arXiv:2304.09573v1 [math.SP] 19 Apr 2023

局部对称空间的温和性：乘积情形

TOBIAS WEICH 和 LASSE L. WOLF

Abstract. 设 $X = X_1 \times X_2$ 为两个非紧型秩一对称空间的直积， Γ 为 $G_1 \times G_2$中的无挠离散子群。我们证明， $\Gamma\backslash X$的谱与 Γ 沿两个因子所定义的两个方向上的渐近增长有关。我们得到，对于一大类 Γ， $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

1. Introduction

对于几何有限双曲曲面 $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}$，拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 的最小特征值与Γ的增长率有关，这是一个非常经典的定理。更确切地说，

$$\inf \sigma(\Delta) = \begin{cases} 1/4 & : \delta_\Gamma < 1/2 \\ 1/4 - (\delta_\Gamma - 1/2)^2 & : \delta_\Gamma \geq 1/2, \end{cases}$$

其中 δ_Γ 是离散子群 $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ 的临界指数

$$\delta_\Gamma := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \colon \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\gamma x_0, x_0)} < \infty \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{H}.$$

该定理由 Elstrodt [Els73a, Els73b, Els74] 以及 Patterson [Pat76]证明。

十年后，Sullivan [Sul87] 将其推广到任意维数的实双曲流形，随后 Corlette [Cor90]又将其推广到一般的秩一局部对称空间。

我们关注高秩局部对称空间中的类似表述。为陈述这些定理，我们先简要介绍相关设定（见第 2.1 节）。令 X 为非紧型对称空间，即 $X = G/K$，其中 G是一个具有有限中心的实连通半单非紧李群，而 K 是一个极大紧子群。 G 具有 Cartan分解$G = K\exp(\mathfrak{a}_+)K$。因此，对于每个 $g \in G$，都存在 $\mu_+(g) \in \mathfrak{a}_+$ 使得 $g \in K\exp(\mu_+(g))K$。$\mu(g)$可以视为一种高维距离 $d(gK, eK)$。

在这种情况下，拉普拉斯-贝尔特拉米算子的谱底 Δ 可以利用 δ_Γ 以及 [Web08、Leu04]进行估计。请注意，在 δ_Γ 的定义中，项 $d(\gamma K, eK)$是 $\|\mu_+(\gamma)\|$。因此，人们只考虑 $\mu_+(\gamma)$的范数，但衡量 γ 或 $\mu_+(\gamma)$增长率的方式有多种。Anker 和 Zhang [AZ22] 利用这一点，将 $\inf \sigma(\Delta)$确定为一个精确值。

然而， $\Gamma\backslash G/K$ 的谱理论比秩一情形更为复杂，仅凭 Δ无法完全确定：在$\Gamma\backslash G/K$ 上存在一个自然微分算子代数，这些算子来自 G/K上的 G-不变微分算子代数 $\mathbb{D}(G/K)$。在最简单的高秩例子中， $G/K = (G_1 \times G_2)/(K_1 \times K_2) = (G_1/K_1) \times (G_2/K_2)$由两个秩一对称空间构成，该代数由分别作用于两个因子上的两个拉普拉斯算子生成。在这种情况下，我们只需考虑两个因子 G_1/K_1 上的拉普拉斯算子以及

G_2/K_2，它们生成 $\mathbb{D}((G_1\times G_2)/(K_1\times K_2))$。然而，一般而言， $\mathbb{D}(G/K)$并没有规范生成元。这就是为何在高秩情形下，使用整个代数而非生成集会更加自然。

通过考察表示 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 可以看出该代数的重要性，其中 G 通过右平移作用。在秩一情形下（其中 $\mathbb{D}(G/K)=\mathbb{C}[\Delta]$），若 $\sigma(\Delta)\subseteq[\|\rho\|^2,\infty[$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的（见定义 3.9）。在高秩情形下，这一结论不再成立，但可以用谱的语言表述一个类似的结论（见命题 3.10）。这要求为 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 上的 $\mathbb{D}(G/K)$ 定义联合谱 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。定义该谱有不同的方法：一方面，我们可以使用 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的表示论分解，并考察相应测度的支集（见第 3.1 节）。另一方面，我们可以使用近似特征向量，为 $\mathbb{D}(G/K)$ 的有限生成集定义联合谱（见第 3.2 节）。这种定义更符合通常谱理论的思路。事实上，这两种定义是一致的，并且有：

$$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)=\{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\mid \chi_\lambda(D)\in\sigma(_\Gamma D)\quad\forall D\in\mathbb{D}(G/K)\}\tag{1}$$

其中，χ_λ 是由 $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 参数化的 $\mathbb{D}(G/K)$的特征标（见命题 3.6）。
作为第一个结果，我们证明

$$i\mathfrak{a}^*\subseteq\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)\tag{2}$$

若 $\Gamma\backslash G/K$ 具有无限单射半径（见命题 3.7）。
上述谱与 $L^2(\Gamma\backslash G)$的温和性之间的联系由以下事实给出。

事实 (命题 3.10)。 若 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)\subseteq i\mathfrak{a}^*$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$是温和的。

直到最近，人们仍完全不知道， Γ 上哪些条件（类似于 $\delta_\Gamma\leq\|\rho\|$）能够推出 $L^2(\Gamma\backslash G)$的温和性，即使是在 G_i 秩一的 $G=G_1\times G_2$ 这一例子中也是如此。随后，Edwards 和 Oh [EO 22] 证明，若增长指标函数 ψ_Γ 受 ρ 所界，则阿诺索夫子群是温和的（定义见第 4.4 节）。这一结论与 Patterson、Sullivan 和 Corlette 的原始定理精神相近，但它仅适用于极小抛物子群上的阿诺索夫子群；这类子群是凸余紧子群的高秩类比。此外，其证明采用了截然不同的方法，包括利用 [ELO20]给出的混合速率估计。他们验证该条件 $\psi_\Gamma\leq\rho$ 的主要例子恰是直积情形 $G=G_1\times G_2$，其中 G_i 的秩为一，且 Γ 是阿诺索夫子群。

本文为 $L^2(\Gamma\backslash(G_1\times G_2))$ 的温和性给出了另一种证明。该证明更接近秩一情形下的原始证明，且不使用任何混合结果。此外，我们无需假设 Γ 是阿诺索夫的。

定理 (定理 4.9)。 设 G_1 和 G_2 为秩一，且 $\Gamma\leq G_1\times G_2$ 离散且无挠。令

$$\delta_1=\sup_{R>0}\inf\left\{s\in\mathbb{R}\colon\sum_{\gamma\in\Gamma,\|\mu_+(\gamma_2)\|\leq R}e^{-s\|\mu_+(\gamma_1)\|}<\infty\right\}$$

并以同样的方式定义 δ_2。那么

$$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash(G_1\times G_2)/(K_1\times K_2))\subseteq\{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\mid\|\operatorname{Re}(\lambda_i)\|\leq\max(0,\delta_i-\|\rho_i\|)\}.$$

为证明这一点，我们考察两个因子上的拉普拉斯算子，并利用 (1) 对 $\widetilde{\sigma}$ 进行估计。对于这些算子，证明与 Patterson 和 Corlette 的证明类似；也就是说，我们通过考察全局对称空间上的预解核来获取有关谱的信息

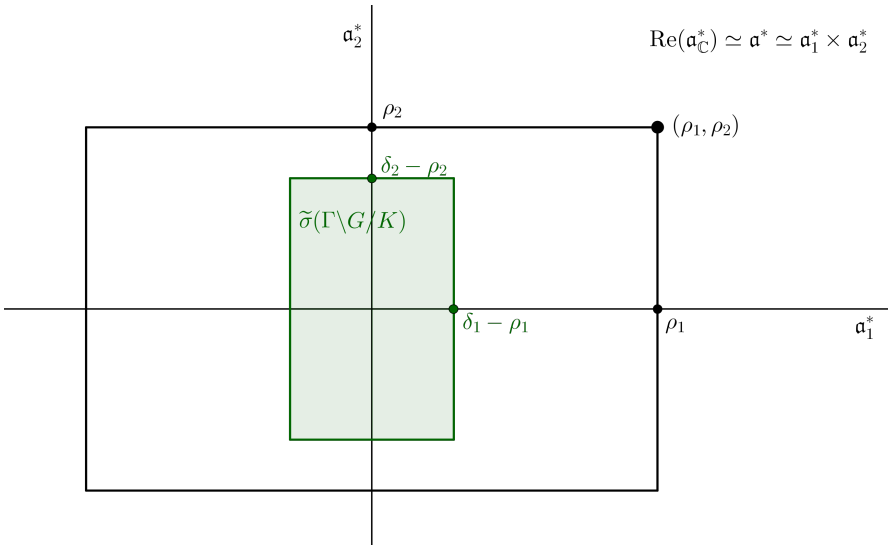


FIGURE 1. $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash(G_1 \times G_2)/(K_1 \times K_2))$ 对于两个秩一群 G_i

空间 G/K，并通过对 Γ 取平均得到局部版本。分析这一平均过程的收敛区域即可得出定理。

我们得到如下推论。

Coro推论 (推论 4.10**)**。若 $\delta_1 \leq \|\rho_1\|$ 且 $\delta_2 \leq \|\rho_2\|$，则 $L^2(\Gamma\backslash(G_1 \times G_2))$ 是温和的 .

