arXiv:2304.09598v1 [math.RT] 19 Apr 2023

GL_n 的 ABV-包组合方法

Connor Riddlesden*，莱斯布里奇大学

摘要

在局部朗兰兹对应中，存在一个重要猜想，即 A 包是 ABV-包。对于 $G = GL_n$ 的情形，该猜想可归结为 GL_n 中 Arthur 型轨道的 ABV-包均为单元素集；这是更广泛的开轨道猜想的一个特例。本文将证明这一约化后的猜想，因为它存在一种优良的组合描述。该结果最早发表于相关硕士论文中；不过，本文旨在借助 Knight 和 Zelevinskii 的结果，采用稍加简化且更为简洁的方法。我们还将证明与该猜想相关的偏序关系，适用于梯形类型的多分段。

本文包含最初发表于我的硕士论文 [6] 中的材料。

1 背景与动机

我们希望证明这样一个猜想：当$G = GL_n$时，Arthur 型轨道的 ABV-包都是单元素集。正如 [1], 中提出的，这一猜想是更广泛的开轨道猜想的一个特例。尽管其一般框架与局部朗兰兹对应有关，但这项讨论中一个尤为突出的特点，是 Mœglin 和 Waldspurger 首先在 [5]中给出的、使用多重线段的组合描述。正如 [6, 命题 2.3.7.]，所证明的，将 ABV- 包分类的对象之轨道由相应的秩 $r_{i,\ j}$ 分类，它们自然构成如下的秩三角形

$$
\begin{array}{ccccccccc}
r_{1,1} & & r_{2,2} & & r_{3,3} & & r_{4,4} & & \cdots \\
& r_{1,2} & & r_{2,3} & & r_{3,4} & & \ddots & \\
& & r_{1,3} & & r_{2,4} & & \ddots & & . \\
& & & r_{1,4} & & \ddots & & & \\
& & & & \ddots & & & &
\end{array}
$$

研究对偶轨道也是一个自然的问题，它同样可以通过其秩来分类，这些秩记作 $\widetilde{r_{i,\ j}}$。

*现任机构：埃因霍温理工大学，荷兰， c.d.riddlesden@tue.n l

此外，我们可以在秩三角形上定义一种自然的偏序。设 C 和 D 分别表示秩三角形，其对应的值分别为 $c_{i,\ j}$ 和 $d_{i,\ j}$，那么当对所有指标 (i,j) 都满足性质 $c_{i,\ j} \leq d_{i,\ j}$ 时，我们称 $C \leq D$。我们尤其关注这样一种情形：对每个指标 i，都满足性质$c_{i,\ i} = d_{i,\ i}$，也就是说，秩三角形的顶行相等。

现在我们将给出秩三角形的一种纯粹的组合解释。

定义 1.1。我们将线段定义为由连续整数组成的非空集合

$$\Delta = (b, b+1, \ldots, e-1, e).$$

那么，多重线段将是由若干线段组成的集合

$$\alpha = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r\},$$

其中每条线段都由 i 索引，以便区分可能重复的线段。

与秩类似，我们将与 α 对应的对偶多重线段记作 $\tilde{\alpha}$。为方便记号，给定线段 $\Delta = (b, b+1, \ldots, e-1, e)$，则称 Δ 的起点为 b， Δ 的终点为 e。更准确地说，线段的起点是该线段中最小的整数，终点是该线段中最大的整数。

以下命题为计算与构造秩三角形所对应多重线段提供了一种极其快速的方法。

命题1.2。多重线段中线段（i、$i+1$、...、$j-1$、j）的重数记为$m_{i,\ j}$，并且由下式给出

$$m_{i,j} = r_{i,j} - r_{i-1,j} - r_{i,j+1} + r_{i-1,j+1}.$$

注意，如果秩三角形内未定义秩，我们假设其秩等于0。

秩$r_{i,\ j}$ 随后就是满足 $k \leq i$ 和 $j \leq l$、包含于相关多重线段 α中的线段 $[k,l]$ 的数量。

对于多重线段，还存在一种偏序关系，我们可以在介绍多重线段中任意两个线段之间的如下作用后对其进行研究。

命题1.3。设 Δ_1 和 Δ_2 是任意多重线段 α中的任意两个线段，那么我们可以通过分别将 α 中的每个 Δ_1 和 Δ_2 替换为下列对象，构造出一个新的多重线段 β

$$\begin{cases} \Delta_1 \cap \Delta_2 \ and \ \Delta_1 \cup \Delta_2, & if \ \Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset \ and \ \Delta_1 \neq \Delta_2; \\ \Delta_1 \cup \Delta_2, & else \ if \ \Delta_1 \cup \Delta_2 \ is \ a \ segment; \\ \Delta_1 \ and \ \Delta_2, & otherwise. \end{cases}$$

于是我们有 $\alpha \leq \beta$。

请注意，我们将第一个操作称为并交，第二个操作称为合取。第三个操作则会保持多重线段不变。

本文旨在研究具有特定内在性质的多重线段 α，主要是某种偏˜序关系：对于任意满足 $\alpha \leq \beta$ 和 $\tilde{\alpha} \leq \beta$ 的多重线段 β，都有 $\alpha = \beta$。由此可得与秩三角形描述的关系：

