过 $M \supseteq \mathfrak{g}_1^1 M \supseteq (\mathfrak{g}_1^1)^2 M \supseteq \cdots$。每个商模 $(\mathfrak{g}_1^1)^i M/(\mathfrak{g}_1^1)^{i+1} M$都属于 BGG 范畴 $\mathcal{O}$，其中 $\mathfrak{g}$，因此长度有限，所以可将其细化为满足 (a) 和 (b) 的滤过。

对于 $n > 1$，考虑滤过 $M \supseteq \mathfrak{g}_n^n M \supseteq (\mathfrak{g}_n^n)^2 M \supseteq \cdots$。每个商模 $(\mathfrak{g}_n^n)^i M/(\mathfrak{g}_n^n)^{i+1} M$都属于范畴 $\mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_{n-1})$，其中我们以显然的方式将 μ 视为 $(\mathfrak{h}_{n-1}^{\ge 1})^*$ 中的一个元素，因此可令$M_{(i,0,\dots,0)} = (\mathfrak{g}_n^n)^i M$，并通过归纳法证明可将其细化为满足 (a) 和 (b) 的滤过。

要证明这个滤过满足 (c)，只需证明每当 $\mu(\mathfrak{h}_n^n) = 0$ 每个 $M \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\mathfrak{g}_n)$ 都具有 $\bigcap_{i \ge 0} (\mathfrak{g}_n^n)^i M = 0$ 这一性质时，结论成立。考虑权空间可知，该性质在取商模和扩张时得以保留，因此只需在 $M = M_\lambda$ 是 Verma 模的情形下验证这一点。由于 $\lambda_n = \mu_n = 0$ 这个 Verma 模是分次的：我们在 $U(\mathfrak{g}_n)$ 上定义一个分次，令对于 $x \in \mathfrak{g}$,

$$\deg x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0, \dots, n-1, \\ 1 & \text{if } i = n. \end{cases}$$

我们通过 $\mathfrak{n}_n^-$-模 $U(\mathfrak{n}_n^-) \cong M_\lambda$ 的同构，将 $U(\mathfrak{n}_n^-)$ 上的诱导分次转移到 M_λ 上。现在 M_λ 是一个正分次的 $\mathfrak{g}_n$-模，并且 $\bigcap_{i\geq 0}(\mathfrak{g}_n^n)^i M_\lambda$ 包含于所有分次分量的交集中，而该交集为零。

最后，我们注意到 $\mathrm{ch}(M) = \sum_{(i_0,\dots,i_n)\in\mathcal{I},\ i_n>0} \mathrm{ch}(M_{i_0,\dots,i_n-1}/M_{i_0,\dots,i_n})$，因此根据引理 6.1 中的唯一性，引理的最后一部分成立。□

这一结果说明了对 $k_\lambda(M)$ 使用“合成重数”这一术语是合理的。从现在起，我们使用记号 $[M:\ L_\lambda] := k_\lambda(M)$。

推论 6.3。 抛物诱导和限制函子以及扭曲函子 T_α, G_α 保持合成重数不变。□

6.2。 **Verma 模的合成重数计算**。 现在我们希望计算合成重数 $[M_\lambda:\ L_\nu]$。由引理 3.4和引理 6.2 可知 $[M_\lambda:\ L_\nu] = 0$ 除非$\lambda_n = \nu_n$，因此，结合使用扭曲函子和抛物诱导函子，我们可以将问题归约到情形 $\lambda_n = \nu_n = 0$，这就是我们的策略。

令 $p:\ \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+ \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为Kostant分拆函数。对于 $\alpha \in \mathbb{Z}\Phi$，我们记 $\alpha_0 \in \mathfrak{h}_{n-1}^*$ 为满足 $\alpha_0(h_i) = 0$（对 $i > 0$）以及 $\alpha_0(h_0) = \alpha(h)$的元素，其中 $h \in \mathfrak{h}$。此外，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$，我们以显然的方式将 $\lambda_{\leq n-1}$ 与 $\mathfrak{h}_{n-1}^*$ 中的一个元素等同起来。