一个重要例子是自拼接：设 π_i: $G_1 \times G_2 \to G_i$ 为到一个因子的投影。假设 $\pi_i|_\Gamma$、 $i = 1, 2$ 均具有有限核和离散像。于是 $\delta_1 = \delta_2 = -\infty$，从而 $L^2(\Gamma\backslash(G_1 \times G_2))$ 是温和的。相对于 $G_1 \times G_2$ 中的极小抛物子群的任意阿诺索夫子群都满足这一假设，但也满足其他假设，例如 Γ 是词双曲的，并且 $\|\mu_+(\pi_i(\gamma))\|$ 与 $\gamma \in \Gamma$ [的词长相当（Lab06，GW12]）。因此，我们推广了 [EO22]中的这一部分。相比之下， [EO22] 还给出了关于温和性与阿诺索夫子群 Γ 的增长行为之间联系的结论，这些结论适用于更一般的（整体）对称空间 G/K，而这些空间并非秩一对称空间的直积。要将我们的工作推广到这一更一般的情形，需要对代数 $\mathbb{D}(G/K)$的适当生成元所对应的预解式的核给出增长估计；迄今为止，这类估计似乎仅对拉普拉斯算子已知（见 [AJ99]）。

文章纲要。在第 2 节中，我们回顾有关对称空间、球函数、球对偶和傅里叶–Helgason 变换的一些预备知识。随后，我们定义普朗歇尔谱（见第 3.1 节）和联合谱（见第 3.2 节），并证明二者一致（见命题 3.6）。我们还在命题 3.7 中证明 (2)。在第 3.4 节中，我们展示 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$ 与 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的温和性之间的联系。我们认为，对于高秩对称空间谱理论领域的专家而言，这些结论或许已是众所周知的事实；但由于有关高秩、无限体积局部对称空间谱理论的文献十分稀少，我们在本节给出精确的表述和完整的证明。在第 4 节中，我们证明推论 4.10。为此，我们首先回顾平均过程（见引理 4.2），并以我们之后所需的形式重新证明由 [Cor90] 给出的秩一结果（见引理 4.8）。最后，我们比较量 δ_i 与增长指标函数 ψ_Γ （见第 4.4 节）。

2. Preliminaries

2.1. 设定。本节介绍一般高秩情形下的记号；只有在确有必要时才将讨论限制到乘积空间，以便清楚强调一般高秩情形中尚缺乏哪些知识。设 G 为一个实连通半单非紧李群，具有有限中心及 Iwasawa分解 $G = KAN$。我们用 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{n}$、$\mathfrak{k}$ 表示相应的李代数。对于 $g \in G$，令 $H(g)$ 表示 Iwasawa分解 KAN中A分量的对数。在 $\mathfrak{g}$上，我们有一个由 Killing型和 Cartan对合诱导的 K-不变内积。此外，关于 $\mathfrak{a}$通过伴随作用 ad 的作用，我们有正交 Bruhat分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$，它分解为根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$。这里，$\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^*$ 是限制根的集合。记 W 为限制根系的 Weyl 群。令 n 为 G 的实秩，令 Π（分别为 Σ^+）表示由 Iwasawa分解的选取所确定的 Σ 中的简单根系（分别为正根系）。令 $m_\alpha := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\alpha$，且 $\rho := \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha$。令 $\mathfrak{a}_+ := \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) > 0 \forall \alpha \in \Pi\}$ 表示正Weyl室，并令 $\mathfrak{a}_+^*$ 表示通过 Killing型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{a}$上的限制及识别 $\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{a}^*$，对应于 $\mathfrak{a}^*$ 中的锥。若 $A^+ := \exp(\mathfrak{a}_+)$，则有 Cartan 分解 $G = KA^+K$。对于 $g \in G$，我们定义 $\mu_+(g) \in \mathfrak{a}_+$ 为 $g \in K\exp(\mu_+(g))K$。我们研究的主要对象是非紧型对称空间 $X = G/K$。

令 $\mathbb{D}(G/K)$ 表示 G-不变微分算子 在 G/K 上构成的代数，即与由元素 $g \in G$ 给出的左平移交换的微分算子。于是，我们有一个代数同构 HC：$\mathbb{D}(G/K) \to \mathrm{Poly}(\mathfrak{a}^*)^W$，它将 $\mathbb{D}(G/K)$ 映射到 $\mathfrak{a}^*$ 上的 W-不变复多项式，这称为 ***Harish-Chandra*同态**（见 [Hel84，第 II 章定理 5.18]）。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，令 χ_λ 表示由 $\chi_\lambda(D) := \mathrm{HC}(D)(\lambda)$ 定义的 $\mathbb{D}(G/K)$ 的特征。显然，$\chi_\lambda = \chi_{w\lambda}$ 对于 $w \in W$。此外，χ_λ 穷尽了 $\mathbb{D}(G/K)$ 的所有特征标（见 [Hel84，第 III 章引理 3.11]）。我们定义联合特征函数空间

$$E_\lambda := \{f \in C^\infty(G/K) \mid Df = \chi_\lambda(D)f \quad \forall D \in \mathbb{D}(G/K)\}.$$

注意，E_λ 是 G不变的。

例如，（正）拉普拉斯算子 Δ 包含于 $\mathbb{D}(G/K)$和 $\chi_\lambda(\Delta) = -\langle\lambda,\lambda\rangle + \langle\rho,\rho\rangle$中。

2.2. **球函数**。可以证明，在每个联合特征空间 E_λ 中，都存在唯一一个左 K不变函数，其在单位元处的取值为 1（参见 [Hel84，第 IV 章推论 2.3]）。我们将相应的定义在 G 上的双K不变函数记为 ϕ_λ，并称其为初等球函数。因此，$\phi_\lambda = \phi_\mu$ 当且仅当对某个 $w \in W$有 $\lambda = w\mu$。它由 $\phi_\lambda(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}dk$给出。注意，我们的记号与 [Hel84]中的记号相差一个因子 i：$\phi_\lambda^{\mathrm{Hel}} = \phi_{i\lambda}$。

2.3. 正定型函数与酉表示。本节回顾正定型初等球函数与不可约酉球表示之间的对应关系。首先回顾一下，连续函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ 称为正定型函数，如果矩阵 $(f(x_i^{-1}x_j))_{i,j}$ 对所有 $x_1, \ldots, x_k \in G$ 都是半正定的。若 f为正定型函数，则有 $f(x^{-1}) = f(x)$ 和 $|f(g)| \le f(1)$。此外，我们可以如下定义与 f 相关联的酉表示 π_f：若 R 表示 G 的右正则表示，则 π_f 是由 $R(x)f$ 张成的空间在由 $\langle R(x)f, R(y)f\rangle := f(y^{-1}x)$定义的内积下的完备化；该内积是正定的。$G$通过右正则表示在此空间上酉作用。若 $f(g) = \langle\pi(g)v, v\rangle$是酉表示 π的矩阵系数，则 f 为正定型函数，且 π_f 包含于 π 中。

其次，回顾一下，若酉表示包含一个非零的 K-$\widehat{\ }$不变向量，则称其为球面表示。用 G_{sph} 表示由球面表示构成的酉对偶子集。于是，正定$\widehat{\ }$型初等球函数与 G_{sph} 之间存在一一对应关系，由 $\phi_\lambda \mapsto \pi_{\phi_\lambda}$ 给出（参见 [Hel84，第 IV 章，定理 3.7]）。不可约酉球表示 π 对应的原像（其归一化的 K-不变向量为 v_K ）为$g \mapsto \langle \pi(g)v_K,\ v_K\rangle$。

2.4. **Harish-Chandra 的 c 函数**。

定义 2.1。 对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ with Re $\lambda \in \mathfrak{a}_+^*$ ，我们将 Harish-Chandra $\mathbf{c}$ 函数定义为绝对收敛积分

$$\mathbf{c}(\lambda) = \int_{\overline{N}} e^{-(\lambda+\rho)H(\overline{n})} d\overline{n},$$

其中， $d\overline{n}$ 的归一化满足 $\mathbf{c}(\rho) = 1$。它由乘积公式给出

$$\mathbf{c}(\lambda) = c_0 \prod_{\alpha\in\Sigma_0^+} \frac{2^{-\langle\lambda,\alpha_0\rangle}\Gamma(\langle\lambda,\alpha_0\rangle)}{\Gamma(\frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle\lambda,\alpha_0\rangle)\Gamma(\frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2}m_{2\alpha} + \frac{1}{2}\langle\lambda,\alpha_0\rangle)}$$

其中， $\Sigma_0^+ = \Sigma^+ \setminus \frac{1}{2}\Sigma^+$、 $\alpha_0 = \alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$ 以及常数 c_0 由 $\mathbf{c}(\rho) = 1$ 确定。

2.5. **傅里叶–Helgason 变换**。 对于足够良好的函数 f: $G/K \to \mathbb{C}$ ，我们将 f 的傅里叶–Helgason 变换定义为

$$\mathcal{F}f(\lambda, kM) = \int_{G/K} f(gK) e^{(\lambda-\rho)H(g^{-1}k)} d(gK).$$

设 $e_{\lambda,kM}(gK) = e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}$。那么，由 [Hel84, Ch. II Lemma 5.15] ，对每个 $D \in \mathbb{D}(G/K)$、$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$、 $k \in K$ 和 $g \in G$，有 $De_{\lambda,kM} = \chi_\lambda(D)e_{\lambda,kM}$ 。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Df)(\lambda,kM) &= \int_{G/K} Df(gK)\overline{e_{-\overline{\lambda},kM}(gK)}d(gK) = \int_{G/K} f(gK)\overline{D^* e_{-\overline{\lambda},kM}(gK)}d(gK)\\ &= \int_{G/K} f(gK)\overline{\chi_{-\overline{\lambda}}(D^*)e_{-\overline{\lambda},kM}(gK)}\, d(gK) = \overline{\chi_{-\overline{\lambda}}(D^*)}\mathcal{F}f(\lambda,kM).\end{aligned}$$