命题1.4（[6], 推论2.5.7.）。设 α 和 β 是多重线段，其对应的共轭类分别记为 C 和 D（顶行相同）。那么，这两个多重线段之间存在偏序，当且仅当它们对应的共轭类之间存在偏序关系，即

$$\alpha \leq \beta \quad \textit{if and only if} \quad C \leq D.$$

本文的完整背景和研究动机见相关硕士论文 [6] 的第2章。此外，Cunningham 和 Ray 在 [3] 中阐释了局部朗兹对应、 [1], 的猜想与定理3.19中的组合论陈述之间的联系。

我们首先在第2节中介绍一种方法，该方法利用 Mœglin 和 Waldspurger 的工作，从原始多重线段计算其对偶多线段。随后，我们将讨论 Knight 和 Zelevinskii 首先提出的另一种方法，即采用网络实现。最后，在第3节中，我们研究各种类型的多重线段之间的偏序关系，包括定理3.19中与 Arthur 型 Langlands 参数相关的多重线段。这个偏序将引出主要结果——猜想（推论3.20）的证明：

> 对于 $G = GL_n$，Arthur 型轨道的 ABV-包是单元素集，因此，Arthur 型轨道的 ABV-包也是 A 包。

对于 $G = GL_n$，这些结果的证明在很大程度上依赖于轨道能够按其秩进行自然分类、依赖于多重线段描述以及对偶算法。对于 G 的其他选择，这种分类及相关算法通常并不成立，目前也不存在任何类似的组合描述。因此，要将这一结果推广到其他群，可能需要采用更具表示论性质的方法。尽管如此，为 GL_n 构建这种方法仍然很有价值，也可能为推广提供有益的见解。

2 Mœglin-Waldspurger 算法

现在我们可以开始介绍 Mœglin-Waldspurger 算法，该算法将根据原始多重线段计算与对偶轨道相关的多重线段。该算法将使用以下线段关系：

定义2.1（[5]）。给定任意两个线段 $\Delta_1 = (b_1, \ldots, e_1)$和 $\Delta_2 = (b_2, \ldots, e_2)$，若 $b_1 < b_2$、 $e_1 < e_2$和 $b_2 \leq e_1 + 1$ 成立，则称 Δ_1先于 Δ_2。

算法：Mœglin-Waldspurger [5] 给定一个最大值为 e 的多重线段 α，我们可以按如下方式计算与对偶轨道相关联的多重线段 $\tilde{\alpha}$：

1. 令 $m = e$ 为多重线段中的最大值，并将 Δ_m 设为最大值为 m 的最短线段。 2. 若不存在终点为 Δ_m 且最大值为 $m-1$ 的线段，则转到步骤 5。 3. 在终点为 Δ_m 且最大值为 $m-1$ 的线段中，选择最短的线段作为 Δ_{m-1}。 4. 令 $m := m-1$，并返回步骤 2。

5. 对于每个 $m \le i \le e$ 对应的线段 Δ_i，从该线段中移除最大值 i。移除这些终点值后，将新的多重线段记为 α'。

6. 由此形成的对偶线段为 $\Delta' = (m, \dots, e)$。

从此以后，生成线段 Δ' 将称为算法的一次迭代。要找到完整的对偶多重线段 $\tilde{\alpha}$，需要递归地继续这一过程，使用

$$\tilde{\alpha} = \left\{ \Delta', \widetilde{(\alpha')} \right\}.$$

Mœglin 和 Waldspurger 随后在 [5, 定理 13] 中证明，$\tilde{\alpha}$ 将等于通过 Zelevinskii 对合得到的对偶表示的多重线段。

线段 $\Delta = (b, b+1, \dots, e-1, e)$ 的长度将由 $e-b+1$ 给出。为简化记号，现将线段 $(i, i+1, \dots, j)$ 记作 $[i, j]$；若该线段是单元素线段 (i)，则记作 $[i]$。

命题 2.2. 在 Mœglin-Waldspurger 算法的每次迭代中，前置线段将按长度递增的顺序选取。

证明。设 m 是 Mœglin-Waldspurger 算法从线段 Δ_m 中选取的整数。若 m 不是该算法生成的线段的起点，则存在一个线段 Δ_{m-1}，它先于 Δ_m，且终点值为 $m-1$。令 b_m 表示线段 Δ_m 的起点值，则根据先于条件，$b_{m-1} < b_m$，这意味着

$$m - b_m + 1 < m - b_{m-1} + 1,$$

and

$$m - b_m + 1 \le (m-1) - b_{m-1} + 1.$$

因此，前面的线段将按长度递增的顺序选取。 □

2.1 网络实现

在 [4], Knight 和 Zelevinskii 中，作者证明 Zelevinskii 对合（因而也包括 Mœglin-Waldspurger 算法）可以通过网络描述来实现。给定一个多重线段 $\alpha = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ 及其对应的秩 $r_{i,\ j}$，他们使用以下过程来实现 Zelevinskii 对合：

