几乎单群的 2-恩格尔图的强连通性

FRANCESCA DALLA VOLTA、FABIO MASTROGIACOMO 和 PABLO SPIGA

arXiv:2304.09610v1 [math.GR] 19 Apr 2023

Abstract. 有限群的恩格尔图 G 是一种有向图，用于编码满足某个恩格尔字的 G 元素对。Lucchini 与第三位作者近期的研究表明，除少数已充分了解的情形外，几乎单群的 Engel 图都是强连通的。本文对这一分析作了进一步细化。

1. Introduction

本文研究 Peter Cameron 在 [4, 第 11 节1]中引入的一种有向图。设 x 和 y 是秩为 2 的自由群的自由生成元。令 $[x, y]$: $= x^{-1}y^{-1}xy$。我们递归定义 $[x,_0 y]$: $= x$ 和 $[x,_{i+1} y]$: $= [[x,_i y], y]$, 对每个 $i \geq 0$均成立。字 $[x,_n y]$ 是 n^{th} 恩格尔字。

现在，设 G 为一个群，并设对于每个 $y \in G\}$， G 中既是右 n-恩格尔元又是左 n-恩格尔元的元素所构成的集合为 $I_n(G)$ $= \{x \in G \mid [x,_n y] = [y,_n x] = 1, 。 n^{\text{th}}$ 恩格尔图

$$\Gamma_n(G)$$

G 的恩格尔图是一个有向图，其顶点集为 $G \setminus I_n(G)$；当且仅当 $[x,_n y] = 1$时，(x, y) 被定义为一条弧。显然，当 $n := 1$ 时， $I_1(G)$ 是 G 的中心 $\mathrm{Z}(G)$，而 $\Gamma_1(G)$ 是 G 的交换图。

若任意两个顶点之间都存在一条从前者到后者的有向路径，则称该有向图为强连通。若任意两个顶点之间都存在一条从前者到后者的路径（不一定是有向路径），则称该有向图为连通。由于换位子字关于 x 和 y 对称，交换图是无向图；但一般而言，$\Gamma_n(G)$ 是有向图。因此，对于 $n \geq 2$，研究 $\Gamma_n(G)$ 的连通性和强连通性颇有意义。

将 $I_n(G)$ 中的元素排除在 $\Gamma_n(G)$ 的顶点集之外有一个自然的原因：如果我们将 $I_n(G)$ 中的元素纳入顶点集，那么所定义的图将是平凡地强连通的，因为 $I_n(G)$ 中的任意元素都与其他每个顶点相邻。注意，对于每个 n， $\Gamma_n(G)$ 都是 Γ_{n+1} (G) 的子图；粗略地说，这意味着图族 $(\Gamma_n(G))_n$ 会随着 n 的增大而变得更加稠密。

关于恩格尔图的首次研究见于 [6]。例如，对于超中心平凡的群 G， [6] 将任意群的恩格尔图的强连通性研究归约为几乎单群的恩格尔图的强连通性研究。几乎单群的恩格尔图的强连通性研究见于 [10]。

本文进一步增进了对几乎单群的恩格尔图的强连通性的认识。由于交换图 $\Gamma_1(G)$ 在我们的恩格尔图族中相当特殊，并且已经受到广泛关注（参见 [11] 及其中的参考文献），我们将重点研究满足 $n \geq 2$ 的恩格尔图 $\Gamma_n(G)$。对于每个几乎单群 G，我们确定最小的 $n \geq 2$ （如果存在），使得 $\Gamma_n(G)$ 是强连通的。这回答了 [10] 引言部分提出的问题之一。

定理 1.1. 设 G 是底群为 L 的几乎单群，并设 $n \geq 2$ 是满足 $\Gamma_n(G)$ 强连通的最小自然数。则 $n = 2$，但 G 属于表 1.1 的情形除外。[1]

为证明定理 1.1，我们使用 [10] 中的结果。事实上，除少数几族几乎单群外，定理 1.1 可由 [10] 中的工作推出。本节讨论已在 [10] 中证明的情形（以及在 [6] 中关于交错群的情形），并列出其余情形。

Alt(n) 利用 [6], ，当 $L \cong \mathrm{Alt}(n)$ 时即可推出定理 1.1。严格来说， [6] 中的结果并非直接针对交错群给出定理 1.1，但 [6] 中的证明表明，除 $n \in \{5, 6\}$ 外，$\Gamma_2(\mathrm{Alt}(n))$ 和 $\Gamma_2(\mathrm{Sym}(n))$ 均为强连通。底群为 Alt(5) 和交错群 Alt(6) 的几乎单群是否满足定理 1.1，可借助计算机通过计算验证。

$\mathrm{PSL}_m(q)$ 利用 [10] 中的定理 3.8 和 3.11 以及 [6], 中的定理 5.9，当 $L \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ 时，定理 1.1 得证。根据 [10], 中推论 1.4 的命题 4.2 及其证明，当 $L \cong \mathrm{PSL}_m(q)$ 时，定理 1.1 得证，其中或者$m \geq 4$，或者 $m = 3$ 且 q 为奇数。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 20F99，05C25。*Key words and phrases.* 单群；几乎单群；Engel 元素。作者是 GNSAGA INdAM 研究组的成员，并谨此致谢该研究组的支持。[1]在表 1.1 中，我们考虑了非阿贝尔单群之间的例外同构。例如，群 Alt(5) 可以表示为 $\mathrm{PSL}_2(4)$，也可以表示为 $\mathrm{PSL}_2(5)$。此外，$\mathrm{PSL}_3(2) \cong \mathrm{PSL}_2(7)$。