由 [Hel84, Lemma 5.21 和 Cor. 5.3] $\chi_\lambda(D^*) = \overline{\chi_{-\lambda}(D)}$, 我们得到以下引理。

引理 2.2. 傅里叶–*Helgason* 变换满足 $\mathcal{F}(Df)(\lambda,kM) = \chi_\lambda(D)\mathcal{F}f(\lambda,kM)$，对每个 $D \in \mathbb{D}(G/K)$ 均成立。

定理 2.3 ([Hel89, Ch. IIIThm. 1.5])。 傅里叶–*Helgason* 变换是 $L^2(G/K)$ 与 $L^2(i\mathfrak{a}_+^* \times K/M, |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda d(kM))$之间的等距映射。此外，

$$\langle f,g\rangle_{L^2(G/K)} = |W|^{-1}\int_{i\mathfrak{a}^*\times K/M} \mathcal{F}f(\lambda,kM)\overline{\mathcal{F}g(\lambda,kM)}|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda d(kM)$$

特别地，引理 3.2 蕴含 $\sigma(D) = \mathrm{essran}[i\mathfrak{a}_+^* \to \mathbb{C}, \lambda \mapsto \chi_\lambda(D)]$ 相对于测度 $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda d(kM)$。由于 $\chi_\lambda(D)$ 是多项式，且对于 $\lambda \in i\mathfrak{a}_+^*$， $|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} > 0$ ，我们得到 D 的谱是 $\{\chi_\lambda(D) \mid \lambda \in i\mathfrak{a}_+^*\}$ 的闭包。由于 $\chi_\lambda(D)$ 是 W-不变的，这与 $\{\chi_\lambda(D) \mid \lambda \in i\mathfrak{a}^*\}$ 的闭包一致。

3. Spectra for locally symmetric spaces

本节回顾局部对称空间上代数 $\mathbb{D}(G/K)$ 的不同类型的谱。

设 $\Gamma \leq G$ 为无挠离散子群。

3.1. 普朗歇尔谱。 我们希望为代数 $\mathbb{D}(G/K)$ 建立一个谱，其中 G是不变微分算子。我们先从分解表示 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 所得到的谱开始。

定理 3.1（例如参见 [BdlHV08，定理 F.5。3]）。设 π 是 G的酉表示。则存在一个标准博雷尔空间 Z、其上的概率测度 μ 以及不可约酉表示的可测场 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$，使得 π 与直积分 $\int_Z^\oplus \pi_z d\mu(z)$ 酉等价。

根据前述定理，令 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 为直积分 $\int_Z^\oplus \pi_z d\mu(z)$。我们将 $\{z \in Z \mid \pi_z \text{是球面的}\}$ Z 的子集记为 Z_{sph}，其中 球面 意味着该表示具有一个非零的 K-不变向量。我们注意到，投影 $P\colon L^2(\Gamma\backslash G) \to L^2(\Gamma\backslash G)^K$ 到 K-不变向量上的投影由 $\int_K R(k)dk$ 给出，其中 R 是 G 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的表示。因此，存在一个可测向量场 $z \mapsto v_z^K$，使得当 $\mathcal{H}_z^K \neq 0$时，$v_z^K \in \mathcal{H}_z^K$的范数为 1。特别地，Z_{sph} 是可测的。对于 $z \in Z_{\mathrm{sph}}$，表示 π_z 是酉的、不可约的且为球面的。由第 2 节可知，存在某个 $\lambda_z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，使得 ϕ_{λ_z} 是正定型。

回顾从概率空间到第二可数拓扑空间 Y 的可测函数 f 的本质值域定义：$(Z, \mu) \to Y$

$$\operatorname{essran} f := \{y \in Y \mid \forall U \subseteq Y \text{ open}, y \in U\colon \mu(f^{-1}(U)) > 0\}.$$

根据定义，essran f 等于推前测度 $f_*\mu$ 的支集，并且对于 $A \subseteq Y$，essran $f \subseteq A$ 闭合，当且仅当 $f(z) \in A$ 对 μ-几乎处处的 $z \in Z$ 成立。说明如下：显然，如果 $\mu(\{f(z) \notin A\}) = 0$，那么 essran $f \cap Y \setminus A = \emptyset$。因此，essran $f \subseteq A$。反之，如果 essran $f \cap Y \setminus A = \emptyset$，那么对于每个 $a \in Y \setminus A$，我们都能找到一个包含 a 的开邻域 N_a，使得 $\mu(f^{-1}(N_a)) = 0$。由于 Y 是第二可数的，$Y \setminus A$ 可以被可数个 N_a 覆盖。因此，$\mu(f^{-1}(Y \setminus A)) \leq \sum \mu(f^{-1}(N_a)) = 0$。所以，$f(z) \in A$ 对 μ-几乎处处的 $z \in Z$ 成立。

下面的引理为普朗歇尔谱的定义提供了动机。

引理 3.2。 设 $\mathcal{H} = \int_Z^\oplus \mathcal{H}_z d\mu(z)$ 是定义在 σ-有限测度空间 (Z, μ) 上的 *Hilbert*空间场 $(\mathcal{H}_z)_{z\in Z}$ 的直积分。设 $T = \int_Z^\oplus T_z d\mu(z)$ 是算子场 $(T_z)_{z\in Z}$ 的直积分，满足 $T(z) = f(z) id_{\mathcal{H}_z}$，其中 f 是可测函数，且 T 的定义域为 $\{\int_Z^\oplus y_z\, d\mu(z) \in \mathcal{H} \mid \int_Z^\oplus |f(z)|^2 \|y_z\|^2\, d\mu(z) < \infty\}$。那么

$$\sigma(T) = \operatorname{essran} f = \{y \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0\colon \mu(f^{-1}(B_\varepsilon(y))) > 0\}.$$

证明。若 $\lambda \notin$ essran f，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得对几乎处处的 $z \in Z$，有 $|f(z) - \lambda| \geq \varepsilon$。因此，$\int_Z \frac{1}{f(z)-\lambda} id_{\mathcal{H}_z} d\mu(z)$ 是有界算子，其算子范数为 $\leq 1/\varepsilon$，且可逆 $T - \lambda$。因此，$\lambda \notin \sigma(T)$。

反之，设 $\lambda \in$ essran f和 $\varepsilon > 0$。那么 $A_\varepsilon := \{z \in Z \mid |f(z) - \lambda| < \varepsilon\}$ 具有正测度，且存在一个单位向量 $y_\varepsilon = \int_Z^\oplus y_{\varepsilon,z} d\mu(z) \in \mathcal{H}$，使得 $y_{\varepsilon,z} = 0$ 对 $z \notin A_\varepsilon$成立。由此可得

$$\|(T-\lambda)y_\varepsilon\|^2 = \left\| \int_Z^\oplus (f(z)-\lambda) y_{\varepsilon,z} d\mu(z) \right\|^2 = \int_{A_\varepsilon} |f(z)-\lambda|^2 \|y_{\varepsilon,z}\|^2 d\mu(z) \leq \varepsilon^2.$$

因此，$T - \lambda$ 不可能可逆。 □

对于局部对称空间 $\Gamma\backslash G/K$，我们定义

$$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \coloneqq \operatorname{essran}[z \mapsto \lambda_z] \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W.$$

注意，$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \subseteq \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W \mid \phi_\lambda \text{ 是正定型}\}$。特别地，由于正定型函数有界，$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \subseteq \operatorname{conv}(W\rho)$（参见 [Hel84，第 IV 章，定理 8.1]）。此外，$\phi_\lambda = \phi_{-\lambda}$ 因此 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \subseteq \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W \mid -\lambda \in W\lambda\}$（例如参见 [HWW21，第 4] 节）。

3.2. **联合谱**。本节介绍一种不同的 $\mathbb{D}(G/K)$谱，它将算子的作用纳入考量，而不是采用表示论分解（参见 [Sch12，第 5.2.2] 章）。

定义 3.3（见 [Sch12，命题 5.27]）。设 T_1 和 T_2 是 Hilbert空间 $\mathcal{H}$上的（不一定有界的）正规算子。如果它们的谱测度 E_{T_1} 和 E_{T_2} 对易，则称 T_1 和 T_2 强对易。

对于强对易的正规算子，我们可以定义如下联合谱。

定义 3.4（见 [Sch12，命题 5.24]）。设 $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ 是 Hilbert空间 $\mathcal{H}$上一族两两强对易的算子。我们将 $\sigma_j(T)$定义为所有满足下述条件的 $s \in \mathbb{C}^n$ 的集合：存在 $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom}(T_i) \subseteq \mathcal{H}$ 中的单位向量序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} (T_i - s_i)x_k = 0$$

对所有 $i = 1, \dots, n$均成立。我们称序列 (x_k) 为联合近似特征向量。

显然，每个联合近似特征向量都是关于 T_i的近似特征向量。因此，对于 $s \in \sigma_j(T_i)$，$s_i \in \sigma(T_i)$，并且（见 [Sch12，命题 5.24(ii)]）：

$$\sigma_j(T) \subseteq \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_n).$$

