arXiv:2304.09619v1 [math.GR] 19 Apr 2023

MEASURE DOUBLING OF SMALL SETS IN $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$

YIFAN JING, CHIEU-MINH TRAN, AND RUIXIANG ZHANG

Abstract. Let $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ be the 3D-rotation group equipped with the real-manifold topology and the normalized Haar measure μ. Resolving a problem by Breuillard and Green, we show that if $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ is an open subset with sufficiently small measure, then

$$\mu(A^2) > 3.99\mu(A).$$

We also show a more general result for the product of two sets, which can be seen as a Brunn–Minkowski-type inequality for sets with small measure in $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

1. Introduction

1.1. **Results and backgrounds.** Throughout, let $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ be the 3D-rotation group, or more precisely,

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) := \{Q \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : QQ^T = Q^TQ = I_3, \det(Q) = 1\}$$

其中，$M_{3,\ 3}(\mathbb{R})$ 表示具有实系数的 (3×3) 阶矩阵集合，Q^T表示 Q 的转置，I_3表示 3×3 阶单位矩阵，而 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 上的群运算定义为矩阵乘法。因此，$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 可以视为 $\mathbb{R}^9$ 的一个欧几里得闭子集，从而赋予其一个实流形拓扑。众所周知，群 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 在该拓扑下是紧且连通的。特别地，它具有一个归一化哈尔测度 μ。对于 $A, B \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$，我们关注它们的乘积集 $AB := \{ab\colon\ a \in A, b \in B\}$. 我们用 A^2 代替 AA，并类似地定义 k 重乘积 A^k。

以下问题曾出现在 Green 的未解决问题列表 [Gre]，中，Green 还将其归因于与 Breuillard 的讨论：

当 $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 为开集且测度充分小时，$\mu(A^2)$ 是否为 $> 3.99\mu(A)$? [Gre] 还指出，若答案为是，这就是最佳可能情形；考虑一维子群的小邻域即可看出这一点。（事实上，第 3 节中的构造给出了这样的开 $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$，使得 $3.99\mu(A) < \mu(A)^2 < 4\mu(A)$，且 $\mu(A)$ 可以任意小，因此我们无法将 3.99 替换为 4。）以不那么精确的形式来看，这个问题可追溯到 Henstock 和 Macbeath 更早的工作 [HM53]，，他们提出了确定非阿贝尔局部紧群中最小倍增的问题。从这个角度看，$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 值得关注，因为它是第一个非平凡的紧连通情形。

Our main result answers the question by Breuillard and Green positively:

定理 1.1. 对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 是一个满足 $\mu(A) < \delta$ 的开子集，则

$$\mu(A^2) > (4-\varepsilon)\mu(A).$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G20; Secondary 43A75, 22E30, 03C20, 11B30.

YJ was supported by Ben Green's Simons Investigator Grant, ID:376201.

RZ was supported by the NSF grant DMS-2207281, NSF CAREER Award DMS-2143989, and the Alfred P. Sloan Foundation.

事实上，我们的证明对所有紧半单李群 G 也给出了相同的结论（定理 10.4），但除非 G 包含 SO(3,$\mathbb{R}$) 作为闭子群，否则该不等式并不尖锐。然而，这与非半单的紧致连通李群形成了鲜明对比。在这种情况下，由 Kemperman 不等式给出的下界 $\mu(A^2) \geq \min\{1, 2\mu(A)\}$ 无法改进。对于测度非常小的 SO(3,$\mathbb{R}$) 的开子集，定理 1.1 改进了前两位作者 [JT22], 的测度扩张间隙，其中指出存在一个常数 $\eta > 0$，使得

$$\mu(A^2) \geq \min\{1, 2\mu(A) + \eta\mu(A)|1 - 2\mu(A)|\}$$

只要 G 是紧半单李群，且 $A \subseteq G$ 是开集即可。请注意，前文提到的第 3 节中的构造还给出了 SO(3, $\mathbb{R}$) 中的开 $A \subseteq$，其测度接近 $1/2$，使得 $2\mu(A) < \mu(A^2) < 2.01\mu(A)$。因此， $\mu(A)$ 的测度足够小这一条件是必要的，而定理 1.1 并未对一般的开$A \subseteq$ SO(3, $\mathbb{R}$) 提供任何信息。

Breuillard 和 Green 研究了上述问题，并将其与有限域上李型群的乘积定理 [Hel08、BGT11、PS16] 以及关于近似群 [Hru12、BGT12] 的结果联系起来。虽然没有明确说明，但人们认为子群和邻域可以解释 SO(3, $\mathbb{R}$) 中的小倍增，正如它们在加性组合学的阿贝尔情形中所起的作用。因此，Breuillard 和 Green 提出的问题背后，是将加性组合学的结果推广到非阿贝尔群这一挑战。本文的结果以及作者此前关于非阿贝尔 Brunn–Minkowski [JTZ21] 的工作，是目前仅有的具有紧确界的乘积型定理。

回顾一下，对于配备通常的勒贝格测度 λ 的 $\mathbb{R}^n$，Brunn–Minkowski 不等式告诉我们，若 X、$Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开的，则 $\lambda(X+Y)^{1/n} \geq \lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}$，其中我们令 $X + Y = \{x + y\colon\ x \in X, y \in Y\}$。对于 SO(3,$\mathbb{R}$)，我们对定理 1.1 的证明还给出了以下更一般的非对称结果，它可以看作是 SO(3,$\mathbb{R}$) 上的一种 Brunn–Minkowski 型不等式。

Theorem 1.2. *For all ε and N, there is $c = c(\varepsilon, N)$ such that whenever $A, B \subseteq \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ are open, $0 < \mu(A)\ \mu(B) < c$, and $\mu(A)/N < \mu(B) < N\mu(A)$, we have*

$$\mu(AB)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \geq \mu(A)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + \mu(B)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

In Section 3, we will propose conjectural Brunn–Minkowski type inequalities for other compact connected Lie groups. The proofs of our theorems, in fact, provide a reduction of these results to the nonabelian Brunn–Minkowski conjecture for noncompact groups and a measure expansion gap result; see Remark 10.5.

We end this background discussion proposing a conjectural strengthening of Theorem 1.1:

Conjecture 1.3 (Strong Breuillard–Green Conjecture)**.** *If $A \subseteq \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ is open, then*

$$\mu(A^2) \geq \min\{1, 4\mu(A)(1 - \mu(A))\}.$$

Moreover, if $\mu(A) < 1/2$, the equality happens if and only if A is of the form

$$\{g \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) : \angle(u, gu) < \arccos(1 - \mu(A))\}$$

with $u \in \mathbb{R}^3$ a unit vector, gu its image g-action, and $\angle(u, gu)$ the angle between them.

我们将在第 3 节讨论这一猜想背后的构造，以及对具有有限中心的简单李群的推广。

1.2. 证明概述。定理 1.1 和定理 1.2 的证明的核心思想，是利用超积以及所谓的 Hrushovski 李模型定理 [Hru12] 的 Massicot–Wagner 版本 [MW15]，将 SO(3, ℝ) 的紧情形与非紧李群的情形联系起来。紧情形与非紧情形的区别在于，后者存在一个有用的非阿贝尔 Brunn–Minkowski 不等式；作者 [JTZ21] 利用岩泽分解将问题化归到更低维数，从而证明了这一不等式。对于紧半单李群，岩泽分解得到的就是群本身。

For concreteness, towards a contradiction, let us assume that the conclusion of Theorem 1.1 is false for $\varepsilon = 0.01$. Then there is a sequence (A_n) of open subsets of $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ such that

$$\mu((A_n)^2) < 3.99\mu(A_n) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Let μ_n be the normalization of μ on A_n (i.e. setting $\mu_n(X) = \mu(X)/\mu(A_n)$ for measurable $X \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$), we get

$$\mu_n(A_n) = 1, \quad \mu_n((A_n)^2) < 3.99\mu_n(A_n), \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})) = \infty.$$

Taking a "suitable limit" of the sequence of triples $(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\ A_n, \mu_n)$ we arrive at a triple $(G_\infty, A_\infty, \mu_\infty)$ where G_∞ is a "pseudo-compact" group, $A_\infty \subseteq G_\infty$ is "pseudo-open", μ_∞ is a "pseudo-Haar" measure, and

$$\mu_\infty(A_\infty) = 1, \quad \mu_\infty((A_\infty)^2) < 3.99\mu_\infty(A_\infty), \quad \text{and} \quad \mu_\infty(G_\infty) = \infty.$$

The suitable limit notion we use here is taking ultraproduct from model theory, and one can think of it as taking the average of $(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\ A_n, \mu_n)$. Notions like "pseudo-Haar" must also be carefully defined, but we will not do that in this overview.

Despite what the name "pseudo-compact" and "pseudo-open" might suggest, there is no automatic topological data on G_∞. However, the measure-theoretic data on G_∞ is enough to apply tools from the study of approximate groups to modify A_∞ "slightly" and construct a "good" surjective group homomorphism

$$\pi : \langle A_\infty \rangle \to L$$

where L is noncompact, unimodular (i.e., left Haar measures are also right-invariance), and connected Lie group. Such π is often called a Lie model. We will postpone explaining this point for now and proceed with the argument. Using ideas from real/harmonic analysis, also to be revisited later, one shows that

$$\lambda(X^2) < 3.99\lambda(X)$$

with $X = \pi(A_\infty)$ and λ a left (and hence right) Haar measure on L.

Let d be the dimension of L, and m the maximum dimension of a compact subgroup of L. The nonabelian Brunn–Minkowski Conjecture [JTZ21, Conjecture 1.4] predicts that $\lambda(X^2) \geq 2^{d-m}\lambda(X)$. This is still not known in general, but we do know that

$$\lambda(X^2) \geq 2^{d-m-\lfloor (d-m)/3 \rfloor}\lambda(X).$$

将其应用于我们的情形，得到 $d - m < 2$，这意味着 $d - m = 1$，因为 L 是非紧的。换言之，L 有一个余维 1 的紧子群 H。根据标准的李群论论证，我们得知 H 必定是 L 的正规子群，而 L/H 必定与 ℝ同构。

现在，令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为区间 $(0,1)_{\mathbb{R}}$。那么 $I+I=\{x+y\colon x,y\in I\}$ 是区间 $(0,2)_{\mathbb{R}}$，其勒贝格测度恰好是 I的两倍。令 $\rho\colon \langle A_\infty\rangle \to \mathbb{R}$ 表示 $\pi\colon \langle A_\infty\rangle \to L$ 与商映射 $\phi\colon L\to\mathbb{R}$的复合 $\phi\circ\pi$，并设 $B_\infty=\rho^{-1}(I)$。那么，由于 π 性质良好，我们得知

$$\mu_\infty((B_\infty)^2)=2\mu_\infty(B_\infty).$$

As G_∞ is the limit of copies of $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, and from the fact that $\pi:\langle A_\infty\rangle\to L$ is "good", we get $B_n\subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ with very small measure such that

$$\mu(B_n^2)<(2+10^{-12})\mu(B_n).$$

This is known to be impossible by the measure expansion gap for semisimple Lie group developed by the first two authors in [JT22]. This completes our proof via "bootstrapping".

Approximate groups and Lie models. We now come back to an earlier point where we "slightly" modify A_∞ and obtain a Lie model $\pi:\langle A_\infty\rangle\to L$.

从概念上说，这样的同态体现了这样一种预期：在任何情形下，小倍增集合都应当源自李群。然而，小倍增条件 $\mu_\infty(A_\infty^2)<3.99\mu_\infty(A_\infty$ 不足以从字面意义上保证此类π 的存在。必须绕过这个问题：首先运用陶哲轩的一项技巧 [Tao15]，构造一个与 A_∞ 密切相关的近似子群 $S_\infty\subseteq G_\infty$。（回顾一下，若 $\mathrm{id}_{G_\infty}\in S$, $S_\infty=S_\infty^{-1}$，且 S_∞^2 可由有限多个 S_∞的平移集覆盖，则称 $S_\infty\subseteq G_\infty$ 为近似群。）

Under an assumption called definable amenability, a version of the Hrushovski's Lie model theorem by Massicot and Wagner allows the construction of "good" surjective group homomorphism $\pi:\langle S_\infty\rangle\to L$ where L is a locally compact group (but not yet a connected Lie group). Fortunately, one can modify A_∞ and S_∞ to make them "pseudo-semialgebraic" and arrange that the definability condition is satisfied. Next, we use the Gleason–Yamabe theorem [Gle52, Yam53] to obtain an open subgroup L' of L, and a normal compact subgroup K of L' such that L'/K is a connected Lie group. Replacing S_∞ with $S_\infty^4\cap\pi^{-1}(L')$, the locally compact group L with the Lie group L'/K, and π with $\phi\circ\pi|_{\langle S_\infty^4\cap\pi^{-1}(L')\rangle}$, we arrange that L is a connected Lie group.

我们无法完全用 A_∞ 替换 S_∞，因为尽管后者的倍增率仍然有界，但可能远大于 3.99。在对实际论证进行简化模拟的版本中，我们从 A_∞ 和 S_∞ 构造出 $A'_\infty\subseteq\langle S_\infty\rangle$，使得 $\mu_\infty((A'_\infty)^2)<3.99\mu_\infty(A'_\infty)$。集合 A'_∞ 是通过取 $\langle S_\infty\rangle$ 与 A_∞ 的一个随机平移的交集得到的，其中随机平移是相对于一个经过精心选择的概率测度而言的。注意到，由于 L 的连通性，$\langle A'_\infty\rangle=\langle S_\infty\rangle$，因此我们用这个 A'_∞ 替换原来的 A_∞。实际论证比上述简化模拟版本稍微复杂一些。我们并非像上述那样得到 A'_∞，而是得到两个集合 A_∞ 和 A'_∞，它们满足一种以 Brunn–Minkowski 型不等式表示的非对称小倍增条件。因此，即使我们只对定理 1.1 感兴趣，其证明实际上也必须同时处理定理 1.2。

我们以如下评论结束这一部分：通过 Hrushovski 李模型定理进行论证，其根源深植于模型论之中。这种方法可追溯至 Robinson 的非标准分析 [Rob96]，并与其他一些结果有关，例如 van den Dries–Wilkie 利用超积对 Gromov 定理的重新证明 [vdDW84], 、围绕 Pillay 猜想的大量研究 [HPP08], ，以及 Goldbring 对局部群的希尔伯特第五问题的证明 [Gol10]。

李模型上的可定义集合的稠密性。接下来，我们简要介绍从实分析/调和分析中借鉴的思想，用于推导 $\lambda(X^2) < 3.99\lambda(X)$，其中我们有李模型$\pi:\ \langle A\rangle \to L$，且 $X = \pi(A_\infty)$，并且 λ 在 L上是一个 Haar 测度。

如果 $\langle A_\infty\rangle$ 是一个局部紧群，那么伪 Haar 测度 μ_∞ 和 L 上的 Haar 测度 λ 可以通过 $\ker\pi$ 上的 Haar 测度 ν 以及商积分公式联系起来。这使我们能够利用密度函数 $f_A(x) = \nu(\ker\pi \cap x^{-1}A)$，将 $\mu_\infty(A_\infty)$ 和 $\mu_\infty(A_\infty^2)$ 与像集 $\lambda(X)$ 和 $\lambda(X^2)$ 的测度联系起来。随后，该论证采用 [JT22] 和 [JTZ21] 中的“溢出”技巧继续进行。

在我们的李模型的核 $\ker\pi$ 上不存在类似的测度。拉东–尼科迪姆定理确实意味着存在一个几乎处处定义的密度函数，用于联系 μ_∞ 和λ。但这对我们来说仍然不够理想，原因如下。我们需要研究密度函数 f_{A_∞} 和 $f_{A_\infty^2}$之间的关系。由于 A_∞^2 通常是 A_∞的不可数个平移集的并，零测集中的点所表现出的不良行为可能会在乘积中产生过大的影响，从而使这种关系变得不明确。

在我们的方法中，我们用一族性质更好的函数 $(f^\varepsilon_{A_\infty})_{\varepsilon\in\mathbb{R}^{>0}}$ 来逼近 f_{A_∞}，其中 $f^\varepsilon_{A_\infty}$ 是通过考察 f_{A_∞} 在所考虑点周围一个合适的 ε-球内的平均行为得到的。李群 L 上的勒贝格微分定理意味着 $(f^\varepsilon_{A_\infty})_{\varepsilon\in\mathbb{R}^{>0}}$ 几乎处处收敛到 $f^\varepsilon_{A_\infty}$。我们对 $f_{A_\infty^2}$ 也做同样的处理。事实证明，$(f^\varepsilon_{A_\infty})_{\varepsilon\in\mathbb{R}^{>0}}$ 的性质足够好，可以取代通常密度函数所起的作用，并使我们能够得到所需的结论。

我们指出，本文所使用的流形上的勒贝格微分定理，是调和分析中 Hardy–Littlewood 极大函数的弱-L^1 估计的一个推论。

1.3. 论文结构。本文的组织结构如下。第 2 节介绍了关于 Haar 测度、黎曼度量和李群的一些基本事实，这些内容将在本文后续部分中使用。在第 3 节中，我们在 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 中构造了一些例子，以说明对于每个 $c \in (0,1)$，都存在一个集合 A with $\mu(A) = c$ with $\mu(A^2) = 4\mu(A)(1-\mu(A))$。我们还将这一构造推广到其他单李群，并提出了一些更一般的猜想。

第4节使我们能够在超积群中找到倍增小于 $4-\varepsilon$ 的集合。这一步对应于概述中的“取极限”步骤。在第5节中，我们将找到一个可定义可容许开近似群，它与超积群中具有小倍增的原始集合可公度。在第6节中，我们将找到超积群的一个子群，然后通过 Massicot–Wagner 版本的 Hrushovski 李模型定理，进一步得到一个连通李模型。

在第7节中，我们将利用第6节中从近似群得到的超积群的子群，重构倍增小于 $4-\varepsilon$ 的集合。在第8节中，我们将引入一个密度函数，以联系超积群中集合的倍增与它们在李模型中的投影的倍增。第9节使我们能够利用密度函数，在连通李群中构造一个倍增小于 $4-\varepsilon$ 的集合。在第10节中，我们通过将李模型中倍增接近2的集合拉回，并由此导出与测度增长间隙相矛盾的结论，从而证明主定理。

1.4. 记号与约定。从现在起，k 和 l 属于整数的有序环 $\mathbb{Z}$，m 和 n 属于自然数的有序半环 $\mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$。常数是指实数的有序环 $\mathbb{R}$的正锥 $\mathbb{R}^{>0}$ 中的元素。

我们用带有可能的修饰的 G 表示一个乘法群，它可能还带有更多结构（拓扑、可微结构等）。 G上的测度是指定义在 G的子集所构成的 σ-代数 Σ 上的非负测度 μ: $\Sigma \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 。如果集合 A 属于这个 σ-代数 Σ，我们就称 A 相对于 μ可测。

By a locally compact group, we means a topological group which is locally compact as a topological space. Similar conventions apply to compact groups, connected groups, etc.