1. 对每个线段 $\Delta \in \alpha$ 和整数 $a \in \Delta$，创建一个顶点 $v_{\Delta,\ a}$。随后，我们将与整数 a 对应的顶点集记为 $V_a = \{v_{\Delta,a} \mid \Delta \in \alpha, a \in \Delta\}$。 2. 对所有线段 Δ_n、$\Delta_m \in \alpha$，若 Δ_n 先于 Δ_m，则对所有满足 $a \in \Delta_a$ 和 $a+1 \in \Delta_b$的整数 a，添加一条从$v_{\Delta_m,\ a+1}$ 到 $v_{\Delta_n,\ a}$的边。 3. 对偶多重线段对应的秩 $\widetilde{r_i}_{,\ j}$，等于从顶点集 V_j 到顶点集 V_i的顶点不相交路径的最大数量。

请注意，可以通过在等价网络中寻找最大流，来实现此方法以寻找顶点不相交路径的最大数量。我们改用以下过程：

1. 将图中的每个顶点 v 拆分为节点 v^0、v^1，并添加一条从 v^0 到 v^1、容量为 1 的边。

2. 将图中的每条其他边 (u, v) 替换为一条从 u^1 到 v、容量为 1 的边 ^{0}.

3. 添加额外的节点 s 和 t。

4. 对每个秩 $\widetilde{r_i}_{,j}$:

   (a) 从 s 向集合 V_j^0 中的每个节点添加容量为 1 的边，并从集合 V_i^1 中的每个节点向 t 添加边。(b) 秩 $\widetilde{r_i}_{,\ j}$ 将对应于从 s 到 t 的最大流。

3 多分段族上的偏序关系 s

我们此前讨论过计算多重线段对偶的一种方法，但尚未研究特定的 G 族所满足的性质和关系，主要是开轨道猜想。因此，本节将进一步研究对偶群。在这项研究中，我们将使用若干种自然构造的多重线段，并最终得出关于 Arthur 型多重线段的一项重要性质。给定一个多重线段 α，若 α 满足以下偏序关系，则称其满足该偏序关系：

$$\text{For all multisegments } \beta \text{ such that } \alpha \leq \beta \text{ and } \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}, \text{ we find } \alpha = \beta.$$

我们将使用以下六个数值不变量来研究偏序关系 :

i) e_α : =max(α);

ii) L_α : = α 中最长线段的长度;

iii) n_α := α中的线段数量;

iv) c_α := $\cup_{\Delta\in\alpha}\Delta$ 所构成的最小线段数量;

设 $\cup_{\Delta\in\alpha}\Delta$ 的最小构成所生成的线段为 Δ^1、.....、 Δ^{c_α}。

v) $S_\alpha := \sum_{i=1}^{c_\alpha} \left|\Delta^i\right|$;

vi) C_α: = 分解中组成部分的最大数量 $\alpha = \bigsqcup_i \alpha_i$ 对于该分解， $\tilde{\alpha} = \bigsqcup_i \widetilde{\alpha_i}$.

请注意，如果 $c_\alpha = 1$，那么 $\cup_{\Delta\in\alpha}\Delta$ 的最小构成中存在一条线段。在这种情况下，我们定义 S_α : $= |\cup_{\Delta\in\alpha}\Delta|$。

注意，研究 $c_\alpha > 1$ 的情形并无必要，因为各个组成部分之间实际上没有相互作用，因此我们可以分别考察它们。因此，如果 $c_\alpha = 1$，我们就称多重线段α 为连通的。此外，当 $C_\alpha = 1$ 时，我们称多重线段 α 为不可约；因此，将其分解为 C_α 个组成部分的分解 $\tilde{\alpha} = \bigsqcup_i \widetilde{\alpha_i}$ 就是不可约分解。

˜引理 3.1（[6], 引理 4.2.2.）。设 α、β 为多重线段， $\tilde{\alpha}$、β 分别为它们的对偶多线段。那么

i) 对于任意 两个具有同构箭图表示的多重线段 α、 β， $c_\alpha = c_\beta$ 和 $S_\alpha = S_\beta$.

ii) 如果 $\alpha \le \beta$，那么 $L_\alpha \le L_\beta$。

iii) 若 $\alpha \le \beta$，则 $n_\alpha \ge n_\beta$。

iv) $n_{\tilde{\alpha}} \ge L_\alpha$ 和 $n_\alpha \ge L_{\tilde{\alpha}}$。

v) $C_\alpha \ge c_\alpha$。

Le ˜mma 3.2 ([6], 引理 4.2.3.)。若 $L_{\tilde{\alpha}} = n_\alpha$、 $\alpha \le \beta$ 和 $\tilde{\alpha} \le \beta$，则 $n_\alpha = n_\beta = L_{\tilde{\alpha}} = L_{\tilde{\beta}}$.

3.1 简单多重线段

定义 3.3. 多重线段 α 称为简单的，当且仅当它具有以下形式:

$$\alpha = \{[b, \dots, e], [b+1, \dots, e+1], \dots, [b+n-1, \dots, e+n-1]\}.$$

例 3.4。第一个例子是一个简单多段，其中每条线段的长度相同，并且终点值每次递减一。

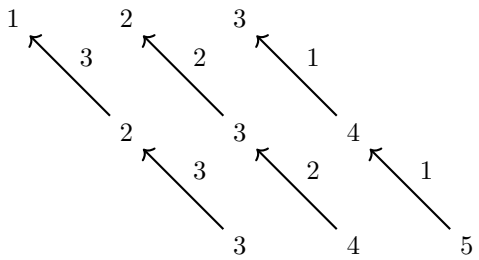

图 1：在简单多段上应用 Mœglin-Waldspurger 算法。

The dual of $\{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$ is $\{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$.