我们回到局部对称空间上的不变微分算子。根据定义，$D \in \mathbb{D}(G/K)$ 是 G-不变的，因此它将 $C^\infty(G/K)$ 中的 Γ-不变元素映射到自身。由于 ${}^\Gamma C^\infty(G/K) \simeq C^\infty(\Gamma\backslash G/K)$，我们得到一个作用在 $\Gamma\backslash G/K$ 上的微分算子 ${}_\Gamma D$。利用直积分解容易看出，对于 $D \in \mathbb{D}(G/K)$，${}_\Gamma D$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 上的正规算子（定义域为 $\{f \in L^2(\Gamma\backslash G/K) \mid {}_\Gamma Df \in L^2(\Gamma\backslash G/K)\}$）。此外，其谱测度由下式给出：

$$E_{{}_\Gamma D}(M) \int_{Z_{\mathrm{sph}}}^{\oplus} f_z \, d\mu(z) = \int_{\{z \mid \chi_{\lambda_z}(D) \in M\}}^{\oplus} f_z \, d\mu(z).$$

我们得到，对于 D_1，$D_2 \in \mathbb{D}(G/K)$，${}_\Gamma D_1$ 与 ${}_\Gamma D_2$ 强对易，因此可以为任意有限族 $\{{}_\Gamma D_1, \dots, {}_\Gamma D_n\}$ 定义联合谱。

3.3. **谱的比较**。本节将说明普朗歇尔谱与联合谱一致。为此，我们需要以下引理。

引理 3.5。设 p_1、…、$p_n \in Poly(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ 是定义在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上的次数为 d_i 的非常值复 *Weyl* 群不变齐次多项式，并且它们能在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W$ 上区分各点。那么 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W \to \mathbb{C}^n$、$\lambda$模 $W \mapsto (p_1(\lambda)$ …、$p_n(\lambda))$ 是一个拓扑嵌入。

证明。根据定义，映射 $\Phi\colon \lambda \bmod W \mapsto (p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda))$ 是单射且连续的。还需证明 Φ^{-1} 是连续的，即对于满足 $\Phi(\lambda_n) \to \Phi(\lambda_0)$ 的 $\lambda_n \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，我们有 $\lambda_n \bmod W \to \lambda_0 \bmod W$。由于多项式 p_i 是齐次的，显然 $\Phi(0) = 0$，且 0 不包含于 $\Phi(\{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \|\lambda\| = 1\}/W)$ 中。由紧致性

$$\|\Phi(\{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \|\lambda\| = 1\}/W)\|_\infty \geq c > 0$$

其中我们在 $\mathbb{C}^n$ 上使用最大范数。现在对于 $\|\lambda\| \geq 1$:

$$\|\Phi(\lambda \mod W)\|_\infty = \max|p_i(\lambda)| = \max\|\lambda\|^{d_i}|p_i(\lambda/\|\lambda\|)| \geq \|\lambda\|^{\min d_i}\max|p_i(\lambda/\|\lambda\|)| \geq c\|\lambda\|^2.$$

对于 $\Phi(\lambda_n) \to \Phi(\lambda_0)$，可得 $\|\lambda_n\|$ 有界：事实上，如果 $\limsup\|\lambda_n\| = \infty$，那么 $\infty = \limsup c\|\lambda_n\|^2 \leq \limsup\|\Phi(\lambda_n)\|_\infty \leq \|\Phi(\lambda_0)\|_\infty + 1$. 因此，$\lambda_n$ 包含于有界集 $B = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \mid \|\lambda\| \leq r\}$ 中。但现在 $\Phi|_{B/W}$: $B/W \to \mathbb{C}^n$ 是单射且连续的，并且由于 B/W 是紧的，因此它是一个拓扑嵌入。由于 λ_n, $\lambda_0 \in B$ 我们推得 $\lambda_n \mod W \to \lambda_0 \mod W$，引理得证。□

与之前一样，令 $L^2(\Gamma\backslash G) = \int_Z^\oplus \pi_z d\mu(z)$。显然，$L^2(\Gamma\backslash G/K) = L^2(\Gamma\backslash G)^K = \int_{Z_{\mathrm{sph}}}^\oplus \mathcal{H}_z^K d\mu(z)$。对于 $z \in Z_{\mathrm{sph}}$ 该表示 π_z 是酉的、不可约的且为球面的。根据第2.3节$\pi_z \simeq \pi_{\phi_{\lambda_z}}$，存在某个 $\lambda_z \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*/W$，使得 ϕ_{λ_z} 是正定型。这表明，$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 中出现的谱参数 λ 的集合。根据 $\pi_{\phi_{\lambda_z}}$ 的定义，微分算子 $D \in \mathbb{D}(G/K)$ 在 $\mathcal{H}_z^K$ 上的作用为 $\chi_{\lambda_z}(D)$。

现在我们要证明以下命题。

命题 3.6. 设 $D_1, \dots, D_n$ 是 $\mathbb{D}(G/K)$ 的一个生成集，其中的元素均为对称算子，且其 *Harish-Chandra*多项式 $\mathrm{HC}(D_i)$ 均为齐次多项式。则以下集合相同：

(i) $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$
(ii) $\{\lambda \mid \forall D \in \mathbb{D}(G/K)\colon \chi_\lambda(D) \in \sigma(\Gamma D)\}$
(iii) $\{\lambda \mid \forall p \in Poly(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^W\colon p(\lambda) \in \mathrm{essran}[z \mapsto p(\lambda_z)]\}$
(iv) $\{\lambda \mid \forall p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\colon p(\chi_\lambda(D_1), \dots, \chi_\lambda(D_n)) \in \sigma(\Gamma p(D_1, \dots, D_n))\}$
(v) $\{\lambda \mid (\chi_\lambda(D_1), \dots, \chi_\lambda(D_n)) \in \sigma_j(\Gamma D_1, \dots, \Gamma D_n)\}$
(vi) $\{\lambda \mid \Gamma\sum_{i=1}^n (D_i - \chi_\lambda(D_i))^*(D_i - \chi_\lambda(D_i))$ *is not invertible*$\}$

证明。显然，由 Harish-Chandra同构和引理 3.2，(ii)、(iii) 和 (iv) 等价；又由多项式 $p \in Poly(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^W$ 的连续性，它们包含 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。取 $p = \sum_{i=1}^n (x_i - \chi_\lambda(D_i))(x_i - \chi_\lambda(D_i))$，可知 (iv) 包含于 (vi)。为证明 (vi) 包含于 (v)，注意到，对于 $\Gamma\sum_{i=1}^n (D_i - \chi_\lambda(D_i))^*(D_i - \chi_\lambda(D_i))$，对应谱值 0 的近似特征向量是所有 ΓD_i as 的联合近似特征向量

$$\sum_{i=1}^n \|(\Gamma D_i - \chi_\lambda(D_i))f\|^2 = \langle \Gamma\sum_{i=1}^n (D_i - \chi_\lambda(D_i))^*(D_i - \chi_\lambda(D_i))f, f\rangle.$$

还需证明 (v) 包含于 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。设 $f_n = \int_{Z_{\mathrm{sph}}}^\oplus f_{n,z}\, d\mu(z)$ 是 $\Gamma D_1, \dots, \Gamma D_n$ 和 A_ε: $= \{z \mid \sum_{i=1}^n |\chi_{\lambda_z}(D_i) - \chi_\lambda(D_i)|^2 < \varepsilon\}$ 的联合近似特征向量。于是

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \sum \|(\Gamma D_i - \chi_\lambda(D_i))f_n\|^2 &= \int_{Z_{\mathrm{sph}}} \sum_{i=1}^n |\chi_{\lambda_z}(D_i) - \chi_\lambda(D_i)|^2 \|f_{n,z}\|^2\, d\mu(z) \\ &\geq \int_{Z_{\mathrm{sph}}\setminus A_\varepsilon} \varepsilon\|f_{n,z}\|^2\, d\mu(z) \end{aligned}$$

但最后一个表达式等于 ε if $\mu(A_\varepsilon) = 0$。因此，对于所有 $\varepsilon > 0$，A_ε 都具有正测度。由引理 3.5，$z \mapsto \lambda_z$ 下 $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*/W$ 中 λ 的一个邻域的原像包含 A_ε，其中某个$\varepsilon > 0$，因此也具有正测度。由此可得 $\lambda \in \widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。证明完毕。□

现在我们证明，如果单射半径为无穷大，那么 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$ 包含 $i\mathfrak{a}^*$。

命题 3.7. 假设 $\Gamma\backslash G/K$ 的单射半径为无穷大，也就是说，对于每个紧集 $C \subseteq G/K$，都存在 $g \in G$，使得 $G/K \to \Gamma\backslash G/K$ 限制在 gC 上是单射的。于是 $i\mathfrak{a}^* \subseteq \widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。特别地，$[\|\rho\|^2, \infty[\subseteq \sigma(_\Gamma\Delta)$。