群	n	评论
$\mathrm{PSL}_2(9)$ ≅交错群 Alt(6)	3	
M_{10} ≅$\mathrm{PSL}_2(9).2$	3	
$\mathrm{PSL}_2(q)$	不存在	$q = 2^f$、 $f \geq 2$或 $q \equiv 5$ （模 8）
$\mathrm{PSL}_2(q)$	n	$q \equiv 3$ （模 4），其中 2^{n-1} 是整除 $(q+1)/2$ 的最大 2 的幂
${}^2B_2(q)$	不存在	$q = 2^{2f+1}$, $f > 0$
$\mathrm{Aut}({}^2B_2(q))$	不存在	$q = 2^{2f+1}$, $f > 0$, $2f+1$ 素数
$\mathrm{PSL}_3(4)$	3	

TABLE 1.1. 定理 1.1 的辅助表

$\mathrm{PSU}_m(q)$ 根据命题 5.5 及 [10], 中推论 1.4 的证明，当 $L \cong \mathrm{PSU}_m(q)$ 时，定理 1.1 得证。$\mathrm{PSp}_m(q)$ 当 $L \cong \mathrm{PSp}_m(q)$ 时，定理 1.1 由 [10, 命题 6.1] 推出。例外群。当 L 为李型例外群时，除非 $L \cong G_2(q)$ 且 $q = 2^f$ 和 f 为奇数，或 $L \cong E_6(q)$ 且 $q = 2^f$，定理 1.1 由 [10, 第 8], 节中的命题推出。

散在群。我们处理所有散在单群。

综上，剩余的情形是底群为以下某个群的几乎单群

$$\mathrm{PSL}_3(2^f)\ f \geq 3,\ G_2(2^f)\ f \geq 3 \text{ odd},\ E_6(2^f),\ \text{sporadic}.$$

推论 1.4 的证明表明，若 G 是底群为 L 的几乎单群，且若 $\Gamma_2(L)$ 是强连通的，则 $\Gamma_2(G)$ 也是如此。特别地，在我们的论证中，通常可以假设 $G = L$。大多数散在单群已在 [6] 中处理。然而，我们并不指出那些需要额外考虑的情形，而是直接处理整个族。这也将有助于阐明我们的策略。

2. NOTATION AND PRELIMINARIES

下文中，我们用 $x \mapsto_n y$ 表示 $\Gamma_n(G)$ 的（有向）弧（x, y）。

为证明定理 1.1，我们使用若干要素。首先是恩格尔图、素数图与交换图之间的一个关系。给定一个有限群 G，我们用 $\pi(G)$ 表示 G 的阶的素因子集合。更一般地，给定一个正整数 n，我们用 $\pi(n)$ 表示 n 的素因子集合。现在， G的素数图 $\Pi(G)$ 是这样一个图：其顶点集为 $\pi(G)$，其中两个不同的素数 r 和 s 被定义为相邻，当且仅当 G 含有一个阶可被 rs 整除的元素。

现在，设 $\mathbf{Z}(G) = 1$。注意到 $\Gamma_1(G)$ 是恩格尔图 $\Gamma_n(G)$ 的子图。特别地， $\Gamma_1(G)$ 的连通分支为研究 $\Gamma_n(G)$ 的强连通分支提供了有用信息。Williams [14] 的一个结果（另见 [11, 定理 4.4]）给出了一种方法，可以利用 $\Pi(G)$ 的连通分支来控制 $\Gamma_1(G)$ 的连通分支。

定理 2.1（定理 4.4, [11]）。设 G 是一个满足 $\mathbf{Z}(G) = 1$ 的非可解群，设 Ψ 是 G 的交换图的一个连通分支，并设 $\psi := \pi(\Psi)$ 是那些整除某个 Ψ 中元素的阶的素数所组成的集合。假设$2 \notin \psi$。则 G 具有一个阿贝尔 Hall ψ-子群 H，该子群在 G 的交换图中与 $\Psi = H \setminus \{1\}$ 隔离。特别地， Ψ 在交换图中直径为 1，并且 ψ 是 G 的素数图的一个连通分支。

定理 2.1 描述了中心平凡的非可解群的交换图的连通分支。它们可能包含多个含有对合的连通分支，而其余连通分支则是完全图。此外，这些其余的连通分支决定（也由其决定）由奇素数组成的素数图的连通分支。特别地，Williams [14] 对单群素数图连通分支的分类对我们的工作十分重要。我们还采用了 Kondrat'ev 和 Mazurov [8] 关于非阿贝尔单群素数图的工作，因为该工作纠正了 [14]中的一些不准确之处。

对于李型单群，Morgan 和 Parker [11] 的工作进一步简化了我们的分析，并使我们能够推导出 $\Gamma_1(G)$ 的连通分支的重要信息，即使素数图 $\Pi(G)$是不连通的。

定理 2.2（命题 8.10, [11]）。设 G 为李型单群，并假设 $\mathbf{G}$ 不同构于以下群中的任何一个：

$$\mathrm{PSL}_3(4), \mathrm{PSL}_2(q), {}^2B_2(q), {}^2G_2(q), {}^2F_4(q)\ \textit{with}\ q \geq 8.$$

那么， G 的交换图具有一个包含 G的所有偶数阶元素的连通分支。

结合定理 2.1 和 2.2，我们得到这个有用的约化。

推论 2.3（推论 2.4, [10]）。设 n 是一个正整数，设 G 是一个单群，并且其交换图具有唯一一个连通分支（记为 Ω），包含所有偶数阶元素。那么，当且仅当对于 G 的素数图中每个满足 $2 \notin \psi$ 的连通分支 ψ，以及 G 的每个 Hall ψ-子群 H（其存在性由定理 2.1 保证），均存在 $h \in H \setminus \{1\}$ 和 $x, y \in \Omega$，使得 $x \mapsto_n h$ 且 $h \mapsto_n y$ 时，$\Gamma_n(G)$ 强连通。

