arXiv:2304.09593v1 [math.OC] 19 Apr 2023

时变广义纳什均衡问题中的线性收敛

Mattia Bianchi、Emilio Benenati、Sergio Grammatico

摘要——**我们研究具有满行秩等式约束的广义博弈，并给出一个极为简洁的证明，说明相关 KKT算子具有强单调性。这使我们能够证明，由此得到的原始-对偶伪梯度动力学线性收敛到一个变分均衡。随后，我们针对部分决策信息下的聚合博弈，提出一种具有线性收敛保证的全分布式算法。基于这些结果，我们确立了在成本函数和约束时变的博弈中进行在线广义纳什均衡求解的稳定性性质。最后，我们通过一个点对点能源市场的经济调度问题，以数值方式展示了研究结果。**

I. 引言

广义纳什均衡（GNE）问题广泛存在于多智能体应用中。在这些问题中，智能体不仅因目标相互冲突而相互耦合，还受到共享约束的约束——即智能体必须遵守的系统运行限制。此外，广义纳什均衡求解还应用于能源市场 [1], 无线电通信 [2] 以及编队控制 [3]问题。

这些应用的网络化结构自然需要分布式求解方法。事实上，近期部分文献聚焦于半分散式广义纳什均衡搜索算法 [4], [5], [6],，在这类算法中，智能体在协调器的协助下本地更新其决策；协调器负责收集并广播系统中的信息（这种架构也称为全信息场景）。其他研究 [7], [8], [9],[10] 则探讨智能体只能依靠完全分布式的点对点通信和本地数据的应用。在这种所谓的部分决策信息场景中，智能体通过估计未知量并在其局部决策过程中嵌入一致性动力学，来弥补全局知识的缺失。

在这两种场景中，为了应对耦合约束的存在并将计算分配给各智能体，应采用拉格朗日重构。事实上，上述所有文献都采用原始-对偶伪梯度算法，旨在求解广义纳什均衡问题的 Karush–Kuhn–Tucker（KKT）最优性条件。

一般而言，即使对于强单调广义博弈这一类问题，原始-对偶算法也无法实现线性收敛 [4]。重要的是，伪梯度迭代的某些关键输入到状态稳定性（ISS）性质也无法得到保证。这种缺乏鲁棒性是部分决策信息场景中的一个关键问题，在这种场景下，尽管存在估计误差，仍应确保收敛。为克服这一难题，可以使用递减步长使误差趋于零 [11],，但代价是收敛缓慢。另一种方法是，基于算子理论方法并采用预条件化，提出了若干用于广义纳什均衡求解的固定步长算法 [8], [9], [12], [7]。然而，这种方法存在重要局限，例如难以将分析推广到时变设置。

例如，当智能体只能通过切换通信网络交换信息时，目前没有可用的固定步长全分布式方法来求解广义纳什均衡问题（而对于不存在耦合约束的博弈，已有相应方法 [13], [14]）。此外，在许多具有现实应用的决策过程中，智能体的成本函数和系统约束会随时间变化 [15],，例如认知无线电网络和智能电网中的需求响应 [16]。在这些领域，线性收敛算法尤为理想，因为求解器需要根据环境变化快速更新其解。尽管这一问题具有实际意义，研究在线广义纳什均衡问题的工作却寥寥无几。文献 [17] 提出了一种正则化算法，但该算法只能实现非精确收敛，且并非全分布式。相反，文献 [18] 的作者为部分决策信息场景设计了一种算法，但只有在解渐近恒定且采用递减步长时，该算法才能实现次线性遗憾。

贡献：本文研究具有满行秩耦合等式约束的广义博弈——这类约束常见于资源分配和运输问题[19], ，其中需求匹配 [10] 和流量 [1] 约束无处不在。我们首次证明，在这种设定下，无论是完整决策信息场景还是部分决策信息场景，都可以通过原始-对偶动力学实现向广义纳什均衡的线性收敛。基于这一结果，我们还可以将该动力学应用于时变博弈中的在线均衡求解。本文重点研究聚合博弈 [4],这一重要类别，因为它具有理想的可扩展性特性；不过，本文的分析也适用于一般耦合成本。本文将本工作的创新点概括如下：

1) 我们针对具有满行秩等式耦合约束的博弈，给出了 KKT算子强单调性的一个简单且具有构造性的证明。作为推论，我们证明了伪梯度上升-下降方法（第 III 节）线性收敛到一个广义纳什均衡；2) 我们设计了一种用于部分决策信息下广义纳什均衡求解的线性收敛算法，该算法通过跟踪

Emilio Benenati 和 Sergio Grammatico 任职于荷兰代尔夫特理工大学的 Delft Center for Systems and Control。Mattia Bianchi 任职于瑞士苏黎世联邦理工学院自动控制实验室。电子邮件地址： {e.benenati, s.grammatico}@tudelft.nl, mbianch@ethz.ch。
Thiswork 得到了 ERC 研究项目 COSMOS（802348）的资助。

技术 [11]避免了对松弛变量的需求。我们的证明基于坐标变换和小增益论证：由于其一般性，该论证同样适用于（Q-连通的）时变通信图情形（第 IV 节）；

3) 我们利用线性收敛结果，研究所提方法在成本和约束随时间变化的博弈解跟踪方面的性质。具体而言，对于全分布式算法，我们证明动态跟踪过程中引入的额外误差不会损害稳定性（第五节）。

符号说明： $\mathbf{0}_n$ ($\mathbf{1}_n$) 表示维度为 n、所有元素均为 0（1）的向量； I_n 表示维度为 n 的单位矩阵；在不引起歧义时省略下标。若 A 为对称矩阵，则 $\lambda_{\min}(A) = \lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A) =: \lambda$的最大值（$A$）表示其特征值。 $\otimes$ 表示克罗内克积。$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)$ 表示对角线上为 $A_1, \ldots, A_N$ 的分块对角矩阵；$\mathrm{col}(x_1, \ldots, x_N) = [x_1^\top \ldots x_N^\top]^\top$。对于正定对称矩阵 $P \succ 0$， $\langle x, y\rangle_P = x^\top P y$表示 P加权内积，$\|x\|_P$ 表示相应的范数；若 $P = I$，则省略下标。算子 $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在 $\mathcal{H}_P$ 上是（μ-强）单调的，如果对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$,$\langle \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\ x - y\rangle_P \geq 0 (\geq \mu\|x - y\|_P^2)$；若其利普希茨常数小于 1，即存在某个 $\ell < 1$，使得对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|_P \leq \ell\|x - y\|_P$，则该算子在 $\mathcal{H}_P$ 上是压缩的；若 $P = I$，则省略“在 $\mathcal{H}_P$ 上”的说明。若 $\mathcal{F}$可微，则 $D\mathcal{F}$ 表示其雅可比矩阵。

II. 数学建模

我们考虑一组智能体， $\mathcal{I} := \{1, \ldots, N\}$，其中每个智能体 $i \in \mathcal{I}$ 应选择其决策变量（即策略）$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$。令 $x := \mathrm{col}((x_i)_{i\in\mathcal{I}}) \in \mathbb{R}^n$ 表示所有智能体决策组成的堆叠向量，其中 $n := \sum_{i=1}^N n_i$。每个智能体 $i \in \mathcal{I}$ 的目标是最小化其目标函数$J_i(x_i, x_{-i})$，该函数取决于本地变量 x_i以及其他智能体的决策变量 $x_{-i} := \mathrm{col}((x_j)_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}})$。此外，每个智能体的可行决策会通过仿射等式耦合约束受到其他智能体行动的影响。具体而言，可行集为$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$，其中 $A := [A_1, \ldots, A_N]$ 且$b := \sum_{i=1}^N b_i$， $A_i \in \mathbb{R}^{m\times n_i}$和 $b_i \in \mathbb{R}^m$ 表示本地可用信息。于是，该博弈可表示为以下相互依赖的优化问题：

$$(\forall i \in \mathcal{I}) \quad \min_{y_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \ J_i(y_i, x_{-i}) \quad \text{s.t. } (y_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