给定一个简单多段，我们可以按照自然顺序为对角线编号 D_i，其中 i表示其最大值。表 1 展示了图 2 中简单多段的对角线划分。

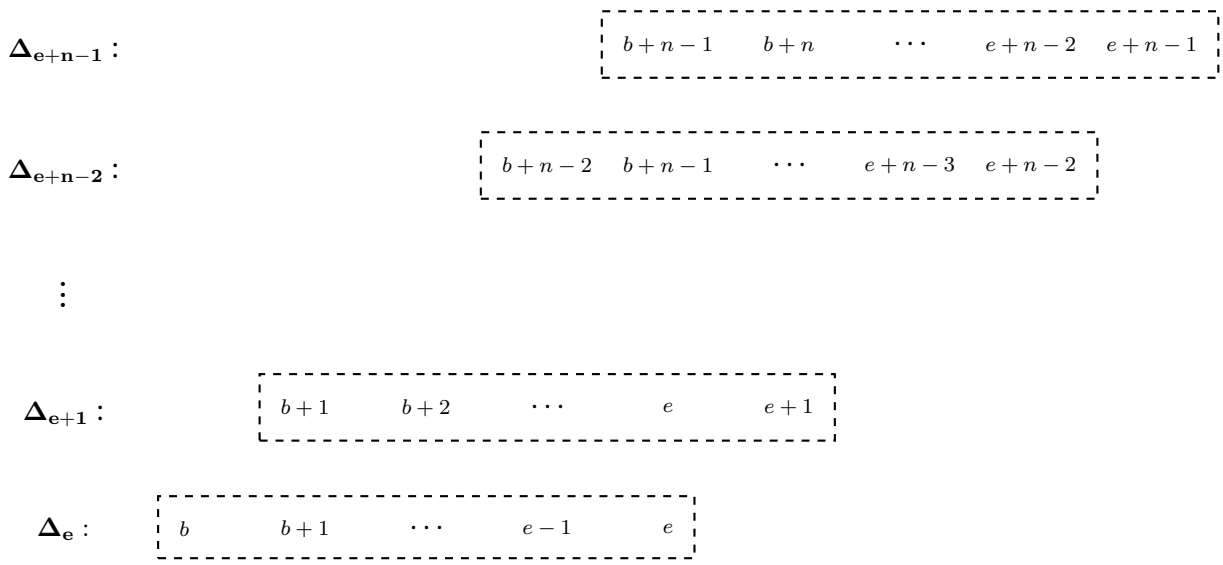

图 2：简单多段， α。

对角线				
$\mathbf{D_b}$	$\mathbf{D_{b+1}}$	$\cdots$	$\mathbf{D_{e-1}}$	$\mathbf{D_e}$
b	$b+1$	$\cdots$	$e-1$	e
$b-1$	b	$\cdots$	$e-2$	$e-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-e+1$	$-e+2$	$\cdots$	$-b$	$-b+1$
$-e$	$-e+1$	$\cdots$	$-b-1$	$-b$

表 1：简单多段 α 按其对角线划分。

为了计算每一对 (i, j) 的最大流，从而找到 $\widetilde{r_{i,j}}$ 必须通过与各条对角线对应的网络边推送流。更具体地，对于每一对 (i, j) 和每条对角线 D_k，检查该对角线 D_k 是否同时包含整数 i 和 j。如果两个整数都包含在其中，就必须通过网络中与该对角线对应的边推送流；否则不推送任何流。检查完所有对角线后，最大流便已推送，从而找到$\widetilde{r_{i,j}}$。

本节前面定义的数值不变量现在为简单多段这一族提供了若干重要性质。

命题 3.5（[6], 命题 4.2.7.）。若 α 是一个简单多段，则 $n_{\tilde{\alpha}} = L_\alpha$.

引理 3.6（[6], 引理 4.2.8.）。若 α 是简单的， $\alpha \leq \beta$ 且 $L_\alpha = L_\beta$，则 $\alpha = \beta$。

现在，我们可以利用这些性质研究第一类多重线段——简单多重线段——的偏序关系。

定理 3.7 设 α 为一个简单多重线段。对于满足条件 $\alpha \leq \tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\alpha} \leq \beta$ 的任意多重线段 β，则有 $\alpha = \beta$。

证明。首先，根据假设，多重线段 α 是简单的，因此由命题 3.5 可知 $L_\alpha = n_{\tilde{\alpha}}$，进而由引理 3.2 得出 $L_\alpha = L_\beta$。最后，利用引理 3.6，我们可以得出$\alpha = \beta$。

□

因此，我们已证 明偏序关系对所有简单多重线段均成立 .