注意，当 G 同构于 $\mathrm{PSL}_3(2^f)$ 且满足 $2^f \geq 8$，或 $G_2(q)$，或 $E_6(q)$ 时，定理 2.2 保证了推论 2.3 中 Ω 的存在性。

在本文中，我们用 $\mathrm{o}(g)$ 表示群元素 $g \in G$ 的阶，用 $\mathrm{N}_G(H)$ 表示子群 $H \leq G$ 的正规化子。

我们以一个基本观察作为结论。

引理 2.4。设 n 为正整数，G 为群，Ω 为 $\Gamma_n(G)$ 的一个强连通分支。假设对于每个顶点 $g \notin \Omega$，都存在 G 的一个子群 H 以及 h_1、$h_2 \in H \cap \Omega$，使得 $g \in H$ 且 $h_1 \mapsto_n g \mapsto_n h_2$。则 $\Gamma_n(G)$ 是强连通的。

引理 2.4 使我们能够对 G 的子群进行递归处理。

3. The groups $\mathrm{PSL}_3(q)$, $G_2(q)$ and $E_6(q)$

给定一个素数幂 q，我们将具有基数 q 的有限域记为 $\mathbb{F}_q$。我们先给出一个初步观察。

引理 3.1. 设 q 是一个偶素数幂。则存在 $a \in \mathbb{F}_q$，使得 $T^3 + aT + 1$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的不可约多项式。

证明。我们反证，并假设对于每个 $a \in \mathbb{F}_q$，多项式 $f_a(T) = T^3 + aT + 1$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是可约的。由于 $f_a(T)$ 是可约的，因此它在 $\mathbb{F}_q$ 中有一个根。假设 $f_a(T)$ 和 $f_b(T)$ 有一个公共根 r。于是 $(f_a - f_b)(r) = 0.$。由于 $f_a - f_b = (a - b)T$，我们推得 $r = 0$ 或 $a = b$。由于 $f_a(0) = 1$，我们得到 $a = b$。这表明 $\{f_a\}_{a \in \mathbb{F}_q}$ 中的多项式没有公共根。由于族 $\{f_a\}_{a \in \mathbb{F}_q}$ 由 q 个多项式组成，且该族中的每个多项式在 $\mathbb{F}_q$ 中都有一个根，因此我们推得 f_a 有唯一根 $r_a \in \mathbb{F}_q$。

设 $q = 2^f$。注意，$f_1(T) = T^3 + T + 1$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上不可约。由于 $r_1 \in \mathbb{F}_q$，且 r_1 是 f_1的一个根，我们推得 $\mathbb{F}_2[r_1] = \mathbb{F}_8 \leq \mathbb{F}_q$。由于 $\mathbb{F}_8 \leq \mathbb{F}_q$，$f_1(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中有三个根，这与 r_1 是$\mathbb{F}_q$中 f_1 的唯一根这一事实矛盾。□

命题 3.2. 设 $q \geq 4$ 是一个偶数阶素数幂，G 是一个底群为 $L = \mathrm{PSL}_3(q)$ 的几乎单群。则 $\Gamma_2(G)$ 是强连通的，但 $G = \mathrm{PSL}_3(4)$ 除外。此外，$\Gamma_3(\mathrm{PSL}_3(4))$ 是强连通的。特别地，定理 1.1 对底群为 L 的几乎单群成立。

证明. 首先假设 $G = L$ 且 $q \geq 8$。根据定理 2.2，G 的所有偶数阶元素都属于 $\Gamma_1(G)$ 的同一个连通分支，记为 Ω。特别地，我们利用 G 的素数图来推导G的交换图的性质，见推论 2.3。由 [14]可知，$\Pi(G)$ 有两个连通分支

$$\pi\left(q(q-1)(q^2-1)\right) \text{ and } \pi\left(\frac{q^2+q+1}{\gcd(3, q-1)}\right).$$

利用引理 3.1，取 $a \in \mathbb{F}_q$，使得 $T^3 + aT + 1$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约。现在，考虑元素

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_3(q).$$

（我们用方括号表示射影特殊线性群中的元素。）注意到 g 的阶整除 $(q^2 + q + 1)/\gcd(3, q - 1)$，因为 $T^3 + aT + 1$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约，并且 g 是伴随矩阵 $T^3 + aT + 1$ 在 $\mathrm{SL}_3(q)/\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_3(q)) = \mathrm{PSL}_3(q)$ 中的像。

现在，令 c 为 $\mathbb{F}_q$ 的乘法群的一个生成元，并令

$$h = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_3(q).$$

注意到 $h \neq 1$。事实上，$h = 1$ 推出 $c = c^{-2}$，即 $c^3 = 1$。由于 c 的阶为 $q - 1$，我们得到 $q - 1 \leq 3$，这与我们假设 $q \geq 8$ 的事实矛盾。直接计算可得

$$[g, h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-3} \end{bmatrix}.$$

由于 $[g, h]$ 与 h可交换，我们推得 $[g,_2 h] = 1$。

我们已经证明，对于每个阶为 $(q^2+q+1)/\gcd(3,q-1)$ 的约数的 $g \in G$，存在 $h \in \Omega$，使得 $g \mapsto_2 h$。现在，$\mathrm{N}_G(\langle g\rangle) = C \rtimes D$，其中 $C = \mathrm{C}_G(g)$ 是阶为 $(q^2+q+1)/\gcd(3,q-1)$ 的循环群，而 D 是阶为 3 的循环群。特别地，存在 $h \in \mathrm{N}_G(\langle g\rangle)$，使得 $\mathrm{o}(h) = 3$。由于 $3 \in \pi(q(q-1)(q^2-1))$，我们有 $h \in \Omega$。此外，$[h,g] \in \langle g\rangle$，因此 $[h,_2 g] = 1$。于是，根据推论 2.3，$\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