证明。证明遵循与 [EO22，命题 8.4] 相同的思路。令 $\lambda \in i\mathfrak{a}^* = \widetilde{\sigma}(G/K)$。我们选择生成集 $D_1, \dots, D_n$，其对应于 $\mathbb{D}(G/K)$，并由满足 HC(D_i) 齐次的对称算子组成。取 $D_{n+1} = (\Delta - \|\rho\|^2)^k$ 足够大，使得 D_{n+1} 的阶大于 $D_1, \dots, D_n$ 的所有阶。将椭圆算子 $\sum_{i=1}^{n+1} (D_i - \chi_\lambda(D_i))^*(D_i - \chi_\lambda(D_i))$ 记为 D。由命题 3.6，存在 $(f_n)_n \subset L^2(G/K)$，使得 $\|f_n\|_{L^2(G/K)} = 1$，且 $Df_n \to 0$。由于 D 是椭圆且为正的，它在 $C_c^\infty(G/K)$ 上本质自伴的。特别地，我们可以假设 $f_n \in C_c^\infty(G/K)$。现在可以找到 $g_n \in G$，使得 $g_n \operatorname{supp} f_n$ 注入 $\Gamma\backslash G/K$。定义 $\widetilde{f_n}(\Gamma x) = f_n(g_n^{-1}x)$（当 $x \in g_nK_n$ 时），并在其他情况下定义 $\widetilde{f_n}(\Gamma x) = 0$。根据构造，这一定义是良好$\widetilde{\quad}$$\widetilde{\quad}$的，并且 $\|f_n\|_{L^2(\Gamma\backslash G/K)} = \|f_n\|_{L^2(G/K)}$。此外，$\|_\Gamma Df_n\|_{L^2(\Gamma\backslash G/K)} = \|Df_n\|_{L^2(G/K)} \to 0$.这表明 $\lambda \in \widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$。最后，“特别地”部分由命题 3.6 (ii) 以及 $\chi_\lambda(\Delta) = -\langle\lambda,\lambda\rangle + \|\rho\|^2$ 得出。□

Re标记 3.8。 命题 3.7 中的假设在以下例子中成立：

(i) 若 $G = SL_2(\mathbb{R})$ 和 Γ 是几何有限的，则无限单射半径等价于无限体积，而后者又等价于说 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 至少有一个漏斗。(ii) 若 G 是实秩至少为 2 的单群，则由 [FG23] 可知，离散子群 $\Gamma\backslash G/K$ 具有无限单射半径，当且仅当 Γ 具有无限余体积。(iii) 若 $\Gamma \leq G$ 是阿诺索夫子群，则 $\Gamma\backslash G/K$ 具有无限单射半径 [EO22，命题 8.3]。

3.4. **温和性 $L^2(\Gamma\backslash G)$**。 我们希望建立 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的谱与温和性之间的联系。先回顾温和表示的定义。

定义 3.9 (例如参见 [HCH88])。 若酉表示 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ 满足以下等价条件之一，则称其为温和的：

(i) π 被 $L^2(G)$弱包含，也就是说，π 的任意对角矩阵系数都可以在紧集上一致地由 $L^2(G)$的对角矩阵系数的凸组合逼近。(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$，表示 π 都是强 $L^{2+\varepsilon}$ 的；如果存在 $\mathcal{H}_\pi$ 的稠密子空间 D，使得对于任意向量 $v,\ w \in D$，矩阵系数$g \mapsto \langle\pi(g)v,\ w\rangle$ 属于 $L^p(G)$，则称 π 是强 L^p 的。

为了刻画 $L^2(\Gamma\backslash G)$的温和性，我们将使用直积分解（见第 3.1 节）。

我们将证明以下结论。

命题 3.10。 假设对于某个 $p \in [2, \infty[$，$\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \subseteq \frac{p-2}{p}$属于凸包（$W\rho$）。那么$L^2(\Gamma\backslash G)$是强 $L^{p+\varepsilon}$的。特别地，若 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K) \subseteq i\mathfrak{a}^*/W$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

证明。设 $\varepsilon > 0$和 $f_1, f_2 \in C_c(\Gamma\backslash G)$ 非负。我们需要证明 $\int_G |\langle R(g)f_1, f_2\rangle|^{p+\varepsilon} dg$ 有限。显然，$\langle R(g)f_1, f_2\rangle = \int_{\Gamma\backslash G} f_1(\Gamma hg) f_2(\Gamma h) d\Gamma h$ 有界于 $\langle R(g)F_1, F_2\rangle$，其中 $F_i(\Gamma h) = \max_{k\in K} |f_i(\Gamma hk)|$。因此，只需证明对于 K-不变的 f_1, f_2，有 $\int_G |\langle R(g)f_1, f_2\rangle|^{2+\varepsilon} dg < \infty$。我们将 f_i 按直积分解分解为 $f_i = \int_Z^\oplus f_{i,z} d\mu(z)$。由于假设 f_i 是 K-不变的，我们知道对于 μ-几乎处处的 $z \in Z$，有 $f_{i,z} \in \mathcal{H}_z^K$。由此可知，我们只需在 Z_{sph} 上积分。

对于 $z \in Z_{\mathrm{sph}}$，表示 π_z 是酉的、不可约的且为球面表示。根据第 2.3 $\pi_z \simeq \pi_{\phi_{\lambda_z}}$ 节，对于某个 $\lambda_z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，有 ϕ_{λ_z} 是正定型。我们还有 $\langle \pi_z(g) f_{1,z}, f_{2,z}\rangle = \phi_{\lambda_z}(g) \cdot \langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle$。根据假设，对于几乎处处的 $z \in Z_{\mathrm{sph}}$，$\lambda_z \in \frac{p-2}{p}\overline{\mathrm{conv}(W\rho)}$。由 HWW21，命题 2.4]，可推出 $\phi_{\lambda_z} \in L^{p+\varepsilon}(G)$，甚至还有 $\int_G |\phi_{\lambda_z}|^{p+\varepsilon}\, dg \leq C_{\varepsilon,\, p}$，对于 μ-几乎处处的 $z \in Z_{\mathrm{sph}}$，其中 $C_{\varepsilon,\, p}$ 与 z 无关。

现在我们估计

$$\begin{aligned}\int_G |\langle R(g) f_1, f_2\rangle|^{p+\varepsilon} dg &\leq \int_G \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle \pi_z(g) f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{p+\varepsilon} dg \\ &= \int_G \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\phi_{\lambda_z}(g) \langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{p+\varepsilon} dg.\end{aligned}$$

利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\phi_{\lambda_z}(g) \langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) &= \int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\phi_{\lambda_z}(g)| |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle|^{\frac{1}{p+\varepsilon}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle|^{1/q} d\mu(z) \\ &\leq \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\phi_{\lambda_z}(g)|^{p+\varepsilon} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{\frac{1}{p+\varepsilon}} \cdot \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p+\varepsilon} + \frac{1}{q} = 1$。

因此,

$$\int_G |\langle R(g) f_1, f_2\rangle|^{p+\varepsilon} dg \leq \int_G \int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\phi_{\lambda_z}(g)|^{p+\varepsilon} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \cdot \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{\frac{p+\varepsilon}{q}} dg.$$

利用 $\int_G |\phi_{\lambda_z}|^{p+\varepsilon}\, dg \leq C_{\varepsilon,\, p}$ 可得

$$\begin{aligned}\int_G |\langle R(g) f_1, f_2\rangle|^{p+\varepsilon} dg &\leq C_{\varepsilon,p} \int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \cdot \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{\frac{p+\varepsilon}{q}} \\ &\leq C_{\varepsilon,p} \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} |\langle f_{1,z}, f_{2,z}\rangle| d\mu(z) \right)^{p+\varepsilon} \leq C_{\varepsilon,p} \left(\int_{Z_{\mathrm{sph}}} \|f_{1,z}\|^2 d\mu(z) \int_{Z_{\mathrm{sph}}} \|f_{2,z}\|^2 d\mu(z) \right)^{p+\varepsilon/2} \\ &\leq C_{\varepsilon,p} \|f_1\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}^{p+\varepsilon} \|f_2\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}^{p+\varepsilon} < \infty.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4. The spectrum for quotients of products of rank one space

4.1. 局部对称空间上的预解核。 本小节中，我们将局部对称空间上的预解式施瓦茨核表示为整体空间 G/K 上的施瓦茨核。为此，我们需要以下著名引理。

引理 4.1. 由 $\alpha\colon \quad C_c^\infty(G/K) \to C_c^\infty(\Gamma\backslash G/K)$ 定义的平均映射

$$\alpha f(\Gamma x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x), \quad x \in G/K,$$

是满射。

回顾一下，对于 $D \in \mathbb{D}(G/K)$，我们定义了作用于 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 的微分算子 ${}_\Gamma D$。下一个引理说明，在 D 可逆的条件下，${}_\Gamma D^{-1}$ 的施瓦茨核可以如何表示。

引理 4.2. 设 $D \in \mathbb{D}(G/K)$，并假设 D 作为无界算子$L^2(G/K) \to L^2(G/K)$可逆。令 $K_{D^{-1}} \in \mathcal{D}'(G/K \times G/K)$ 为 D^{-1}的施瓦茨核。进一步假设 ${}_\Gamma D\colon\ L^2(\Gamma\backslash G/K) \to L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 可逆。那么，${}_\Gamma D^{-1}$ 的施瓦茨核 $K_{{}_\Gamma D^{-1}} \in \mathcal{D}'(\Gamma\backslash G/K \times \Gamma\backslash G/K)$ 为

$$K_{{}_\Gamma D^{-1}}(\varphi \otimes \psi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} K_{D^{-1}}(L_\gamma \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}),$$

其中 $\tilde{\varphi}$（以及 ψ））分别是满射 $\alpha\colon\ C_c^\infty(G/K) \to C_c^\infty(\Gamma\backslash G/K)$下 φ（分别为 ψ）的原像。略微滥用一下记号，我们写作

$$K_{{}_\Gamma D^{-1}}(\Gamma x, \Gamma y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} K_{D^{-1}}(x, \gamma y).$$

