arXiv:2304.09635v1 [math.GT] 19 Apr 2023

正流脊与接触3维流形，II

Ippei Ishii、Masaharu Ishikawa、Yuya Koda 和 Hironobu Naoe

Abstract. 本文对应 arXiv:1912.05774v3 [math.GT] 的第 8 节。第 7 节及之前的内容已作为一篇独立论文发表于 Annali di Matematica Pura ed Applicata。在该论文中，证明了对于闭定向三流形 M 的任意正流脊 P，都存在唯一一个由 P 支撑的接触结构，且该接触结构在同痕意义下唯一。因此，这定义了一个映射：从 M 上正流脊的同痕类集合映到 M 上接触结构的同痕类集合。本文证明该映射是满射。作为推论，我们证明，任何流脊都可以通过依次施行第一类和第二类正则变换变形为正流脊。

1. Introduction

在 [10], 闭、连通、定向的接触三维流形与具有特定结构的二维简单多面体之间存在联系，这类多面体称为正流脊。若闭、连通、定向三流形 M 上的无奇异流$\mathcal{F}$ 横截于 P，且在 M中 P 的补集内为“常值流”，则称该流P 由 M 的流脊承载。若接触结构 ξ 上存在接触形式 α，使得 $\xi = \ker \alpha$，且其 Reeb 流由 P承载，则称接触结构 ξ 由流脊 P 支撑。流脊有两类顶点：图 1 左侧的顶点称为 ℓ型，右侧的顶点称为 r型。若流脊至少有一个顶点，且所有顶点均为 ℓ型，则称其为正的。文献 [10] 证明，对于闭定向三流形 M 的任意正流脊 P，存在唯一一个由 P 支撑的接触结构，唯一性取模同痕。由此定义了一个映射：从 M 上正流脊的同痕类集合映到 M上接触结构的同痕类集合。本文的以下主要定理表明，该映射是满射。

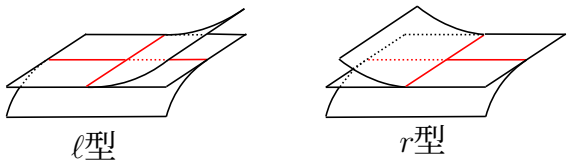


Figure 1. ℓ 型和 r 型的顶点。此处，环境空间配备右手定向。

定理 1.1。 对于任意闭合、连通、定向的接触3-流形(M, ξ)，存在一个正流脊 P，它支撑 ξ 的流 M 。

如上所述，该定理给出了一个满射：从 M 上正流脊的同痕类集合映到 M上的接触结构同痕类集合。它还给出了一个满射：从按同胚等价的正流脊集合映到按接触同胚等价的接触三维流形集合。要得到一一对应，我们需要找到正流脊的合适移动。流脊的移动见文献 [9, 1, 3]。然而，正流脊的移动十分少见，因为已知的大多数流脊移动都会产生 r型顶点。定理 1.1 表明，任意流脊都可通过正则变换变形为正流脊，见推论 3.3。

从按同胚分类的正流脊集合到按接触同胚分类的接触三维流形集合的满射，使我们能够像定义通常三维流形的 Matveev 复杂度那样，定义接触三维流形的复杂度。相关内容将在后续论文中讨论。

在第 2 节中，我们简要介绍一些基本概念，例如接触三维流形、分支多面体、流脊、正规移动，以及如何从正流脊构造接触形式；这些内容均用于 [10]。定理 1.1 的证明见第 3 节。

第二作者获得日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，课题编号为 JP19K03499；同时获得日本学术振兴会科学研究费助成事业与越南科学技术翰林院联合研究计划资助，课题编号为 JPJSBP120219602。第三作者获得日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，课题编号为 JP20K03588 和 JP21H00978。第四作者获得日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，课题编号为 JP19K21019 和 20K14316。

2. Preliminaries

本文中，对于多面体空间 X，$\operatorname{Int} X$ 表示 X的内部，∂X 表示 X的边界，而 $\operatorname{Nbd}(Y; X)$ 表示 X 中子空间 Y 的闭正则邻域，其中若X是光滑流形，则 X 配备自然的分片线性结构。集合 $\operatorname{Int}\operatorname{Nbd}(Y; X)$ 是 X中 $\operatorname{Nbd}(Y; X)$ 的内部。

2.1. 接触3维流形。本小节简要回顾本文将用到的三维接触拓扑学概念和已知结果。读者可参阅 [4, 5, 14]等文献了解一般性说明。

设 M 是一个闭、定向的光滑三维流形。M 上的 接触结构是 M 上的二维平面场，由 M 上满足条件 $\alpha\wedge d\alpha\neq 0$ 处处成立的 1-形式 α 的核给出。1-形式 α 称为 接触形式。若 $\alpha\wedge d\alpha>0$ 在 M 上处处成立，则由 $\ker\alpha$ 给出的接触结构称为 正接触结构，1-形式 α 称为 正接触形式。闭、定向的光滑三维流形 M 与其上接触结构 $\xi=\ker\alpha$（定义在 M 上）组成的二元组称为 接触三维流形，记作 $(M,\ \xi)$。本文中，接触结构均指正接触结构。