当 $L < G$ 和 $q \geq 8$ 时，由于 $\Gamma_2(L)$ 是强连通的，并且根据 [10], 中推论 1.4 的证明，可知 $\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

当 $q = 4$ 时，我们在计算机的帮助下，使用计算机代数系统 Magma [2] 检验了该陈述的正确性。□

命题 3.3。设 $q = 2^f$，且设 G 是一个底群为 $L \in \{G_2(q)\ E_6(q)\}$ 的几乎单群。假设当 $L = G_2(q)$ 时，$f \geq 3$ 为奇数。则 $\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

证明。首先假设 $G = L$。根据推论 2.3，我们可以假设 $\Pi(G)$ 不连通。由定理 2.2，G 的所有偶数阶元素都属于 $\Gamma_1(G)$ 的同一个连通分支，记为 Ω。

假设 $G = L = E_6(q)$。由 [14]，$\Pi(G)$ 有两个连通分支

$$\pi\left(q(q^5-1)(q^8-1)(q^{12}-1)\right) \text{ and } \pi\left(\frac{q^6+q^3+1}{\gcd(3,q-1)}\right).$$

由 [9, 表 5.1]，G 含有一个约化子群 $H \cong \mathrm{PSL}_3(q^3)$。设 $g \in G$ 的阶是 $(q^6+q^3+1)/\gcd(3,q-1)$ 的一个因数。现在，g 与 H 中的某个元素共轭。因此，用这个共轭元替换 g 后，我们可以假设$g \in H$。由命题 3.2，存在 $h_1, h_2 \in H \cap \Omega$，使得 $h_1 \mapsto_2 g \mapsto_2 h_2$。因此，根据推论 2.3，$\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

接下来假设 $G = L = G_2(q)$。由 [14]，$\Pi(G)$ 有两个连通分支

$$\pi\left(q(q^2-1)(q^3+1)\right) \text{ and } \pi\left(q^2+q+1\right).$$

由 [3, 表 8.30]，G 含有一个极大子群 $H \cong \mathrm{SL}_3(q).2$。设 $g \in G$ 的阶是 q^2+q+1 的一个因数。现在，g 与 H 中的某个元素共轭。因此，用这个共轭元替换 g 后，我们可以假设 $g \in H$。由命题 3.2，存在 $h_1, h_2 \in H \cap \Omega$，使得 $h_1 \mapsto_2 g \mapsto_2 h_2$。因此，根据推论 2.3，$\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

当 $L < G$ 时，由于 $\Gamma_2(L)$ 是强连通的，并根据 [10] 中推论 1.4 的证明，$\Gamma_2(G)$ 是强连通的。□

4. 散在群

本节讨论除怪兽群以外的所有散在单群。在本文其余部分，我们使用 [5] 中的记号。

设 G 是一个散在单群。利用 [11, 引理 6.1]，可知 G 的交换图有唯一一个连通分支，记为 Ω，其中包含所有偶数阶元素。设 π_1 是素数图$\Pi(G)$ 中满足 $2 \in \pi_1$ 的连通分支。注意，Ω 包含所有阶被某个素数 $p \in \pi_1$ 整除的元素。

除怪兽群的情形需要进一步考察外，我们采用两种策略证明 $\Gamma_2(G)$ 是强连通的。首先，考察素数图 $\Pi(G)$，并对每个素数 $p \in \pi(G) \setminus \pi_1$，考虑一个满足 $\mathrm{o}(g) = p$ 的元素$g \in G$。然后取一个包含 g 的极大子群 $M \leq G$（这可利用 [5] 做到）。接下来可能出现两种情况。

(1) $\Gamma_2(M)$ 是强连通的。在这种情况下，存在 $z_1, z_2 \in M \cap \Omega$，使得 $z_1 \to_2 g \to_2 z_2$.(2) $\Gamma_2(M)$ 不是强连通的。在这种情况下，我们借助计算机计算完成论证。在所有情况下，我们都能通过随机搜索找到 G 的一个对合 z，使得 $g \to_2 z$。另一方面，利用 [5],，我们看到在所有情况下都存在 $z' \in \Omega \cap \mathrm{N}_G(\langle g\rangle)$。特别地，$[z', g] \in \langle g\rangle$，从而 $z' \mapsto_2 g$。

我们将应用这一策略所需的全部信息汇总在表 4.1 中。具体而言，对于 26 个散在单群中的每一个，我们在第二列记录了不同于 π_1 的 $\Pi(G)$ 的连通分支。（我们使用 [8] 获取这一信息。）此外，对于第二列中出现的连通分支内的每个素数 p，我们在第三列报告（若存在）G 的一个极大子群 M，该子群包含阶为 p 的元素，并且 $\Gamma_2(M)$ 是强连通的。

现在，对于底群为不同于怪兽群的散在单群的几乎单群，定理 1.1 的证明可由表 4.1 以及少量计算机计算得出。怪兽群在此处成为例外的唯一原因在于其规模极其庞大，使得对其进行任何合理的计算都不可能。由于论证具有很强的重复性，我们在此仅报告 $\Gamma_2(M_{22})$ 和 $\Gamma_2(M_{23})$ 强连通的证明。我们从 $G = M_{22}$ 开始。注意，我们只需讨论素数 $p \in \{5, 11\}$。对于 $p = 5$，G 包含一个与 2^4 同构的极大子群 M： $\mathrm{Sym}(5)$。特别地，G 包含一个与 $\mathrm{Sym}(5)$ 同构的子群。现在，根据我们关于交错群的结果，$\Gamma_2(\mathrm{Sym}(5))$ 是强连通的。对于 $p = 11$，G 包含一个与 $\mathrm{PSL}_2(11)$ 同构的极大子群 M。现在，根据我们关于射影特殊线性群的结果，$\Gamma_2(\mathrm{PSL}_2(11))$ 是强连通的（注意，整除 $(11+1)/2 = 6$ 的最大 2 的幂为 2）。现在假设 $G = M_{23}$。注意，我们只需讨论素数 $p \in \{11, 23\}$。对于 $p = 11$，G 包含一个与 M_{22} 同构的极大子群 M。现在，$\Gamma_2(M_{22})$ 是强连通的