证明。首先注意到 D，因此 D^{-1}是 G-不变的，故对所有 $g \in G$ 和 $\tilde{\varphi}, \psi \in C_c^\infty(G/K)$，都有 $K_D(\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi}) = K_D(L_g\tilde{\varphi}\otimes L_g\psi)$。令 $\varphi = \alpha\tilde{\varphi}, \psi = \alpha\psi \in C_c^\infty(\Gamma\backslash G/K)$。根据$K_{{}_\Gamma D^{-1}}$的定义，我们有 $K_{{}_\Gamma D^{-1}}(({}_\Gamma D\varphi)\otimes\psi) = \int_{\Gamma\backslash G/K} \varphi(\Gamma x)\psi(\Gamma x)d\Gamma x.$。另一方面，由 D 的 G-不变性，${}_\Gamma D\varphi = \alpha(D\tilde{\varphi})\tilde{}$，因此我们可以取 $D\tilde{\varphi}$ 为 ${}_\Gamma D\phi$。所以我们需要证明

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} K_{D^{-1}}(L_\gamma D\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) = \int_{\Gamma\backslash G/K} \varphi(\Gamma x)\psi(\Gamma x)\, d\Gamma x.$$

左侧等于

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} K_{D^{-1}}(DL_\gamma\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{G/K} L_\gamma\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(x)\, dx$$

再次利用 D 的 G-不变性以及 $K_{D^{-1}}$的定义。现在我们可以使用 $\Gamma\backslash G/K$ 的测度定义，从而得到

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{G/K} L_\gamma\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(x)\, dx = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\Gamma\backslash G/K}\sum_{\gamma'\in\Gamma} \tilde{\varphi}(\gamma x)\tilde{\psi}(\gamma' x)\, d\Gamma x = \int_{\Gamma\backslash G/K} \varphi(\Gamma x)\psi(\Gamma x)\, d\Gamma x.$$

这就证明了该引理。 □

4.2. **一般秩一局部对称空间中的拉普拉斯算子谱**。本节回顾秩一局部对称空间 $\Gamma\backslash G/K$ 上拉普拉斯谱底端与 Γ 的临界指数之间的联系。这一联系归功于 Elstrodt [Els73a、Els73b、Els74] 和 Patterson [Pat76] 关于 $G = SL_2$（$\mathbb{R}$）的工作，Sullivan [Sul87] 关于$G = SO_0(n, 1)$的工作，以及 Corlette [Cor90] 关于一般秩一 G 的工作。在高秩情形中，Leuzinger [Leu04], 、Weber [Web08], 以及 Anker 和 Zhang [AZ22] 将其推广了。

定义 4.3。我们将 Γ 的收敛横坐标/临界指数定义为

$$\delta_\Gamma := \inf\left\{ s \in \mathbb{R}\colon \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\|\mu_+(\gamma)\|} < \infty \right\}.$$

回顾一下秩一局部对称空间上谱底的定理及其证明，因为稍后在定理 4.9 的证明中将会用到它。

命题 4.4。 设 G/K 为秩一对称空间， Γ 为无挠离散子群。则

$$\sigma({}_\Gamma\Delta) \subseteq \begin{cases} [\|\rho\|^2, \infty[& : \delta_\Gamma < \|\rho\| \\ [\|\rho\|^2 - (\delta_\Gamma - \|\rho\|)^2, \infty[& : \delta_\Gamma \geq \|\rho\|. \end{cases}$$

命题 4.4 的证明中，关键在于格林函数，它是拉普拉斯算子 Δ 的预解核 $K_{(\Delta-z)^{-1}}$。众所周知， $K_{(\Delta-z)^{-1}}$ 在对角线之外是光滑函数。由于 Δ 的 G-不变性，我们有 $K_{(\Delta-z)^{-1}}(gx,\ gy) = K_{(\Delta-z)^{-1}}(x,\ y)$，因此 $K_{(\Delta-z)^{-1}}(x,\ y)$ 仅取决于 $\mu_+(x^{-1}y)$。由此可知， $K_{(\Delta-z)^{-1}}$ 可视为定义在 A 上的函数，并满足以下全局界：

定理 4.5 ([AJ99, 定理 4.2.2])。

(i) 对每个 $z < b < \|\rho\|^2$，都存在常数 $C_{z,\ b} > 0$，使得

$$K_{(\Delta-z)^{-1}}(e^H) \leq C_{z,b} e^{-(\sqrt{\|\rho\|^2 - b} + \|\rho\|)\|H\|}$$

对于所有远离原点的 $H \in \mathfrak{a}$。

(ii) 对于每个 $z < \|\rho\|^2$，存在一个常数 C_z，使得

$$K_{(\Delta-z)^{-1}}(e^H) \leq C_z \begin{cases} \|H\|^{2-\dim(G/K)} & : \dim(G/K) > 2 \\ \log(1/\|H\|) & : \dim(G/K) = 2 \end{cases}$$

对于所有原点附近的 $H \in \mathfrak{a}$。

注 4.6. 除了定理 4.5 给出的关于 $K_{(\Delta-z)^{-1}}$ 的界之外，我们还将使用以下一般估计：

$$|K_{(\Delta-z)^{-1}}| \leq K_{(\Delta-\operatorname{Re} z)^{-1}}$$

它是正的。此外，

$$K_{(\Delta-z)^{-1}} \leq K_{(\Delta-z')^{-1}} \quad \text{for} \quad z \leq z' < \|\rho\|^2.$$

这些 例如，将 $(\Delta - z)^{-1}$ 写成拉普拉斯变换的形式即可得到估计 .

为了判断由引理 4.2 的平均构造给出的核是否在 $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 上定义了有界逆算子，我们使用斯通公式。

命题 4.7 （例如参见 [Sch12, 命题 5。14]）。 设 A 是一个自伴算子， P_I 是 A 对应于博雷尔子集 $I \subseteq \mathbb{R}$的谱投影。那么

$$\frac{1}{2}(P_{[a,b]} + P_{]a,b[}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (A - (z + i\varepsilon))^{-1} - (A - (z - i\varepsilon))^{-1} dz.$$

这里， $\varepsilon \to 0$ 趋于极限是指取强极限。

斯通公式的优点在于，由于 A的自伴性，其中出现的逆算子都是良定义的。因此，我们只需考虑施瓦茨核，而不必担心该核是否在 L^2 上定义了有界算子。

命题 *4.4* 的证明。根据命题 4.7，我们需要确定哪些 $b < \|\rho\|^2$：

$$\int_0^b ({}_\Gamma\Delta - (z + i\varepsilon))^{-1} - ({}_\Gamma\Delta - (z - i\varepsilon))^{-1}\, dz \to 0 \tag{3}$$

在 $\varepsilon \to 0$ 的强意义下。与引理 4.2 中一样，将 $(\Gamma D - (z \pm i\varepsilon))^{-1}$ 的施瓦茨核记为 $K_{(\Gamma D-(z\pm i\varepsilon))^{-1}}$。接下来我们需要证明

$$\int_0^b (K_{(\Gamma\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Gamma\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(\varphi\otimes\psi)dz \to 0 \tag{4}$$

因为对于某些 $b < \|\rho\|^2$，对每个 φ，$\psi \in C_c^\infty(\Gamma\backslash G/K)$ 都有 $\varepsilon \to 0$。令 $\tilde{\varphi}$（分别为 $\tilde{\psi}$）是 φ（分别为 ψ）在映射 α 下的原像。则式 (4) 等于

$$\int_0^b \sum_{\gamma\in\Gamma} (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_\gamma\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi})\, dz \tag{5}$$

根据引理 4.2，因为 Δ 是对称的，因此 $\Gamma\Delta - (z \pm i\varepsilon)$ 可逆。

下面稍微更一般的引理表明，对于 $b < \|\rho\|^2 - (\max\{0, \delta_\Gamma - \|\rho\|\})^2$，式 (3) 成立，因此 $\sigma(\Gamma\Delta) \cap (-\infty, \|\rho\|^2 - (\max\{0, \delta_\Gamma - \|\rho\|\})^2) = \emptyset$。□

引理 4.8. 设 D 是一个多重集，其底层集合是秩一李群 G 中的离散子集，并且

$$\delta_D \coloneqq \inf\left\{ s \in \mathbb{R} \colon \sum_{\gamma\in D} e^{-s\|\mu_+(\gamma)\|} < \infty \right\}.$$

对于 $b < \|\rho\|^2 - (\max\{0, \delta_D - \|\rho\|\})^2$，有

$$\int_0^b \sum_{\gamma\in D} (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_\gamma\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi})\, dz \to 0$$

˜对于每个 $\tilde{\varphi}$，都有 $\varepsilon \to 0$ $\psi \in C_c^\infty(G/K)$。

˜证明。由于 $\tilde{\varphi}$ 和 ψ 的支集是紧的，因此只有有限多个 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\operatorname{supp}(L_\gamma\tilde{\varphi}\otimes\psi)$ 与 $G/K \times G/K$ 中的对角线有非平凡交集。对于这有限多个$\gamma \in \Gamma$，由于当 $z < \|\rho\|^2$ 时，$\Delta - (z \pm i\varepsilon)$ 在 $L^2(G/K)$ 上可逆，因此该项趋于 0，即 $(\Delta - (z \pm i\varepsilon))^{-1} \to (\Delta - z)^{-1}$。