若存在一参数族接触形式 α_t, $t\in[0,1]$，使得 $\xi=\ker\alpha_0$ 且 $\xi'=\ker\alpha_1$，则称 M 上的两个接触结构 ξ 和 ξ' 是同伦的 。若存在微分同胚 $\phi:\ M\to M'$，使得 $\phi_*(\xi)\ =\xi'$，则称两个接触三维流形 (M,ξ) 和 (M',ξ') 是接触同胚的 。映射 ϕ 称为接触同胚。若 $M=M'$，我们也称 ξ 和 ξ' 接触同胚。Gray 定理指出，若两个接触结构同伦，则它们接触同胚 [7]。

接下来介绍 Reeb 向量场。设 α 是 M上的接触形式。由条件 $d\alpha(X,\cdot)=0$ 且 $\alpha(X)=1$ 所确定的 M 上的向量场 X，称为 M上的 α 的***Reeb*** 向量场 。该向量场由 α 唯一确定，记作 R_α。由 Reeb 向量场生成的三维流形 M 上的无奇异流称为***Reeb*** 流。

Reeb 向量场在接触几何与拓扑学的许多研究中发挥着重要作用。在三维接触拓扑中，它用于建立三维流形上的接触结构与开书分解之间的对应关系。设 Σ 是带边界的定向紧曲面，$\phi:\Sigma\to\Sigma$ 是一个微分同胚，并且 $\phi|_{\partial\Sigma}$ 是 $\partial\Sigma$ 上的恒等映射。若闭定向三流形 M 与由 $\Sigma\times[0,1]$ 按以下方式识别所得的商空间定向保持同胚：对于 $x\in\Sigma$，识别 $(x,\ 1)\sim(\phi(x),\ 0)$；对于每个 $y\in\partial\Sigma$ 及任意 $t\in[0,1]$，识别 $(y,\ 0)\sim(y,\ t)$，则称其为 M 的一个开书分解。商映射下 $\partial\Sigma$ 在 M 中的像 L 称为绑定，其定向取为 Σ的边界定向。曲面 $\Sigma\times\{t\}$ 在 M 中的像称为页。我们将此开书记为 $(M,\ \Sigma,\ L,\ \phi)$。

若存在定义在 M上的接触形式 α，使得 $\xi=\ker\alpha$，且其 Reeb 向量场 R_α 满足以下条件，则称 ξ上的接触结构由开书（$M,\ \Sigma,\ L,\ \phi$）支撑：

- R_α 与 L 相切，且由 Σ 诱导的 L 上的定向与 R_α的方向一致，并且

对于任意 $t\in[0,1]$，- R_α 都与 $\operatorname{Int}\Sigma\times\{t\}$ 正向横截。

任何开书都有一个与之支撑对应的接触结构。Thurston 和 Winkelnkemper 利用这一点证明，任何闭的、定向的光滑三维流形都存在接触结构 [16]。注意，Martinet [12]最先证明了任意三维流形都存在接触结构。随后 Giroux 证明，给定开书所支撑的接触结构在同痕意义下唯一 [6]。他还证明了以下定理，该定理将在定理 1.1 的证明中用到。

定理 2.1（Giroux，参见 [4]）。 对于任意接触3维流形（M,ξ），存在一个开书分解 M 使其支撑 ξ。

Giroux 的这些结果给出了从 M 的开书分解的同痕类集合到 M上的接触结构的同痕类集合的满射，同时也给出了从开书按同胚取商后的集合到按接触同胚取商后的接触三维流形集合的满射。对M 的开书集合按一种作用取商，这种作用针对开书的页，称为稳定化，于是我们可以认为开书与接触三维流形之间存在一一对应关系，这称为 *Giroux* 对应。

2.2. **分支多面体**。 若紧致拓扑空间 P 的每一点 P 都有一个正则邻域，且该邻域同胚于图 2 所示的三个局部模型之一，则称 P 为简单多面体或准标准多面体。正则邻域呈模型 (iii) 形状的点称为 P 的真顶点 （简称顶点 ）， P的真顶点集记为 $V(P)$。正则邻域呈模型 (ii)、(iii) 和 (v) 形状的点集称为 P的奇异集 ，记为 $S(P)$。正则邻域呈模型

(iv) 和 (v) 形状的点集称为 P的边界，记为∂P。$P \setminus S(P)$的每个连通分支称为 P的区域，而 $S(P) \setminus V(P)$的每个连通分支称为 P的边。若简单多面体 P的每个区域都是开圆盘，且每条边都是开弧，则称其为特殊或标准。本文中，我们假设所有区域都是可定向的。