我们在此考虑的技术问题是计算一个广义纳什均衡（GNE），即一组能够同时求解式 (1) 中所有优化问题的决策。

定义 *1*： 如果对所有 $i \in \mathcal{I}$, $J_i\left(x_i^\star,\ x_{-i}^\star\right) \leq \inf\{J_i\left(y_i, x_{-i}^\star\right) \mid (y_i,\ x_{-i}^\star) \in \mathcal{X}\}$. □，则集体策略 $x^\star = \mathrm{col}\left((x_i^\star)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ 是广义纳什均衡。接下来，我们对约束集和成本函数提出一些标准的正则性与凸性假设。

假设 *1*（凸性）： 在 (1) 中， $\mathcal{X}$ 非空。对于每个 $i \in \mathcal{I}$， J_i 连续，且 $J_i(\cdot,\ x_{-i})$ 对每个 x_{-i}都是凸且连续可微的。□与文献中的常见做法一致， [20], [4], 在所有广义纳什均衡中，我们关注变分广义纳什均衡（v-GNE）这一子类 [2,定义 311],，它们在经济学上更具合理性，且在计算上更易处理 [21]。在假设 1 下，并定义博弈的伪梯度映射

$$F(x) := \mathrm{col}\left((\nabla_{x_i} J_i(x_i, x_{-i}))_{i\in\mathcal{I}}\right), \tag{2}$$

当且仅当存在一个对偶变量 $\lambda^\star \in \mathbb{R}^m$，使得以下 KKT 条件成立时，$x^\star$ 是式 (1) 中博弈的一个 v-GNE [2, Th.4.8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_n &\in F\left(x^\star\right) + A^\top \lambda^\star \\ \mathbf{0}_m &\in -\left(Ax^\star - b\right). \end{aligned} \tag{3}$$

我们将注意力限制在强单调博弈上。

假设 *2*（强单调性）： 式 (2) 中的博弈映射F 是 μ_F-强单调且 ℓ_F-利普希茨连续的，其中 μ_F、 $\ell_F > 0$为某些常数。□

F的强单调性足以保证 v-GNE [22, Th. 2.3.3]的存在性和唯一性；它意味着对于任意固定的 x_{-i}，每个函数 $J_i(\cdot,\ x_{-i})$ 都是强凸的，但函数 $J_i(\cdot)$ 并非联合凸。我们强调，强单调性是具有线性收敛性质的算法中非常常见的条件。此外，我们还作出以下假设。

假设 *3*（满秩约束）： A 是满行秩的。$AA^\top \geq \mu_A I$， $\|A\| \leq \ell_A$ 对于某些标量 μ_A， $\ell_A > 0$。□

假设 3 指出不存在冗余约束（或者等价地说，冗余约束已被移除）。这一条件在对偶理论和优化中广为人知，因为它能确保对偶解的唯一性（可由式（3）推知）。

A. 聚合博弈

为便于阐述，我们将把结果专门应用于一类重要的聚合博弈[1], ，这类博弈 [23]广泛见于各种工程应用，例如网络拥塞控制和需求侧管理。具体而言，我们假设每个智能体 i 的成本函数 J_i 仅取决于局部决策 x_i 和一个聚合值

$$\sigma(x) = \frac{1}{N}\sum \phi_i(x_i), \tag{4}$$

其中 $\phi_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^q$ 是智能体 i的局部函数。简言之，对函数 J_i 采用略微滥用记号的写法，我们也可以表示为

$$J_i(x_i, x_{-i}) = J_i(x_i, \sigma(x)). \tag{5}$$

假设 *4*： 对于每个 $i \in \mathcal{I}$，式 (4) 中的函数 ϕ_i 连续可微且为 ℓ_σ-利普希茨连续。 □

[1]对于一般耦合博弈，也可以得到类似的结果。我们注意到，原则上，通过适当选择式 (4) 中的函数ϕ_i，可以设定 $\sigma(x) = x$

III. 广义博弈中的线性收敛

首先，我们证明在假设 2 和 3 下，KKT算子在适当的范数下是强单调的。

引理 *1*： 令 $\omega \coloneqq \mathrm{col}(x, \lambda)$。算子

$$\omega \mapsto \mathcal{A}(\omega) = \begin{bmatrix} F(x) + A^\top \lambda \\ -Ax + b \end{bmatrix} \tag{6}$$

在 $\mathcal{H}_P$ 中是 $\mu_{\mathcal{A}}$-强单调的，其中 $P \succ 0$ 且 $\mu_{\mathcal{A}} > 0$。□

证明： 对于某个 $0 < \nu < \ell_A$，令

$$P = \begin{bmatrix} I & \nu A^\top \\ \nu A & I \end{bmatrix} \succ 0. \tag{7}$$

对于任意 $x,\ x^\star \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda,\ \lambda^\star \in \mathbb{R}^m$，我们有 ve

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\omega^\star), \omega - \omega^\star \rangle_P \\ &= \langle F(x) - F(x^\star), x - x^\star \rangle \\ &\quad + \nu \langle F(x) - F(x^\star), A^\top(\lambda - \lambda^\star) \rangle \\ &\quad + \cancel{\langle A^\top(\lambda - \lambda^\star), x - x^\star \rangle} \\ &\quad + \nu \langle A^\top(\lambda - \lambda^\star), A^\top(\lambda - \lambda^\star) \rangle \\ &\quad - \nu \langle A(x - x^\star), A(x - x^\star) \rangle \\ &\quad - \cancel{\langle A(x - x^\star), \lambda - \lambda^\star \rangle} \\ &\geq (\mu_F - \nu \ell_A^2) \|x - x^\star\|^2 \\ &\quad - \nu \ell_F \ell_A \|x - x^\star\| \|\lambda - \lambda^\star\| \\ &\quad + \nu \mu_A \|\lambda - \lambda^\star\|^2 \end{aligned}$$

该矩阵对 $0 < \nu < \frac{4\mu_F \mu_A}{\ell_F^2 \ell_A^2 + 4\mu_A \ell_A^2}$ 是正定的。~~由范数等价性~~可得结论。■

基于引理 1，我们可以证明经典原始-对偶迭代的线性收敛。

定理 *1*（全决策信息下的广义纳什均衡求解）：设假设 1–3 成立，且 $\ell_{\mathcal{A}} \coloneqq (\ell_F + \ell_A)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}(P)(P)}$。~~对于任~~意 $0 < \alpha < \frac{2\mu_{\mathcal{A}}}{\ell_{\mathcal{A}}^2}$ 以及任意初始条件 (x^0, λ^0)，迭代