对于其他的 γ，我们利用 $K_{(\Delta-z)^{-1}}$ 在对角线之外是光滑函数这一性质，以及注 4.6 中的估计。

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^b \sum_{\gamma} (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_\gamma\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi})\, dz \right| \\
&\le \sup_{0\le z\le b} b \sum_{\gamma} \left| (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_\gamma\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\psi}) \right| \\
&\le \sup_{0\le z\le b} b \sum_{\gamma} \int_{G/K}\int_{G/K} \left| (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}}(x,y) - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}}(x,y))(\tilde{\varphi}(\gamma^{-1}x)\tilde{\psi}(y)) \right| dx\, dy \\
&\le \sup_{0\le z\le b} 2b \sum_{\gamma} \int_{G/K}\int_{G/K} \left| K_{(\Delta-z)^{-1}}(\gamma x, y)\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y) \right| dx\, dy \\
&\le 2b \sum_{\gamma} \int_{G/K}\int_{G/K} \left| K_{(\Delta-b)^{-1}}(\gamma x, y)\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y) \right| dx\, dy
\end{aligned}$$

由于格林函数仅依赖于 $\mu_+(y^{-1}\gamma x)$，因此可以用一个常数乘以以下表达式来估计

$$\sup_{x,y\in C}\sum_{\gamma}|K_{(\Delta-b)^{-1}}(e^{\mu_+(y^{-1}\gamma x)})|$$

其中 $C\subseteq G$ 是紧的。现在我们使用定理 4.5 得知，对于任意 $\nu>0$ b，这都是有界的 y

$$C_\nu\sup_{x,y\in C}\sum_{\gamma}e^{-(\sqrt{\|\rho\|^2-b}+\|\rho\|-\nu)\|\mu_+(y^{-1}\gamma x)\|}. \tag{6}$$

根据三角不等式

$$\|\mu_+(\gamma)\|\leq\|\mu_+(y)\|+\|\mu_+(x)\|+\|\mu_+(x^{-1}\gamma y)\|$$

因此 (6) 有如下界

$$C_\nu\sup_{x,y\in C}e^{(\sqrt{\|\rho\|^2-b}+\|\rho\|-\nu)(\|\mu_+(y)\|+\|\mu_+(x)\|)}\sum_{\gamma}e^{-(\sqrt{\|\rho\|^2-b}+\|\rho\|-\nu)\|\mu_+(\gamma)\|}.$$

当 ν 足够小时，这是有限的；若 $\sqrt{\|\rho\|^2-b}+\|\rho\|>\delta_\Gamma$，即 $b<\|\rho\|^2-(\max\{0,\delta_D-\|\rho\|\})^2$。

由此估计，我们可以应用勒贝格控制收敛定理，从而得出该引理。□

注意，在引理 4.8 D 中，并未假设其为群。我们将在命题 4.9 的证明中使用这一一般性陈述。

4.3. 秩一空间的直积。 设 $X=X_1\times X_2=(G_1\times G_2)/(K_1\times K_2)$ 是两个秩一对称空间的直积，且 $\Gamma\subseteq G_1\times G_2$ 离散且无挠。在这种情况下，为了确定 $\widetilde{\sigma}(\Gamma\backslash G/K)$，我们先对作用于其中一个因子上的拉普拉斯算子的谱进行估计，然后应用命题 3.6。

定理 4.9。 *设 Δ_1 是拉普拉斯算子 $\Delta\otimes id$，作用于 $L^2(X_1\times X_2)=L^2(X_1)\otimes L^2(X_2)$ 的第一因子上。令*

$$\delta_1=\sup_{R>0}\inf\left\{s\in\mathbb{R}\colon\sum_{\gamma\in\Gamma,\|\mu_+(\gamma_2)\|\leq R}e^{-s\|\mu_+(\gamma_1)\|}<\infty\right\}.$$

Then

$$\widetilde{\sigma}({}_\Gamma\Delta_1)=\{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W\mid\chi_\lambda(\Delta_1)\in\sigma({}_\Gamma\Delta_1)\}\subseteq\{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*/W\mid\|\operatorname{Re}(\lambda_1)\|\leq\max(0,\delta_1-\|\rho_1\|)\}.$$

证明。 由于单位元的施瓦茨核是 $\delta_{x_2=y_2}$ 上 $X_2\times X_2$ 的对角线处的狄拉克分布，因此 $(\Delta_1-z)^{-1}$ 的施瓦茨核为

$$K_{(\Delta_1-z)^{-1}}((x_1,x_2),(y_1,y_2))=K_{(\Delta-z)^{-1}}(x_1,y_1)\delta_{x_2=y_2}(x_2,y_2)$$

当 $z\notin[\|\rho_1\|^2,\infty[$ 时。因此，若 $({}_\Gamma\Delta_1-z)$ 可逆，则 $({}_\Gamma\Delta_1-z)^{-1}$ 的核为

$$K_{({}_\Gamma\Delta_1-z)^{-1}}(\Gamma(x_1,x_2),\Gamma(y_1,y_2))=\sum_{\gamma\in\Gamma}K_{(\Delta-z)^{-1}}(\gamma_1x_1,y_1)\delta_{x_2=y_2}(\gamma_2x_2,y_2)$$

由引理 4.2。根据命题 4.7，我们需要确定哪些 $b<\|\rho_1\|^2$:

$$\int_0^b({}_\Gamma\Delta_1-(z+i\varepsilon))^{-1}-({}_\Gamma\Delta_1-(z-i\varepsilon))^{-1}\,dz\to0$$

在强意义下，如 $\varepsilon \to 0$。与引理 4.2 中一样，记 $(_\Gamma D - z)^{-1}$ 的施瓦茨核为$K_{(_\Gamma D - z)^{-1}}$。那么我们需要考察哪些 $b < \|\rho_1\|^2$

$$\int_0^b (K_{(_\Gamma\Delta_1-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(_\Gamma\Delta_1-(z-i\varepsilon))^{-1}})(\varphi\otimes\psi)dz \to 0 \tag{7}$$

˜对每个 $\varphi,\ \psi \in C_c^\infty(\Gamma\backslash G/K)$，均有 $\varepsilon \to 0$。令 $\tilde\varphi$（分别令 ψ）为映射 α 下 φ（分别为 ψ）的原像。那么，(7) 中的表达式等于

$$\int_0^b \sum_{\gamma\in\Gamma} (K_{(\Delta_1-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta_1-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_\gamma\tilde\varphi\otimes\tilde\psi)\, dz$$

由引理 4.2 可知。不失一般性，我们可以假设 $\tilde\varphi = \tilde\varphi_1\otimes\tilde\varphi_2 \in C_c^\infty(X_1)\otimes C_c^\infty(X_2) \subseteq C_c^\infty(X_1\times X_2)$，$\psi$ 也同理。于是，(7) 化为

$$\int_0^b \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_{\gamma_1}\tilde\varphi_1\otimes\tilde\psi_1)\right)(\delta_{x_2=y_2}(L_{\gamma_2}\tilde\varphi_2\otimes\tilde\psi_2))\, dz$$

被积函数的后一部分为 $\int_{X_2}\tilde\varphi_2(\gamma_2^{-1}x)\,\tilde\psi_2(x)\,dx$，当 γ_2 足够大时该部分便为零；这里的“足够大”取决于 $\tilde\varphi_2$ 和 ψ_2。更准确地说，当

$$\|\mu_+(\gamma_2)\| > 2\max_{x\in\operatorname{supp}\tilde\varphi_2} d(x,eK_2) + \max_{\substack{x\in\operatorname{supp}\tilde\varphi_2\\ y\in\operatorname{supp}\tilde\psi_2}} d(x,y) =: R.$$

事实上，$d(x,\ \gamma_2^{-1}x) \geq d(\gamma_2K_2,\ eK_2) - 2d(x,\ eK_2) > \max_{x\in\operatorname{supp}\tilde\varphi_2} d(x,\ y)$，因此 $x \in \operatorname{supp}\tilde\psi_2$-$y\in\operatorname{supp}\psi_2$不包含于 $\gamma_2^{-1}x \in \operatorname{supp}\tilde\varphi_2$。

设 $\Gamma_R := \{\gamma\in\Gamma \mid \|\mu_+(\gamma_2)\| \leq R\}$。由此可知，(7) 被一个常数乘以以下表达式所界定

$$\int_0^b \sum_{\gamma\in\Gamma_R} (K_{(\Delta-(z+i\varepsilon))^{-1}} - K_{(\Delta-(z-i\varepsilon))^{-1}})(L_{\gamma_1}\tilde\varphi_1\otimes\tilde\psi_1)\, dz$$

现在由引理 4.8 可知，只要 $b < \|\rho_1\|^2 - (\max\{0,\delta_{\mathrm{pr}_1(\Gamma_R)} - \|\rho_1\|\})^2$，当 $\varepsilon\to 0$ 时该式就趋于零，其中 $\mathrm{pr}_1(\Gamma_R)$ 是 $\gamma_1\in G$ 的多重集，重数为 $\#\{(\gamma_1',\ \gamma_2') \in \Gamma_R \mid \gamma_1 = \gamma_1'\}$。为了使 (7) 对每个 $\varphi,\ \psi$ 都成立，上述关于 b 的条件必须对每个 $R > 0$ 都成立，即 $b < \|\rho_1\|^2 - (\max\{0,\delta_1 - \|\rho_1\|\})^2$。我们推得

$$\sigma(_\Gamma\Delta_1) \subseteq \begin{cases} [\|\rho_1\|^2,\infty[& : \delta_1 \leq \|\rho_1\| \\ [\|\rho_1\|^2 - (\delta_1 - \|\rho_1\|)^2,\infty[& : \delta_1 \geq \|\rho_1\|. \end{cases}$$