如上所述。当 $p = 23$ 时， G 没有极大子群 M，使得 $\Gamma_2(M)$ 强连通，因此，通过一次计算机计算，我们通过随机搜索找到了一个满足 $g \mapsto_2 z$ 的对合 z。因此，在这种情况下， $\Gamma_2(G)$ 也是强连通的。

5. The Monster group

设 G 为怪兽群。根据表 4.1 以及前几节中的论证（和记号），要证明定理 1.1，只需证明：给定一个满足 $o(x) = 71$ 的元素 $x \in G$，存在 $z \in \Omega$，使得 $x \mapsto_2 z$。

设 $\iota \in G$ 为 G 的共轭类 $2A$ 中的一个对合，并设 $H = C_G(\iota)$。现在， H 是 G的一个极大子群，且 $H \cong 2.B$，其中 B 是婴儿怪兽群。设 1_H^G 为 G 作用在 G中 H 的右陪集集合 $\mathcal{I}$ 上的置换特征。由 [12, 第 115], 页可知，在此作用下， G 的秩为 9；并且将 π 分解为复不可约特征之和时，我们有

$$\pi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_9 + \chi_{14} + \chi_{21} + \chi_{34} + \chi_{35},$$

此处我们有 按照 [5] 中的记号，对 G 的不可约复特征进行一致标记 .

由于 H 是对合 ι 的中心化子，我们也可以将 $\mathcal{I}$ 视为 G-共轭类 ι^G。按照 [5], 中的记号，共轭类 $\mathcal{I}$ 为 $2A$。由 [13], 可知，G 在 $\mathcal{I}$ 上的作用的子度为

$$i_0 = 1, i_1 = 27143910000, i_2 = 11707448673375, i_3 = 2031941058560000, i_4 = 9156952483430400\,0,$$
$$i_5 = 1102935324621312000, i_6 = 1254793905192960000, i_7 = 30434513446055706624, i_8 = 64353605265653760000.$$

设 $\mathcal{I}_0, \ldots, \mathcal{I}_8$ 为 H 在 $\mathcal{I}$ 上的轨道，且满足 $i_j = |\mathcal{I}_j|$。特别地， $\mathcal{I}_0 = \{\iota\}$。

设 $x \in G$ 是一个阶为 71 的元素，设 $C = \langle x \rangle$，并设

$$\mathcal{C} = \bigcup_{c \in C \setminus \{1\}} c^G.$$

我们注意到， H、C 和 $\mathcal{C}$ 满足 [10, 第 8 节.1] 中的假设 0-3。事实上，

假设 0： $H \cap \mathcal{C} = \emptyset$ ，因为 $\mathcal{C}$ 中的元素的阶为 71，且 H 的阶与 71 互素 ，

假设 1： $\mathcal{C} = \{c^g \mid c \in C \setminus \{1\}\ g \in G\}$，这直接由 $\mathcal{C}$ 的定义可得，

Hy假设 2：对于每个 $g \in G \setminus N_G(C)$，我们有 $C^g \cap C = 1$，因为 C 的阶为素数 ，

假设 3：$N_G(C)$ 是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 核为 71。事实上， C 包含于 G 的一个唯一的、由 G 共轭的极大子群共轭类中，且这些极大子群同构于 $PSL_2(71)$。因此， $C \leq N_G(C) \leq K$，其中 $K \cong PSL_2(71)$。因此，$N_G(C) = N_K(C) \cong 71 : 35$ 是一个以 C 为核的 Frobenius 群。

引理 5.1. 存在一个对合 $z \in G$，满足 $[x, z] = 1$。特别地， $\Gamma_2(G)$ 是强连通的。

Proof. 我们先证明一个关于 $\iota^{\mathcal{C}} = \{\iota^g \mid g \in \mathcal{C}\}$ 的辅助结果。我们断言

- 要么 $\iota^{\mathcal{C}} = \mathcal{I} \setminus \{\iota\}$,
- 或 $\iota^{\mathcal{C}} = \mathcal{I} \setminus (\{\iota\} \cup \mathcal{I}_1)$。

我们无法判定这两种情况中的哪一种成立，但这对我们的应用并无影响。

注意， $H\mathcal{C} = \{hg \mid h \in H, g \in \mathcal{C}\}$ 是若干右 H-陪集的并。我们记 $|H\mathcal{C} : H|$ 为 $H\mathcal{C}$中右H-陪集的数量。我们声称 $H\mathcal{C} = H\mathcal{C}H$。事实上， $H\mathcal{C} \subseteq H\mathcal{C}H$。反过来，若 $h_1 c h_2 \in H\mathcal{C}H$ 且 h_1、$h_2 \in H$ 和$c \in \mathcal{C}$，则 $h_1 c h_2 = h_1 h_2 c^{h_2} \in H\mathcal{C}$。这表明 $H\mathcal{C}$ 是若干 H 右陪集的并。