3.2 梯形多段

现在我们将研究梯形多重线段这一更广泛的多重线段族，其中各线段之间存在一种自然的排序。

De义 3.8. 我们称多重线段 α 为梯形多线段，如果它具有如下形式 :

$$\alpha = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_\alpha}\},$$

其中，若我们写作 $\Delta_i = [b_i, e_i]$，则对每个 $i < j$，必须有 $b_i < b_j$ 和 $e_i < e_j$。

例 3.9. 这个例子是一个梯形多线段，其线段可根据起点值和终点值排成全序。

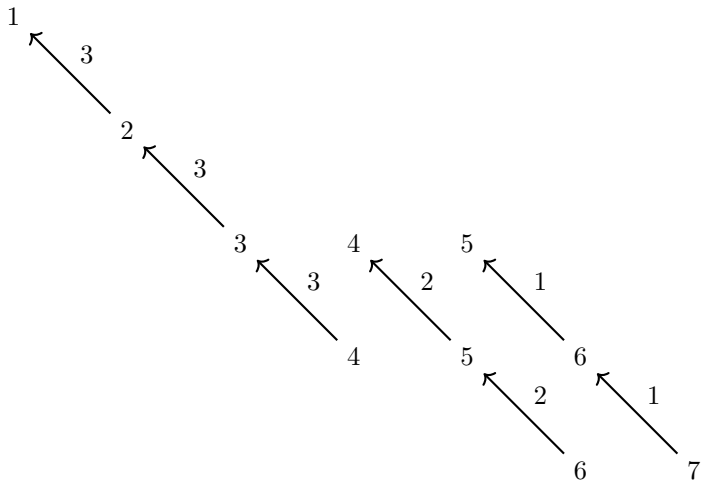

图 3：梯形多线段上的 Mœglin-Waldspurger 算法。

The dual of $\{(1), (2), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (6, 7)\}$ is $\{(1, 2, 3, 4), (4, 5, 6), (5, 6, 7)\}$.

请注意，任何简单多段也都是梯形多线段，因此我们在例 3.4 中见到了另一个梯形多线段的例子。

注 3.10。在 Mœglin-Waldspurger 算法的每个迭代步骤中，以及在网络描述中分配流时，被选中的前置线段集合构成一个不可约梯形多重线段。

这由命题 2.2 得出，因此，本小节中所讨论的性质必须在每次迭代中得到满足。

承接第2节中对 Mœglin-Waldspurger 算法以及由 Δ' 的一次算法迭代生成的线段的定义，现规定 $\Delta'(\alpha)$ 表示由 Mœglin-Waldspurger 算法的第一次迭代生成的线段。另记 $\alpha - \Delta'(\alpha)$ 为算法移除为 $\Delta'(\alpha)$ 选取的元素后产生的多重线段；下一次算法迭代也将在该多重线段上进行。因此，对偶多重线段将递归地生成如下:

$$\tilde{\alpha} = \{\Delta'(\alpha), \widetilde{\alpha - \Delta'(\alpha)}\}.$$

˜引理3.11 ([6], 引理4.2.14.)。若 $n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha = S_\alpha + C_\alpha$, $\alpha \leq \beta$ 且 $\tilde{\alpha} \leq \beta$，则 $n_{\tilde{\alpha}} = n_{\tilde{\beta}}$, $n_\alpha = n_\beta$ 且 $n_{\tilde{\beta}} + n_\beta = S_\beta + C_\beta$。

引理3.12（[6], 引理4.2.15）。若 α 和 β 是梯形多线段， $\alpha \leq \beta$ 和 $n_\alpha = n_\beta$ 则 $\alpha = \beta$。

引理 3.13（[6],引理4.2.19）。若 α 是不可约梯形多重线段，则

$$n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha = S_\alpha + c_\alpha.$$

引理3.14（[6],引理4.2.21）。若 α 是任意多重线段，且

$$n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha = S_\alpha + c_\alpha,$$

则 α 是梯形多线段。

推论3.15（[6], 推论4.2.22）。对于不是梯形多线段的任意多重线段 α，我们有

$$n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha > S_\alpha + C_\alpha \geq S_\alpha + c_\alpha,$$

因此，多重线段 α 是梯形多线段，当且仅当

$$n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha = S_\alpha + C_\alpha = S_\alpha + c_\alpha.$$

˜定理3.16 设 α 是一个梯形多线段。若 β 是一个多重线段，满足 $\alpha \leq \beta$ 和 $\tilde{\alpha} \leq \beta$，则$\alpha = \beta$。

证明。由于 α 是一个梯形多线段，因此由推论3.15可得 $n_{\tilde{\alpha}} + n_\alpha = S_\alpha + C_\alpha$。利用引理3.11, $n_{\tilde{\beta}} + n_\beta = S_\beta + C_\beta$ 和 $n_\alpha = n_\beta$，因此由推论3.15可知 β 是一个梯形多线段。于是我们满足了引理3.12的所有假设，因此 $\alpha = \beta$。 □