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \left(F(x^k) + A^\top \lambda^k \right) \tag{8a}$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha \left(Ax^k - b \right) \tag{8b}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 线性收敛到 KKT 条件 (3) 的唯一解 $\omega^\star = (x^\star, \lambda^\star)$：

$$\|\omega^{k+1} - \omega^\star\|_P^2 \leq \rho \|\omega^k - \omega^\star\|_P^2, \tag{9}$$

where $\rho = 1 - 2\alpha\mu_{\mathcal{A}} + \alpha^2 \ell_{\mathcal{A}}^2 < 1$. □

证明：由引理 1，$\|\omega - \alpha\mathcal{A}(\omega) - (\omega^\star - \alpha\mathcal{A}(\omega^\star))\|_P = \|\omega - \omega^\star\|_P^2 - 2\alpha\langle \mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\omega^\star),\ \omega - \omega^\star \rangle_P + \alpha^2 \|\mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\omega^\star)\|_P^2 \leq \rho \|\omega - \omega^\star\|_P^2$，结论由此得出，因为 (8) 可改写为 $\omega^{k+1} = \omega^k - \alpha\mathcal{A}(\omega^k)$。■

对于聚合博弈，(8a) 可按算法 1 中所述以半分散式方式实现。

算法 1 半分布式广义纳什均衡寻求

迭代直至收敛：对所有 $k \in \mathbb{N}$,

- Each $i \in \mathcal{I}$: receive λ^k, σ^k from coordinator; update
$$x_i^{k+1} = x_i^k - \alpha \left(\nabla_{x_i} J_i(x_i^k, \sigma^k) + A_i^\top \lambda^k \right)$$
- Coordinator: receive $\{\phi_i({x_i}^{k+1}), A_i x_i^k - b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$; update
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha \textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} (A_i x_i^k - b_i),$$
$$\sigma^{k+1} = \frac{1}{N} \textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} \phi_i(x_i^{k+1})$$

IV. 部分决策信息

本节考虑所谓的部分决策信息场景下的聚合博弈，其中不存在中央协调器，智能体只能通过点对点通信，在通信图 $\mathcal{G} = (\mathcal{I},\ \mathcal{E})$ 上交换信息，该图具有权重矩阵 $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$，并且 $w_{i,\ j} \coloneqq [W]_{i,\ j} > 0$ 当且仅当 $(j,\ i)$ 属于边集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$。

假设*5*（通信）：图 $\mathcal{G}$ 是强连通的。权重矩阵 W 满足：

- *Double stochasticity*: $\mathbf{1}^\top W = \mathbf{1}^\top, W\mathbf{1} = W\mathbf{1}$;
- *Self-loops*: $w_{i,i} > 0$ for all $i \in \mathcal{I}$.

We denote $\theta \coloneqq \|W - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\| < 1$. □

为弥补全局知识的缺失，我们让每个智能体$i \in \mathcal{I}$ 保留：

- $\boldsymbol{\sigma}_i \in \mathbb{R}^q$：聚合量 $\sigma(x)$ 的估计值；
- $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^m$：对偶变量 λ 的估计值；
- $\boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^m$：残差 $Ax - b$ 的估计值；
- $z_i \in \mathbb{R}^m$：额外的对偶变量。

我们提出的动力学如算法 2 所示，其中

$$\boldsymbol{F}_i(x_i, \boldsymbol{\sigma}_i) \coloneqq \nabla_{x_i} J_i(x_i, \boldsymbol{\sigma}_i) + \frac{1}{N} [D\phi_i(x_i)]^\top \nabla_{\boldsymbol{\sigma}_i} J_i(x_i, \boldsymbol{\sigma}_i). \tag{10}$$

定义 $\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{col}((\boldsymbol{\sigma}_i)_{i \in \mathcal{I}})$、$\boldsymbol{r} = \mathrm{col}((\boldsymbol{r}_i)_{i \in \mathcal{I}})$、$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{col}((\boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \mathcal{I}})$ 以及扩展博弈映射

$$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{\sigma}) \coloneqq \mathrm{col}((\boldsymbol{F}_i(x_i, \boldsymbol{\sigma}_i))_{i \in \mathcal{I}}). \tag{11}$$

注意，$\boldsymbol{F}(x,\ \mathbf{1} \otimes \sigma(x)) = F(x)$。此外，令

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{\lambda}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\lambda}} \tag{12a}$$
$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{12b}$$
$$\bar{\boldsymbol{r}} = \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{r}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{r}}. \tag{12c}$$

以下引理展示了算法 2 中跟踪动力学典型的不变性。

引理 *2*：对于所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^k = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i^k$，$\bar{\boldsymbol{r}}^k = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} A_i x_i^k - b_i \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^k = \sigma\ x^k$ □ ( ), ( )。

证明：根据 W 的初始化和双随机性，利用归纳法可得。■

为了研究算法 2 的收敛性，我们首先需要以下关键的重新表述。

算法 2 全分布式广义纳什均衡求解

初始化：按照定理 2 选择 $\alpha>0$；对于所有 $i\in\mathcal{I}$，设置 $x_i^0\in\mathbb{R}^{n_i}$、$\boldsymbol{\sigma}_i^0=\phi_i(x_i^0)$、$z_i^0\in\mathbb{R}^m$、$\boldsymbol{\lambda}_i^0=z_i^0$ $\boldsymbol{r}_i^0=A_ix_i^0-b_i$。

迭代至收敛：对所有 $k\in\mathbb{N}$，对所有 $i\in\mathcal{I}$，

- 局部变量更新：

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\alpha\left(\boldsymbol{F}_i(x_i,\boldsymbol{\sigma}_i^k)+A_i^\top\boldsymbol{\lambda}_i^k\right)$$
$$z_i^{k+1}=z_i^k+\alpha N\boldsymbol{r}_i^k$$

- 跟踪：智能体 i 与其邻居交换变量 $(\boldsymbol{\sigma}_i,\ \boldsymbol{\lambda}_i,\ \boldsymbol{r}_i)$，并执行

$$\boldsymbol{\sigma}_i^{k+1}=\sum_{j\in\mathcal{N}_i}w_{i,j}\boldsymbol{\sigma}_j^k+\phi_i(x_i^{k+1})-\phi_i(x_i^k)$$
$$\boldsymbol{r}_i^{k+1}=\sum_{j\in\mathcal{N}_i}w_{i,j}\boldsymbol{r}_j^k+A_ix_i^{k+1}-A_ix_i^k$$
$$\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1}=\sum_{j\in\mathcal{N}_i}w_{i,j}\boldsymbol{\lambda}_j^k+z_i^{k+1}-z_i^k$$