由于 $H = C_G(\iota)$，我们有 $|H\mathcal{C} : H| = |\{\iota^c \mid c \in \mathcal{C}\}|$. 此外，由于 $H\mathcal{C} = H\mathcal{C}H$，集合 $\{\iota^c \mid c \in \mathcal{C}\}$ 是 H 作用于 $\mathcal{I}$所产生的 H-轨道之并。因此，要证明我们的断言，只需证明

$$|H\mathcal{C} : H| \in \{|G : H| - 1, |G : H| - 1 - i_1\}.$$

如在 [10, 第 8 节1],中，我们令

$$\Delta(H, \mathcal{C})$$

其为具有顶点集 $\mathcal{C}$ 的辅助图 x，其中当且仅当$yx^{-1} \in H$时，规定两个顶点 x、$y \in \mathcal{C}$ 相邻。注意， $\Delta(H,\mathcal{C})$是无向的，因为若 $yx^{-1} \in H$，则 $xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} \in H$。

现在我们描述集合 $H\mathcal{C}$与 $\Delta(H,\mathcal{C})$的连通分支之间的关系。令 Δ_1、.....、Δ_c为 $\Delta(H,\mathcal{C})$的连通分支。对于每个 $i \in \{1, \ldots, c\}$，令 $x_i \in \Delta_i$。我们断言

$$\Delta_i \subseteq Hx_i.$$

事实上，为此，令 $y \in \Delta_i$。由于 Δ_i是连通的，因此在 Δ_i中存在一条路径 $x_i = p_1$、p_2、.....、$p_\ell = y$，使得对于每个 $j \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$， p_j 与 p_{j+1}相邻。现在， $p_2 x_i^{-1} = p_2 p_1^{-1} \in H$，从而 $Hx_i = Hp_2$。因此，对ℓ进行归纳论证可得 $Hx_i = Hy$，于是 $y \in Hx_i$。

陪集 $Hx_1, \ldots, Hx_c$ 彼此不同。事实上，若 $Hx_i = Hx_j$，则 $x_i x_j^{-1} \in H$，因此 x_i 在 $\Delta(H,\mathcal{C})$ 中与 x_j 相邻。由于 $x_i \in \Delta_i$ 且 $x_j \in \Delta_j$，又由于 Δ_i 和 Δ_j 是 $\Delta(H,\mathcal{C})$ 的连通分支，我们得到 $\Delta_i = \Delta_j$ 和 $x_i = x_j$。综上，我们有

$$H\mathcal{C} = Hx_1 \cup \cdots \cup Hx_c$$

因此 $|HC:\ H| = c$ 是 $\Delta(H, \mathcal{C})$ 的连通分支数。

[10] 中的第 8.1 节提出了一种方法，仅利用群 G 的特征标表 c 以及置换特征 $\pi = 1_H^G$ 的分解，给出 c 的下界。事实上，[10, (8.4)] 给出

$$c \geq |G : H| \cdot \frac{(|C| - 1)^2}{\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\langle \chi, \pi \rangle}{\chi(1)} (|C| \langle \chi_{|C}, 1 \rangle - \chi(1))^2}.$$

在我们的情形中，将 π 分解为不可约特征之和，并利用 G 的特征标表，我们得到

$$c \geq \frac{4020948952911201379068000}{41351}. \tag{5.1}$$

令 c' 为该不等式的右端。现在，若 $c = |G:\ H| - 1$，则 $\iota^{\mathcal{C}} = \mathcal{I} \setminus \{\iota\}$。因此，设 $c < |G:\ H| - 1$。于是，c 是 G 在 G 中 H 的右陪集上作用的非平凡子度之和，也就是说，是 G 在 $\mathcal{I}$ 上作用的非平凡子度之和。然而，由于

$$c' > |G : H| - 1 - i_2,$$

我们得到

$$c = |G : H| - 1 - 27143910000 = |G : H| - 1 - i_1$$

因此 $\iota^{\mathcal{C}} = \mathcal{I} \setminus (\{\iota\} \cup \mathcal{I}_1)$。这就完成了我们所述结论的证明。

设 $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{194}$ 为 G-共轭类，并且对每个 i，设 $x_i \in \mathcal{X}_i$。对于任意 G-共轭类 $\mathcal{X}_i$，我们定义

$$\overline{\mathcal{X}}_i = \sum_{g \in \mathcal{X}_i} g \in \mathbb{C}G,$$

其中 $\mathbb{C}G$ 是 G上的复群代数。更一般地，对于 G的每个子集 X，我们定义 $\overline{X} = \sum_{x \in X} x \in \mathbb{C}[G]$。于是

$$\overline{\mathcal{X}}_i \cdot \overline{\mathcal{X}_j} = \sum_{v=1}^{194} a_{ijv} \overline{\mathcal{X}}_v,$$

其中 $a_{ijv} \in \mathbb{N}$ 是 G的类常数。a_{ijv}有一种组合解释，它来源于 G的共轭类关联方案。事实上，

$$a_{ijv} = |\{(a, b) \in \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j \mid ab = x_v\}|.$$

类 常数可以利用 G的特征标表计算。由 [7, (3.9)], 可得

$$\frac{|G|}{|\mathcal{X}_i||\mathcal{X}_j|} a_{ijv} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(x_i)\chi(x_j)\chi(x_v^{-1})}{\chi(1)}.$$

利用 G的特征标表，我们得到

$$\overline{\mathcal{I}} \cdot \overline{\mathcal{I}} = |\mathcal{I}| \cdot \overline{1A} + 27143910000 \cdot \overline{2A} + 196560 \cdot \overline{2B} + 920808 \cdot \overline{3A} + 3 \cdot \overline{3C} + 1104 \cdot \overline{4A} + 4 \cdot \overline{4B} + 5 \cdot \overline{5A} + 6 \cdot \overline{6A}, \tag{5.2}$$

其中我们使用与 [5] 中相同的标记。由于 $\iota \in \mathcal{I}$，由此可得

$$\iota \cdot \overline{\mathcal{I}} = \overline{1A} + \overline{X}_{2A} + \overline{X}_{2B} + \overline{X}_{3A} + \overline{X}_{3C} + \overline{X}_{4A} + \overline{X}_{2B} + \overline{X}_{5A} + \overline{X}_{6A}, \tag{5.3}$$

其中 $X_{2A} \subseteq 2A$, $X_{2B} \subseteq 2B$, $X_{3A} \subseteq 3A$, $X_{3C} \subseteq 3C$, $X_{4A} \subseteq 4A$, $X_{4B} \subseteq 4B$, $X_{5A} \subseteq 5A$, $X_{6A} \subseteq 6A$.