局部紧群上的测度总是假定为 Haar 测度。局部紧群的可测子集是指相对于某个 Haar 测度可测的集合，等价地说，是相对于唯一的（相差一个常数因子的）完备 Haar 测度可测的集合。更多细节请参见第 2.1 节。

给定集合 A，我们将 A^n 写作 n 重乘积集，即 $\{a_1 \cdots a_n \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$。我们将 $A^{[n]}$ 写作 n 维的 A 笛卡尔积，但按照记号约定，我们仍将 $\mathbb{R}^n$ 写作 n 维欧几里得空间。

我们采用调和分析中的渐近记号。也就是说， $f \lesssim g$ 表示 $f = O(g)$，且当 $f \lesssim g$和 $g \lesssim f$时， $f \sim g$。当隐藏的常数依赖于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$时，我们分别记作$f = O_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(g)$、$f \lesssim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} g$和$f \sim_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} g$。

2. Preliminaries

这里我们回顾关于测度、黎曼度量、局部紧群和李群的一些标准事实。与主要论证更直接相关的高级概念将在后文介绍。

2.1. 测度与局部紧群。回忆一下，定义在环境集 Ω 上的预测度 μ_0 是定义在 Ω 的子集构成的一个布尔代数（对有限并和相对补封闭）上的非负实值函数，并满足以下条件:

(PM1) $\mu_0(\emptyset) = 0$**(PM2)** （σ-可加性）若 (A_n) 是一个集合序列，且对每个 n 都有 $\mu_0(A_n)$，并且 $\mu_0(\bigcup nA_n)$ 有定义 , then

$$\mu_0\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i).$$

换言之，预测度 μ_0 的行为类似于测度，只不过它所作用的集合族未必构成一个 σ-代数（即对可数并也封闭）。稍后我们将需要以下事实，它使我们能够从预测度构造测度:

Fact 2.1 (Carathéodory's extension theorem)**.** *Suppose μ_0 is a premeasure on an ambient set Ω. Then there is a measure on Ω extending μ_0.*

We say that μ is **complete** if every subset of a μ-null set is measurable. It is well known that there is a smallest complete measure extending μ, which we will refer to as the **completion** of μ.

Let Ω be a topological space. A measure μ on Ω is a **Borel measure** if the following hold:

(BM1) Every Borel subset (i.e. member of the σ-algebra generated by open sets) of Ω is μ-measurable.

(BM2) μ is the completion of its restriction to the σ-algebra of Borel subsets of Ω.

Again Ω is a topological space. A Borel measure μ on Ω is an **outer Radon measure** if we have the following

(RM1)（局部有限）每个 $x \in \Omega$ 都有一个测度有限的开邻域。(RM2)（外正则性）博雷尔 $A \subseteq \Omega$ 的测度是包含 A 的 Ω 的开子集的测度下确界。(RM3)（开集的内正则性）开 $U \subseteq \Omega$ 的测度是 U 的紧子集的测度上确界。

假设 G 是一个群，且 $H \leq G$。左陪集空间 G/H 上的测度 μ 称为左不变的，如果对于任意可测的 $A \subseteq G/H$ 和 $g \in G$，都有 $\mu(A) = \mu(gA)$。

局部紧群 G 是指一个群，其底层集合上赋有局部紧且豪斯多夫的拓扑，并且乘法和求逆运算连续。容易看出，当 H 是 G 的紧子群时，赋有商拓扑的左陪集空间 G/H 也是局部紧豪斯多夫拓扑空间。我们有以下事实 [DE09，第 1] 章：

事实 2.2. 假设 G 是一个局部紧群，且 $H \leq G$ 是紧的。那么左陪集空间 G/H 上存在一个左不变的非零 Radon 测度。此外，任意两个这样的测度只相差一个常数。

特别地，对于 $H = \{1_G\}$，局部紧群 G 可以赋予一个左不变、完备且非零的 Radon 测度，称为左 Haar 测度。任意两个左 Haar 测度只相差一个正的常数。若左 Haar 测度 μ 在 G 上是右不变的（即对于所有可测的 $A \subseteq G$ 和 $g \in G$，$\mu(A) = \mu(Ag)$），则称其为 Haar 测度。若 G 上的某个（等价地，所有）Haar 测度都是右不变的，则称 G 是幺模的。带有欧几里得拓扑的加法群 $\mathbb{R}^d$ 以及紧群尤其是幺模的。

以下是关于事实 2.2 中 Radon 测度的一些其他性质，我们将会用到。

事实 2.3. 假设 G 是一个局部紧群，且 $H \leq G$ 是紧的。假设 μ 是左陪集空间 G/H上的左不变、完备且非零的 Radon 测度。那么有以下结论：

(1) 开集具有正测度。(2) 紧集具有有限
测度。

2.2. 黎曼度量与李群。本节内容是标准内容，可参见任何一本黎曼几何教材；例如参见 [Lee18], 。

设 M 是一个光滑流形，黎曼度量 g 在 M 上以光滑的方式为每个点 $p \in M$ 赋予切空间 T_pM 上的正定内积 g_p，其中 T_pM 是 M 在点 p处的切空间。这里，正定意味着对每个 $v \in T_pM$，$g_p(v, v) \geq 0$，且等号成立当且仅当 $v = 0$。黎曼流形 (M, g)是一个配备了 M上的黎曼度量 g 的光滑流形。

假设 (M, g) 是一个维数为 n 的黎曼流形。设 $U \subseteq M$ 为一个坐标图，且 x：$U \to \mathbb{R}^n, p \mapsto (x_1(p) \ldots, x_n(p))$ 为坐标函数。如果 $K \subseteq U$是紧的，我们定义

$$\mathrm{Vol}_g(K) = \int_{z \in x(K)} \sqrt{G \circ x^{-1}}(z) d\lambda.$$

其中 $G = \det(g_{ij})^{(i,j)\in[n]\times[n]}$、 $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$，且 λ 是 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度。回顾一下，如果对于每个坐标图 $U \subseteq M$ 和坐标函数$x\colon U \to \mathbb{R}^n$，像 $x(A\cap U)$ 都是可测的，则称 $A \subseteq M$ 是可测的。对于可测的 $A \subseteq M$，我们可以将其体积 $\mathrm{Vol}_g(A)$ 定义为有限个紧集并的体积上确界，其中每个紧集都包含在某个坐标图中。我们有以下事实:

事实 2.4。Vol_g 是 M 上的完备测度，与 M上的拓扑相容。此外，Vol 与坐标图的选择无关。

设（M, g）是维数为 n的黎曼流形。令 $U \subseteq M$ 为一个坐标图， $x\colon U \to \mathbb{R}^n, p \mapsto (x_1(p) \ldots, x_n(p))$为坐标函数。定义可求长曲线的长度 L_g。

众所周知，在连通的黎曼流形中，任意两点 p 和q 都可以由一条可求长曲线连接。我们定义

$$d_g(p,q) = \inf\{\gamma : \gamma \text{ is an admissible curve linking } p \text{ and } q\}.$$

事实 2.5。 d_g 是与 M上的拓扑相容的度量。

如果 d 是 M 上的一个度量，并且对于某个黎曼度量 g，有 $d = d_g$ ，则称 d 为由黎曼度量 g诱导的距离函数。下面的事实说明了不变黎曼度量的存在性。

Fact 2.6. *If a Lie group G acts smoothly and transitively on a smooth manifold M with compact isotropy groups, then there exists a G-invariant Riemannian metric on M.*

Suppose (M, g) is an n-dimensional Riemannian manifold. The **Ricci curvature** is the covariant 2-tensor field defined as the trace of the curvature endomorphism on its first and last indices, and the **scalar curvature** is the function S defined as the trace of the Ricci curvature. The next fact shows that the volume of a infinitesimal ball is controlled by the scalar curvature.

Fact 2.7. *Let (M, g) be an n-dimensional Riemannian manifold with constant scalar curvature S. Then when $r \to 0$, a ball of radius r at the identity point has volume*

$$\frac{1}{n}\alpha_{n-1} r^n \left(1 - \frac{Sr^2}{6(n+2)} + O(r^3)\right),$$

where

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k)!} & \text{when } n = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, & \text{when } n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Constructions and conjectures

In this section, we will go through in more details the earlier mentioned example of open $A \subseteq \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ with measure smaller than $1/2$ such that

$$\mu(A^2) = 4\mu(A) - 4(\mu(A))^2 < 4\mu(A).$$

We will state the relevant conjectures and generalizations for semisimple Lie groups.

在陈述这个例子之前，我们需要先介绍几个关于 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 基本性质的引理。设 u、 v和 w 遍历 $\mathbb{R}^3$中的单位向量，并令 $\alpha(u,v) := \arccos(u\cdot v)$ 表示 u 与 v之间的夹角。设 ϕ 和 θ 遍历 $\mathbb{R}$。用 R_u^ϕ 表示逆时针

绕有向角 ϕ 旋转，其中旋转轴及其正方向（按照右手定则）由单位向量 u 指定。我们首先回顾欧拉旋转定理：

Fact 3.1. *Each nontrivial element $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ is of the form R_u^ϕ with $\phi \in (0, 2\pi)$. Moreover, the set of elements in $\mathbb{R}^3$ fixed by such g is* $\mathrm{span}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

The following lemma is essentially a variation of the above fact.

Lemma 3.2. *Let u be a fixed unit vector. Then every $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ is of the form $R_v^\theta R_u^\phi$ with v a unit vector orthogonal to u. Likewise, every $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ is of the form $R_u^{\phi'} R_w^{\theta'}$ with w a unit vector orthogonal to u.*

证明。我们证明第一个断言。取 v 为 $\mathrm{span}(u, g(u))$ 的法向量。则 v 与 u 正交，并且存在 θ，使得 $g(u) = R_v^\theta(u)$。现在，$g^{-1}R_v^\theta$ 固定 u，因此由事实 3.1，$g^{-1}R_v^\theta = R_u^{-\phi}$ 对某个 $\phi \in \mathbb{R}$ 成立。因此，$R_v^\theta R_u^\phi$。

The second assertion can be obtained by applying the first assertion to g^{-1}. □

We will need the following inequality:

Lemma 3.3. *Let u be a fixed unit vector. Suppose $g_1, g_2 \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ are such that $\alpha(u, g_i(u)) \le \pi/2$ for $i \in 1, 2$. Then we have $\alpha(z, g_1g_2(z)) \le \alpha(z, g_1(z)) + \alpha(z, g_2(z))$.*

Proof. Applying Lemma 3.2, we can write g_2 as $R_v^{\theta_2}R_u^{\phi_2}$ and g_1 as $R_u^{\phi_1}R_w^{\theta_1}$ with v and w orthogonal to u. It is easy to see that

$$\alpha(u, g_1(u)) = \alpha(u, R_w^{\theta_1}(u)) \text{ and } \alpha(u, g_2(u)) = \alpha(u, R_v^{\theta_2}(u)).$$

On the other hand,

$$\alpha(u, g_1g_2(u)) = \alpha(u, (R_w^{\theta_1}R_v^{\theta_2})(u)).$$

The triangle inequality in term of angles gives us

$$\alpha(u, (R_w^{\theta_1}R_v^{\theta_2})(u)) \le \alpha(u, R_v^{\theta_2}(u)) + \alpha(R_v^{\theta_2}(u), (R_w^{\theta_1}R_v^{\theta_2})(u)).$$

As w is orthogonal to u and possibly not to to $R_v^{\theta_2}(u)$, we have

$$\alpha(R_v^{\theta_2}(u), (R_w^{\theta_1}R_v^{\theta_2})(u)) \le \alpha(u, R_w^{\theta_1}(u)).$$

The desired conclusion follows. □

Lemma 3.4. *Let u be a unit vector, $\theta \in (0, \pi/2)$, and $A = \{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \mid \alpha(u, g(u)) \le \pi/2 - \varepsilon\}$. Then*

$$A^2 = \{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \mid \alpha(u, g(u)) \le \pi - 2\varepsilon\}.$$

Proof. The inclusion $A^2 \subseteq \{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \mid \alpha(u, g(u)) \le \pi - 2\varepsilon\}$ is immediate from Lemma 3.3. Now suppose $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ satisfies $\alpha(u, g(u)) \le \pi - 2\varepsilon$. Then, Lemma 3.2 yields $g = R_v^\theta R_u^\phi$ with v orthogonal to u and $\theta \in [2\varepsilon - \pi, \pi - 2\varepsilon]$. We can rewrite $g = R_v^{\theta/2}(R_v^{\theta/2}R_u^\phi)$. The other inclusion follows. □

We need the following facts about the unit sphere:

Fact 3.5. *Let $S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1\}$. Then there is a complete Radon measure ν of S^2 satisfying the following conditions:*

(1) ν 关于 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 的左作用保持不变，并且 $\nu(S^2) = 1$。

(2) 如果 $X \subseteq S^2$ 是集合 $\{u \in \mathbb{R}^3 : \theta_1 \leq \theta(u) < \theta_2, \phi_1, \leq \phi(u) < \phi_2\}$，那么 $\nu(X)$ 由黎曼积分给出

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi.$$

下面的命题给出了我们的构造。这可以看作前两位作者在 [JT22] 中给出的例子的推广。

命题 3.6. 假设一个开集 $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 具有如下形式：$\{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) : \angle(u, gu) < \theta\}$，其中 $u \in \mathbb{R}^3$ 是一个单位向量，且 $\theta \in (0, \pi/2]$。那么我们有

$$\mu(A^2) = 4\mu(A)(1 - \mu(A)).$$

In 特别地，$\mu(A^2) < 4\mu(A)$，且 A 的测度可以任意小 *ll.*

证明. 设 u 和 A 如引理 3.4 所述。回想一下，群 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 在二维球面 S^2 上传递作用，该球面由 $\mathbb{R}^3$ 中所有单位向量组成。设 $T \leq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ 是 u 的稳定子。那么，$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})/T$ 可以与 S^2 等同。令 πA 和 πA^2 分别为 A 和 A^2 在 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})/T$ 中的投影，我们有

$$\pi A = \left\{ v \mid \alpha(u,v) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\} \text{ and } \pi A^2 = \{ v \mid \alpha(u,v) \leq \pi - 2\varepsilon \}.$$

Let ν be the Radon measure induced by μ on $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})/T$ via the quotient integral formula. From the way we construct A and Lemma 3.4, we have $A = AT$ and $A^2 = A^2T$. Hence, $\mu(A) = \nu(\pi A)$ and $\mu(A^2) = \nu(\pi A^2)$. Finally, note that ν is the normalized Euclidean measure, so an obvious computation yields the desired conclusion. □

In light of Proposition 3.6, it is natural to generalize the aforementioned Breuillard–Green conjecture to sets with all possible measures in $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Conjecture 3.7 (Strong Breuillard–Green Conjecture)**.** *Suppose $A \subseteq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ is open. Then*

$$\mu(A^2) \geq \min\{1, 4\mu(A)(1 - \mu(A))\}.$$

Moreover, if $\mu(A) < 1/2$, the equality happens if and only if A is of the form

$$\{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) : \angle(u, gu) < \arccos(1 - \mu(A))\}$$

where $u \in \mathbb{R}^3$ is a unit vector.

The aforementioned Breuillard–Green Conjecture for $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ also has a natural generalization to all compact simple Lie groups.

Conjecture 3.8 (Breuillard–Green Conjecture for compact simple Lie groups)**.** *Let G be a compact simple Lie group with dimension d equipped with a normalized Haar measure μ, and the dimension of the maximal compact proper subgroup is m. Then for every $\varepsilon > 0$, every compact $A \subseteq G$ with sufficiently small measures,*

$$\mu(A^2) > (2^{d-m} - \varepsilon)\mu(A).$$

We now discuss a more general construction. We start with some fact about compact simple Lie group and symmetric space [Lee18].

事实 3.9. 假设 G 是一个紧致单李群，那么在相差一个常数的意义下，存在唯一一个定义在 G 上的˜双不变黎曼度量，并在 G上诱导出距离函数 d 。此外，设$H \leq G$ 是 G的一个闭子群，因而也是紧子群。那么存在唯一一个定义在 G/H 上的左不变黎曼度量，使得若 d 是它在 G/H上诱导的距离函数，则

$$d(g_1H, g_2H) := \mathbb{E}_{h\in H}\tilde{d}(g_1h, g_2h).$$

The Riemannian metric d has positive constant scalar curvature.

The following example shows that Conjecture 3.8 if true, the 2^{d-m} factor is also sharp, and the $-\varepsilon$ term is necessary.

Proposition 3.10. *Let G be a compact simple Lie group with dimension d equipped with a normalized Haar measure μ. Let m be the dimension of a maximal compact proper subgroup. Then for sufficiently $c > 0$ there is $A \subseteq G$ with $\mu(A) = c$ and*

$$\mu(A^2) < 2^{d-m}\mu(A).$$

Proof. Let $H \leq G$ be a maximal proper compact subgroup. Then $\dim H = m$. By Fact 3.9, G/H is a symmetric space and hence it has a unique G-invariant Riemannian metric, and this metric induces a volume measure λ on G/H.