引理 *3*：算法 2 中的迭代等价于

$$\begin{bmatrix}x^{k+1}\\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}\end{bmatrix}=\underbrace{\boldsymbol{\xi}^k-\alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}^k)}_{:=\mathcal{B}_1(\boldsymbol{\xi}^k)}+\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha\left(\boldsymbol{F}(x^k,\boldsymbol{\sigma}^k)-\boldsymbol{F}(x^k,\mathbf{1}\otimes\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k)+\boldsymbol{A}^\top\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k\right)\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{:=\mathcal{B}_2(\boldsymbol{\omega}^k)}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1}\\ \tilde{\boldsymbol{r}}^{k+1}\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k\\ \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{r}}^k\\ \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k\end{bmatrix}}_{:=\mathcal{B}_3(\boldsymbol{\chi}^k)}+\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{\Pi}\mathrm{col}((\phi_i(x_i^{k+1})-\phi_i(x_i^k))_{i\in\mathcal{I}})\\ \tilde{\Pi}\mathrm{col}((A_i(x_i^{k+1}-x_i^k))_{i\in\mathcal{I}})\\ \alpha N\tilde{\boldsymbol{r}}^k\end{bmatrix}}_{:=\mathcal{B}_4(\boldsymbol{\omega}^k)}\tag{13}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\omega}}=(\bar{\boldsymbol{\xi}},\ \bar{\boldsymbol{\chi}})$、$\bar{\boldsymbol{\xi}}=(x,\ \bar{\boldsymbol{\lambda}})$、$\bar{\boldsymbol{\chi}}=(\bar{\boldsymbol{\sigma}},\ \bar{\boldsymbol{r}},\ \bar{\boldsymbol{\lambda}})$，以及 $\tilde{\Pi}:=I-(\frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top)\otimes I_N$，$\boldsymbol{W}=W\otimes I$，$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}((A_i)_{i\in\mathcal{I}})$：由算法 2 生成的序列 $(x^k,\ \boldsymbol{\sigma}^k,\ \boldsymbol{r}^k,\ \boldsymbol{\lambda}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 与由 $(\bar{\boldsymbol{\omega}}^k+\mathbf{1}\otimes\sigma\ x^k\ \tilde{\boldsymbol{r}}^k+\mathbf{1}\otimes\ Ax^k-b\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k+,\ (\bar{\boldsymbol{\xi}}^k)(\bar{\boldsymbol{\chi}}^k))_{k\in\mathbb{N}}$ 生成的序列 $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k$ 一致。

证明：通过注意到 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=$，即可得到 $\boldsymbol{\chi}$ 的更新 $\tilde{\Pi}\boldsymbol{\sigma}$，$\tilde{\boldsymbol{r}}=\Pi\boldsymbol{r}$，$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\Pi\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\Pi\boldsymbol{W}\Pi=\boldsymbol{W}\Pi$。然后，根据 $\mathcal{A}$ 的定义，利用引理 2，最后注意到根据引理 2，$\boldsymbol{F}(x^k,\ \mathbf{1}\otimes\bar{\boldsymbol{\sigma}}^k)=F(x^k)$，即可完成证明。注意到 $\boldsymbol{\sigma}=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{1}\otimes\sigma(x)$ 和 $\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{N}\otimes(Ax-b)$，因此可以在迭代中消去变量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}$。对于 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^k+\frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}\alpha N\boldsymbol{r}_i^k=\bar{\boldsymbol{\lambda}}^k+\alpha\ Ax^k-b$ 2 ■

也同样如此，因为根据引理，$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k+1}=\bar{\boldsymbol{\lambda}}^k+\frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}(z_i^{k+1}-z_i^k)(\bar{\boldsymbol{\xi}}^k)(\bar{\boldsymbol{\chi}}^k)$。

定理 *2*（部分决策信息下的广义纳什均衡求解）：假设假设 1–5 成立。那么，存在 $\alpha_{\max}>0$，使得对于所有 $0<\alpha<\alpha_{\max}$，式 (13) 中的迭代都线性收敛到 $\boldsymbol{\omega}^\star=(\boldsymbol{\xi}^\star,\ \mathbf{0})$，其中 $\boldsymbol{\xi}^\star=(x^\star,\ \lambda^\star)$：对于所有 $k\in\mathbb{N}$

$$V(\boldsymbol{\omega}^{k+1})\le\eta V(\boldsymbol{\omega}^k),\tag{14}$$

其中

$$V(\boldsymbol{\omega}):=\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P^2+\|\boldsymbol{\chi}\|^2\tag{15}$$

对某个 $\eta<1$。 □

证明：注意到，由假设5、$\boldsymbol{\chi}$ 的定义以及式（12），式（13）中的算子 $\mathcal{B}_3$ 是压缩映射；而当 α 足够小时，如定理 1 所示，$\mathcal{B}_1$ 是压缩映射。此外，根据假设，映射 $\mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_3$ 是利普希茨连续的，其常数与步长 α成正比。因此，结合引理 1 和式（13）中的重新表述，可以通过标准的小增益论证完成证明，这里仅作简要说明。根据柯西–施瓦茨不等式，我们可以得到如下界

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{B}_1(\boldsymbol{\xi}^k)+\mathcal{B}_2(\boldsymbol{\omega}^k)-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\\&\le(1-2\alpha\mu_{\mathcal{A}}+\alpha^2\ell_{\mathcal{A}}^2)\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P^2\\&\quad+\alpha\ell_1\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\|\boldsymbol{\chi}^k\|+\alpha^2\ell_2\|\boldsymbol{\chi}^k\|^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{B}_3(\boldsymbol{\chi}^k)+\mathcal{B}_4(\boldsymbol{\omega}^k)\|^2\\&\le\theta\|\boldsymbol{\chi}^k\|^2+\alpha\ell_3\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\|\boldsymbol{\chi}^k\|+\alpha\ell_4\|\boldsymbol{\chi}^k\|^2\\&\qquad+\alpha^2\ell_5\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}_1^\star\|_P^2+\alpha^2\ell_6\|\boldsymbol{\chi}^k\|^2,\end{aligned}$$

其中 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_4,\ \ell_5,\ \ell_6>0$ 是与α无关的参数。因此，对于式 (15) 中的范数 V，我们有

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\omega}^{k+1})&=\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\xi}^{k+1}-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\\ \|\boldsymbol{\chi}^{k+1}\|\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\xi}^{k+1}-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\\ \|\boldsymbol{\chi}^{k+1}\|\end{bmatrix}\\&\le\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\\ \|\boldsymbol{\chi}^k\|\end{bmatrix}^\top M\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\xi}^k-\boldsymbol{\xi}^\star\|_P\\ \|\boldsymbol{\chi}^k\|\end{bmatrix}\\&\le\lambda_{\max}(M)V(\boldsymbol{\omega}^k),\end{aligned}$$

其中

$$M:=\begin{bmatrix}1-2\alpha\mu_{\mathcal{A}}+\alpha^2(\ell_{\mathcal{A}}+\ell_5)&\alpha\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_3)\\ \alpha\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_3)&\theta+\alpha\ell_4+\alpha^2(\ell_2+\ell_6)\end{bmatrix}$$

并且，当 $\alpha>0$ 足够小时，$\lambda_{\max}(M)=\|M\|<1$。 ■

注意，对于特殊情形 $A=\mathbf{1}^\top$，文献 [10] 研究了部分决策信息下广义纳什均衡求解的线性收敛连续时间方法。然而，据我们所知，定理 2 是首个能够确保在更一般的一般满秩约束情形下实现线性收敛的结果。由于篇幅限制，此处不推导 $\alpha_{\max}$ 和 η（或引理 1 中的 $\mu_{\mathcal{A}}$）的显式表达式。

注 *1*：定理 1 的证明可直接应用于权重矩阵为 W^k 的时变图情形，前提是对每个 $k\in\mathbb{N}$，假设 5 均成立。经过一些修改，该论证也可扩展到每一步都不强连通、但满足 $\|W^{kQ}W^{kQ+1}\dots W^{(k+1)Q}-\frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\|\le\theta<1$ 的双随机图情形，其中 $Q>0$ 且对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立。 □