3.3 Arthur 型多重线段

现在我们将给出另一个多重线段族满足多重线段上的偏序关系的证明，并将其与局部朗兰兹对应中的一个重要猜想联系起来

GL_n 中 Arthur 型轨道对应的 ABV-包都是单元素集。

为此，我们必须先引入 Arthur 型这一概念。Arthur 型 Langlands 参数是指满足 $\phi = \phi_\psi$ 的 Langlands 参数 ϕ，其定义见著作 $[2,$ 第 3.6$]$ 节。这一条件的一个作用是，要求相应的多重线段关于零元素对称 i，其中 λ_i 对应于 q^0-特征空间。也就是说，如果我们重新标记多重线段 α 中的每个元素，使其满足 $i \to 0$、$i-1 \to -1$、$i+1 \to 1$、.....；那么，线段 $\Delta = [b, e] \in \alpha$ 当且仅当线段 $-\Delta = [-e, -b] \in \alpha$。这一限制的一个重要结果是，我们现在只考虑对称不可约多重线段，因此当 S_α 为奇数时，描述是显然的，因为 0 将是一个中心值。或者，当 S_α 为偶数时，我们必须稍微修改描述，使对称两侧的两个标记分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $_1{}_2$，之后的值则随着与中心距离的增加而依次相差 1。请注意，这种描述保留了特征向量各标记之间为 1 的结构，因此也保留了先前讨论的性质。此外，我们将多重线段的最大值定义为 e_α，因此始终有 $S_\alpha = 2e_\alpha + 1$.

仅研究 Arthur 型的 Langlands 参数这一限制，对多重线段 α 施加了进一步条件：α 必须由 $[1,$ 注 1.1$]$ 中讨论的简单对称多重线段之并构成。

引理 3.17. 设 α 为一个任意的多重线段，其中包含形如 α_1 的子多重线段 m

$$\alpha_1 = \{[-e, b], [-e+1, b+1], \ldots, [-b-1, e-1], [-b, e]\}.$$

若 α_1 同时包含多重线段 α 中分别包含最小值和最大值 $-e$ 与 e的最短线段，则无法从 α_1以外的任何子多重线段生成 $[b, e]$，也无法生成包含 b、.....、e 的线段。

证明。首先，根据注 3.10，在为对偶生成线段时，我们生成一个构成不可约梯形多重线段的子多重线段 γ。因此，γ 必须满足

$$n_\gamma + n_{\tilde{\gamma}} - c_\gamma = S_\gamma,$$

根据引理 3.13。现在，$S_\gamma \le S_\alpha = 2e+1$，因为 γ是 α的子多重线段。此外，γ不可约，因此 $c_\gamma = 1$，而生成的线段包含 b、.....、e，所以 $n_\gamma \ge e - b + 1$。根据假设，e是最大值，且以 e为终点的最短线段长度为 $e-$（$-b$）。由于 α既简单又对称，因此 $+1$，由命题 2.2 得 $L_\gamma \ge e + b + 1$，进而由引理 3.1 得 $n_{\tilde{\gamma}} \ge L_\gamma \ge e + b + 1$。利用这些值，我们得到

$$S_\gamma = n_\gamma + n_{\tilde{\gamma}} - c_\gamma \ge (e - b + 1) + (e + b + 1) - 1 = 2e + 1.$$

因此，$S_\gamma = 2e+1$以及 n_γ、$n_{\tilde{\gamma}}$、L_γ 都必须是最小的。因此根据命题 2.2，γ 中的每条线段都必须具有最小长度 $e + b + 1$，并且必须存在 $e - b + 1$ 条线段覆盖从 $[-e, e]$开始的各个值，因此 γ 唯一可能的构成为子多重线段 α_1。 □

引理 3.18. 设 α 是一个任意的多重线段，其中包含一个形如 α_1 的子多重线段 m

$$\alpha_1 = \{[-e, b], [-e+1, b+1], \ldots, [-b-1, e-1], [-b, e]\} = \left\{\Delta^b, \Delta^{b+1}, \ldots, \Delta^{e-1}, \Delta^e\right\}.$$

如果 α_1 同时包含包含多重线段 α 中最小值和最大值 $-e$ 及 e的两条最短线段，那么移除 α_1 的副本将诱导出一个端oscopic 分解，即

$$\alpha = \alpha_1 \sqcup (\alpha - \alpha_1) \quad and \quad \tilde{\alpha} = \widetilde{\alpha_1} \sqcup (\widetilde{\alpha - \alpha_1}).$$

证明。在第 2.1 节中，我们介绍了一种利用最大流寻找对偶的网络实现。现在，如果我们固定一个秩 $\widetilde{r_i}$，$_j$，并希望求出该秩的对偶，那么取并集 $\widetilde{\alpha_1} \sqcup (\alpha - \alpha_1)$ 就对应于分别求出通过 α_1 和 $(\alpha - \alpha_1)$ 的最大流，然后将二者相加。与 α_1 和 $(\alpha - \alpha_1)$ 相关的网络将是 α 的不同子网络，因此，对于每个 (i, j)，它们的最大流之和将小于或等于网络 α中的最大流。还需注意的是，通过α_1 和 $(\alpha - \alpha_1)$ 的最大流都将在 α 中给出一个可行流，因此我们可以运用 Ford-Fulkerson 算法的原理，研究通过 α 的流实际上是否会大于各流之和。当 $i = j$ 时，由于整数的重数必须保持不变，等式将成立。现在考虑 $i < j$ 的情形，那么一个直接的结果是，任何增广流都必须使用来自两个子网络的节点，因为通过这些子网络的最大流已经被推送完毕。任何增广流还需满足的一个限制是：它必须包含一条从 α_1 到 $(\alpha - \alpha_1)$ 或从 $(\alpha - \alpha_1)$ 到 α_1 的正向边。这将导致通过一个整数 m 的流，而该整数包含在简单多段 α_1 中；此前没有流通过该整数。