注意， μ 在 G/H 上的投影测度等于 λ （相差一个常数因子），因为 μ 在 G/H 上的投影测度也是一个 G不变的博雷尔测度。设 B_r 是 G/H中半径为 r 的开球，并且 $D_r = \pi^{-1}(B_r)$，其中 π： $G \to G/H$ 是投影映射。我们断言 $D_r^2 \subseteq D_{2r}$。

为证明该断言，设 g_1 和 g_2 是 D_r 中任意的两个元素，并设 πg_1 和 πg_2 分别是 g_1 和 g_2 在 G/H 中的投影。对于 $i = 1$、2，设 γ_i 是连接 πg_i 与 G/H 中单位元的测地曲线，根据 g_i 的选取和事实 2.5，每条 γ_i 的长度都严格小于 r 。由于 G/H 上的度量具有 G 不变性，$(\pi g_1)\gamma_2$ 与 γ_2 的长度相同。现在设 γ 是在 γ_1 之后由 $(\pi g_1)\gamma_2$ 形成的曲线，则它是连接 $\pi g_1 g_2$ 与单位元的曲线，且长度严格小于 $2r$。因此 $g_1g_2 \in D_{2r}$ ，从而 $D_r^2 \subseteq D_{2r}$。利用 g 当 r 足够 y 小时，我们有

$$\frac{\mu(D_r^2)}{\mu(D_r)} \leq \frac{\mu(D_{2r})}{\mu(D_r)} = \frac{\lambda(B_{2r})}{\lambda(B_r)} \to 2^{d-m} \quad (\text{as } r \to 0).$$

根据事实 3.9， G/H 上的度量具有正的常数量曲率。因此利用事实 2.7，当 r 足够小时，我们有 $\frac{\mu(D_r^2)}{\mu(D_r)} < 2^{d-m}$ 。□

One may compare Conjecture 3.8 with the recently developed Brunn–Minkowski phenomenon by the authors [JTZ21]:

Fact 3.11 (Symmetric Brunn–Minkowski for simple Lie groups with finite center)**.** *Let G be a simple Lie group with finite center, and μ a Haar measure on G. Let d be the topological dimension of G, and m be the dimension of a maximal compact subgroup of G. Then for every compact $A \subseteq G$,*

$$\mu(A^2) \geq 2^{d-m}\mu(A).$$

For a more general Brunn–Minkowski result we refer to [JTZ21]. We also remark that the Brunn–Minkowski inequality became trivial when the ambient group is compact, as in this case $m = d$ in Fact 3.11, while in Conjecture 3.8 we have $m < d$.

现在我们来看一个关于具有有限中心 [HN12] 的非紧致单李群的事实。

事实 3.12. 假设 G 是一个具有有限中心的非紧致单李群，并设 $H \leq G$ 是 G 的一个具有最大维数的闭连通紧子群。那么 G/H 上存在唯一的左不变黎曼度量。该黎曼度量具有负常数数量曲率。

We will refer to the metric obtained in Facts 3.9 and 3.12 as the canonical metric on G/H. We now state a general conjecture:

Conjecture 3.13 (Minimal measure doubling Conjecture)**.** *Suppose G is a simple Lie group equipped with a Haar measure μ, and $A \subseteq G$ is open. Let $H \leq G$ be a proper compact connected subgroup of G with maximal dimension, $\pi : G \to G/H$ is the quotient map, $B_r \subseteq G/H$ is the ball with radius r centered at the coset H, and B_{2r} is defined similarly. Assuming $\mu(A) = \mu(\pi^{-1}(B_r))$, we have*

$$\mu(A^2) \geq \min\{\mu(\pi^{-1}(B_{2r})), \mu(G)\}.$$

Moreover, the equality happens if an only if A is a conjugate of $\pi^{-1}(B_r)$.

We will next deduce a number of consequences of the above conjecture.

Proposition 3.14. *Assuming the minimal measure doubling Conjecture holds. Then we have the following:*

(1) 强 Breuillard–Green 猜想成立。(2) 如果 $A \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 是开的，那么存在一个 Haar 测度 μ，使得

$$\mu(A^2) \geq 4\mu(A)(1 + \mu(A))$$

此外，考虑 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 通过线性分式变换在上半平面上的作用。当且仅当 A 具有如下形式时，等式成立

$$\{g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) : d(p, gp) < r\}.$$

(3) 事实 3.11 成立。

证明。(1) 的结论由我们的构造显然可得；根据事实 3.9，G-不变度量也是唯一的。类似地，(3) 的结论由事实 3.12、数量曲率为负这一事实，以及球半径趋于 0 时的事实 2.7 得出。这里我们只证明 (2)，它也可以看作非紧群的猜想 3.13 中第一个非平凡情形。

令 $H \cong \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ 为 $G := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的极大紧子群。那么 G/H 与双曲平面 $\mathbb{H}_2$ 等距。选取 G 上的 Haar 测度 μ，使得在诱导度量下，$\mathbb{H}_2$ 中半径为 r 的球的体积为

$$\int_0^r \sinh(t)\,\mathrm{d}t.$$

Let $\pi : G \to G/H$ be the quotient map and $A = \pi^{-1}(B_r)$. Using the same proof as in Proposition 3.10 together with Fact 3.12 it is easy to see that $A^2 \subseteq \pi^{-1}(B_{2r})$. Thus

$$\mu(A^2) \leq \cosh(2r) - 1 = 2\cosh(r)^2 - 2 = 4\mu(A)(1 + \mu(A))$$

如所需。 □

4. Small growth in ultraproducts

在本节中，我们将从 SO(3, ℝ) 中一列大小递减的小增长集出发，在 SO(3, ℝ) 的一个超积中构造无穷小小增长集。我们将更一般地讨论紧群的超积。正如引言中此前所提到的，我们的证明必须考虑两个集合乘积的非对称问题。

Let G be a unimodular locally compact group, and μ a complete Haar measure. Suppose $A, B \subseteq G$ are such that A, B, and AB are measurable, and $0 < \mu(A)\ \mu(B)\ \mu(AB) < \infty$. We define the **Brunn–Minkowski growth** $\mathrm{BM}(A, B)$ to be the unique $r > 0$ such that

$$\mu(AB)^{\frac{1}{r}} = \mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}}.$$

特别地，对于 $A = B$，我们有 $\mathrm{BM}(A, A) \leq r$ 当且仅当 $\mu(A^2) \leq 2^r \mu(A)$。注意，由于完备 Haar 测度在相差一个常数的意义下具有唯一性（事实 2.2(6)），这一些定义并不依赖于完备 Haar 测度 μ 的选择。乍一看，这一定义似乎也适用于使用左 Haar 测度的非幺模情形。然而，对于非幺模局部紧群，正确的定义需要同时涉及左 Haar 测度和右 Haar 测度；详情请参见 [JTZ21] 。由于这一问题与当前目的无关，我们在此不再进一步讨论。

现在我们回顾一下逻辑学中超滤子和超积理论的一些基本内容。关于超滤子的系统性介绍及其应用，请参见 [Gol22]。$\mathcal{U}$ 在 ℕ上的一个非主超滤子，是由 ℕ的无限子集构成的集合，并满足以下条件：

(NU1) 如果 I、$J \in \mathcal{U}$，那么 $I \cap J \in \mathcal{U}$。(NU2) 如果 $I \in \mathcal{U}$且 $I \subseteq J$，那么 $J \in \mathcal{U}$。(NU3) 对所有 $I \subseteq \mathbb{N}$，要么 I 要么 $\mathbb{N} \setminus I$ 属于 $\mathcal{U}$。

可以将 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子视为在 $\mathbb{N}$ 上选定一种“几乎处处／几乎每个”的概念，其中 $I \in \mathcal{U}$ 当且仅当 “ 几乎每个 ” 自然数 n 都属于 I。通过考虑有限可加测度，可以将此概念精确定义。

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}, \quad I \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } I \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{if } I \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

注意，该赋值不是 σ-可加的，因此不是测度。事实上，对于每个 n，集合 $\{n\}$ 属于 $\mathcal{U}$，因为它是有限集，但它们的并集 ℕ不属于 $\mathcal{U}$，因为它是余有限集。尽管如此，这是一个非常有用的启发式方法，我们将进一步加以运用。对于固定的非主超滤子$\mathcal{U}$，当 P是自然数的一个性质时，如果 $\{n\colon\ P(n)$成立$\}$属于 $\mathcal{U}$，我们记几乎处处 n 满足 P。非主超滤子的存在性依赖于选择公理。然而，根据Shoenfield绝对性论证，我们的定理的真值独立于选择公理。

在全文中，我们固定一个包含所有我们关心的数学对象的环境集合 V；例如，我们可以选择令 V 为集合论宇宙的一个初始段。固定 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子 $\mathcal{U}$。如果对于几乎处处的 n，都有 $a_n = b_n$，那么 V 中的两个元素序列 (a_n) 和 (a'_n) 称为$\mathcal{U}$-相等。容易看出，$\mathcal{U}$-相等是V上的一种等价关系。对于由 V 中元素组成的一个序列 (a_n)，我们用 $(a_n)/\mathcal{U}$ 表示其在$\mathcal{U}$-相等关系下的等价类。关于子集 V 的序列 (A_n)，相对于$\mathcal{U}$ 的超积 $\prod_{\mathcal{U}} A_n$ 是集合

$$\{(a_n)/\mathcal{U} : a_n \in A_n \text{ for each } n\}.$$

超积 $\prod_{\mathcal{U}} A_n$ 可以看作是对 (A_n) 的一种平均，反映了在 $\mathcal{U}$-几乎处处的 A_n 上成立的某些行为类型。以下事实使这一直觉更加精确。

Fact 4.1. *Fix a nonprincipal ultrafilter $\mathcal{U}$. Suppose (A_n), (B_n), and (C_n) are a sequence of sets, $\mathcal{U}$ is a nonprincipal ultrafilter on $\mathbb{N}$, $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$, $B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$, and $C = \prod_{\mathcal{U}} C_n$. Then*

(1) 当且仅当对几乎处处的 n，有 $A = \emptyset$ $A_n = \emptyset$。(2) 当且仅当对几乎处处的 n，有 $A \subseteq B$ $A_n \subseteq B_n$。(3) $A \cup B = \prod_{\mathcal{U}}(A_n \cup B_n)$，$A \cap B = \prod_{\mathcal{U}}(A_n \cap B_n)$，$A \setminus B = \prod_{\mathcal{U}}(A_n \setminus B_n)$。(4) 令 $\times$ 表示笛卡尔积，则 $A \times B = \prod_{\mathcal{U}}(A_n \times B_n)$。(5) 假设 $\pi\colon B \times C \to B$ 和 $\pi_n\colon B_n \times C_n \to B_n$ 对所有 n 都是到第一坐标的投影，并且假设对所有 n，$A \subseteq B \times C$ 和 $A_n \subseteq B_n \times C_n$。那么

$$\pi(A) = \prod_{\mathcal{U}} \pi_n(A_n).$$

The following "compactness" property (also called $\aleph_1$-saturated property) is a new feature of sets obtained by ultraproducts. It is behind a major advantage with working with ultraproduct: One can replace approximation by actual equality if willing to give up some quantitative information.

Fact 4.2. *Suppose (A_n) is a sequence of sets, each obtained by taking ultraproducts of a sequence of sets in V. If for each finite $I \subseteq \mathbb{N}$, the intersection $\bigcap_{n\in I} A_n$ is nonempty, then the intersection $\bigcap_n A_n$ is nonempty.*

The following remark, on the other hand, highlight a difficulty of working with ultraproduct, namely, we completely lose meaningful topological data.

注记 4.3。令 $A_n = \{0, 1\}$，以及 $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$。利用事实 4.2（的对偶），可以证明 A 是不可数的。假设我们赋予 A_n 离散拓扑。那么 A 必须是"拟紧致"的，并且对于每个 $a \in A$，单元素集合 $\{a\}$ 是"伪开"的。集合 $\{\{a\}\colon a \in A\}$ 构成了 A 的一个覆盖，但不存在有限子覆盖。

As we are interested in handling group and products of sets on them, the following fact is needed:

Fact 4.4. *Fix a nonprincipal ultrafilter $\mathcal{U}$. Suppose (G_n) is a sequence of groups, G is the ultraproduct $\prod_{\mathcal{U}} G_n$ of the underlying set.*

(1) Then the map

$$\left(\prod G_n\right)^{[2]} \to \left(\prod G_n\right), ((a_n), (b_n)) \mapsto (a_n b_n)$$

induces a binary operation from $G \times G$ to G with $((a_n)/\mathcal{U}, (b_n)/\mathcal{U}) \mapsto (a_n b_n)/\mathcal{U}$, and the set G together with this binary operation map is a group.

(2) Suppose (A_n) and (B_n) are sequences with $A_n, B_n \subseteq G_n$, $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$, $B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$, and AB is the product set of A and B with respect to the group operation defined in (1). Then $AB = \prod_{\mathcal{U}} A_n B_n$.

对于一列群 (G_n) 和实数集 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$，关于 $\mathcal{U}$ 的 (G_n) 的超积记作 $\prod_{\mathcal{U}} G_n$，是群 G，其底层集合是 (G_n) 的底层集合序列的超积，其在 G 上的群运算由事实 4.4(1) 给出。

伪紧群 G 是一个群，并附带一列紧群 (G_n) 以及实数集 G 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$，满足 $G = \prod_{\mathcal{U}} G_n$。我们通常会将 G 仅视为一个群，而不提及 (G_n) 和 $\mathcal{U}$ 这些数据。若要说明其他信息，我们会说伪紧群 G 是由一列局部群 (G_n) 和一个超滤子 $\mathcal{U}$ 构造的。注意，根据备注 4.3，显然无法为这样的 G 配备拓扑。伪局部紧群也有一个显而易见的概念，但由于后文不会用到，我们不再讨论。

与拓扑信息不同，我们将看到，测度论信息能够通过超积得到有意义的保留。假设 G 是由群的序列 (G_n) 和一个非主超滤子 $\mathcal{U}$ 构造的伪局部紧群。如果存在一个序列 (A_n)，其中 $A_n \subseteq G_n$ 可测，且满足 $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$，那么我们称 $A \subseteq G$ 是伪可测的 A。由事实 4.1(4) 可知，G 的伪可测子群构成一个布尔代数（对有限交、有限并和相对补运算封闭）。

A pleasure working with ultrafilter is the following easy fact:

Fact 4.5. *Fix a nonprincipal ultrafilter $\mathcal{U}$ on $\mathbb{N}$. Let (r_n) be a sequence of real numbers. Then exactly one of the following three scenarios hold:*

(1) There is $r \in \mathbb{R}$ such that for all $\varepsilon > 0$, we have $|r_n - r| < \varepsilon$ for a.e. n.
(2) for all $C > 0$, we have $r_n > C$ for a.e. n.
(3) for all $C > 0$, we have $r_n < -C$ for a.e. n.

对于实数序列 (r_n) 和非主超滤子 $\mathcal{U}$，(r_n) 在 $\mathcal{U}$ 下的极限记为 $\lim_{\mathcal{U}} r_n$，定义为 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 中满足事实 4.5 的三种情形之一的唯一元素。这个极限概念具有预期的性质。事实 4.6 记录了我们实际会用到的一些性质。

事实 4.6. 固定实数集 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子 $\mathcal{U}$。设 (r_n)、(s_n) 和 (t_n) 是非负实数序列，且 K 是一个常数。那么有以下结论

(1) $\lim_{\mathcal{U}}(r_n + s_n) = \lim_{\mathcal{U}} r_n + \lim_{\mathcal{U}} s_n$ (2) $\lim_{\mathcal{U}} Kr_n = K\lim_{\mathcal{U}} r_n$ (3) 若对几乎处处的 n，有 $r_n \leq s_n$，则 $\lim_{\mathcal{U}} r_n \leq \lim_{\mathcal{U}} s_n$。 (4) 若 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\lim_{\mathcal{U}} r_n$、$\lim_{\mathcal{U}} s_n$、$\lim_{\mathcal{U}} t_n < \infty$，则

$$f\left(\lim_{\mathcal{U}} r_n, \lim_{\mathcal{U}} s_n, \lim_{\mathcal{U}} t_n\right) = \lim_{\mathcal{U}} f(r_n, s_n, t_n).$$

Here, we hold the convention that $r + \infty = \infty + \infty = K \cdot \infty = \infty$ and $r < \infty$ for $r \in \mathbb{R}^{>0}$.

Using Fact 4.6(1), one can deduce Lemma 4.7 below. We omit the obvious proof.

Lemma 4.7. *Suppose G is a pseudo-locally-compact group built from a sequence (G_n) of locally compact groups and ultrafilter $\mathcal{U}$. Let (μ_n) be a sequence with μ_n a left Haar measure on G_n. Then we have the following:*

(1) 若 $A \subseteq G$ 是伪可测的，且对两个序列 (A_n) 和 (A'_n)，其中 A_n、$A'_n \subseteq G_n$ 可测，则 $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n = \prod_{\mathcal{U}} A'_n$

$$\lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A'_n).$$

(2) 若 A、$B \subseteq G$ 是互不相交的伪可测集，$A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$，且对两个序列 (A_n) 和 (B_n)，其中 A_n、$B_n \subseteq G_n$ 可测，则 $B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$

$$\lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n \cup B_n) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n) + \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(B_n).$$

Suppose G is a pseudo-compact group built from a sequence (G_n) of compact groups and an ultrafilter $\mathcal{U}$. A measure μ on G is a **pseudo-Haar measure** if the following holds:

(PH1) there is a sequence (μ_n) with μ_n a Haar measure on G_n such that for every pseudo-measurable $A \subseteq G$, we have

$$\mu(A) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n)$$

where (A_n) is a sequence with $A_n \subseteq G$ measurable and $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$

(PH2) μ is the completion of its restriction to the σ-algebra generated by pseudo-measurable sets.