令 $Y \in \{1A, 2A, 2B, 3A, 3C, 4A, 4B, 5A, 6A\}$，并令 $m_Y \in \mathbb{N}$ 为 (5.2) 中出现在 $\overline{Y}$ 前的类常数。我们声称 $|X_Y| = m_Y|Y|/|\mathcal{I}|$（例如，$|X_{4A}| = 1104|4A|/|\mathcal{I}|$ 和 $|X_{6A}| = 6|6A|/|\mathcal{I}|$）。为此，我们对集合 $\{(a,\ b) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \mid ab \in Y\}$ 中的元素进行双重计数。一方面，我们有

$$|\{(a, b) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \mid ab \in Y\}| = \sum_{y \in Y} |\{(a, b) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \mid ab = y\}| = \sum_{y \in Y} m_Y = m_Y|Y|.$$

另一方面，令 $a, a' \in \mathcal{I}$。由于 a, a' 属于同一个 G-共轭类，因此存在 $g \in G$ 使得 $a' = a^g$。特别地，

$$\{b \in \mathcal{I} \mid ab \in Y\}^g = \{b^g \in \mathcal{I}^g \mid a^g b^g \in Y^g\} = \{b^g \in \mathcal{I} \mid a'b^g \in Y\} = \{b \in \mathcal{I} \mid a'b \in Y\}.$$

因此，将这一事实应用于 $a = \iota$，我们得到

$$|\{(a, b) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \mid ab \in Y\}| = |\mathcal{I}||\{b \in \mathcal{I} \mid \iota b \in Y\}| = |\mathcal{I}||X_Y|.$$

因此 $m_Y|Y| = |\mathcal{I}||X_Y|$，从而 $|X_Y| = m_Y|Y|/|\mathcal{I}|$。

由上一段和（5.3）式可得

$$|X_{2A}| = 27143910000, \qquad |X_{2B}| = 11707448673375,$$
$$|X_{3A}| = 2031941058560000, \qquad |X_{3C}| = 91569524834304000,$$
$$|X_{4A}| = 1102935324621312000, \qquad |X_{4B}| = 1254793905192960000,$$
$$|X_{5A}| = 30434513446055706624, \qquad |X_{6A}| = 64353605265653760000.$$

现在，令

$$\overline{\iota^{\mathcal{C}}} = \sum_{x \in \iota^{\mathcal{C}}} x \in \mathbb{C}[G].$$

由 $\iota^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{I}$，根据 (5.3)，我们可得

$$\iota \cdot \overline{\iota^{\mathcal{C}}} = \overline{X'}_{2A} + \overline{X'}_{2B} + \overline{X'}_{3A} + \overline{X'}_{3C} + \overline{X'}_{4A} + \overline{X'}_{4B} + \overline{X'}_{5A} + \overline{X'}_{6A},$$

对每个共轭类 Y，都有 $X'_Y \subseteq X_Y$，并且

$$|\iota^{\mathcal{C}}| = |X'_{2A}| + |X'_{2B}| + |X'_{3A}| + |X'_{3C}| + |X'_{4A}| + |X'_{4B}| + |X'_{5A}| + |X'_{6A}|.$$

设 $X'_{2A} \neq \emptyset$ 或 $X'_{2B} \neq \emptyset$。特别地，存在 $g \in \mathcal{C}$，使得当 $X'_{2A} \neq \emptyset$ 时有 $\iota\iota^g \in X'_{2A} \subseteq 2A$，当 $X'_{2B} \neq \emptyset$ 时有 $\iota\iota^g \in X'_{2B} \subseteq 2B$。这表明存在 $g \in \mathcal{C}$，使得 $\iota\iota^g$ 是一个对合。因此，$\iota\iota^g = \iota^g\iota = [g, \iota]$ 是一个对合。所以，$[g, \iota, \iota] = \iota^g\iota \cdot \iota \cdot \iota^g\iota \cdot \iota = 1$，也就是说，$g \mapsto_2 \iota$。由于 $\langle x \rangle$ 和 $\langle g \rangle$ 是 G 的 71阶西洛子群，存在 $m \in G$ 和 $i \in \mathbb{Z}$，使得 $x^i = g^m$。特别地，$x^i \mapsto_2 z$，其中 $z = \iota^m$ 是一个对合。

设 $X'_{2A} = X'_{2B} = \emptyset$。根据我们之前的断言，有 $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\iota^{\mathcal{C}}} + \iota$ 或 $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\iota^{\mathcal{C}}} + \overline{\mathcal{I}_1} + \iota$.。首先假设 $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\iota^{\mathcal{C}}} + \iota$。于是

$$\iota \cdot \overline{\iota^{\mathcal{C}}} = \iota \cdot (\overline{\mathcal{I}} - \iota) = \iota \cdot \overline{\mathcal{I}} - 1A = \overline{X}_{2A} + \overline{X}_{2B} + \overline{X}_{3A} + \overline{X}_{3C} + \overline{X}_{4A} + \overline{X}_{2B} + \overline{X}_{5A} + \overline{X}_{6A}.$$