引理 6.4。 如果 $M_{\lambda_{\leq n-1}-\alpha_0}(\mathfrak{g}_{n-1})$ 是 $\mathfrak{g}_{n-1}$ 上的*Verma* 模，那么

$$\mathrm{ch}\, M_\lambda = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+} p(\alpha)\,\mathrm{ch}(M_{\lambda_{\leq n-1}-\alpha_0}(\mathfrak{g}_{n-1})).$$

证明。 注意，对于具有有限维权空间的任意半单 $\mathfrak{h}$-模，都可以定义特征标。令$\mathbb{C}_{\lambda_0}$ 为权为 λ_0的 $\mathfrak{h}$-模。

由于$M_\lambda \cong U(\mathfrak{n}_n^-)$作为 $\mathfrak{h}$-模与 $\otimes\,\mathbb{C}_{\lambda_0}$同构，引理由以下事实得出：

(i) $U(\mathfrak{n}_n^-)$的特征标等于 $S(\mathfrak{n}_n^-)$的特征标。(ii) $S(\mathfrak{n}_n^-)$是 $S(\mathfrak{n}_{n-1}^-)$上的自由模，并且对于 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+$，存在 $p(\alpha)$个权为 $-\alpha$的基向量。

□

推论 6.5。 若 $\lambda, \nu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\lambda_n = \nu_n = 0$，且 $\lambda_{\geq 1} = \nu_{\geq 1}$，并且 $L_{\nu_{\leq n-1}}(\mathfrak{g}_{n-1})$ 表示最高权为 $\nu_{\leq n-1} \in \mathfrak{h}_n^*$ 的单 $\mathfrak{g}_{n-1}$-模，则

$$[M_\lambda : L_\nu] = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+} p(\alpha)[M_{\lambda_{\leq n-1}-\alpha_0}(\mathfrak{g}_{n-1}) : L_{\nu_{\leq n-1}}(\mathfrak{g}_{n-1})].$$

证明。 由引理 3.6 可知 $\mathrm{ch}\, L_\nu = \mathrm{ch}\, L_{\nu_{\leq n-1}}$对所有 $\nu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\nu_n = 0$的情形均成立，因此该断言由引理6.4得证。□

对于 $\mu_n \in \mathfrak{h}^*$，我们记 $\mathfrak{g}_{n-1}^{\mu_n} := (\mathfrak{g}^{\mu_n})_{n-1} = (\mathfrak{g}_{n-1})^{\mu_n}$。

推论 6.6。 设 $\mu \in (\mathfrak{h}_n^{\geq 1})^*$，使得 $\mathfrak{g}^{\mu_n}$ 是某个标准抛物子代数的 *Levi* 因子。则对于任意满足 $\lambda_{\geq 1} = \nu_{\geq 1} = \mu$ 的 $\lambda, \nu \in \mathfrak{h}_n^*$，有

$$[M_\lambda : L_\nu] = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+} p(\alpha)[M_{\lambda_{\leq n-1}-\alpha_0}(\mathfrak{g}_{n-1}^{\mu_n}) : L_{\nu_{\leq n-1}}(\mathfrak{g}_{n-1}^{\mu_n})].$$

证明。这可由引理3.7 和定理4.1、推论6.2、推论6.5得到。为了应用这些结果，应验证前两个引述结果中出现的函子会将最高权模映到具有相应权的最高权模；这一验证留给读者。□

为了完成所有 Verma 模的合成重数计算，我们必须证明，对于任意 Jordan 块，都可以应用扭曲函子得到一个 Jordan 块 $\mathcal{O}^{(\mu)}$ 使得 $\mathfrak{g}^\mu$ 是某个标准抛物子代数的 Levi 因子。这可由以下结果得出（证明参见 [Ch23，引理 2。1]）。