为简化记号，我们将 (PH1) 写作 $\mu = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n$ on 伪可测集。根据事实 4.6(2)，伪 Haar 测度的常数倍仍然是伪 Haar 测度。我们注意到，每个伪可测集都是相对于某个伪 Haar 测度的可测集，但反之并不成立。下一个引理表明，可以由一列 Haar 测度构造出一个伪 Haar 测度。

引理 4.8. 设 G 是由一列紧群 (G_n) 和一个超滤子 $\mathcal{U}$ 构造的拟紧群。设 (μ_n) 是一个序列，其中 μ_n 是 G_n 上的 Haar 测度。那么存在 G 上的伪 Haar 测度，使得在 G的伪可测子集上，$\mu = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n$。

证明。设 μ_0 是定义在 G的伪可测子集所成的布尔代数上的函数，其定义如下:

$$\mu_0(A) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n)$$

其中 (A_n) 是一个序列，$A_n \subseteq G$ 可测且 $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$。注意，根据事实 4.7(1)，$\mu_0$ 是良定义的。根据极限和超积的定义，我们有 $\mu_0(\emptyset) = 0$。如果一个伪可测集 $A \subseteq G$ 是 G 的伪可测子集的可数并，那么由事实 4.2 可知，A 等于 G的这些子集的有限并。因此，由事实 4.7(2)可知，μ_0 是一个预测度。于是，根据卡拉泰奥多里扩张定理（事实 2.1），μ_0 可扩张为定义在由伪可测集生成的 G 子集的 σ 代数上的测度。通过完备化，我们得到具有所需性质的伪 Haar 测度。□

The next lemma shows that a pseudo-compact group is in a sense unimodular:

Lemma 4.9. *Suppose G is pseudo-compact, $A \subseteq G$ is pseudo-measurable, and μ is a pseudo-Haar measure on G. Then for all $g \in G$, the sets gA and Ag are pseudo-measurable, and $\mu(gA) = \mu(A) = \mu(Ag)$.*

证明。我们只证明 gA是伪可测的，且 $\mu(gA) = \mu(A)$，其余部分类似。假设 G 由紧子群序列 G_n 和非主超滤子 $\mathcal{U}$构成。设 (g_n)、(A_n) 和 (μ_n) 是满足以下条件的序列:

$g_n \in G_n$,$g = (g_n)/\mathcal{U}$, $A_n \in A$ 是可测的，$A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$, μ_n 是 G_n上的 Haar 测度，并且 $\mu(A) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n)$。于是可以验证 $gA = \prod_{\mathcal{U}}(g_n A_n)$，因此 gA 是伪可测的。等式 $\mu(gA) = \mu(A)$ 可由等式 $\mu_n(A_n) = \mu_n(g_n A_n)$ 推出。□

设 G 是一个伪紧群。若存在 G上的伪 Haar 测度 μ 使得.....，则称伪可测集 A、$B \subseteq G$ 可公度：

$$0 < \mu(A), \mu(B) < \infty.$$

我们称 A 相对于 B 是无穷小的，如果存在定义在 G 上的伪 Haar 测度 μ，使得

$$0 < \mu(A) < \infty \text{ and } \mu(B) = \infty.$$

以下引理 是 Haar 测度在相差一个常数意义下唯一性的对应结果 .

引理 4.10。设 G 是一个伪紧群，μ 和 μ' 是定义在 G 上的伪 Haar 测度。假设存在一个伪可测集 $A \subseteq G$，使得 $0 < \mu(A) < \infty$ 且 $0 < \mu'(A) < \infty$。那么存在 $K \in \mathbb{R}^{\geq 0}$，使得 $\mu' = K\mu$。

证明。设 G 由序列 (G_n) 和超滤子 $\mathcal{U}$ 构造而成。令 $K = \mu'(A)/\mu(A)$。我们将证明，对任意伪可测 $B \subseteq G$，都有 $\mu'(B) = K\mu(B)$。这已足够，因为可以由预测度 μ_0 通过完备化和 Carath´eodory 定理唯一地得到 μ，其中 μ_0 是 μ 在 B 的伪可测子集上的限制。设 (A_n) 和 (B_n) 是满足以下条件的序列：A_n、$B_n \subseteq G_n$ 可测，$A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$，且 $B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$。设 (μ_n) 和 (μ'_n) 是两个满足 μ_n 且 μ'_n 是定义在 G_n 上的 Haar 测度的序列，并且

$$\mu(A) = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n) \quad \text{and} \quad \mu'(A) = \lim_{\mathcal{U}} \mu'_n(A_n).$$

根据定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，几乎处处的 n 都有

$$\mu_n(A_n) < (1+\varepsilon)\mu(A) \quad \text{and} \quad \mu'(A) < (1+\varepsilon)\mu_n(A_n).$$

因此，对于这些 n, $K\mu_n(A_n) < (1+\varepsilon)^2\mu'_n(A_n)$。由于 μ_n 和 μ'_n 相差一个常数，所以可得 $K\mu_n(B_n) < (1+\varepsilon)^2\mu'_n(B_n)$。由此可知 $\mu(B) \leq K(1+\varepsilon)^2\mu'(B)$。由于 ε 可以任意取值，我们得到 $\mu'(B) \leq K(B)$。类似地可得，$\mu'(B) \geq K\mu$。因此，$\mu'(B) = K\mu(B)$，证明完毕。□

我们由此推出关于可公度性和无穷小性的若干推论。沿着这一思路还有其他结论，但我们将其留给感兴趣的读者。

推论 4.11. 设 G 是一个伪紧群，且 $A, B, C \subseteq G$ 均为伪可测的。那么有如下结论：

(1) If A and B are commensurable, and B and C are commensurable, then A and C are commensurable.
(2) If A and B are commensurable, and A is infinitesimal compared to C, then B is infinitesimal compared to C.

Proof. We will only prove (1), as the proof of (2) is similar. Let μ and μ' be pseudo-Haar measure on G such that $0 < \mu(A)\ \mu(B) < \infty$ and $0 < \mu'(B)\ \mu'(C) < 0$. Then by Lemma 4.10, μ and μ' differs by a constant K. It follows that $0 < \mu(A) < \infty$, which yields the desired conclusion. □

设 G 为一个伪紧群。假设 A、$B \subseteq G$ 满足 A、B 和 AB 均为伪可测的，且 A 与 B 可公度。设 μ 为 G 上的一个伪 Haar 测度，使得 $0 < \mu(A)\ \mu(B) < \infty$。注意，根据事实 4.9，$0 < \mu(AB)$。我们将 Brunn–Minkowski 增长率 $\mathrm{BM}(A, B)$ 定义为唯一的 $r > 0$，使得

$$\mu(AB)^{\frac{1}{r}} = \mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}}$$

如果 $\mu(AB) < \infty$，否则我们令 $\mathrm{BM}(A,B) = \infty$。根据事实 4.10，只要 $0 < \mu(A) < \mu(B) < \infty$，该定义就独立于伪 Haar 测度 μ 的选择。

现在我们证明本节的主要结果：

命题 4.12. 设 G 是由紧群序列（G_n）和非主超滤子 $\mathcal{U}$构成的伪紧群。设（A_n）、（B_n）和（μ_n）是序列，且 $A_n, B_n, A_nB_n \subseteq G_n$ 具有正测度，μ_n 是 G_n上的 Haar 测度。设 A, $B \subseteq G$是伪可测集，且 μ 是 G 上的伪 Haar 测度，使得$A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$ 和$B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$。那么我们有如下结论。

(1) 如果存在常数 N，使得 $\mu_n(A_n)/N \leq \mu_n(B_n) \leq N\mu_n(A)_n$，那么 A 和 B可公度。
(2) 如果 $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_n)/\mu_n(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B_n)/\mu_n(G_n) = 0$，那么 A和 B相对于 G是无穷小的。(3) 如果 A 和 B 可公度，且 r 是一个常数，使得 $\mathrm{BM}(A_n, B_n) \leq r$，那么 $\mathrm{BM}(A,B) \leq r$。

证明。我们首先证明 (1)。对于每个 n，将 μ_n 按一个常数因子缩放，我们可以假设 $\mu_n(A_n) = 1$。令 μ 为 G 上的伪 Haar 测度，使得 $\mu = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n$。我们可以验证 $\mu(A) = 1$ 以及 $1/N < \mu(B) < N$。这表明 A 和 B 是可公度的。

The proof for (2) can be obtained similarly. We now prove (3). Let μ be a pseudo-Haar measure on G such that $0 < \mu(A)\ \mu(B) < \infty$. By suitably scaling, assume $\mu = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n$. Then we have

$$\lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_n) = \mu(A),\ \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(B_n) = \mu(B),\ \text{and}\ \lim_{\mathcal{U}} \mu_n(A_nB_n) = \mu(AB).$$

$\mathrm{BM}(A_n, B_n) \leq r$ 蕴含 $\mu_n(A_nB_n) \leq (\mu_n(A_n)^{\frac{1}{r}} + \mu_n(B_n)^{\frac{1}{r}})^r$ 的条件。由事实 4.6(3,4) 可知，我们还将得到 $\mu(AB) \leq (\mu(A)^{\frac{1}{r}} + \mu(B)^{\frac{1}{r}})^r$。特别地，这意味着 $\mu(AB) < \infty$。再次应用事实 4.6(4)，得到 $\mathrm{BM}(A,B) = \lim_{\mathcal{U}} \mathrm{BM}(A_n, B_n)$。最后，由事实 4.6(3) 即可得到结论。□

5. Approximate groups from small growth

本节将把超积中测度乘积较小的集合与近似群联系起来，后者是用于连接非紧李群的中间对象。

对于常数 K，若 $S \subseteq G$ 满足以下条件，则称其为 K-近似群：
(1) $\mathrm{id}_G \in S$，(2) $S = S^{-1}$，(3) S^2 可由 K 个 S 的左平移覆盖（等价地，可由 K 个 S 的右平移覆盖）。

显然，若 $K < 1$，则不存在 K-近似群，而 1-近似群就是子群。若 $S \subseteq G$ 是某个 K-近似群，则称其为近似群。例如，紧群的开子集是近似群。

若 G 是紧连通群，且 $S \subseteq G$ 是一个 2^r-近似群，并且 S^2 也可测，则 $\mathrm{BM}(S,S) \leq r$。因此，在假设 S^2 仍可测这一相当宽松的条件下，近似群的测度加倍较小。

The following fact from [Tao08] establish a partial converse: Approximate groups arise from sets with small measure growth.

Fact 5.1. *Let G be a compact group equipped with a Haar measure μ, and $A, B \subseteq G$ are such that A, B, and AB are measurable. Suppose $\mu(A)/N < \mu(B) < N\mu(A)$, and $\mathrm{BM}(A, B) \leq r$. Then there is an open $O_{N,r}(1)$-approximate group S such that $\mu(S) \sim_{N,r} \mu(A)$, A is contained in $O_{N,r}(1)$ left translates of S, and B is contained in $O_{N,r}(1)$ right translates of S.*

下面的引理首次表明，近似群具有稳健性，且更易于处理。

引理 5.2. 假设 $S \subseteq G$ 是一个 K-近似群。那么当 $n > 0$ 时， S^n 可以被 S 的 K^{n-1} 个左平移覆盖。

证明。对于 $n = 1$，该陈述由定义直接得出。假设我们已经证明了 n的结论，那么 $S^{n+1} = S^n S$ 可以由 $K^{(n-1)}$ 个 S^2的左平移集覆盖，而后者又可以由 K^n 个 S的左平移集覆盖。□

为了能够在后续使用模型论工具，我们需要一种特殊的近似群。设 Ω 为一个环境集合。Ω 上的结构 Σ 是一个满足以下条件的序列 (Σ_n):

(S1) 对于每个 n， Σ_n 都是 $\mathcal{P}(\Omega^{[n]})$ 的一个布尔子代数。(S2) 对角线 $\{(a, a) : a \in \Omega\}$ 属于 Σ_2。(S3) 如果 $m \leq n$ 和 $\pi : \Omega^{[n]} \to \Omega^{[m]}$ 是从 n 个坐标中选取 m 个坐标的投影，且 $A \subseteq \Omega^{[m]}$ 属于 Σ_m，那么 $\pi^{-1}(A)$ 属于 Σ_n。(S4) 如果 $m \leq n$ 和 $\pi : \Omega^{[n]} \to \Omega^{[m]}$ 是从 n 个坐标中选取 m 个坐标的投影，且 $A \subseteq \Omega^{[n]}$ 属于 Σ_n，那么 $\pi(A)$ 属于 Σ_m。

We say that $D \subseteq \Omega^{[n]}$ is **definable** in Σ if D is an element of Σ_n. A subset of $\Omega^{[n]}$ is **δ-definable** in Σ if it is a countable intersection of subsets of $\Omega^{[n]}$ definable in Σ, and a subset of $G^{[n]}$ is **σ-definable** in Σ if it is a countable union of subsets of $G^{[n]}$ definable in Σ.

A structure Σ on an ambient set Ω is **$\aleph_1$-saturated** if whenever (D_n) is a sequence of subsets of Ω^k is definable in Σ, and every finite intersection is nonempty, then (D_n) has nonempty intersection. The following easy observation about $\aleph_1$-saturation will become very useful later on.

Lemma 5.3. *Suppose Σ is an $\aleph_1$-saturated structure on an ambient set Ω. If $A \subseteq \Omega^{[n]}$ is δ-definable in Σ, $B \subseteq \Omega^{[n]}$ is σ-definable in Σ, and $A \subseteq B$, then there is $D \subseteq \Omega^{[n]}$ definable in Σ such that $A \subseteq D \subseteq B$.*

Proof. Suppose $A = \bigcap_m A_m$ and $B = \bigcup_m B_m$ with $A_m, B_m \subseteq \Omega^{[n]}$ definable in Σ for each m. Then

$$\left(\bigcap_m A_m\right) \cap \left(\bigcap_m (\Omega^{[n]} \setminus B_m\right) = \emptyset.$$

By $\aleph_1$-saturation, there is N such that $\left(\bigcap_{m=1}^N A_m\right) \cap \left(\bigcap_{m=1}^N (\Omega^{[n]} \setminus B_m\right) = \emptyset$. it is easy to check that $D = \left(\bigcap_{m=1}^N A_m\right)$ satisfies desired conditions. □

An **expansion** of a group is a pair (G, Σ) such that G is a group, Σ is a structure on the underlying set of G, and the graph $\Gamma = \{(a, b, c) \in G^3 : ab = c\}$ of multiplication in G is definable in Σ. The following lemma will be useful later on.

Lemma 5.4. *Let (G, Σ) be an expansion of a group. If $A, B \subseteq G$ are definable in Σ, then $AB \subseteq G$ is definable in Σ. Hence, if $A \subseteq G$ is definable in Σ, then $A^n \subseteq G$ is definable in Σ for all n.*

Proof. Let A, B be as in the statement of the lemma. By (S3) $A \times G \times G \subseteq G^{[3]}$ and $G \times B \times G \subseteq G^{[3]}$ are definable in Σ. Set

$$C := (A \times G \times G) \cap (G \times B \times G) \cap \Gamma.$$

Then $C \subseteq G^{[3]}$ is definable in Σ by (S3) and the definition of an expansion. Note that $AB \subseteq G$ is the projection $C \subseteq G^{[3]}$ to the last coordinate, hence AB is definable in Σ by (S4). The second statement of the lemma is immediate from the first. □

对于 A_i 个 G 的子集的集合 $(A_i)_{i\in I}$，显然存在群 G 的最小扩张 (G, Σ)，其中对于每个 $i \in I$，集合 A_i 在 Σ 中是可定义的。我们将 (G, Σ) 称为由 $(A_i)_{i\in I}$ 生成的扩张。群的扩张 (G, Σ) 是 $\aleph_1$-饱和的，如果结构 Σ 是 $\aleph_1$-饱和的。由于这一性质与超积构造有关，因此它自然地出现在这里。

Lemma 5.5. *Suppose (G, Σ) is an expansion of a group generated by a collection of pseudo-measurable subsets of G. Then Σ is $\aleph_1$-saturated.*

Proof. Suppose G is built from the sequence (G_n) of compact groups and a nonprincipal ultraproduct $\mathcal{U}$. For each k, let Σ'_k be the collection of subsets of $G^{[k]}$ of the form $C = \prod_{\mathcal{U}} C_n$ with $C_n \subseteq (G_n)^{[k]}$. It follows from Fact 4.1, that $\Sigma' := (\Sigma'_k)$ is a structure. Note that the graph Γ is definable in Σ', and by definition A, B, and S are also definable in Σ' as they are pseudo-measurable. Thus, we have $\Sigma_k \subseteq \Sigma'_k$ for all k. By Fact 4.2, Σ' is $\aleph_1$-saturated, which implies Σ is $\aleph_1$-saturated. □

We now arrive at the main concept which will allow us to use the model-theoretic machinery later on. Suppose G be a group, and (G, Σ) is an expansion of G. We say that S is **definably amenable** in (G, Σ) if there is a finitely-additive left-invariant measure μ on $\langle S\rangle$ satisfying:

(DA1) $\mu(S) = 1$

(DA2) Every $D \subseteq \langle S\rangle$ definable in Σ is μ-measurable.

In view of Lemma 5.4, one can see this as a strengthening of the condition that S^n is measurable for each $n > 0$. The next lemma explain why this can arise in our setting.

Lemma 5.6. *Suppose (G, Σ) is an expansion of a pseudo-compact group such that every $D \subseteq G$ definable in Σ is pseudo-measurable, and there is a pseudo Haar measure μ such that $0 < \mu(S) < \infty$. Then S is definably amenable in (G, Σ).*

Proof. Recall that every pseudo measurable set is μ-measurable. Define the finitely additive measure ν on $\langle S\rangle$ by setting $\tilde{\mu}(D) = \mu(D)/\mu(S)$ for $D \subseteq \langle S\rangle$ definable in Σ. The desired conclusions are immediate. □

We now discuss how to obtain the conditions for Lemma 5.6 in our setting. Recall that X is **semialgebraic** if it is a finite union of the solution sets of systems of algebraic inequalities. The following fact is a restatement of the Tarski-Seidenberg theorem [vdD98, (2.10)].