用 $\widetilde{\sigma}$ 重新表述这一结论，即可得到所述结果。 □

显然，如果我们考虑第二因子上的拉普拉斯算子及其临界指数，定理 4.9 也成立。

$$\delta_2 = \sup_{R>0}\inf\left\{ s\in\mathbb{R}\colon \sum_{\gamma\in\Gamma,\|\mu_+(\gamma_1)\|\leq R} e^{-s\|\mu_+(\gamma_2)\|} < \infty \right\}.$$

利用这一点、命题 3.6 和命题 3.10，我们得到以下推论，从而得到 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 关于 δ_1 和 δ_2 的温和性。

推论 4.10。如果 $\delta_1 \leq \|\rho_1\|$ 和 $\delta_2 \leq \|\rho_2\|$，那么 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

例 4.11。 (i) 设 Γ 是一个直积 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$，其中每个 $\Gamma_i \leq G_i$ 都是离散且无挠的。于是显然 $\delta_i = \delta_{\Gamma_i}$。因此，在这一乘积情形下，我们得到了预期的结果。(ii) 设 Γ 是一个自拼接：两个投影 $\pi_i\colon G_1 \times G_2 \to G_i$ 到某个因子的映射限制在Γ 上具有有限核和离散像。那么，满足 $\gamma \in \Gamma$ 且 $\|\mu_+(\pi_i(\gamma))\| \leq R$的集合是有限的。因此 $\delta_i = -\infty$ 且 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。(iii) 设 $\Gamma \leq G_1 \times G_2$ 是关于极小抛物子群的一个 Anosov 子群，即 Γ 是一个自拼接，并且 $\pi_i|_\Gamma$ 是凸余紧表示。特别地， $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

4.4. **增长指标函数**。 本节将考察极限锥和由 Quint [Qui02] 引入的增长指标函数 ψ_Γ，并将其与 δ_1 进行比较。

定义 4.12。 $\mathcal{L}_\Gamma$ 的极限锥 Γ 定义为 $\mu_+(\Gamma)$ 的渐近锥，即

$$\mathcal{L}_\Gamma = \{\lim t_n \mu_+(\gamma_n) \mid t_n \to 0, \gamma_n \in \Gamma\}.$$

对于 Γ Zariski 稠密， $\mathcal{L}_\Gamma$ 是一个内部非空的凸锥 [Ben97]。由此定义可得以下命题。

命题 4.13。 设 Γ 是 $G = G_1 \times G_2$ 的无挠离散子群，其中 G_i 具有实秩一。若 $\mathcal{L}_\Gamma \subseteq \mathfrak{a}_+ \cup \{0\}$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

证明。 根据推论 4.10，只需证明 $\delta_i = -\infty$。假设存在无穷多个两两不同的 $\gamma_n \in \Gamma$，使得 $\|\mu_+(\gamma_{n,2})\| \leq R$。由离散性可知 $\|\mu_+(\gamma_{n,1})\| \to \infty$。因此我们可以选取 $t_n := 1/\|\mu_+(\gamma_{n,1})\|$。于是 $t_n\mu_+(\gamma_n)$ 收敛到 $(H_1, 0)$，其中 $H_1 \in \mathfrak{a}_{1,+}$已归一化，这与 $\mathcal{L}_\Gamma \subseteq \mathfrak{a}_+ \cup \{0\}$矛盾。因此，第二个分量有界的 $\gamma \in \Gamma$ 只有有限多个，从而 $\delta_1 = -\infty$。同样的论证也适用于 δ_2。□

对于 $\Gamma \leq G$ 离散且 Zariski 稠密的情形，令 $\psi_\Gamma\colon \mathfrak{a} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 定义为

$$\psi_\Gamma(H) := \|H\| \inf_{H \in \mathcal{C}} \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma, \mu_+(\gamma) \in \mathcal{C}} e^{-s\|\mu_+(\gamma)\|} < \infty\}$$

其中，下确界取遍所有包含 H 的开锥 $\mathcal{C}$，且 $\|\cdot\|$ 是 $\mathfrak{a}$ 上的 Weyl 群不变范数。对于 $H = 0$，令 $\psi_\Gamma(0) = 0$。注意， ψ_Γ 是 1 次正齐次的。一般而言，我们有上界 $\psi_\Gamma \leq 2\rho$。根据 [Qui02]，我们知道 $\psi_\Gamma \geq 0$ 在 $\mathcal{L}_\Gamma$ 上成立， $\psi_\Gamma > 0$ 在 $\mathcal{L}_\Gamma$ 的内部成立，而 $\psi_\Gamma = -\infty$ 在 $\mathcal{L}_\Gamma$ 之外成立。此外， ψ_Γ 是凹且上半连续的。

让我们在 $G = G_1 \times G_2$ 这一情形下比较 δ_1 与 ψ_Γ，其中 G_i 的实秩为一。取范数为 1 的 $H_i \in \mathfrak{a}_{i,+}$，并考虑 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ 上的最大范数。在这种情形下，显然 $\delta_1 \leq \psi_\Gamma(H_1, 0)$，因为每个包含 $(H_1, 0)$ 的锥 $\mathcal{C}$ 都包含条带 $\mathfrak{a}_{1,+} \times \{H \in \mathfrak{a}_{2,+} \mid \|H\| \leq R\}$，只要紧集足够大。

注意，若 $\psi_\Gamma \leq \rho$，则根据上述比较，这一条件蕴含 $\delta_i \leq \|\rho_i\|$，而这足以得到：

推论 4.14. 设 $X = X_1 \times X_2 = (G_1 \times G_2)/(K_1 \times K_2)$ 是两个秩一对称空间的直积，且 $\Gamma \leq G_1 \times G_2$ 离散且无挠。若 $\psi_\Gamma \leq \rho$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 是温和的。

注意，这恰好是 [EO22] 的结果，只是不要求 Γ 是相对于极小抛物子群的阿诺索夫表示的像。

References

[AJ99] J.-P. Anker 和 L. Ji, *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces*, 《Geom. Funct. Anal.》 **9** 1999 6, 1035 1091 3, 12 ( ), 第 – 期。AZ J.-P. Anker 和 H.-W. Zhang, [22] *Bottom of the L^2 spectrum of the Laplacian on locally symmetric spaces* **216** 2022 1 , 《Geom. Dedicata》( ), 第 1, 11 期。[08] BdlHV B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, 数学新专著，剑桥大学出版社，2008年。6

[97] *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires* **7** 1997 1 47 16 Ben Y. Benoist, ,

[90] *Hausdorff dimensions of limit sets I.* **102** 1990 3, 521 542 《Geom. funct. anal.》( ), –。Cor K. Corlette, , 《Invent. Math.》( ), 第 – 期。 1, 3, 11

[20] *Anosov groups: local mixing counting and equidistribution* ELO S. Edwards、M. Lee 和 H. Oh, 、、, arXiv: 2003 14277, 2020 2 。即将在《Geom. Topol.》( )发表。

[18] *Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. I* **203** 1973 295 300 1, 11 , 《Math. Ann.》( ), –。[Els73b] , *Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. II* **132** 1973 99 134 1, 11 , 《Math. Z.》( ), –。[Els74] , *Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. III* **208** 1974 99 132 , 《Math. Ann.》( ), –。[22] Els a J. Elstrodt, 1, 11

[23] *Temperedness of L^2 and positive eigenfunctions in higher rank*, arXiv: 2202 06203 2022 2, 3, 9, 16 。( )。FG M. Fraczyk 和 T. Gelander, *Infinite volume and infinite injectivity radius*, 《Ann. of Math.》(2) 197 (2023 1, 389 421 9), 第 – 期。GW O. Guichard 和 A. Wienhard, [12] *Anosov representations: domains of discontinuity and applications*, 《Invent. Math.》 **190** 2012 2, 357 438 3 ( ), 第 – 期。HCH U. Haagerup、M. Cowling 和 R. Howe, [88] *Almost L2 matrix coefficients*, 《J. Reine Angew. Math.》387 (1988 97 110 9), –。Hel S. Helgason, [84] *Groups and geometric analysis: integral geometry invariant differential operators and spherical functions* 1984 4, 5, 7 , 纯粹与应用数学，Acade mic Press, 。[Hel89] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, 数学调查与专著，美国数学学会, 1989 5 。HWW J. Hilgert、T. Weich 和 L.L. Wolf, [21] *Higher rank quantum-classical correspondence*, arXiv:2103.05667, 即将在《Ann. PDE》(2021 7, 10)发表。Lab F. Labourie, *surface groups and curves in projective space*, 《 [06] *Anosov flows* Invent. Math.》165 (2006), 第1期, 51–114。3[Leu04] E. Leuzinger, *Critical exponents of discrete groups and L^2-spectrum*, 《 Proc. Amer. Math. Soc.》132 (2004 3, 919 927 1, 11), 第 – 期。Pat S.J. Patterson, [76] *The limit set of a Fuchsian group* **136** 1976 3 4, 241 273 1, 11 , 《Acta Math.》( ), [02] *Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur* 第 - – 期。Qui J.-F. Quint, 《Comment. Math. Helv.》 **77** 2002 563 608 16 ( ), –。Sch K. Schmudgen, [12] *Unbounded self-adjoint operators on hilbert space*, 数学研究生教材，第265卷，Springer Dordrecht, 2012年。7, 12[Sul87] D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, 《J. Differential Geom.》25 (1987), 第 3, 327 351 1, 11 –期。Web A. Weber, *Heat kernel bounds, Poincaré series and L^2 spectrum for locally symmetric spaces*, 《Bull. Aust. Math. Soc.》78 (2008), 第1期, 73–86。MR 2458299 1, 11 [08]

Email address: weich@math.upb.de, llwolf@math.upb.de