V. 时变博弈中的均衡跟踪

现在考虑（1）中的博弈随时间变化的情形，其变化速率使我们无法假设博弈演化与广义纳什均衡求解迭代之间存在时间尺度分离。对于每个时间索引 $t\in\mathbb{N}$，智能体都会获得一个新的博弈实例：

$$(\forall i\in\mathcal{I})\ \min_{y_i\in\mathbb{R}^{n_i}}\ J_i^t(y_i,x_{-i})\quad\text{s.t. }(y_i,x_{-i})\in\mathcal{X}^t.\tag{16}$$

我们考虑博弈约束仅在其仿射部分发生变化的情形，即 $\mathcal{X}^t := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b^t\}$，并且假设1–3对每个 t均成立。（16）中的博弈定义了一个原始-对偶广义纳什均衡对序列 $(\omega_t^\star)_{t\in\mathbb{N}}$，它对应于KKT算子 $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 的零点集。这些算子对所有 t 均按照（3）定义，其中 F，b 分别替换为 $F^t := \mathrm{col}((\nabla_{x_i} J_i^t)_{i\in\mathcal{I}})$ 和 b^t。根据 $\mathcal{A}_t$ 的强单调性以及 [24, Ex. 22.12]，对于每个 t，广义纳什均衡序列都是唯一的。由于问题变化的速率与智能体的计算时间相当，智能体在获得问题的新实例之前，只能计算时间 t 时的广义纳什均衡近似值。因此，智能体的目标是求得序列 $(\omega^t)_{t\in\mathbb{N}}$，使其能够渐近地较好地跟踪广义纳什均衡序列。我们提出以下假设；该假设是在线优化文献中的标准假设 [25, Assm. 1], [15, Eq. 9]，例如，对于受到线性约束中有界过程噪声影响的博弈，该假设成立 [17, Lemma 5]。

假设*6*：对于某个 $\delta \geq 0$，博弈 (16) 中的解$\omega_t^\star$ 满足

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} \|\omega_{t+1}^\star - \omega_t^\star\| \leq \delta.$$

假设6意味着，时刻 t 的解是时刻 $t+1$对应问题的近似解。给定某个时间步 t下时刻 ω^{t-1} 的解的估计值，我们提出从 ω^t处进行热启动，通过执行 (8) 中的迭代 K 次来计算 ω^t，即：

$$y^{t,0} = \omega^{t-1} \tag{17a}$$
$$y^{t,k+1} = y^{t,k} - \alpha \mathcal{A}_t(y^{t,k}) \quad \text{for } k = 0, ..., K-1 \tag{17b}$$
$$\omega^t = y^K, \tag{17c}$$

其中 $(y^{t,\,k})_{k\in\{1,\dots,K\}}$ 是辅助变量。下面的引理表明，采用适当选择的步长，所提出的算法能够跟踪广义纳什均衡轨迹，且其渐近误差取决于 δ 和 K。

定理3：对于任意 $0 < \alpha < \frac{2\mu_{\mathcal{A}}}{\ell_{\mathcal{A}}^2}$、$\omega^0$、$K \in \mathbb{N}_{>0}$，由迭代 (17) 生成的序列 $(\omega^t)_{t\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|\omega^t - \omega_t^\star\|_P \leq \frac{\rho^{K/2}}{1-\rho^{K/2}} \delta \sqrt{\lambda_{\max}(P)}. \tag{18}$$

其中 ρ与定理 1 中相同。 □

证明：根据定理 1，对于 $\alpha \leq 2\frac{\mu_{\mathcal{A}}}{\ell_{\mathcal{A}}^2}$，

$$\|\omega^t - \omega_t^\star\|_P \leq \rho^{K/2} \|\omega^{t-1} - \omega_t^\star\|_P.$$

由后者、三角不等式以及对所有 z 均有 $\|z\|_P^2 \leq \lambda_{\max}(P)\|z\|^2$ 这一事实可得：

$$\begin{aligned}\|\omega^t - \omega_t^\star\|_P &\leq \rho^{K/2}\|\omega^{t-1} - \omega_{t-1}^\star\|_P + \rho^{K/2}\|\omega_t^\star - \omega_{t-1}^\star\|_P \\ &\leq \rho^{K/2}\|\omega^{t-1} - \omega_{t-1}^\star\|_P + \rho^{K/2}\delta\sqrt{\lambda_{\max}(P)}.\end{aligned}$$

将后者迭代 t 次，得到

$$\|\omega^t - \omega_t^\star\|_P \leq \rho^{Kt/2}\|\omega^0 - \omega_0^\star\|_P + \sum_{\tau=1}^{t} \rho^{K\tau/2}\delta\sqrt{\lambda_{\max}(P)}.$$

由于 $\rho^{K/2} < 1$，根据几何数列的收敛性，结论得证。 ■

算法 3 时变全分布式广义纳什均衡求解初始化：按照定理 2 选择 $\alpha > 0$；对所有 $i \in \mathcal{I}$，设置 $x_i^0 \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{\sigma}_i^0 = \mathbf{0}$, $z_i^0 \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\lambda}_i^0 = z_i^0$, $\boldsymbol{r}_i^0 = A_i x_i^0 b_i^0 = \mathbf{0}$, $\phi_i^0(\cdot) = \mathbf{0}$。

迭代：在时刻 $t \in \mathbb{N}_{>0}$，对每个智能体 $i \in \mathcal{I}$，

1) Acquire J_i^t, ϕ_i^t, b_i^t
2) Re-initialize $\hat{x}_i^{t,0} = x_i^{t-1}$, $\hat{z}_i^{t,0} = z_i^{t-1}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{t,0} = \boldsymbol{\sigma}_i^{t-1} - \phi_i^{t-1}(x_i^{t-1}) + \phi_i^t(x_i^{t-1})$, $\hat{\boldsymbol{r}}_i^{t,0} = \boldsymbol{r}_i^{t-1} + b_i^t - b_i^{t-1}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^{t,0} = \boldsymbol{\lambda}_i^{t-1}$
3) 对所有 $k \in \{0, ..., K-1\}$，对所有 $i \in \mathcal{I}$：
   - 局部变量更新：
   $$\hat{x}_i^{t,k+1} = \hat{x}_i^{t,k} - \alpha\left(\boldsymbol{F}_i^t(\hat{x}_i^{t,k}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{t,k}) + A_i^\top \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^{t,k}\right)$$
   $$\hat{z}_i^{t,k+1} = \hat{z}_i^{t,k} + \alpha N \hat{\boldsymbol{r}}_i^{t,k}$$
   - 估计更新：智能体 i 与其邻居交换变量（$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{t,\,k}_{i}$、$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{t,\,k}_{i}$、$\hat{\boldsymbol{r}}^{t,\,k}_{i}$），并更新
   $$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{t,k+1} = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} w_{i,j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^{t,k} + \phi_i^t(\hat{x}_i^{t,k+1}) - \phi_i^t(\hat{x}_i^{t,k})$$
   $$\hat{\boldsymbol{r}}_i^{t,k+1} = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} w_{i,j}\hat{\boldsymbol{r}}_j^{t,k} + A_i\hat{x}_i^{t,k+1} - A_i\hat{x}_i^{t,k}$$
   $$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^{t,k+1} = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} w_{i,j}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_j^{t,k} + \hat{z}_i^{t,k+1} - \hat{z}_i^{t,k}$$
4) Set $x_i^t = \hat{x}_i^{t,K}$, $z_i^t = \hat{z}_i^{t,K}$, $\boldsymbol{\sigma}_i^t = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{t,K}$, $\boldsymbol{r}_i^t = \hat{\boldsymbol{r}}_i^{t,K}$, $\boldsymbol{\lambda}_i^t = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^{t,K}$