Fact 5.7. *Let Σ_n be the collection of semialgebraic subsets of $\mathbb{R}^n$. Then $\Sigma := (\Sigma_n)$ is a structure on $\mathbb{R}$.*

We say $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is **algebraic** if it is the solution set of a system of polynomial equation with coefficient in $\mathbb{R}$. Identifying the underlying set of the general linear group $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ in the obvious way as an algebraic subset of $\mathbb{R}^{d^2}$, we say that $G \leq \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ is an **algebraic subgroup** of $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ if its underlying set is algebraic. A subset of $G^{[n]}$ is **semi-algebraic** if it is semialgebraic under the obvious identification of $G^{[n]}$ with a subset of $\mathbb{R}^{nd^2}$. The Tarski-Seidenberg theorem translates into the following lemma for G:

引理 5.8. 设 G 是 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 的一个代数子群， Σ_n 是 $G^{[n]}$ 的半代数子集全体。那么 (G,Σ) 是群 G 的一个扩张，其中我们令 $\Sigma := (\Sigma_n)$。

证明. 注意，对角线 $\{(g,g) : g \in G\}$ 可表示为 $G \times G$ 与对角线 $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ 的 n 重笛卡尔积的交集。还要注意，从 n 个坐标中投影到 m 的投影 $G^{[n]} \to G^{[m]}$ 可由一个适当的投影 $\mathbb{R}^{nd^2} \to \mathbb{R}^{md^2}$ 得到。最后， G 中乘法的图是半代数的，事实上是代数的。由事实 5.7 即可轻易得出结论。□

下面的引理允许我们用半代数对替换小增长对 (A,B)。

引理 5.9. 假设 G 是 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 的一个代数子群， μ 是 G上的 Haar 测度，且 A、 $B \subseteq G$ 满足： A、 B和 AB均可测， $\mu(A)/N < \mu(B) < N\mu(A)$，并且 $\mathrm{BM}(A,B) \leq r$。那么对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在半代数的 A'、 $B' \subseteq G$，使得$\mu(A)/(1+\varepsilon) < \mu(A') < (1+\varepsilon)\mu(A)$, $\mu(B)/(1+\varepsilon) < \mu(B') < (1+\varepsilon)\mu(B)$，且 $\mathrm{BM}(A',B') \leq r+\varepsilon$。

证明. 我们将从两个较弱的命题推出该引理。

断言 1. 如果将对 A' 和 B' 的半代数要求替换为紧集要求，则该引理的陈述仍然成立。

断言 1 的证明. 回忆一下， μ 是其在博雷尔集上的限制的完备化，而 μ 具有外正则性。将这些性质应用于 $G \setminus A$ 和 $G \setminus B$，对于任意 δ，我们都可以得到紧集 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$，使得 $\mu(A') > \mu(A)/(1+\delta)$，且 $\mu(B') > \mu(A)/(1+\delta)$。取足够小的 δ，即可知所需性质成立。⋈

Claim 2. The statement of the lemma holds if we add the assumption that A and B are compact.

断言 2 的证明。通过与断言 1 的证明类似的论证，我们选择包含 AB 的开集 $U \subseteq G$，使得 $\mu(U) < (1+\delta)\mu(AB)$，其中 δ 将在后面确定。令 d 为 G 上的一个不变距离。设 $d_0 = d(AB, G \setminus U)$。令 $U_A = \{x \in G : d(x,A) < d_0/2\}$ 和 $U_B = \{x \in G : d(x,A) < d_0/2\}$。于是 $U_A U_B \subseteq U$。由于 A 是紧的，我们可以选择 A'，它是 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 中有限个与 G 相交的欧几里得开球的并，使得 $A \subseteq A' \subseteq U_A$。类似地选择 B'，使得 $B \subseteq B' \subseteq U_B$。当 δ 足够小时，我们可以看到这些条件均得到满足。⋈

Apply Claim 1 and then Claim 2 suitably, we get the statement of the Lemma. □

The next lemma allow us to replace approximate groups with semialgebraic ones.

Lemma 5.10. *Suppose G is an algebraic subgroup of $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, and $S \subseteq G$ is an open K-approximate group. Then there is a semialgebraic open K^3-approximate group S' such that $S \subseteq S' \subseteq S^2$. The set S' is definably amenable with respect to some left Haar measure of G.*

Proof. Let $\overline{S}$ be the closure of S with respect to the topology in G. We first note that $\overline{S} \subseteq S^2$. Indeed, the open neighborhood aS^{-1} of $a \in \overline{S}$ contains a point in $a' \in S$, so $a \in a'S \subseteq S^2$.

选择一个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$，使得对于每个 i，每个 $U_i \subseteq S^2$，且 U_i 具有如下形式$B_\varepsilon \cap G$，其中 B_ε 是 $\mathbb{R}^{d^2}$ 中的一个半径为 ε 的球。由于 G 是紧的，因此 $\overline{S}$ 也是紧的。选取 $(U_i)_{i\in I}$ 的一个有限子覆盖，并令 S' 为它们的并集。显然，$S \subseteq S' \subseteq S^2$，且 S'是半代数的。将 S' 替换为 $S' \cup (S')^{-1}$，我们可以使 S' 对称。

Finally, note that $(S')^2 \subseteq S^4$, which can be covered by K^3 left-translates of S, and in turn covered by K^3 left-translates of S'.

注意到 S' 是 G 的一个开子集，因此我们可以为 G 选取左 Haar 测度 μ，使得 $\mu(S') = 1$。根据引理 5.8，在 (G, S) 中可定义的 G 的每个子集都是半代数集。特别地，它们都是博雷尔集，因此是 μ-可测的。□

To link to compact Lie groups, we also need the following fact [HN12, Theorem 12.3.9].

Fact 5.11. *Every compact Lie group is isomorphic as a topological group to an algebraic subgroup of* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ *for some* d.

设 G 为由紧群序列 (G_n) 和非主超滤子 $\mathcal{U}$ 构造的伪紧群。我们称 G 为伪李群，如果每个 G_n 也都是李群。现在我们证明本节的主要命题。

命题 5.12. 假设 G 是一个伪李拟紧致群，且 A、$B \subseteq G$ 满足 A、B 和 AB 均为伪可测的，A 与 B 可公度，并且 $\mathrm{BM}(A, B) \leq r$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 A'、B'、$S \subseteq G$，使得以下条件成立：

(1) 设 (G, Σ) 是由 A'、B' 和 S 生成的群 G 的扩张。则 Σ 中每个$D \subseteq G$ 可定义的对象都是伪可测的。因此，S 在 (G, Σ) 中是可定义 amenable 的。(2) A、B、A'、B'、S彼此均可公度 (3) $BM(A', B') \leq r + \varepsilon$(4) S 是一个近似群 (5) A' 可以由有限多个 S的左平移覆盖，而 B' 可以由有限多个 S的右平移覆盖

证明。假设 G 由紧李群序列 (G_n) 和非主超滤子 $\mathcal{U}$ 构造而成。利用事实 5.11，我们可以安排使得对每个 n，G_n 都是一般线性群的闭子群。设 (A_n)、(B_n) 和 (C_n) 是满足以下条件的序列：A_n、B_n、$C_n \subseteq G_n$是可测的，且 $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$、$B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$ 和 $AB = \prod_{\mathcal{U}} C_n$。回忆一下，根据事实 4.4(2)，$AB = \prod_{\mathcal{U}}(A_nB_n)$。因此，根据事实 4.1(1,3)，对几乎处处的 n，必有 $A_nB_n = C_n$。特别地，对几乎处处的 n，乘积 A_nB_n 是可测的。

现在设 μ 是一个伪 Haar 测度，满足 $0 < \mu(A)$ $\mu(B) < \infty$。那么存在 N，使得 $\mu(A)/N < \mu(B) < N\mu(A)$。设 (μ_n) 是一个序列，满足 μ_n 是 G_n 上的 Haar 测度，且 $\mu = \lim_{\mathcal{U}} \mu_n$。利用事实 4.6，对每个 $\varepsilon > 0$ 以及几乎处处的 n,

$$\mu_n(A_n)/(2N) < \mu_n(B_n) < (2N)\mu_n(A_n) \text{ and } \mathrm{BM}(A_n, B_n) \leq (r + \varepsilon/2).$$

Using Lemma 5.9, for a.e. n, we obtain semialgebraic A'_n and B'_n such that

$$\mu(A_n)/2 < \mu(A'_n) < 2\mu(A_n), mu(B_n)/2 < \mu(B'_n) < 2\mu(B_n), \text{ and } \mathrm{BM}(A'_n, B'_n) \leq (r + \varepsilon).$$

Using Fact 5.1 together with Lemma 5.10, we produce for a.e. n an $O_{N,r}(1)$-approximate group S_n such that S_n is open, S_n is definably amenable with respect to some Haar measure of G_n, we have $\mu_n(S_n) \sim_{N,r} \mu_n(A'_n)$, the set A'_n can be covered by $O_{N,r}(1)$-left translates of S_n, and B'_n can be covered by $O_{N,r}(1)$-right translates of S_n.

设 $A' = \prod_{\mathcal{U}} A'_n$、 $B' = \prod_{\mathcal{U}} B'_n$ 和 $S = \prod_{\mathcal{U}} S_n$。还需验证引理的条件均得到满足。注意，(3) 由构造可立即得出。集合 S 是一个 $O_{N,\ r}$(1)-近似群，因而也是一个近似群。此外，$\mu(S) = O_{N,\ r}(1)\mu(A)$，由此可见， S 与 A'可公度。根据引理 4.11， S 也与 A、 B和 B'可公度。因此，我们也得到 (2) 和 (4)。

现在验证 (1)。通过适当缩放 μ_n ，我们可以不失一般性地令 $\mu_n(S_n) = 1$。于是 $\mu(S) = 1$。令 Σ'_m 为 $\mathcal{P}(G^{[m]})$ 的子集，其中包含形如以下形式的 $D \subseteq G^{[m]}$

$$D = \prod_{\mathcal{U}} D_n$$

其中 $D_n \subseteq (G_n)^{[m]}$ 是半代数的。由事实 4.1、事实 4.4 和引理 5.8 可知，借助 $\Sigma' = (\Sigma'_m)$，(G, Σ') 是群 G 的扩张。由于 A'、 B' 和 S 在 Σ' 中可定义，因此 Σ 是 Σ' 的子结构。特别地，如果 $D \subseteq G$ 在 Σ 中可定义，那么 D 也在 Σ' 中可定义。因此，这样的 D 是伪可测的，因而是 μ-可测的。由引理 5.6， S 是可定义 amenable 的。

最后，我们验证 (5)。我们可以选择 $m = m(N, r)$，使得对于几乎处处的 n，至多需要 m 个 S_n 的左平移来覆盖 A'_n。对于这些 n，必要时添加更多 S_n 的左平移，我们假设这 m 个平移集 $a_{n,1}S_n, \ldots, a_{n,m}S_n$ 可以用来覆盖 A'_n。对于 $i \in [m]$，令 $a_i = (a_{n,i})/\mathcal{U}$。我们声称，$(a_i S)^{i \in [m]}$ 是 A' 的一个覆盖。这是因为，

$$A' \setminus (a_1 S \cup a_m S) = \prod_{\mathcal{U}} A'_n \setminus (a_{n,1} S \cup a_{n,m} S) = \emptyset.$$

A similar argument shows that finitely many right translates of S is needed to cover B'. □

6. Lie models from approximate groups

在本节中，我们将定义近似群的局部紧模型，并介绍 Hrushovski 局部紧模型定理 [Hru12], ，该定理允许我们从可定义 amenable 的近似群构造局部紧模型。事实上，我们还将讨论 Massicot 和 Wagner [MW15] 针对可定义 amenable 情形对 Hrushovski 定理所作的改进。尽管 Hrushovski 的原始定理经过一些额外步骤后也足以满足我们的需求，但这一改进版本更加适合我们的目的。我们还通过补充一个额外步骤来完善这一结果，从而能够构造连通李模型。后一个步骤属于众所周知的民间结果，因此我们这里只是将相关事实汇集起来。（注意，Hrushovski 局部紧模型定理也称为 Hrushovski 李模型定理。这一名称源于该定理可以与 Gleason–Yamabe 定理结合使用，以构造李模型。我们在此将两者分开讨论，正如 [MW15], 中的处理方式一样，而且我们认为这样在概念上也更加清晰。）

Let G be a group, and $S \subseteq G$ is an approximate subgroup. A **locally compact model** of S is a surjective group homomorphism such that the following two conditions are satisfied:

(LM1) (Thick image) There is an open neighborhood U of id_L such that $\pi^{-1}(U) \subseteq S$ (consequently, $\ker \pi \subseteq S$ and $U \subseteq \pi(S)$).

(LM2) (Compact image) $\pi(S)$ in L is precompact.

Behind this definition is the observation that approximate groups arise naturally from group homomorphisms into locally compact groups. This can be seen through the lemma below:

引理 6.1。设 G 是一个群，S 是 G 的一个子集，其中含有单位元 $_G \in S$ 且满足 $S = S^{-1}$；L 是一个局部紧群，且 $\pi:\ \langle S\rangle \to L$ 满足条件（LM1）和（LM2），则 S 是一个近似群。特别地，局部紧群中的开且相对紧子集是一个近似群。

证明。事实上，根据（LM2），这样的 S^2 将包含于紧集 $F \subseteq L$ 的逆像 $\pi^{-1}(F)$ 中，因此 S^2 可由有限多个左平移 $\pi^{-1}(U)$ 覆盖，其中 $\subseteq S$ 出现在（LM1）中。最后一句是 $G = L$ 和 π 取恒等映射时的特殊情形。□

我们提醒读者，“局部紧模型”中的“模型”一词与模型论无关。这个词源于阿贝尔情形中的 Freiman 同态和 Ruzsa 模型引理。

Let G be a group, $S \subseteq G$ is an approximate group, and $\pi : \langle S\rangle \to L$ is a locally compact model of S. If L is a Lie group, we call π a **Lie model** of S. We say that $\pi : \langle S\rangle \to L$ is **noncompact** if L is noncompact. We define **unimodular** and **connected** for π similarly.

Let (G, Σ) be an $\aleph_1$-saturated expansion of a group G, and $H \subseteq G$ is σ-definable in Σ. A surjective group homomorphism $\pi : \langle H\rangle \to L$ with L a locally compact group is **definable** (in the sense of continuous logic) in Σ if the topology on L is induced by Σ as follows:

(CD) $X \subseteq L$ is compact in L if and only if $\pi^{-1}(X)$ is δ-definable in Σ, and $X \subseteq L$ is open in L if and only if $\pi^{-1}(X)$ is σ-definable in Σ.

It is known that (CD) is equivalent to

(CD′) Whenever $F \subseteq U \subseteq L$ are such that F is compact and U is open, there is $D \subseteq \langle S\rangle$ that is definable in Σ and $\pi^{-1}(F) \subseteq D \subseteq \pi^{-1}(U)$.

We will not be using this equivalence, so we will leave it to the interested reader. The the definition good model given in [BGT12] is essentially combines the definition of locally compact model and (CD′), so it is in a sense the original definition.

Our definition of locally compact model is not the definition given in [MW15]. (We chose it due to conceptual clarity, and its later use for constructing of Lie models). To discuss the definition of locally compact models in [MW15], we introduce two further conditions:

(LM1′) (Containing the kernel) $\ker\pi \subseteq S$

(LM2′) (Bounded index) If $A, B \subseteq \langle S\rangle$ are definable in Σ and $\ker\pi \subseteq A$, then finitely many left-translates of A by elements in $\langle S\rangle$ can be used to cover B.

The equivalence between the definition is given by the following lemma:

Lemma 6.2. *Suppose (G, Σ) is an $\aleph_1$-saturate expansion of a group, and $S \subseteq G$ is definable in Σ. Let L be a locally compact group, and $\pi : \langle S\rangle \to L$ a surjective group homomorphism continuously definable in Σ. Then (LM1) is equivalent to (LM1′) and (LM2) is equivalent to (LM2′).*

Proof. We first show the equivalent between (LM1) and (LM1'), and clearly only the backward implication is needed. Choose a sequence (U_n) of open neighborhood of id_G. Then $\bigcap_n \pi^{-1}(U_n) = \ker\pi$ is a subset of S. It suffices to show there is n such that $\pi^{-1}(U_n) \subseteq S$. Suppose this is not the case. By (4), for each n, $\pi^{-1}(U_n)$ is a countable union of subsets

of G definable in $(G; S)$. Using induction, one can construct a sequence (D_n) such that $D_n \subseteq \pi^{-1}(U_n)$ is definable in Σ and

$$\bigcap_{i=1}^{n} D_i \cap \bigcap_{j>n} \pi^{-1}(U_n)$$

is not a subset of S. In particular, any finite intersection of (D_n) is not a subset of S. Finally, the $\aleph_1$-saturation of $(G; \Sigma)$ yields the desired conclusion.

接下来我们证明 (LM2) 蕴含 (LM2')。对于正向推导，设 A、$B \subseteq \langle S \rangle$ 在 Σ 中可定义，且 $\ker \pi \subseteq A$。类似于 (LM1) 与 (LM1') 等价性的证明，可以得到一个包含 id_L 的开邻域 U，使得 $\pi^{-1}(U) \subseteq A$。另一方面，根据 $\aleph_1$-饱和性或引理 5.3，B 包含于某个 n 的 S^n 中。这意味着 $\pi(B)$ 是相对紧的。因此，可以用有限个 A 的左平移来覆盖 B。

最后，我们证明 (LM2') 蕴含 (LM2)。取 U 为 id_L 的一个相对紧开邻域，这由 L 是局部紧的事实可知其存在。于是 $\pi^{-1}(U)$ 是 σ-可定义的，并且包含 $\ker \pi$。由引理 5.3 的 $\aleph_1$-饱和性，存在 $D \subseteq \pi^{-1}(U)$ 使得 $\ker \pi \subseteq D$。根据 (LM2')，有限个 D 的左平移集覆盖 S。这意味着有限个 U 的左平移集覆盖 $\pi(S)$，进而 $\pi(S)$ 是相对紧的。□

The following fact [MW15] is the main model-theoretic input that will allow us construct Lie model. We use this as a black box in this paper.

Fact 6.3 (Hrushovski's Locally Compact Model Theorem via Massicot–Wagner)**.** *Suppose (G, Σ) is an $\aleph_1$-saturated expansion of a group, and $S \subseteq G$ is an approximate group definable in Σ and definably amenable in (G, Σ). Then there is a locally group L, and surjective group homomorphism $\pi : \langle S \rangle \to L$ satisfying (LM1'), (LM2'), and (CD) with S replaced by S^4.*

To obtain connected Lie models from locally compact model, we need the solution of Hilbert's 5th problem, which is known as the Gleason–Yamabe Theorem [Gle52, Yam53]. Here is a version of this result, which is another major black box.