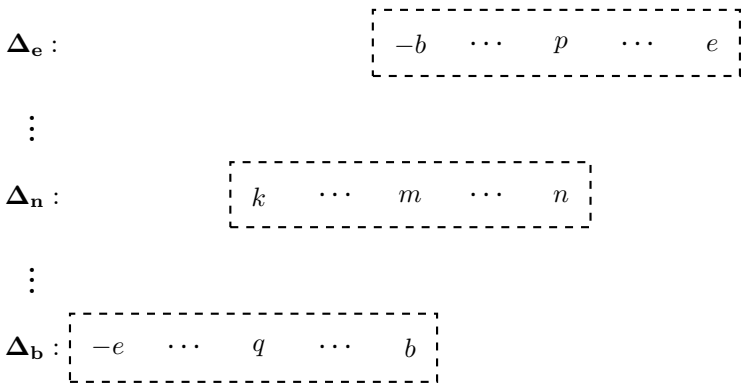

图 4：简单多段，α_1。

假设存在增广流。如果我们将包含 m 、与 Δ_n 相关联的增广流向前推进，那么将存在一个针对 (i, j) 的流，并且会选择 m 于 Δ_n 中。该流将由不可约梯形多重线段 $\gamma = \{\delta_i, \ldots, \delta_m, \ldots, \delta_j\}$ 表征，其中 δ_a 表示流从中选择整数 a 的线段。根据构造，$j > p$ 或 $i < q$ 中至少有一个为真，因此我们可以将其分为两个独立的情形：

j >p: 考虑不可约梯形多重线段的一个子集

$$\sigma = \{\delta_m, \ldots, \delta_j\},$$

那么 σ 也将构成一个不可约梯形多重线段。随后我们可以使用引理 3.13 来研究 S_σ，因为我们知道

$$n_{\tilde{\sigma}} + n_\sigma = S_\sigma + c_\sigma.$$

我们立即知道 σ 的几个数值不变量，即 $c_\sigma = 1$ 和 $n_\sigma = j - m + 1$。现在我们还知道线段 δ_m 的长度是 $e + b + 1$，利用引理 3.1，我们得到

$$n_{\tilde{\sigma}} \geq L_\sigma \geq e + b + 1.$$

因此，

$$S_\sigma = n_{\tilde{\sigma}} + n_\sigma - c_\sigma \geq (e + b + 1) + (j - m + 1) - 1 = e + b + j - m + 1.$$

此外，我们有条件 $j > p$

$$S_\sigma > e + (b + p) - m + 1 = e + (m - k) - m + 1 = e - k + 1.$$

然而，鉴于 σ 的最低值是 k，并且原始多重线段 α 的最大值（其中 σ 是其子集）是 e，那么 $S_\sigma \leq e - k + 1$，因此我们得出了矛盾。

i < q: 考虑不可约梯形多重线段的一个子集

$$\sigma = \{\delta_i, \ldots, \delta_m\},$$

那么 σ 也将构成一个不可约梯形多重线段。接下来，我们可以利用引理 3.13 研究 S_σ，因为我们知道

$$n_{\tilde{\sigma}} + n_\sigma = S_\sigma + c_\sigma.$$

我们立即可以得知 σ的几个数值不变量，即 $c_\sigma = 1$ 和 $n_\sigma = m - i + 1$。现在我们还知道线段 δ_m 的长度为 $e + b + 1$，利用引理 3.1，我们得到

$$n_{\tilde{\sigma}} \geq L_\sigma \geq e + b + 1.$$

因此，

$$S_\sigma = n_{\tilde{\sigma}} + n_\sigma - c_\sigma \geq (e + b + 1) + (m - i + 1) - 1 = e + b + m - i + 1.$$

此外，我们还有条件 $i < q$

$$S_\sigma > e + (b - q) + m + 1 = e + (n - m) - m + 1 = e + n + 1.$$

然而，鉴于 σ 的最大值为 n，且原多重线段 α 中包含 σ 的最小值为 $-e$，因此 $S_\sigma \leq n - (-e) + 1$，由此我们得到了一个矛盾。 □

定理3.19 设 α 为由 m 个简单对称多重线段取并得到的多重线段。˜若 β 是一个满足 $\alpha \leq \beta$ 和 $\tilde{\alpha} \leq \beta$的多重线段，则 $\alpha = \beta$。