命题 6.7. 设 $\mu \in \mathfrak{h}^*$。那么存在 $w \in W$ 以及标准抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 的 *Levi* 因子 $\mathfrak{l}$，使得$\mathfrak{g}^{w(\mu)} = \mathfrak{l}$。此外，若在满足此条件的前提下，$w$取为最小长度，且 $w = s_{\alpha_n} s_{\alpha_{n-1}} \dots s_{\alpha_1}$是 w的一个约化表达式，则对每个 $1 \leq i \leq n$，我们有 $((s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1})\mu)(h_{\alpha_i}) \neq 0$。□

现在我们定义一个 $\bullet_n$ 的 W 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用，定义为 $w \bullet_n \lambda := w(\lambda + n\rho) - n\rho$ 其中 ρ 是正根和的一半。注意，这推广了 W 在 $\mathfrak{h}^*$上的点作用，对应于 $n = 1$的情形，并且它控制着 $\mathfrak{g}_0$ [Hu08，§1。9]。我们指出，这个 n-点作用曾出现在 Geoffriau 关于 $\mathfrak{g}_n$ [Ge95]的包络代数的中心。

若 α 是任意单根，则由于 $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$，且 s_α 置换了其他正根，我们有 $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$。于是有

$$\begin{aligned} s_\alpha \bullet_n \lambda &= s_\alpha(\lambda + n\rho) - n\rho \\ &= s_\alpha(\lambda) + n\rho - n\alpha - n\rho \\ &= s_\alpha(\lambda) - n\alpha. \end{aligned}$$

我们通过如下设定，将其扩展为 $\mathfrak{h}_n^*$ 上的 W-作用：

$$(s_\alpha \bullet_n \lambda)(h_i) = \begin{cases} (s_\alpha \bullet_n \lambda_i)(h_i) & \text{for } i = 0 \\ (s_\alpha \lambda_i)(h_i) & \text{for } i \neq 0. \end{cases}$$

根据引理的证明中的计算5.10，扭曲函子 T_α 将权为$\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ 的最高权模映为权为 $s_\alpha \bullet_n \lambda$的最高权模，因此将 M_λ 映为 $M_{s_\alpha \bullet_n \lambda}$，对 L_λ也有类似结论。再次应用推论 6.3 可得以下结果。

推论 6.8. 设 $\lambda, \nu \in \mathfrak{h}_n^*$ 满足 $\lambda_{\geq 1} = \nu_{\geq 1}$。设 $w \in W$ 有关于简单反射的约化表达式 $w = s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}} \cdots s_{\alpha_1}$，即 s_{α_i} 满足：

(a) $\mathfrak{g}^{w(\mu_n)}$ 是标准抛物子代数的 *Levi* 因子。(b) 对于每个 $1 \leq i \leq n$，都有 $((s_{\alpha_{i-1}} \cdots s_{\alpha_1})\mu)(h_{\alpha_i}) \neq 0$。

于是我们有

$$[M_\lambda : L_\nu] = [M_{w \bullet_n \lambda} : L_{w \bullet_n \nu}] = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+} p(\alpha)[M_{(w \bullet_n \lambda)_{\leq n-1} - \alpha_0}(\mathfrak{g}_{n-1}^{w(\lambda_n)}) : L_{(w \bullet_n \nu)_{\leq n-1}}(\mathfrak{g}_{n-1}^{w(\mu_n)})]. \tag{6.1}$$