Fact 6.4 (Gleason–Yamabe Theorem)**.** *Suppose L is a locally compact group and U is an open neighborhood of id_L. Then there is an open subgroup L' of L and a compact normal subgroup K of L' such that $K \subseteq U$ and the L'/K is a connected Lie group.*

假设 G 是一个群。如果 S 和 S' 是 G 的近似群，并且每一个都包含于另一个的有限个左平移（等价地，右平移）之中，则称二者等价。容易看出，这确实是一种等价关系。此外，根据引理 5.2，如果 S 是一个近似群，那么对于所有 n，S^n 都是一个与 S 等价的近似群。

命题 6.5. 假设 (G, Σ) 是一个群的 $\aleph_1$-饱和扩张，且 $S \subseteq G$ 是一个在 Σ 中可定义并在 (G, Σ) 中可定义 amenable 的近似子群。那么存在一个在 Σ 中可定义并在 (G, Σ) 中可定义 amenable 的近似子群 $S' \subseteq G$，使得 S' 与 S 等价，并且 S' 具有一个在 Σ 中可定义的连通李模型。

Proof. By Lemma 6.2 and Fact 6.3, S^4 has a locally compact model $\pi : \langle S^4 \rangle \to L$. Since S^4 is an approximate group equivalent to S, it is harmless to replace S with S^4 and assume π is already the locally compact model of S. In particular, using (LM1), we can choose an open neighborhood U of id_L such that $\pi^{-1}(U) \subseteq S$. Applying the Gleason–Yamabe theorem, we

get an open subgroup L' of L and a compact normal subgroup K of L' such that $K \subseteq U$ and the quotient group L'/K is a connected Lie group.

现在，群 L' 在 L中是开的。因此， L' 在 L中也是闭的。因此， $\pi^{-1}(L')$在 Σ中既是δ-可定义的，也是 σ-可定义的。根据引理 5.3，通过 $\aleph_1$-饱和，我们得知 $\pi^{-1}(L')$在 Σ中是可定义的。令 $S' = S \cap \pi^{-1}(L')$。剩下要验证的是， S' 具有所需的性质。

由于 S 和 π^{-1}（L）都是对称的，且包含 id_G，所以 S' 也是如此。此外， S' 包含 $\ker\pi$ 作为子集，并且 $(S')^2$ 在 Σ 中可定义。由引理 6.2 中的 (LM2′) 可知，有限多个 S' 的左平移覆盖 $(S')^2$。我们已经验证 S' 是一个近似群。注意， S 和 $S' = S \cap \pi^{-1}$（L'）都包含 $\ker\pi = \pi^{-1}(\mathrm{id}_L)$。因此，再次由引理 6.2 中的 (LM2′) 可知， S 和 S' 是等价的近似群。

The set $S' = S \cap \pi^{-1}(L')$ is definable in Σ as it is the intersection of two sets definable in Σ. Let μ be the finitely additive measure on $\langle S\rangle$ witnessing the fact that S is definably amenable in (G, Σ), that is μ is left-invariant, $\mu(S) = 1$, and every subset of $\langle S\rangle$ definable in Σ is μ-measurable. Because $S' \subseteq \langle S\rangle$, S' is definable in Σ, and S' is an equivalent approximate group to S, we have $0 < \mu(S') < \infty$. Scaling μ appropriately, we get a measure witnessing the fact that S' is definably amenable in (G, Σ)

Now, as π is a locally compact model of S, by (LM1), $\pi(S') = \pi(S) \cap L'$ contains an open subset of L'. Since L' is connected, $L' = \langle \pi(S')\rangle$. Hence, $\pi|_{\langle S'\rangle} : \langle S'\rangle \to L'$ is surjective. We now define

$$\pi' : \langle S'\rangle \to L'/K, \qquad \pi' = \phi \circ \pi|_{\langle S'\rangle}$$

其中 ϕ : $L' \to L'/K$ 商映射。根据构造，$\ker\pi' = \pi^{-}(H)$，并且回忆$H \subseteq U \cap L'$ 其中 $\pi^{-1}(U) \subseteq S$。因此，$\ker\ \pi' \subseteq S'$。由此可知， π' 满足引理 6.2 中的 (LM1')。由于，$\ker\pi \subseteq \ker\ \pi'$，可知 π' 也满足引理 6.2 中的 (LM2')。群同态 π' 满足 (CD)，因为 π 满足 (CD)，且 ϕ 是连续的。因此，根据引理 6.2， π' 是一个局部紧模型。最后， L'/K 是一个连通李群，所以 π'是一个连通李模型。□

We end with a remark about plausible alternative approach:

备注 6.6。这里，我们使用的是 Massicot–Wagner 版本的 Hrushovski 局部紧模型定理。这对我们而言更为方便，因为它与测度框架相兼容。不过，也可以使用 Hrushovski 的原始版本定理 [Hru12]。为此，还需要额外验证：相对于伪 Haar 测度的零测集全体构成一个 S1-理想，而这是可以做到的。

在他的论文中， [Car15], Carolino 提出了一种将伪可测近似群与连通李群联系起来的替代方法。我们在此处使用可定义可和近似群，而他则采用伪开近似群的概念，并遵循 [BGT12] 的策略，得到适当版本的 Hrushovski 李模型定理。尽管我们认为他的研究结果总体上是正确的，但该论文未经同行评审，我们认为仍有一些细节需要进一步澄清。例如，在 [Car15], 的引理 6.8 中，并未验证 $\pi^{-1}(G')$ 是伪开的，也未据此推导出 $\tilde{A}$ 是他所定义意义下的超近似群。这一点对我们尤为重要，因为如果不知道集合是伪开的，乘积集就可能无法相对于伪 Haar 测度进行测度。如果这些问题能够得到解决，Carolino 的论文将提供一条通向连通李模型的替代路径。

7. Small growth above Lie models

在前几节中，我们基于 A和B构造了一个合适的近似群 S 。然而，Brunn–Minkowski 增长 BM(S, S) 可能远大于 BM(A, B)。本节旨在找到两个集合 $A', B' \subseteq \langle S\rangle$ ，使得 BM(A', B') 非常接近 BM(A, B)。这一步是我们还需要处理非对称情形的关键原因。

Let G be a pseudo-compact group built from a sequence (G_n) of compact groups and a nonprincipal ultrafilter $\mathcal{U}$. We say that G is **pseudo-connected** if each G_n is connected.

The primary use of the connectedness assumption is the inequality below by Kemperman [Kem64]. Note that this inequality does not hold when the group is disconnected by choosing the set to be the identity component.

Fact 7.1 (Kemperman Theorem)**.** *Suppose G is a connected unimodular locally compact groups equipped with a Haar measure μ. If $A, B \subseteq G$ are such that A,B, and AB are measurable, then $\mu(AB) \geq \min\{\mu(A) + \mu(B)\ \mu(G)\}$.*

The following lemma is the version of Kemperman theorem for pseudo-connected pseudo-compact groups.

引理 7.2. 假设 G 是伪紧致且伪连通的，并具有伪 Haar 测度 μ。若 A、$B \subseteq G$ 满足 A、B 和 AB 均为伪可测，则 $\mu(AB) \geq \min\{\mu(A) + \mu(B)\ \mu(G)\}$。

证明。假设 G 是由紧连通群序列 (G_n) 和非主超滤子 $\mathcal{U}$ 构造的伪紧群。设 (A_n) 和 (B_n)，且有序列满足对每个 n， A_n、$B_n \subseteq G_n$ 均可测。应用 Kemperman 定理并取极限，即得所需结论。□

现在我们证明本节的主要结果。

命题 7.3. 假设 (G, Σ) 是伪连通伪紧群的一个扩张，并且每个在 Σ 中可定义的 $D \subseteq G$ 都是伪可测的。设 A、$B \subseteq G$ 在 Σ 中可定义，彼此可公度，且相对于 G 是无穷小的；设 $S \subseteq G$ 是在 Σ 中可定义的近似群，且与 A 和 B 均可公度；并假设 A 可由有限个 S 的左平移覆盖，且 B 可由有限个 S 的右平移覆盖。那么对所有 $\varepsilon > 0$，存在 A'、$B' \subseteq \langle S\rangle$ ，它们在 Σ 中可定义，分别与 A、B 可公度，并且 S 满足 BM(A', B') $\leq$ BM(A, B) $+ \varepsilon$。

Proof. Let μ be a pseudo-Haar measure on G such that $0 < \mu(A)\ \mu(B)\ \mu(S) < \infty$, so $\mu(G) = \infty$. As G is a pseudo-connected and pseudo-compact group, applying Lemma 7.2, we get

$$\mu(AB) \geq \min\{\mu(A) + \mu(B), \mu(G)\}.$$

As $\mu(G) = \infty$, we have $\mathrm{BM}(A, B) \geq 1$.

For each left coset $\alpha \in G/\langle S\rangle$, choose a representative $g(\alpha) \in G$, and for each right coset $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$, choose a representative $g(\beta) \in G$. By the relationship between A, B, and S, there are only finitely many left cosets of $\langle S\rangle$ intersecting A nonemptily, and a similar claim holds for B with right cosets of $\langle S\rangle$. Therefore,

$$\mu(A) = \sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \mu_{\langle S\rangle}(g(\alpha)^{-1}A \cap \langle S\rangle), \quad \mu(B) = \sum_{\beta\in\langle S\rangle\backslash G} \mu_{\langle S\rangle}(Bg(\beta)^{-1} \cap \langle S\rangle). \tag{1}$$

For simplicity, for every $\alpha \in G/\langle S\rangle$ and $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$, we write

$$A_\alpha := g(\alpha)^{-1}A \cap \langle S\rangle, \quad \text{and} \quad B_\beta := Bg(\beta)^{-1} \cap \langle S\rangle.$$

由于 A, B 在 Σ 中是可定义的，对于每个 $\alpha \in G/\langle S\rangle$ 和 $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$，集合 $A_\alpha, B_\beta \subseteq \langle S\rangle$ 也在 Σ 中是可定义的。若这些 A_α, B_β 的 μ- 测度为 0，则将其删去并相应地用子集替换 A 和 B，不会造成影响。因此，我们可以假设，对于每个 $\alpha \in G/\langle S\rangle$ 和 $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$，集合 A_α, B_β 与 S 可公度。

设 $r = \mathrm{BM}(A, B)$。那么 $r \geq 1$。我们将证明，存在 $\alpha \in G/\langle S\rangle$ 和 $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$，使得对于所有正的 ε，$\mathrm{BM}(A_\alpha, B_\beta) \leq r + \varepsilon$。从现在起，我们假设存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 $\alpha \in G/\langle S\rangle$ 和 $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$，$\mathrm{BM}(A_\alpha, B_\beta) > r + \varepsilon$。等价地，我们有

$$\left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(B_\beta)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \leq 1. \tag{2}$$

We now define two probability measures on $G/\langle S\rangle$ and $\langle S\rangle\backslash G$ based on the shapes of A and B respectively as follows. For $\alpha \in G/\langle S\rangle$, define

$$\mathrm{p}_A(\alpha) = \frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)}{\mu(A)}.$$

And similarly, for $\beta \in \langle S\rangle\backslash G$, let

$$\mathrm{p}_B(\beta) = \frac{\mu_{\langle S\rangle}(B_\beta)}{\mu(B)}.$$

Choose α from $G/\langle S\rangle$ randomly with respect to p_A. We obtain that

$$\mathbb{E}_{\mathrm{p}_A(\alpha)}\left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \frac{\left(\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)\right)^{\frac{r+\varepsilon+1}{r+\varepsilon}}}{\left(\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}}. \tag{3}$$

On the other hand, by Hölder's inequality (with exponents $(r+\varepsilon)/(r+\varepsilon+1)$ and $1/(r+\varepsilon+1)$) we get

$$\left(\sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)\right)^{\frac{r+\varepsilon+1}{r+\varepsilon}} \leq \sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)^{\frac{r+\varepsilon+1}{r+\varepsilon}}}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}} \left(\sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.$$

Using (1) and the fact that

$$A_\alpha B_\beta = \left(g(\alpha)^{-1}A \cap \langle S\rangle\right)\left(Bg(\beta)^{-1} \cap \langle S\rangle\right) \subseteq \left(g(\alpha)^{-1}ABg(\beta)^{-1}\right) \cap \langle S\rangle,$$

together with the unimodularity of G we conclude that

$$\sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha) = \mu(A), \quad \text{and} \quad \sum_{\alpha\in G/\langle S\rangle} \mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta) \leq \mu(ABg(\beta)^{-1}) = \mu(AB).$$

Finally, by using (3), we get

$$\mathbb{E}_{\mathrm{p}_A(\alpha)}\left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \geq \left(\frac{\mu(A)}{\mu(AB)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}. \tag{4}$$

Similarly by choosing β from $\langle S\rangle\backslash G$ randomly with respect to p_B, we will get

$$\mathbb{E}_{\mathrm{p}_B(\beta)}\left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(B_\beta)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \geq \left(\frac{\mu(B)}{\mu(AB)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}. \tag{5}$$

Inequalities (4) and (5) together with the Fubini and (2) give us

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mu(A)}{\mu(AB)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(AB)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}\\ \leq\, &\mathbb{E}_{\mathrm{p}_A(\alpha)}\mathbb{E}_{\mathrm{p}_B(\beta)}\left[\left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \left(\frac{\mu_{\langle S\rangle}(B_\beta)}{\mu_{\langle S\rangle}(A_\alpha B_\beta)}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}\right] \leq 1.\end{aligned}$$

This contradicts the choice of r. □

8. Density functions of definable sets over Lie models

When H is a locally compact group, and $\pi : H \to L$ is a continuous and surjective group homomorphism, a left Haar measure μ of H and a left Haar measure λ of L are linked together by the corresponding left Haar measure ν of $\ker\pi$ via a quotient integral formula. This allows us to relate the measure of a measurable set $A \subseteq G$ and the measure of its image $\pi(A)$ using the density function $f_A(x) = \nu(\ker\pi \cap x^{-1}A)$.

There is no similar measure on the kernel of a locally compact model or Lie model. Nevertheless, we will now show there are still density functions which are well-behaved enough for our later purpose.

假设 H 是一个配备左不变测度 μ 的群，集合 $A \subseteq H$ 可测， $\pi\colon H \to L$ 是一个满射群同态，并且群 L 配备左不变测度 λ。如果对所有可测的 $X \subseteq L$，集合 $\pi^{-1}(X)$ 都是 μ-可测的，我们称 $f_A\colon H \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是相对于 π 的 A 的密度函数，并且

$$\mu(A \cap \pi^{-1}(X)) = \int_X f_A \,\mathrm{d}\lambda.$$

We have a similar definition replacing left by right.

It is clear from the above definition that for densities to exist, the measure on H must be sufficiently rich. The following lemma verifies that this is the case when we are handling locally compact models.

引理 8.1. 设 (G, Σ) 是群的 $\aleph_1$-饱和扩张， $S \subseteq G$ 是 Σ 中可定义的近似群， S 在 (G, Σ) 中可定义 amenable，其见证为 $\langle S\rangle$ 上的左不变测度 μ，且 S 有一个局部紧模型 $\pi\colon \langle S\rangle \to L$ 在 Σ 中连续可定义。那么，只要 $X \subseteq L$ 可测， $\pi^{-1}(X) \subseteq \langle S\rangle$ 就是 μ-可测的。此外，若 λ 是 L 上 μ 的推前，定义为。

$$\lambda(X) := \mu(\pi^{-1}(X))$$

for measurable $X \subseteq L$, then λ is a left Haar measure on L.

Proof. We first note that if $X \subseteq L$ is Borel, then $\pi^{-1}(X)$ is μ-measurable. Indeed, it is enough to check for open $X \subseteq L$, that $\pi^{-1}(X)$ is μ-measurable. This is the case because from the condition that π is definable in Σ, $\pi^{-1}(U)$ is open.

Now define a Borel measure $\tilde{\lambda}$ on L as follows. When $X \subseteq L$ is Borel, set

$$\tilde{\lambda}(X) = \mu(\pi^{-1}(X)).$$

The σ-additivity of $\tilde{\lambda}$ on Borel sets and $\tilde{\lambda}(\emptyset) = 0$ follow from the corresponding facts for μ. Moreover, $\tilde{\lambda}$ is the completion of its restriction to the collection of Borel subsets.

事实证明，λ 是一个 Haar 测度，但我们将推迟这一证明，先说明所需结论为何由此推出。根据 Haar 测度的唯一性，存在常数 α，使得对于所有可测的 X，都有 $\lambda(X) = \alpha\lambda(X)$。当 B 是博雷尔集时，根据我们的构造，我们已经得到 $\lambda(B) = \alpha\mu(\pi^{-1}(B))$。如果 X 是可测的，且 $\lambda(X) = 0$，那么 X是博雷尔 $B \subseteq L$ 的子集，并且 $\lambda(B) = 0$，因为 λ 是其在博雷尔集上的限制的完备化。对于这样的 X，集合 $\pi^{-1}(X)$ 是 $\pi^{-1}(B)$ 的子集，而后者满足 $\mu(\pi^{-1}(B)) = 0$，因此 $\pi^{-1}(X)$ 是可测的，并且根据 μ的完备性，其 μ 测度为零。对于一般的可测 $X \subseteq L$，标准论证可得博雷尔 $B \subseteq L$，使得 $\lambda(X \triangle B) = 0$。于是由前面的情形可知，$\pi^{-1}(X)$ 是可测的，并且 $\lambda(X) = \alpha\mu(\pi^{-1}(X))$。

最后，我们验证 λ 是 L的左 Haar 测度。显然，λ 是左不变的。因此，我们只需证明 λ 是一个 Radon 测度。根据局部紧模型定义中的 (LM1)，存在一个包含 id_L 的开邻域 U，使得 $\pi^{-1}(U) \subseteq S$。那么，对于每个 $x \in U$，xU 是一个开邻域，其具有

$$\tilde{\lambda}(U) = \mu(\pi^{-1}(U)) < \mu(S) = 1.$$

From this we established the locally finiteness (RM1) property of $\tilde{\lambda}$. It remains to show that $\tilde{\lambda}$ is inner regular for open sets and outer regular. We will show this through several claims.

Claim 1: If $D \subseteq \langle S \rangle$ is definable in Σ, then $\pi(D)$ is compact in L.