证明。首先，设 α 是由取 m 个简单对称多重线段的并集形成的多分段，˜并假设存在一个多分段 β，使得 $\alpha \leq \beta$ 且 $\tilde{\alpha} \leq \beta$。根据假设，˜$\tilde{\alpha} \leq \beta$，因此对于所有 i、j，有 $r_{\tilde{\alpha},\, i,\, j} \leq r_{\tilde{\beta},\, i,\, j}$，其中秩 $r_{\tilde{\alpha}ij}$ 表示序列 i、.....、j 在 $\tilde{\alpha}$ 的线段中出现的次数。换言之，$r_{\tilde{\alpha}ij}$ 是包含于 $\tilde{\alpha}$ 中且满足 $k \leq i$ 和 $j \leq l$ 的线段 $[k, l]$ 的数量，正如前文所述。多分段会存在一个最大值，记为 e，那么 $-e$ 将是最小值。因此，对 α 执行 Mœglin-Waldspurger 算法时，它将选择包含 e 且长度最短的线段，记为 Δ_e。线段 Δ_e 将属于一个简单对称多重线段 α_1，该多重线段构成 α，因此算法将从这个简单对称多重线段生成线段 $[b, e]$

$$\alpha_1 = \{[-e, b], \ldots, [-b, e]\}.$$

线段 $\Delta_e = [-b, e]$ 将是包含 e 于 α 中的最短线段；根据引理 3.17，多重线段 α_1 的构造意味着它是对 $r_{\tilde{\alpha},b,\, e}$作出贡献的唯一可能因素，因此 $r_{\tilde{\alpha},b,e}$ 仅表示 α中 α_1 的副本数。

如果我们考察 $r_{\tilde{\alpha},b,e}$和 $r_{\tilde{\beta},b,e}$，那么我们知道 $r_{\tilde{\beta},b,e}$必须至少为 $r_{\tilde{\alpha},b,e}$。为了得到 $r_{\tilde{\alpha},b,e} < r_{\tilde{\beta},b,e}$，引理 3.17 也意味着我们需要构造包含 e的更短线段。然而，要在构造 β时做到这一点，就必须使用并交或合取。我们可以立即排除使用合取，因为它只会产生更长的线段。现在来看并交，所产生的较短线段将由参与操作的两个线段中重复出现的值构成。因此，e 必须同时出现在两者中，才能属于较短线段；但是，如果 e 同时出现在两者中，那么并交就会等于较短线段。因此，不可能在 α中生成包含 e 的更短线段。

因此 $r_{\tilde{\alpha},\, b,\, e} = r_{\tilde{\beta},\, b,\, e}$，正如引理 3.17 α_1 所示，17 α_1 是唯一能够生成 $[b, e]$的子多重线段。此外，无法对 α_1中的其他任何线段进行操作，因为对 α_1 中的线段进行任何操作都会改变它们，使其无法再用于构成 $[b, e]$。因此，α_1 的每个副本（α 可能包含多个副本）也都是用于构成 β 的子多重线段，因为它是唯一对 $r_{\tilde{\beta},\, b,\, e}$有贡献的子多重线段。现在我们可以使用引理 3.18 来求得

$$\alpha = \alpha_1 \sqcup (\alpha - \alpha_1) \quad \text{and} \quad \beta = \alpha_1 \sqcup (\beta - \alpha_1)$$

将形成端oscopic分解。按照构造，移除后剩下的多重线段（$\alpha - \alpha_1$）也将是简单对称多重线段的并，因此我们可以对新的多重线段（$\alpha - \alpha_1$）、最大值 e 以及包含它的最短线段 Δ_e 进行递归论证，直到达到多重线段由单个对称多重线段构成或为空的情形。如果达到多重线段由单个对称多重线段构成的情形，那么我们可以利用单个简单多重线段满足偏序关系这一事实（定理 3.7），证明该关系也应保持不变。因此，由于 m 简单对称多重线段中的全部线段在形成 β 时都将作为子多重线段使用，所以 $\alpha = \beta$。

□

因此，我们已经证明，对于 Arthur 型轨道的 ABV-包，偏序关系将得到满足。下面的推论证明了这一重要猜想： GL_n 中的 Arthur 型轨道的 ABV-包是单元素集；这一猜想最初由 Cunningham 等人提出。 [1]

推论3.20。Arthur 型轨道的 ABV-包均为单元素集，因此，Arthur 型轨道的 ABV-包均为 A 包。

致谢

我谨向我的硕士论文导师 Andrew Fiori 教授致谢，感谢他提出了促成本论文的问题，并在本文撰写过程中给予我悉心指导和帮助。我还要感谢 Voganish 项目，在研究这一问题期间，项目成员与我进行了许多有益的讨论。

参考文献

1. C. Cunningham, A. Fiori, and N. Kitt, 《 p-进表示论中 Kashiwara–Saito 奇点的出现》，《太平洋数学杂志》321（2023），第239–282页。2. C. Cunningham, A. Fiori, A. Moussaoui, J. Mracek, and B. Xu, 《通过反常层的微局部消失循环研究 p-进群的 Arthur 包及其例子》，第276卷，美国数学会，2022年。3. C. Cunningham and M. Ray, 《Vogan 猜想的证明：p-进一般线性群的简单参数》，arXiv 预印本 arXiv:2206.01027（2022）。4. H. Knight and A. Zelevinskii, 《A 型箭图的表示与多重线段对偶》，《数学进展》117（1996），第273–293页。5. C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, 《论 Zelevinskii 对合》，《纯粹与应用数学杂志》372（1986），第136–177页。6. C. D. Riddlesden, 《GLn 的 ABV-包组合方法》，硕士论文，莱斯布里奇大学数学与计算机科学系，2022年。