现在，我们转而关注第 IV 节所描述的部分决策信息设置的时变对应形式。同样地，我们考虑如下形式的聚合博弈

$$J_i^t(x_i, x_{-i}) = J_i^t(x_i, \sigma^t(x))$$

其中 $\sigma^t(x) := \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} \phi_i^t(x_i)$，并假设 ϕ_i^t对所有 t均满足假设 4。与第 IV 节一样，我们为每个智能体的状态增广一个对 $\sigma^t(x)$ 的估计值、对偶变量以及残差 $Ax - b^t$ 的估计值。对于每个 t，记 $\boldsymbol{\omega}_t^\star = (\omega_t^\star, \mathbf{0})$, 其中 $\omega_t^\star = (x_t^\star, \lambda_t^\star)$ 是时刻 t 博弈的原始-对偶解，零向量表示目标估计误差。随后，我们将参考轨迹定义为 $(\boldsymbol{\omega}_t^\star)_{t\in\mathbb{N}}$。在每个时间步，我们提出适当地重新初始化估计变量的动态跟踪，并按照式（17）中的迭代思路，执行算法 2 的有限次迭代。所得方法如算法 3 所示。对于重新初始化的动态跟踪，我们得到引理 2 的以下对应形式。

引理 4：对于所有 $t \in \mathbb{N}$、$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^t = \sum_{i\in\mathcal{I}}(z_i^t)$，均有 $\bar{\boldsymbol{r}}^t = \sum_{i\in\mathcal{I}}(A_i x_i^t - b_i^t)$、$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t = \sigma^t(x^t)$。□

证明：设对于某个 t:

$$\bar{\boldsymbol{r}}^t = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} A_i x_i^t - b_i^t. \tag{19}$$

根据更新步骤 4) 和重新初始化步骤 2)，我们

得到 $x_i^t = \hat{x}^{t,K}_{\cdot,i} = \hat{x}^{t+1,0}_{\cdot,i}$ 以及

$$\frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}\hat{\boldsymbol{r}}_i^{t+1,0} = \bar{\boldsymbol{r}}^t - \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}(b_i^{t+1}-b_i^t) \overset{(19)}{=} \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}(A_i\hat{x}_i^{t+1,0} - b_i^{t+1}).$$

然后，根据引理 $\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}\boldsymbol{r}_i^{t+1,K} = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}A_i x_i^{t+1,K} - b_i^{t+1}$ —— —— $\frac{1}{4}$，由后者和更新步骤 $\hat{\cdot},\hat{\cdot},\circ$ 可得

$$\bar{\boldsymbol{r}}^{t+1} = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}\hat{\boldsymbol{r}}^{t+1,K} = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}A_i x_i^{t+1} - b_i^{t+1}.$$

随后通过归纳法可得该结果，对于 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t$ 和 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^t$ 也可类似证明。 ■

动态跟踪的重新初始化会在解跟踪中引入一个额外的误差项，因此需要对函数 $(\phi_i^t)_{t\in\mathbb{N}}$ 的时间变化作出以下技术假设：

假设 7：对于某个 $\delta_\phi > 0$，有

$$\sup_{x,t}\|\mathrm{col}(\phi_i^t(x_i) - \phi_i^{t+1}(x_i))_{i\in\mathcal{I}}\| \le \delta_\phi.$$

□

定理 4：设 $\boldsymbol{\omega}^t = \mathrm{col}(x^t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^t, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^t, \bar{\boldsymbol{r}}^t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^t)$。存在$\alpha_{\max}$，使得对于任意 $0 < \alpha < \alpha_{\max}$，由算法 3 生成的序列 $(\boldsymbol{\omega}^t)_{t\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty}\|\boldsymbol{\omega}^t - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q \le \frac{\eta^{K/2}}{1-\eta^{K/2}}\sqrt{\lambda_{\max}(Q)}((1+N\ell_A)\delta + \delta_\phi) \tag{20}$$

其中 $Q = \mathrm{diag}(P/2,\ I)$，对于某个 $\eta \in (0,\ 1)$。 □

证明：按照引理 3 中的相同步骤，算法 3 的内迭代（步骤 3）等价于式（13）中的迭代，其中用它们的时变对应形式替代 $\boldsymbol{F}$ 和 ϕ_i。现在记

$$\psi^t = \mathrm{col}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathrm{col}((\phi_i^t(x_i^t) - \phi_i^{t-1}(x_i^t))_{i\in\mathcal{I}}, \mathrm{col}(b_i^t - b_i^{t-1})_{i\in\mathcal{I}}, \mathbf{0}).$$

根据假设 6、7 以及 $Ax_t^\star = b^t$，

$$\begin{aligned}\|\psi^t\| &\le \delta_\phi + \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}}\|b_i^t - b_i^{t-1}\| \\ &\le \delta_\phi + N\|b^t - b^{t-1}\| \le \delta_\phi + N\ell_A\delta\end{aligned} \tag{21}$$

根据定理2并计及重新初始化步骤，对于每个 t，我们得到：

$$\|\boldsymbol{\omega}^t - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q \le \eta^{K/2}\|\boldsymbol{\omega}^{t-1} + \psi^t - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q \tag{22}$$

对于某个 $\eta \in (0,\ 1)$。根据三角不等式、假设6和式（21），并利用事实 $\|z\|_Q^2 \le \lambda_{\max}(Q)\|z\|^2$，可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\omega}_{t-1} + \psi_t - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q \le \|\boldsymbol{\omega}_{t-1} - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q + \|\psi_t\|_Q \\ &\le \|\boldsymbol{\omega}_{t-1} - \boldsymbol{\omega}_{t-1}^\star\|_Q + \|\boldsymbol{\omega}_t^\star - \boldsymbol{\omega}_{t-1}^\star\|_Q + \|\psi_t\|_Q \\ &\le \|\boldsymbol{\omega}_{t-1} - \boldsymbol{\omega}_{t-1}^\star\|_Q + \sqrt{\lambda_{\max}(Q)}((1+N\ell_A)\delta + \delta_\phi).\end{aligned}$$

将后者代入式（22），并对所得不等式进行迭代，可得：

$$\|\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega}_t^\star\|_Q \le \eta^{Kt/2}\|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0^\star\|_Q + \textstyle\sum_{\tau=1}^t \eta^{Kt/2}\sqrt{\lambda_{\max}(Q)}((1+N\ell_A)\delta + \delta_\phi).$$

然后，由于 $\eta^{K/2} < 1$，根据几何级数的收敛性即可得到该结果。 ■

注*2*：考虑时变矩阵约束A_t（而不是 A）会带来一些复杂性，因为矩阵wou（7）也将随时间变化。可以通过在定理3和定理4中假设 K 的下界，或在附加假设 $\bar{A}A_t^\top \ge \mu_A$ 对¯矩阵 A 以及所有 $k \in \mathbb{N}$成立的条件下处理这种情况；但本文不对此进行讨论。□