断言 1 的证明：回顾一下，π 的可定义性意味着 $C \subseteq L$ 是闭的，当且仅当 $\pi^{-1}(C)$ 是 δ-可定义的。因此，我们需要证明 $\pi^{-1}(\pi(D)) = D(\ker \pi)$ 是 δ-可定义的。由于 $\ker \pi = \pi^{-1}(\{\mathrm{id}_L\})$ 是 δ-可定义的，我们可以得到一个在 Σ 中可定义的递减序列 (E_n)，使得

$$\ker \pi = \bigcap E_n.$$

显然，我们有 $D(\ker \pi) \subseteq \bigcap_n DE_n$。现在我们将证明$\bigcap_n DE_n \subseteq D(\ker \pi)$。取$a \in \bigcap_n DE_n$。则 $a = d_n e_n$，其中 $d_n \in D$ 且 $e_n \in E_n$。因此，包含$a(e_n)^{-1} = d_n$ 的 $D \cap (a(E_n)^{-1})$ 非空。由 $\aleph_1$- 饱和性可知，$D \cap \bigcap_n a(E_n)^{-1}$ 非空。因此，存在 $d \in D$ 和 $e^{-1} \in \bigcap_n (E_n)^{-1}$，使得 $d = ae$。于是，$a = de$ 属于 $D \ker \pi$。

Finally, by $\aleph_1$-saturation, D is a subset of S^n for some n. Hence, $\pi(D)$ is a subset of $(\pi(S))^n$, which is precompact. Therefore, $\pi(D)$ is compact. ⋈

Claim 2: Suppose $U \subseteq L$ is open. Then U is a countable union of compact sets. In particular, $\tilde{\lambda}$ has inner regularity for open sets.

Proof of Claim 2: Recall that the definability of π implies that $U \subseteq L$ is open if and only if $\pi^{-1}(U)$ is σ-definable in Σ. Hence, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_n D_n$ with D_n definable in Σ for each n. It then follows that

$$U = \bigcup_n \pi(D_n).$$

From claim 1, it follows that U is a countable union of compact subsets of L. ⋈

Claim 3: Suppose $U \subseteq L$ is open and precompact, and $B \subseteq U$ is Borel. Then $\tilde{\lambda}$ is both inner regular and outer regular on U.

命题 3 的证明：我们将通过对 B 的博雷尔复杂度进行归纳来证明。当 B 为开集时，由命题 2 可得内正则性，而外正则性则显然成立。若 $B = U \setminus B_1$，且我们已证明 B_1 的情形，则只需交换内正则性与外正则性，即可直接得到 B 的情形。假设 $B = \cup_n B_n$，并且对于每个 n，我们都已证明 B_n 的情形。固定 $\varepsilon > 0$。取 $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$，使得 $\tilde{\lambda}(B \setminus B_n) < \varepsilon/2$。对于 $n \in [N]$，利用归纳假设，我们选取紧集 $K_n \subseteq B_n$，使得 $\tilde{\lambda}(B_n \setminus K_n) < (\varepsilon/2)(1/2)^n$。然后，很容易看出 $\tilde{\lambda}B \setminus \bigcup_{n=1}^{N} K_n$。这表明 λ 对于 B 的内正则性。类似的近似论证表明 λ 对于 B 的外正则性。⋈

Claim 4: Suppose $B \subseteq L$ is Borel. Then $\tilde{\lambda}$ is outer regular on B.

论断 4 的证明：由论断 3，只需证明 L 是其自身中开且相对紧子集的可数并。由于 π 是一个局部紧模型，存在单位元 $_L$ 的一个邻域 U，使得 $U \subseteq \pi S$ 且 $\pi(S)$ 相对紧。因此，此集合 U 是开且相对紧的。注意 $L = \bigcup_n \pi(S^n)$。对于每个 n，$\pi(S^n)$ 是相对紧的，因此可以由 U 的有限个平移集覆盖。因此，L 可以由 U 的可数个平移集覆盖，证毕。⋈

This completes the proof. □

We recall some concept from analysis. Let Ω be a topological space equipped with a measure λ. A measure κ with the same σ-algebra as λ is **absolutely continuous** with respect to λ if and only if for each measurable $X \subseteq L$, we have $\mu(X) = 0$ whenever $\lambda(X) = 0$.

我们需要以下事实：

事实 8.2（拉东–尼科迪姆定理）。假设 κ 和 λ 是定义在 L上的 σ-有限博雷尔测度，且 κ 关于 λ 绝对连续（即，对于所有博雷尔集 $X \subseteq L$，若 $\lambda(X) = 0$ 则 $\kappa(X) = 0$）。那么存在一个 λ-可测函数 f，使得对于所有博雷尔集 $X \subseteq L$，我们有

$$\kappa(X) = \int_X f \, \mathrm{d}\lambda x.$$

现在我们来证明所承诺的存在性：

命题 8.3。假设 G 是一个配备了完备左不变测度 μ的群，且 $S \subseteq G$ 是一个满足 π 的近似子群：$\langle S \rangle \to L$ 是一个局部紧模型。如果 $A \subseteq \langle S \rangle$ 在 (G, S) 中可定义，那么 A 有一个关于 π 的密度函数 f_A，且该函数几乎处处有界。此外，若 g_A 是 A 关于 π的另一个密度函数，则对于几乎所有 $x \in L$，$f_A(x) = g_A(x)$。

Proof. Define the Borel measure κ_A on L by setting

$$\kappa_A(X) := \nu(A \cap \pi^{-1}X)$$

whenever $X \subseteq L$ is Borel. From the definition of Lie model, one has $0 \leq \kappa_A(X) \leq \nu(X)$. In particular, κ_A is absolutely continuous with respect to λ. As L is connected, λ is σ-finite, and so is κ_A. Thus, we can apply Fact 8.2 to get the desired conclusion. The last statement is immediate. □

The fact that there is no single canonical density function creates more problem than it might initially seem. We will later need to study the relationship between the density functions f_A, f_B, and f_{AB} for definable $A, B \in \langle S \rangle$. As AB is generally a uncountable union of left-translates of B and a uncountable union of right-translates of A, such relationships becomes unclear. We will introduce the variant notion of approximate density functions, which is canonical.

Suppose H is a group equipped with a left invariant measure μ, the set $A \subseteq H$ is measurable, $\pi : H \to L$ is a surjective group homomorphism, and the group L equipped with a left-invariant measure λ. Suppose moreover, that d is a left-invariant metric on L such that λ is a nonzero Radon measure with respect to the topology generated by d and open balls has finite positive measure. For $\varepsilon > 0$, the (d, ε)-**density** function $f_A^{d,\varepsilon}$ with respect to π is given by

$$f_A^{d,\varepsilon}(x) := \frac{\mu(A \cap \pi^{-1}(B_\varepsilon(x))}{\lambda(B_\varepsilon(x))}.$$

for $x \in L$. It is immediate to see that if f_A is a density function of A with respect to π then we have

$$f_A^{d,\varepsilon}(x) = \mathbb{E}_{t \in B_\varepsilon(x)} f_A(t).$$

Note that the above equation does not depends on the choice of the density function f_A.

Earlier, we have seen that approximate density functions can be understood in term of density functions. Next, we will see that we can go in the other direction in the setting of Lie model.

Let $(\Omega\ d)$ be a metric space, and μ is a Radon measure on Ω such that open balls have positive and finite measure. We call $x \in \Omega$ a **Lebesgue point** of the function f if

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{E}_{t \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(t)| = 0.$$

We say that $(\Omega\ d)$ is **locally doubling** if there $r > 0$ and a constant K such that for all $x \in \Omega$ and $0 < \varepsilon < r$, we have

$$\frac{\lambda(B_{2\varepsilon}(x)}{\lambda(B_\varepsilon(x))} < K.$$

The following fact [HKST15, Section 3.4] from real/harmonic analysis is the key to our approach. The theorem in its stronger form, that almost every point is a Lebesgue point of a locally integrable function f, can be proved as a consequence of the weak-L^1 estimates for the Hardy–Littlewood maximal function.

事实 8.4（局部加倍度量空间上的勒贝格微分定理）。设 $(\Omega\ d)$ 为一个度量空间，且 μ 是 Ω 上的 Radon 测度，使得开球具有正且有限的测度。假设 $(\Omega\ d)$ 是局部加倍的，且 f 是 Ω 上的 λ- 可积函数。那么 λ- 几乎处处 $x \in \Omega$ 是 f 的勒贝格点。

We now prove the second main result of this section:

Proposition 8.5. *Suppose H is a group equipped with a left invariant measure μ, $\pi : H \to L$ is a surjective group homomorphism, and L is a connected Lie group equipped with a left Haar measure λ. Suppose moreover, d is the distance function induced by a left-invariant*

Riemannian metric L. Let f_A be a density function for A with respect to π, and for $\varepsilon > 0$ let $f_A^{d,\varepsilon}$ be the (d,ε)-density function for A with respect to π. Then for a.e. $x \in L$, we have

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f^{d,\varepsilon}(x).$$

Similar statements hold replacing left invariant metric and Haar measure with right invariant metric and Haar measure.

Proof. The desired conclusion will follow from the two claims below and Fact 8.4.

Claim 1. The metric space (L, d) is locally doubling.

Proof of Claim 1. Note that

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\lambda(B_{\mathrm{id}_L, 2r})}{\lambda(B_{\mathrm{id}_L, r})} = 2^n.$$

其中 n 是 L 的维数。因此，我们可以将 $K = 2^n + 1$ 和 r_0 取得足够小，使得 $\lambda(B_{\mathrm{id}_L, 2r})/\lambda(B_{\mathrm{id}_L, r}) < K$。利用 λ 和 d 都是左不变的这一事实，我们便得到了所需的结论。⋈

Claim 2. If $x \in L$ is a Lebesgue point of f_A, then

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_A^{d,\varepsilon}(x) = f_A(x).$$

Proof of Claim 2. Note that $f^{d,\varepsilon}(x) - f(x) = \mathbb{E}_{t \in B_\varepsilon(x)}(f(t) - f(x))$. Hence, the conclusion follows from the definition of Lebesgue points. ⋈

The proof for the last statement for the right measures and right metrics is similar. □

9. Small growth in Lie models

In this section we will prove there are sets in the Lie model with small measure growth. We starts by noting some additional properties of the Lie model in the situation we are interested in.

命题 9.1. 假设 (G, Σ) 是一个伪连通且伪紧群的扩张，其中每个 $D \subseteq G$ 在 Σ 中可定义的对象都是伪可测的，$S \subseteq G$ 是 Σ 中可定义的近似群，使得对于某个伪 Haar 测度 μ，$0 < \mu(S) < \mu(G) = \infty$，并且 $\pi : \langle S \rangle \to L$ 是 S 的一个连续可定义于 Σ 中的连通李模型。那么 L 是一个幺模、非紧的连通李群。

Proof. We first show that L is unimodular. Without loss of generality, we can assume that (G, Σ) is generated by the collection of subsets of G definable in Σ. Then by Lemma 5.5, (G, Σ) is $\aleph_1$-saturated. Let μ also denote its restriction to $\langle S \rangle$. Scaling μ by a constant, we can arrange that $\mu(S) = 1$. Hence, by Lemma 5.6, μ witness that S is a definably amenable approximate group. Thus, we are in the setting to apply Lemma 8.1. In particular, the pushforward of μ on L is a Haar measure λ on L. The pseudo-Haar measure is right invariant by Lemma 4.9. It follows that λ is also right invariant. Thus L is unimodular.

Next we show that L is noncompact. Suppose to the contrary that this is not the case. By (LM1) in the definition of locally compact model, there is an open neighborhood U of id_L such that $\pi^{-1}(U) \subseteq S$. Since L is connected, applying the Kemperman inequality (Fact 7.1), we have

$$\lambda(U^{n+1}) \geq \min\{\lambda(U^n) + \lambda(U), \lambda(L)\}.$$

As L is compact, $\lambda(U) < \infty$. Hence, there is n such that $\lambda(U^n) \geq \lambda(L)$, which implies that $U^{n+1} = L$. For such n, we see that $S^{n+1} = \langle S \rangle$. Since S is an approximate group, we then learn that $\langle S \rangle$ is contained in contained in finitely many translates of S. So $\mu(\langle S \rangle) < \infty$. On the other hand S is infinitesimal compared to G, Lemma 7.2 applies and, for all n,

$$\mu(S^{n+1}) \geq \mu(S^n) + \mu(S).$$

这导致了矛盾。 □

Recall that for a given function $f : G \to \mathbb{R}$, the **superlevel set** of f is

$$\mathcal{L}_f^+(t) := \{g \in G \mid f(g) \geq t\}.$$

引理 9.2. 设 G 是一个配备不变测度 μ 的群，且 $S \subseteq G$ 是一个关于 μ 可定义 amenable 的近似群，使得 S 具有一个连通李模型 $\pi\colon \langle S \rangle \to L$。设 A、$B \subseteq \langle S \rangle$ 是 μ-可测的，并且 $\pi(A)$ $\pi(B)$ 具有正测度且包含于紧集中。设 f_A、f_B 和 f_{AB} 分别是 A、B 和 AB 的 λ- 几乎处处密度。对于所有常数 α、$\beta > 0$，存在 σ- 紧集 X_α、$Y_\beta \subseteq L$，使得以下结论成立：

(1) $X_\alpha \subseteq \mathcal{L}_{f_A}^+(\alpha)$ 和 $\lambda(X_\alpha) = \lambda(\mathcal{L}_{f_A}^+(\alpha))$ (2) $Y_\beta \subseteq \mathcal{L}_{f_B}^+(\beta))$ 和 $\lambda(Y_\beta) = \lambda(\mathcal{L}_{f_B}^+(\beta))$ (3) $X_\alpha Y_\beta$ 是 σ-紧，(4) 对于 $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$，我们有 $\lambda(X_\alpha Y_\beta \setminus \mathcal{L}_{f_{AB}}^+(\gamma)) = 0$。

Proof. We first consider the case where $\alpha \leq \beta$. Using the inner regularity of the Haar measure on L, choose σ-compact $X_\alpha \subseteq \mathcal{L}_{f_A}^+(\alpha)$ such that $\lambda(X_\alpha) = \lambda(\mathcal{L}_{f_A}^+(\alpha))$. Let $d : L^{[2]} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ be the distance function induced by a left-invariant Riemannian metric on L. By Proposition 8.5, a.e. $y \in G$ we have

$$f_B(y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_B^{d,\varepsilon}(t) \tag{6}$$

where $f_B^{d,\varepsilon}$ is the (d, ε)-density function of B. Using this observation and the inner regularity of the Haar measure on L, we obtain σ-compact $Y_\beta \subseteq \mathcal{L}_{f_B}^+(\beta)$ such that $\lambda(Y_\beta) = \lambda(\mathcal{L}_{f_B}^+(\beta))$ and Y_β consists only of $y \in G$ such that equation (6) holds. The product $X_\alpha Y_\beta$ is σ-compact, and hence measurable. It remains to show that

$$\lambda(X_\alpha Y_\beta \setminus \mathcal{L}_{f_{AB}}^+(\beta)) = 0$$

Again by Proposition 3.2, for a.e. $z \in X_\alpha Y_\beta$, we have

$$f_{AB}(z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_{AB}^{d,\varepsilon}(z). \tag{7}$$

where $f_{AB}^{d,\varepsilon}$ is the (d, ε)-density function of AB with respect to π. It is enough to consider one such z and show that $f_{AB}(z) \geq \beta$. Let $x \in X_\alpha$ and $y \in Y_\beta$ be such that $z = xy$, and choose $a \in A$ such that $\pi(a) = x$. If $W \subseteq L$ is measurable, then

$$\mu(aB \cap \pi^{-1}(W)) = \mu(B \cap \pi^{-1}(x^{-1}W)).$$

If $U_r(y)$ is a ball centered at y with radius r, then by the left invariance of d, $xU(y)$ is the ball $U_r(z)$ centered at z and with the same radius. It follows that $f_B^{d,\varepsilon}(x^{-1}t)$ is the (d, ε)-density function for aB with respect to π.

Since $aB \subseteq AB$, it implies that $f_B^{d,\varepsilon}(x^{-1}t) \leq f_{AB}^{d,\varepsilon}(t)$ for all $t \in L$. In particular, with $t = z$, we get

$$f_B^{d,\varepsilon}(y) \leq f_{AB}^{d,\varepsilon}(z)$$

sing equations (6) and (7), we get $f_B(y) \leq f_{AB}(z)$, so $f_{AB}(z) \geq \beta$ completing the proof.

注意，第8节中的所有结果都有将“左”替换为“右”后的显然对应版本。此外，通过考虑对立群，可以由其“左”版本推出“右”版本 G^{op}，其中我们定义群运算 $\cdot^{\mathrm{op}}$ 为 $g_1 \cdot^{\mathrm{op}} g_2 := g_2 g_1$。因此，我们以类似方式处理 $\alpha > \beta$ 的情形，交换 $\mathcal{L}^+_{f_A}(\alpha)$ 与 $\mathcal{L}^+_{f_B}(\beta)$ 的角色，并使用右不变度量而非左不变度量。□

We use the following simple consequence of Fubini's theorem concerning the superlevel sets [Rud87, Theorem 8.16]:

Fact 9.3. *Let μ be a positive measure on some σ-algebra in the set Ω. Suppose $f : \Omega \to [0, \infty]$ be a compactly support measurable function. For every $r > 0$,*

$$\int_\Omega f^r(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{\geq 0}} r x^{r-1} \mu(\mathcal{L}^+_f(x))\,\mathrm{d}x.$$

We now show we can find subsets of the Lie model with small growth.

Proposition 9.4. *Suppose G is a pseudo-compact group equipped with a pseudo-Haar measure μ, and $S \subseteq G$ is a open approximate group with connected Lie model $\pi : \langle S\rangle \to L$. Suppose $A, B \subseteq \langle S\rangle$ are μ-measurable such that $\pi(A)$ $\pi(B)$ are contained in compact sets. Then for all $\varepsilon > 0$, there are compact $X, Y \subseteq L$ such that* $\mathrm{BM}(X, Y) \leq \mathrm{BM}(A, B) + \varepsilon$.

Proof. If L is compact we are done. Hence, we can assume that L is noncompact. By Kemperman's inequality, for each $X, Y \subseteq L$, we have $\mathrm{BM}(X, Y) \geq 1$. Let $r = \mathrm{BM}(A, B)$ and assume there is $\varepsilon > 0$ such that for every pair of sets X, Y in L we always have $\mathrm{BM}(X, Y) > r + \varepsilon$.