特别地，$X'_{2A} = X_{2A} \neq \emptyset$和 $X'_{2B} = X_{2B} \neq \emptyset$，这与 $X'_{2A} = X'_{2B} = \emptyset$矛盾。接下来假设 $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\iota^{\mathcal{C}}} + \overline{\mathcal{I}_1} + \iota$。于是

$$|\iota \cdot \iota^{\mathcal{C}}| = |\mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \{\iota\})| = |\mathcal{I}| - 1 - i_1 = 97239461114865275999.$$

另一方面，由于 $X'_{2A} = X'_{2B} = \emptyset$，我们有

$$\begin{aligned} |\iota \cdot \iota^{\mathcal{C}}| &= |X'_{3A}| + |X'_{3C}| + |X'_{4A}| + |X'_{2B}| + |X'_{5A}| + |X'_{6A}| \\ &\leq |X_{3A}| + |X_{3C}| + |X_{4A}| + |X_{4B}| + |X_{5A}| + |X_{6A}| = 97239449407416602624. \end{aligned}$$

然而，这是矛盾的，因为

$$97239461114865275999 > 97239449407416602624. \quad \square$$

References

[1] M. Aschbacher，强嵌入子群存在的一个条件， *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973)，509–511。[2] C. Bosma、J. Cannon、C. Playoust，Magma代数系统。I. 用户语言， *J. Symbolic Comput.* **24** (1997)，235–265。[3] J. N. Bray、D. F. Holt、C. M. Roney-Dougal，*The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*，剑桥：剑桥大学出版社，2013。[4] P. J. Cameron，群上定义的图。*Int. J. Group Theory* **11** (2022)，第2期，53–107。[5] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker和R. A. Wilson，《有限群图谱》$\mathbb{ATLAS}$，牛津大学出版社，恩舍姆，1985年。[6] E. Detomi、A. Lucchini、D. Nemmi，有限群的恩格尔图，《数学论坛》（2022）https://doi.org/10.1515/forum-2022-0070。[7] M. I. Isaacs， *Character theory of finite groups*，学术出版社，1976年。[8] A. S. Kondrat'ev、V. D. Mazurov，从元素阶识别素数次数的交错群， *Siberian Math. J.* **41** (2000)，294–302。[9] M. W. Liebeck、J. Saxl、G. M. Seitz，有限李型例外群的极大秩子群， *Proc. London Math. Soc. (3)* **65** (1992)，297–325。[10] A. Lucchini、P. Spiga，几乎单群的恩格尔图，即将发表，arXiv:2205.14984 [math.GR]。[11] G. L. Morgan、C. W. Parker，具有平凡中心的有限群的交换图直径， *J. Algebra* **393** (2013)，41–59。[12] M. Muzychuk、P. Spiga，小秩有限本原群：对称群和散在群， *J. Algebraic Combin.* **52** (2020)，103–136。[13] S. P. Norton，《怪兽群剖析》。I. 《有限群图谱》：十年之后（伯明翰，1995），198–214，伦敦数学会讲义丛书，249，1998 剑桥大学出版社，剑桥；J. S. Williams，有限群的素数图分支， *J. Algebra* **69** (1981)，487–513。[14]

Francesca Dalla Volta， Dipartimento di Matematica Pura e Applicata，
University of Milano-Bicocca， Via Cozzi 55， 20126 Milano， Italy*Email address*:
f.dallavolta@unimib.it

Fabio Mastrogiacomo， Dipartimento di Matematica "Felice Casorati"， University of Pavia， Via Ferrata 5， 27100 Pavia， Italy
Email address: fabio.mastrogiacomo01@universitadipavia.it

Pablo Spiga， Dipartimento di Matematica Pura e Applicata，
University of Milano-Bicocca， Via Cozzi 55， 20126 Milano， Italy
Email address: pablo.spiga@unimib.it

群	连通分支	极大子群
M_{11}	{5}	S_5
	{11}	$L_2(11)$
M_{12}	{11}	M_{11}
M_{22}	{5}	$2^4 : S_5$
	{7}	A_7
	{11}	$L_2(11)$
M_{23}	{11}	M_{22}
	{23}	
M_{24}	{11}	M_{23}
	{23}	M_{23}
J_1	{7}	
	{11}	$L_2(11)$
	{19}	
J_2	{7}	$U_3(3)$
J_3	{17}	$L_2(17)$
	{19}	$L_2(19)$
J_4	{23}	$2^{11} : M_{23}$
	{29}	
	{31}	$L_2(32) : 2$
	{37}	
	{43}	
HS	{7}	M_{22}
	{11}	M_{22}
McL	{11}	M_{11}
He	{17}	$S_4(4) : 2$
Ru	{29}	
Suz	{11}	$U_5(2)$
	{13}	$G_2(4)$
O′N	{11}	M_{11}
	{19}	$L_3(7) : 2$
	{31}	
Co_3	{23}	M_{23}
Co_2	{11}	HS
	{23}	M_{23}
Fi_{22}	{13}	$O_7(3)$
HN	{19}	$U_3(8) : 3$
Ly	{31}	$G_2(5)$
	{37}	
	{67}	
Th	{19}	$U_3(8) : 6$
	{31}	$^3D_4(2) : 3$
Fi_{23}	{17}	$S_8(2)$
	{23}	$2^{11} : M_{23}$
Co_1	{23}	Co_2
Fi'_{24}	{17}	Fi_{23}
	{23}	Fi_{23}
	{29}	
B	{31}	Th
	{47}	
M	{47}	$3^8.O_8^-(3).2_3$
	{59}	$L_2(59)$
	{71}	

TABLE 4.1. 散在群及素数图中不包含素数 2 的连通分支。符号沿用 [5]。