References

[AS03] H. H. Andersen and C. Stroppel, $\mathcal{O}$上的扭曲函子。《表示论》7（2003），681–699。[Ar01] S. Arkhipov，正特征下反变拟 Verma 模的代数构造。 arXiv:math/0105042 （2001）。[AP17] T. Arakawa, A. Premet *Trans. Moscow*，通过仿 *Math. Soc.* **78** 2017 217 234 射 W 代数为中心化子量子化 Mishchenko-Fomenko 子代数。（），–。[BK06] J. Brundan, A. Kleshchev，移位杨氏代数与有限 W-代数。 *Adv. Math.* **200** （2006），136–195。[Ch23] M. Chaffe，Takiff 李代数的范畴 $\mathcal{O}$， *to appear in Math. Z.* （2023）。[CG 09] V. Chari and J. Greenstein，由简单李代数的有限维表示产生的一族 Koszul 代数。 *Adv. Math.*，220（2009），1193–1221。[CGi10] N. Chriss, V. Ginzburg，《表示论与复几何》。1997 年版重印。现代 Birkh¨auser 经典著作。Birkh¨auser Boston 有限公司，马萨诸塞州波士顿，2010。 [1993 CM [77] J. Dixmier 1977 93] D. Collingwood and W. McGovern，《半单李代数中的幂零轨道》。Van Nostrand Reinhold；Di，《包络代数》。 North-Holland 出版公司，。[Fr07] E. Frenkel，环群的朗兰兹对应。剑桥高等数学研究，103。剑桥大学出版社，剑桥，2007。xvi +379 页。[FP88] E. Friedlander and B. Parshall, *Amer. J. Math.* **110** 1988 6, 李代数的 1055 1093 模表示论。（），第 — 期。[Ge95] F. Geoffriau, ` ´ ´ ´ *J. Algebra* **171** 1995 2, 广义 444 456 Takiff 代数的 Harish-Chandra 同态。（），第 – 期。[HS97] P. J. Hilton, P. J.; U. Stammbach。《同调代数教程》。第二版。研究生数学教材，4。Springer-Verlag，纽约，1997。[HTT08] R. Hotta, K. Takeuchi and T. Tanisaki，《D-模，perverse层与表示论》。 *Progress in Mathe- matics* **236** ¨ 2008 ，。 Birkhauser Boston 公司，。[Hu08] J. Humphreys，《BGG 范畴 $\mathcal{O}$中的半单李代数表示》。 *Graduate Studies in Mathematics*，94。美国数学学会，2008。[Kac90] V. Kac，无限维李代数。第三版。剑桥大学出版社，剑桥，1990。xxii+400页。[Ka16] M. Kamgarpour, Feigin-Frenkel 同构与喷射代数的 Harish-Chandra 同构的相容性。*Trans. Amer. Math. Soc.* **368** （2016），第3期，2019–2038。[MS 19] T. Macedo and A. Savage，截断多重电流代数上的不变多项式。 *J. Pure Appl. Algebra* **223** （2019），第1期，349–368。[MSo19] V. Mazorchuk and C. Söderberg，Takiff $\mathcal{O}$ 的范畴 $\mathfrak{sl}_2$。 *J. Math. Phys.* **60** （2019），第11期，15页。[MR 01] J. McConnell and J. Robson，《非交换诺特环》。 *Graduate Studies in Mathematics*，30。美国数学学会，2001。

[Mo18] A. Molev，经典李代数的 Sugawara 算子。《数学调查与专著》，229。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2018。xiv+304 页。[PY20] D. Panyushev and O. Yakimova，具有对称不变量多项式环的 Takiff 代数。 *Transform. Groups* **25**（2020），第2期，609–624。[RT92] M. Raïs, P. Tauvel，某些李代数的不变指标与多项式。 *J. Reine Angew. Math.* **425**（1992），123–140。[Ri 97] R. Richardson,

Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. 半单李代

Univ. **15** 1987
数上不变多项式的导数。，，澳大利亚国立大学，堪培拉，。[SH] H. L. Schmid, H. Hasse, ¨关于抽象双曲函数域中的例外类。（德语）《纯粹与应用数学杂志》176（1937），184–188。[Ta71] S. Takiff，一类李代数的不变多项式环。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **160**（1971），249–262。[Wi11] B. Wilson，截断电流李代数的最高权理论。 *J. Algebra* **336**（2011），1–27。

Email address: mxc167@student.bham.ac.uk
Email address: lt803@bath.ac.uk

School of Mathematics, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham, B15 2TT, UK.
Department of Mathematical Sciences, University of Bath, North Road, Claverton Down, Bath BA2 7AY, UK.