Let f_A, f_B, and f_{AB} denote the density function of A, B, and AB respectively. Applying Lemma 9.2, for every $\alpha, \beta > 0$ there are $X_\alpha \subseteq \mathcal{L}^+_{f_A}(\alpha) \subseteq L$ and $Y_\beta \subseteq \mathcal{L}^+_{f_B}(\beta) \subseteq L$ such that $\lambda(X_\alpha) = \lambda(\mathcal{L}^+_{f_A}(\alpha))$, $\lambda(Y_\beta) = \lambda(\mathcal{L}^+_{f_B}(\beta))$, and

$$\lambda(X_\alpha Y_\beta \setminus \mathcal{L}^+_{f_{AB}}(\max\{\alpha, \beta\})) = 0. \tag{8}$$

By the assumption we have $\mathrm{BM}(X_\alpha, Y_\beta) > r + \varepsilon$. Together with (8) we get

$$\begin{aligned} \lambda\left(\mathcal{L}^+_{f_{AB}}(\max\{\alpha, \beta\})\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} &\geq \lambda\left(X_\alpha Y_\beta\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \\ &\geq \lambda\left(X_\alpha\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \lambda\left(Y_\beta\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} = \lambda\left(\mathcal{L}^+_{f_A}(\alpha)\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \lambda\left(\mathcal{L}^+_{f_B}(\beta)\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{9}$$

To simplify the notation we define functions $F_A, F_B, F_{AB} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that

$$F_A(t) = \lambda(L^+_{f_A}(t))^{\frac{1}{r+\varepsilon}}, \quad F_B(t) = \lambda(L^+_{f_B}(t))^{\frac{1}{r+\varepsilon}}, \quad \text{and} \quad F_{AB}(t) = \lambda(L^+_{f_{AB}}(t))^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.$$

Clearly F_A, F_B, F_{AB} are non-increasing functions, and hence measurable. By (9), we have

$$F_{AB}(\max\{\alpha, \beta\}) \geq F_A(\alpha) + F_B(\beta).$$

for all $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. This means, if we choose $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and assume that $F_A(\alpha) \geq t_1$ and $F_B(\beta) \geq t_2$, then $F_{AB}(\max\{\alpha, \beta\}) \geq t_1 + t_2$. Hence $\mathcal{L}^+_{F_A}(t_1) \cup \mathcal{L}^+_{F_B}(t_2) \subseteq \mathcal{L}^+_{F_{AB}}(t_1 + t_2)$. Let

$\lambda_{\mathbb{R}}$ be the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$, we thus have

$$\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_{AB}}(t_1+t_2)) \geq \max\{\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_A}(t_1)), \lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_B}(t_2))\}. \tag{10}$$

Finally, let us compute $\mu(AB)$. Using Fact 9.3 we have

$$\mu(AB)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{>0}} F_{AB}^{r+\varepsilon}(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{>0}} (r+\varepsilon)t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_{AB}}(t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}. \tag{11}$$

Let $\Omega_A \subseteq \mathbb{R}$ and $\Omega_B \subseteq \mathbb{R}$ be the essential support of F_A and F_B respectively. Let $P_A = \lambda_{\mathbb{R}}(\Omega_A)$ and $P_B = \lambda_{\mathbb{R}}(\Omega_B)$. Using (10) by letting t_1 and t_2 approach to 0, the essential support of F_{AB} has a $\lambda_{\mathbb{R}}$-measure at least $P_A + P_B$. Thus by a change of variable we have

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^{>0}} t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_{AB}}(t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} &\geq \left(\int_0^{P_A+P_B} t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_{AB}}(t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \\ &= \left((P_A+P_B)^{r+\varepsilon}\int_0^1 t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_{AB}}((P_A+P_B)t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Now using (10) again, the right hand side of the above inequality is at least

$$\left((P_A+P_B)^{r+\varepsilon}\max\left\{\int_0^1 t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_A}(P_At))\,\mathrm{d}t, \int_0^1 t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_B}(P_Bt))\,\mathrm{d}t\right\}\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.$$

Using Hölder's inequality with exponents $(0,\infty)$, the above quantity is at least

$$\left(P_A^{r+\varepsilon}\int_0^1 t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_A}(P_At))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \left(P_B^{r+\varepsilon}\int_0^1 t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^+_{F_B}(P_Bt))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.$$

By a change of variable, and the definitions of P_A and P_B, the above quantity is equal to

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{>0}} t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{F_A})(t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \left(\int_{\mathbb{R}^{>0}} t^{r+\varepsilon-1}\lambda_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{F_B})(t))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r+\varepsilon}}.$$

Therefore using (11) we obtain

$$\mu(AB)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} \geq \mu(A)^{\frac{1}{r+\varepsilon}} + \mu(B)^{\frac{1}{r+\varepsilon}},$$

which contradicts the assumption that $\mathrm{BM}(A,B) = r$. □

10. Proof of the main theorems

A main ingredient is the following measure growth gap result by the first two authors [JT22].

Fact 10.1 (Measure expansion gaps for semisimple Lie groups)**.** *Suppose G is a compact semisimple Lie group. If $A \subseteq G$ is compact with sufficiently small measure, then we have*

$$\mu(A^2) \geq (2 + 10^{-12})\mu(A).$$

We will also use the solution of the noncompact Kemperman Inverse Problem by An and the authors [AJTZ21, Theorem 3.12]. The main ingredient of this result is the nonabelian Brunn–Minkowski inequality in [JTZ21] by the authors.

Fact 10.2 (Kemperman inverse theorem for noncompact groups)**.** *Let G be a connected unimodular locally compact noncompact group equipped with a Haar measure μ, and $A, B \subseteq G$ be a compact set satisfying*

$$\mu(AB) < \mu(A) + \mu(B) + 2(\mu(A)\mu(B))^{\frac{1}{2}}.$$

于是存在连续满群同态 $\chi:\ G \to \mathbb{R}$，其核为紧集。

我们证明了定理 1.2 在简单李群情形下的一个版本。事实上，将事实 10.1 替换为其在 [JT22] 中的推广后，该证明也适用于没有以 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为商群的紧群。由于除 SO(3, ℝ) 外，该指数对任何群都不是最优的，为了便于阅读，我们不以最一般的形式陈述结果。

定理 10.3. 对所有 $\varepsilon > 0$ 和 $N > 0$，存在 $c = c(\varepsilon, N)$，使得若 G 是一个配备归一化哈尔测度 μ 的紧半单李群，且 $A, B \subseteq G$ 的选取满足 A,B，并且 AB 可测，$0 < \mu(A)\ \mu(B) < c$，以及 $\mu(A)/N < \mu(B) < N\mu(A)$，那么

$$\mu(AB)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} > \mu(A)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + \mu(B)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Proof. Fix ε and N as in the statement of the theorem. Suppose to the contrary that no such c exists. Then obtain a sequence (G_n) of compact semisimple Lie groups, and sequence (A_n) and (B_n) of sets such that

(1_n) $A_n, B_n, A_nB_n \subseteq G_n$ 是可测的 (2_n) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B_n) = 0$，且 $\mu_n(A_n)/N < \mu_n(B_n) < N\mu_n(A_n)$，其中$\mu_n$ 是 $G_n(3_n)$上的归一化哈尔测度。对于每个 n，$\mu(A_nB_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq \mu(A_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + \mu(B_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，或者等价地，

$$\mathrm{BM}(A_n, B_n) \leq 2 - 4\varepsilon',$$

where we set $\varepsilon' = \varepsilon/(1 + 2\varepsilon)$.

Now choose an arbitrary nonprincipal ultrafilter $\mathcal{U}$. Let G be the ultraproduct $\prod_{\mathcal{U}} G_n$ of the sequence G_n, and set $A = \prod_{\mathcal{U}} A_n$ and $B = \prod_{\mathcal{U}} B_n$. Applying Proposition 4.12 we deduce that

(1) A, B, and AB are pseudo-measurable in G
(2) the sets A and B commensurable and infinitesimal compared to G.
(3) $\mathrm{BM}(A, B) \leq 2 - 4\varepsilon'$.

Noting also that G is a pseudo-Lie pseudo-compact group, we apply Proposition 5.12 to get $A', B', S \subseteq G$ such that the following conditions hold:

$(1')$ 设 (G, Σ) 为由 A'、B' 和 S 生成的群 G 的扩张。那么，Σ 中每个 $D \subseteq G$ 都是伪可测的。$(2')$ A、B、A'、B'、S 彼此均可公度（$3'$） $BM(A', B') \leq 2 - 3\varepsilon'$（$4'$） S 是一个近似群（$5'$） A' 可以被有限多个 S 的左平移覆盖，而 B' 可以被有限多个 S 的右平移覆盖。

Next, we apply Proposition 6.5 and replace S if necessary to arrange that it has a connected Lie model $\pi : \langle S \rangle \to L$ continuously definable in Σ.

Recall that a semisimple Lie group is connected. Hence, G is a pseudo-connected and pseudo-compact group. Conditions $(1')$ and $(2')$ then allow us to apply Proposition 7.3 to get $A'', B'' \subseteq \langle S \rangle$ such that the following hold:

$(1'')$ A'' 和 B'' 在 $\Sigma(2'')$ 中可定义； A、 B、 A'、 B'、 A''、 B''、 S彼此可公度 $(3'')$ $BM(A'', B'') \leq 2 - 2\varepsilon'$。

现在应用命题 9.4，得到紧集 X、 $Y \subseteq L$，使得

$$\mathrm{BM}(X, Y) \leq 2 - \varepsilon'.$$

利用事实 10.2，存在一个连续的满射群同态，其紧核为 $\phi\colon L \to \mathbb{R}$。

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个开区间，则有 $\lambda_{\mathbb{R}}(I + I) = 2\lambda_{\mathbb{R}}(I)$。令 $E = \pi^{-1}(\phi^{-1}(I))$，得到 $\mu(E^2) = 2\mu(E)$。由于 E 在 Σ 中是 σ-可定义的，我们得到在 Σ 中可定义的 $D \subseteq E$，使得

$$\mu(D^2) \leq (2 + 10^{-12})\mu(D).$$

由于 D 在 Σ 中可定义，因此它是伪可测的，并且等于 $\prod_{\mathcal{U}} D_n$，其中 $D_n \subseteq G_n$ 可测。因此，存在足够大的 n，使得 $\mu_n(D_n^2) < (2 + 10^{-12})\mu(D_n)$，且 $\mu(D_n)$ 任意小。这与事实 10.1 矛盾，证明完毕。□

现在我们得到定理 1.1 的一个推广。

定理 10.4. 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $c > 0$，使得只要 G 是一个带有归一化哈尔测度 μ 的紧半单李群，且 $A \subseteq G$ 是开集并满足 $\mu(A) < c$，我们就有

$$\mu(A^2) > (4 - \varepsilon)\mu(A).$$

证明. 选取足够小的 δ，使得 $2^{2-\delta} > 4 - \varepsilon/10$，令 $N = 1$，并取定理 10.4 中的 $c = c(\varepsilon, N)$。假设 $A \subseteq G$ 是开集，且 $\mu(A) < c$。由 Haar 测度的内正则性，可取紧集 $A' \subseteq A$，使得 $\mu(A') \geq (1 - \varepsilon/10)\mu(A)$。于是我们有

$$\mu(A^2) \geq \mu((A')^2) \geq \left(4 - \frac{\varepsilon}{10}\right)\mu(A') \geq \left(4 - \frac{\varepsilon}{10}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{10}\right)\mu(A) > (4 - \varepsilon)\mu(A).$$

证明至此完成。 □

注 10.5。如果能从 Brunn–Minkowski 不等式中去掉螺旋维数（定义见 [JTZ21]）这一项，那么事实 10.2 可以自然地推广到所有非紧李群；等价地说，如果我们有以下形式的非阿贝尔布伦–明可夫斯基猜想 [JTZ21、猜想 1.4 和定理 1.5]。

猜想 10.6（非阿贝尔布伦–明可夫斯基猜想）。设 G 是一个配备 Haar 测度 μ的单连通单李群，其中 d 是 G 的维数， m 是 G的极大紧子群的维数。那么对于任意紧集 $A, B \subseteq G$，

$$\mu(AB)^{\frac{1}{d-m}} \geq \mu(A)^{\frac{1}{d-m}} + \mu(B)^{\frac{1}{d-m}}.$$

如果我们有非阿贝尔布伦–明可夫斯基猜想（猜想 10.6），以及事实 10.1 的一个适当推广，即对某个 $\eta > 0$， $\mu(A^2) \geq (2^{d-m-1} + \eta)\mu(A)$，那么本文所发展的方法就足以证明广义 Breuillard–Green 猜想对所有紧致单李群都成立。

It worth noting that although the Nonabelian Brunn-Minkowski Conjecture remains open, in [JTZ21] the authors proved the following theorem with an extra 2/3 factor on the exponents:

Fact 10.7 (Nonabelian Brunn-Minkowski inequality for Lie groups)**.** *Let L be a connected Lie group with dimension d, let m be the maximal dimension of a compact subgroup of L, and set $n = d - m$. Suppose, L is unimodular and equipped with Haar measure μ. For all $X, Y \subseteq L$ be compact with positive measure, we have*

$$\mu(XY)^{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} \geq \mu(X)^{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} + \mu(Y)^{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}.$$

With Fact 10.7 and a suitable generalization of Fact 10.1, it is possible to use our method to show a weaker version of Conjecture 3.8 that $\mu(A^2) > (2^{\frac{2(n-m)}{3}} - \varepsilon)\mu(A)$ for sufficiently small A.

Acknowledgements

The authors thank Arturo Rodriguez Fanlo, Ben Green, Ehud Hrushovski, Simon Machado, and Jinhe Ye for discussions.

References

[AJTZ21] Jinpeng An、Yifan Jing、Chieu-Minh Tran 和 Ruixiang Zhang，《连通非紧非阿贝尔群中的小测度扩张现象》，arXiv:2111.05236（2021）。[BGT11] Emmanuel Breuillard、Ben Green 和 Terence Tao，《线性群的近似子群》，Geom. Funct. Anal. 21（2011），第 4 期，774–819。MR 2827010[BGT12] ———，《近似群的结构》，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 116（2012），115–221。MR 3090256[Car15] Pietro Kreitlon Carolino，《局部紧近似群的结构》，ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2015，博士学位论文——加利福尼亚大学洛杉矶分校。MR 3438951[DE09] Anton Deitmar 和 Siegfried Echterhoff，《调和分析原理》，Universitext，Springer，纽约，2009。MR 2457798[Gle52] Andrew M. Gleason，《没有小子群的群》，Ann. of Math. (2) 56（1952），193–212。MR 49203[Gol10] Isaac Goldbring，《局部群的希尔伯特第五问题》，Ann. of Math. (2) 172（2010），第 2 期，1269–1314。MR 2680491[Gol22] ———，《贯穿数学的超滤子》，Graduate Studies in Mathematics，第 220 卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2022。MR 4454845[Gre] Ben Green，《100 个未解决问题》，手稿。[Hel08] Harald Helfgott，《$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 中的增长与生成》，Ann. of Math. (2) 167（2008），第 2 期，601–623。MR 2415382[HKST15] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T. Tyson，《度量测度空间上的 Sobolev 空间》，New Mathematical Monographs，第 27 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015，基于上梯度的方法。MR 3363168[HM53] Ralph Henstock 和 Murray Macbeath，《关于和集的测度。I. Brunn、Minkowski 和 Lusternik 定理》，Proc. London Math. Soc. (3) 3（1953），182–194。MR 56669[HN12] Joachim Hilgert 和 Karl-Hermann Neeb，《李群的结构与几何》，Springer Monographs in Mathematics，Springer，纽约，2012。MR 3025417[HPP08] Ehud Hrushovski、Ya'acov Peterzil 和 Anand Pillay，《群、测度与 NIP》，J. Amer. Math. Soc. 21（2008），第 2 期，563–596。MR 2373360[Hru12] Ehud Hrushovski，《稳定群论与近似子群》，J. Amer. Math. Soc. 25（2012），第 1 期，189–243。MR 2833482[JT22] Yifan Jing 和 Chieu-Minh Tran，《紧半单李群中的测度增长与 Kemperman 逆问题》，arXiv:2303.15628（2022）。[JTZ21] Yifan Jing、Chieu-Minh Tran 和 Ruixiang Zhang，《一个非阿贝尔 Brunn–Minkowski 不等式》，arXiv:2101.07782（2021）。

[Kem64] Johannes Kemperman, 《局部紧群中集合的乘积》, Fund. Math. 56 (1964), 51–68. MR 202913[Lee18] John M. Lee, 《黎曼流形导论》, Graduate Texts in Mathematics, 第 176 卷, Springer, Cham, 2018. MR 3887684[MW15] Jean-Cyrille Massicot 和 Frank O. Wagner, 《近似子群》, J. ´Ec. polytech. Math. 2 (2015), 55–64. MR 3345797[PS16] L´aszl´o Pyber 和 Endre Szab´o, 《李型有限单群中的增长》, J. Amer. Math. Soc. 29 (2016), no. 1, 95–146. MR 3402696[Rob96] Abraham Robinson, 《非标准分析》, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996, 重印第二版（1974）, 附 Wilhelmus A. J. Luxemburg 撰写的序言。MR 1373196[Rud87] Walter Rudin, 《实分析与复分析》, 第三版, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157[Tao08] Terence Tao, 《非交换群的乘积集估计》, Combinatorica 28 (2008), no. 5, 547–594. MR 2501249[Tao15] _____, 李型有限单群中的扩张, Graduate Studies in Mathematics, 第 164 卷, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. MR 3309986[vdD98] Lou van den Dries, 《驯性拓扑与 o-极小结构》, London Mathematical Society Lecture Note Series, 第 248 卷, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. MR 1633348[vdDW84] Lou van den Dries 和 Alex J. Wilkie, 《Gromov 关于多项式增长群的定理与初等逻辑》, J. Algebra 89 (1984), no. 2, 349–374. MR 751150[Yam53] Hidehiko Yamabe, 《Gleason 定理的推广》, Ann. of Math. (2) 58 (1953), 351–365. MR 58607

Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, UK
Email address: yifan.jing@maths.ox.ac.uk

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore
Email address: trancm@nus.edu.sg

Department of Mathematics, University of California Berkeley, CA, USA
Email address: ruixiang@berkeley.edu