VI. 数值示例[1]

我们在一个受 [26] 中模型启发的点对点能源市场的市场出清问题上展示所提出的算法。我们考虑 $N = 6$ 个旨在确定其能源组合的产消者。在每个时间步 t，智能体可以从主要能源运营商处购买电力、通过可调度能源生产电力，或通过随机生成的无向图 $\mathcal{G}^{\mathrm{E}}$ 与各自的邻居进行交易。此外，智能体还可以通过无向连通通信图 $\mathcal{G}$ 交换信息。对于每个智能体 i 和每个时间步 t，我们将从主要能源运营商购买的电力记为 $x_{i\,t,}^{\mathrm{mg}}$，将生产的电力记为 $x_{i}^{\mathrm{dg}}{}_{,\ t}$，并将智能体 i 从智能体 j 处购买的电力记为 $x_{i,\ j,\ t}^{\mathrm{tr}}$，$j \in \mathcal{N}_{\mathrm{E}i}$，其中 $\mathcal{N}_{\mathrm{E}i}$ 表示图 $\mathcal{G}^{\mathrm{E}}$ 上智能体 i 的邻居集合。如 [26], 所述，主要能源运营商给出的能源价格按照主要能源运营商处请求的总功率以因子 $c_{\mathrm{mg}} > 0$ 线性增长。因此，通过定义聚合值

$$\sigma^{\mathrm{mg}}(x^{\mathrm{mg}}) = \textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i^{\mathrm{mg}},$$

每个智能体向算子购买能源所产生的成本为 $J^{\mathrm{mg}}(x_{i\,t}^{\mathrm{mg}},,\sigma^{\mathrm{mg}}(x_t^{\mathrm{mg}})) = c^{\mathrm{mg}}\sigma^{\mathrm{mg}}(x_t^{\mathrm{mg}})x_{i\,t}^{\mathrm{mg}},\circ$ 我们考虑智能体因电力发电而产生的二次成本 [26, 式 2],，其形式为 $J_{i\,t}^{\mathrm{dg}},(x_{i\,t}^{\mathrm{dg}},) = c^{\mathrm{dg}}($ x_i^{dg}，

x^{dg} $_2$ x^{dg} $^{t\ -}$，

$_{i\,t}{}^{\mathrm{ref}}$,)，其中 $,_{i\,t}{}^{\mathrm{ref}}$, 是可调度发电机随时间变化的计划设定值，且 $c^{\mathrm{dg}} > 0$。同级之间交易能源的价格（或收益）为线性函数 [26, 式10],，并假设智能体因使用市场而承担交易的二次成本，因此，与点对点交易相关的总目标函数为 $J^{\mathrm{tr}}((x_{i,j,t}^{\mathrm{tr}})_{j\in\mathcal{N}_i^{\mathrm{E}}}) = \sum_{j\in\mathcal{N}_i}(c^{\mathrm{tr}}x_{i,j,t}^{\mathrm{tr}} + \kappa^{\mathrm{tr}}(x_{i,j,t}^{\mathrm{tr}})^2)$。我们规定智能体不能向主算子售电，并且由于物理限制，可调度机组的发电量必须非负。由于公式 (1) 未考虑不等式约束，因此通过对数障碍函数的利普希茨连续近似来施加这一约束

$$J^{\mathrm{bar}}(x_{i,t}^{\mathrm{mg}}, x_{i,t}^{\mathrm{dg}}) = \Gamma_\gamma(x_{i,t}^{\mathrm{mg}}) + \Gamma_\gamma(x_{i,t}^{\mathrm{dg}}),$$

其中，$\Gamma_\gamma(y) := \min(-\log(y)\ -\gamma y+1 -\log(1/\gamma))$，其中 $\gamma \gg 0$。因此，每个智能体产生的总成本为

$$\begin{aligned}J_i^t(x_{i,t}, x_{-i,t}) = {}& J^{\mathrm{mg}}(x_{i,t}^{\mathrm{mg}}, \sigma^{\mathrm{mg}}(x_t^{\mathrm{mg}})) + J_{i,t}^{\mathrm{dg}}(x_{i,t}^{\mathrm{dg}}) \\ &+ J^{\mathrm{tr}}((x_{i,j,t}^{\mathrm{tr}})_{j\in\mathcal{N}_i^{\mathrm{E}}}) + J^{\mathrm{bar}}(x_{i,t}^{\mathrm{mg}}, x_{i,t}^{\mathrm{dg}}).\end{aligned}$$

[1]https://github.com/bemilio/简单的点对点 - - -

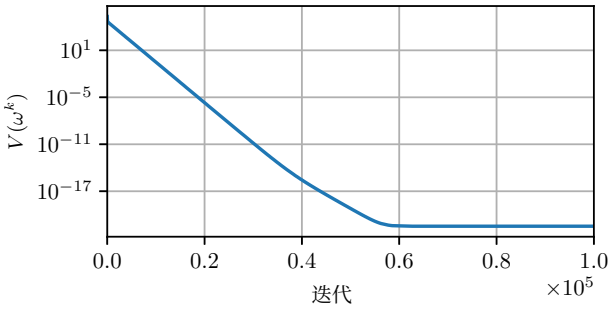


图1：算法 2 在日前市场出清问题中的收敛性。

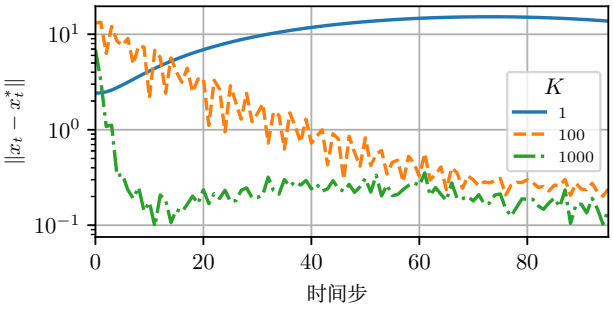


图2：算法 3 针对实时市场出清问题相对于通过算法 2 的 10^5 次迭代计算得到的日前解的跟踪误差。

此外，给定电力需求$p^{\mathrm{d}}_{i,\ t}$，智能体需要满足功率平衡方程 [26,方程 1]

$$\sum_{j\in\mathcal{N}_i^{\mathrm{E}}}(x^{\mathrm{tr}}_{i,j,t}) + x^{\mathrm{mg}}_{i,t} + x^{\mathrm{dg}}_{i,t} = p^{\mathrm{d}}_{i,t}. \tag{23}$$

由于功率平衡约束是局部的，我们不对相关对偶变量应用动态跟踪方法（即，对偶变量在本地进行管理，参见 [27,注释 2]）。相反，智能体决策之间的耦合约束通过交易互惠约束 [26, 式 8]产生：

$$x^{\mathrm{tr}}_{i,j,t} + x^{\mathrm{tr}}_{j,i,t} = 0. \tag{24}$$

我们首先考虑时不变场景，并以 15 分钟为时间步长，计算一整天的日前市场出清解：即，智能体 i 的成本由 $\sum_{t=1}^{T} J_i^t$ 给出，并对所有 $t = 1,\ 2、\ldots\ldots、\ T$ 施加约束 (23)–(24)，其中 $T = 96$。图1显示，正如预期，算法 2 关于式 (15) 中李雅普诺夫函数呈现线性收敛率。

然后，我们考虑一个实时场景。具体而言，智能体只能获取未来一刻钟内负荷需求和发电设定值的预测；因此，智能体 i在每个时间 $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$的成本由 J_i^t给出。请注意，实际上，智能体面对的是第五节中讨论的时变广义博弈，我们通过算法 3对其进行处理。结果如

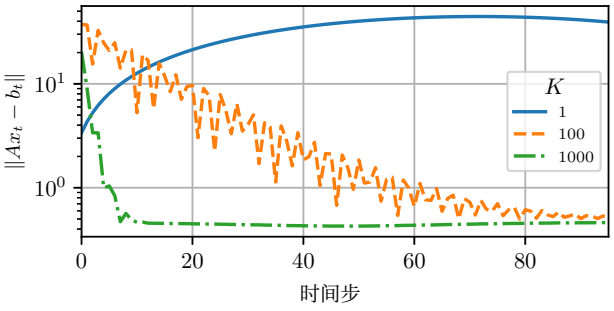


图3：算法 3 在实时市场出清问题中引起的约束违反。通过障碍函数 J^{bar} 强制执行的不等式约束始终得到满足。

图 2 所示。由于收敛速度较慢（即，η 接近 1），$K = 1$ 会导致显著的跟踪误差；然而，对于 $K = 100$，已经可以观察到良好的性能。最后，在图 3 中，我们展示了所提出方法在仿真时域内产生的约束违反。由于约束仅能渐近满足，每个时间步仅执行有限次迭代会导致约束违反，并且正如预期的那样，约束违反会随着 K的增加而减小。

VII. 结论

具有满行秩等式耦合约束的强单调广义纳什均衡问题，可以通过原始-对偶算法实现线性收敛率求解，无论是在半分散式还是完全分散式设置下。迭代序列的压缩性还使得时变博弈中的解序列跟踪成为可能；在这一在线场景中，提高更新频率可以提升渐近跟踪精度。

由于我们的结果利用了加权空间中 KKT算子 的强单调性（该加权空间并非对角加权），因此目前尚不清楚如何将投影纳入所提出的方法，这也是我们方法的主要缺点。因此，未来的工作应着重研究具有局部约束（以及不等式耦合约束）的广义博弈中的线性收敛。

参考文献

[1] G. Belgioioso、W. Ananduta、S. Grammatico 和 C. Ocampo-Martinez，“配电网中运行安全的点对点能源交易：一种博弈论市场出清机制”，*IEEE Transactions on Smart Grid*，第13卷，第4期，第2897–2907页，2022年。[2] F. Facchinei 和 C. Kanzow，“广义纳什均衡问题”，*Annals of Operations Research*，第175卷，第177–211页，2010年。[3] W. Lin、C. Li、Z. Qu 和 M. A. Simaan，“采用开环纳什策略的分布式编队控制”，*Automatica*，第106卷，273，2019 266pp. – 。[4] G. Belgioioso 和 S. Grammatico，“单调聚合博弈中的半去中心化广义纳什均衡求解”，*IEEE Transactions onAutomaticControl*，2021年。[5] D. Paccagnan、B. Gentile、F. Parise、M. Kamgarpour 和 J. Lygeros，“带耦合约束的聚合博弈中的纳什均衡与Wardrop均衡”，*IEEETransactions on AutomaticControl*，第64卷，第4期，第1373–1388页，2019年。

[6] E. Benenati、W. Ananduta 和 S. Grammatico，“线性耦合聚合博弈中广义纳什均衡的最优选择”，载于2022年IEEE第61届决策与控制会议（CDC），2022年，第6389–6394页。[7] D. Gadjov 和 L. Pavel，“通过前向–后向算子分裂实现网络上聚合博弈的单时间尺度分布式广义纳什均衡求解”，IEEE Transactions on Automatic Control，第66卷，第7期，第3259–3266页，2021年。[8] L. Pavel，“通过双重增广算子分裂方法，在网络上利用部分决策信息进行分布式广义纳什均衡求解”，IEEE Transactions on Automatic Control，第65卷，第4期，第1584–1597页，2020年。[9] M. Bianchi、G. Belgioioso 和 S. Grammatico，“利用部分决策信息快速求解广义纳什均衡”，Automatica，第136卷，文章编号110080，2022年。[10] Z. Deng 和 X. Nian，“权重平衡有向图上聚合博弈的分布式广义纳什均衡求解算法设计”，IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，第30卷，第3期，第695–706页，2019年。[11] G. Belgioioso、A. Nedi´c 和 S. Grammatico，“时变网络上聚合博弈的分布式广义纳什均衡求解”，IEEE Transactions on Automatic Control，第66卷，第5期，第2061–2075页，2021年。[12] Y. Huang 和 J. Hu，“通过Douglas-Rachford分裂方法在网络上分布式求解广义纳什均衡问题”，载于2021年IEEE第60届决策与控制会议（CDC），2021年，第3110–3116页。[13] M. Bianchi 和 S. Grammatico，“时变通信网络上具有线性收敛速度的完全分布式纳什均衡求解”，IEEE Control Systems Letters，第5卷，504，2021 499pp. – 。[14]D. Gadjov 和 L. Pavel，“能够抵御对手的分布式纳什均衡求解”，载于2021年IEEE第60届决策与控制会议（CDC），2021年，第191–196页。[15] E. Dall’Anese、A. Simonetto、S. Becker 和 L. Madden，“信息流上的优化与学习：时变算法及其应用”，IEEE Signal Processing Magazine，第37卷，第3期，第71–83页，2020年。[16] T. Li、G. Peng、Q. Zhu 和 T. Bas¸ar，“网络、博弈与学习的交汇：用于网络上多智能体决策的博弈论框架”，IEEE Control Systems Magazine，第42卷，第4期，第35–67页，2022年。[17] Y. Su、F. Liu、Z. Wang、S. Mei 和 Q. Lu，“物理网络上广义纳什均衡的在线分布式跟踪：通过测量反馈闭合控制回路”，Autonomous Intelligent Systems，第1卷，第1期，文章编号6，2021年。[18] K. Lu、G. Li 和 L. Wang，“在动态环境中求解广义纳什均衡的在线分布式算法”，IEEE Transactions on Automatic Control，第66卷，2296，2021 5, 2289 no. pp. – 。[19] O. Stein 和 N. Sudermann-Merx，“非合作运输问题与线性广义纳什博弈”，欧洲运筹学杂志，第266卷，第2期，第543–553页，2018年。[20] F. Parise、B. Gentile 和 J. Lygeros，“带耦合约束的平均聚合博弈中近似纳什均衡的分布式算法”，IEEE Transactions on Control of Network Systems，第7卷，第2期，第770–782页，2020年。[21] A. A. Kulkarni 和 U. V. Shanbhag，“将变分均衡作为广义纳什均衡的一种细化”，Automatica，第48卷，第1期，第45–55页，2012年。[22] F. Facchinei 和 J. Pang，《有限维变分不等式与互补问题》。Springer New York，2007年。[23] S. Grammatico，“带耦合约束的聚合博弈参与智能体的动态控制”，IEEE Transactions on Automatic Control，第62卷，第9期，第4537–4548页，2017年。[24] H. H. Bauschke 和 P. L. Combettes，《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》。Springer New York，2017年，第2011卷。[25] A. Simonetto、E. Dall’Anese、S. Paternain、G. Leus 和 G. B. Gian- nakis，“时变凸优化：时间结构化算法及其应用”，IEEE会刊，第108卷，第11期，第2032–2048页，2020年。[26] G. Belgioioso、W. Ananduta、S. Grammatico 和 C. Ocampo- Martinez，“未来智能电网中的能源管理与点对点交易：一种分布式博弈论方法”，载于2020年欧洲控制会议（ECC），2020年，第1324–1329页。

[27] M. Bianchi 和 S. Grammatico，“多积分器智能体的连续时间完全分布式广义纳什均衡寻求”，*Automatica*，第 129 卷，文章编号 109660，2021。