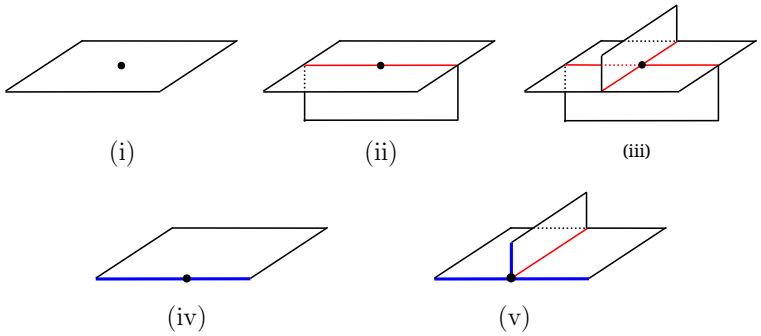


FIGURE 2. 简单多面体的局部模型。

简单多面体的 分支定向 P 是指为各区域指定定向P，使得每条边上由三个相邻区域诱导出的三个定向 P 并不一致。注意，尽管简单多面体的每个区域 P都可定向，P 却不一定存在分支定向。关于分支多面体的一般性质，参见 [8, 1, 11, 15] 。

2.3. **流脊**。若多面体 P 嵌入于闭合、连通、定向三维流形 M 中，且 M 去掉一个开球后可塌缩到P，则称其为该流形的脊 M 。若脊是简单的，则称为简单脊。

如果简单脊 P 允许赋予分支定向，那么我们就可以按照图3所示的局部模型，在环境流形 M 中将 P 光滑化。P 中正则邻域呈模型 (iii) 形状的点称为型顶点 ℓ；呈模型 (iv) 形状的点称为型顶点 r。

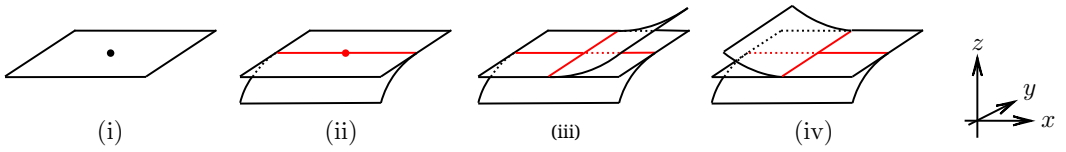


FIGURE 3. 分支简单多面体的局部模型。

定义。设 M 是一个闭合、连通、定向三维流形。

(1) 设 $(M, \mathcal{F})$ 是 M 与 M 上的无奇异流 $\mathcal{F}$ 的一对。若对 M 的每个点 $p \in P$，都存在一个包含 p 的正坐标图 $(U; x, y, z)$，使得 (U, p) 是图3中的一个模型，则称 M 的简单脊 P 是 $(M, \mathcal{F})$ 的流脊

其中，图3中的 $\mathcal{F}|_U$ 由 $\frac{\partial}{\partial z}$ 生成，而 $\mathcal{F}|_{M\setminus P}$ 是图4所示的一个常值垂直流。

(2) 如果一个分支简单脊 P 是 M 的一个 流脊，则称其为 M 的<样式 id='3'>流脊，如果对于 M上的某个无奇异流 $\mathcal{F}$，它是（M，$\mathcal{F}$）的流脊。流 $\mathcal{F}$称为被 P承载。

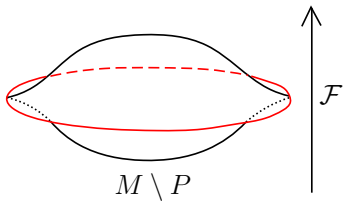


FIGURE 4. 补集中的流 $M \setminus P$。

2.4. **正则变换**。在本小节中，我们介绍分支简单多面体的两类变换。

定义。(1) 图5所示的变换及其镜像称为第一类正则变换 [9]或*Matveev-Piergallini* 变换 [1]。(2) 图6所示的变换及其镜像称为第二类正则变换 [9]或新月变换 [13]。

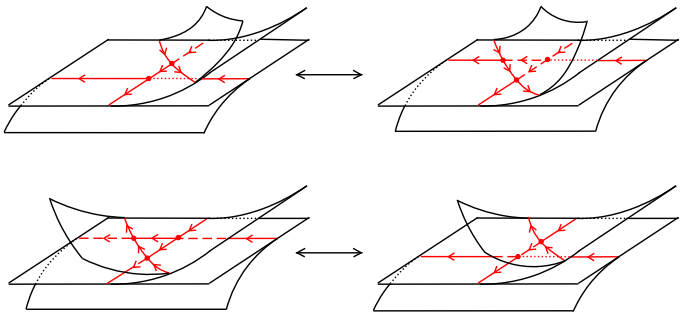


FIGURE 5. 第一类正则变换。

这些操作足以追踪三维流形中非奇异流的变形。在一个闭可定向三维流形中，两个非奇异流 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 若存在从 $\mathcal{F}_1$ 到 $\mathcal{F}_2$ 的光滑变形，且该变形始终属于非奇异流的集合，则称它们是同伦的。

定理 2.2 ([9])。 设 P_1 和 P_2 是闭、可定向三维流形 M的流脊。设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 分别是由 P_1 和 P_2承载于 M 上的流。假设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$同伦。则 P_1 可由 P_2 依次施加第一类和第二类正则变换得到。

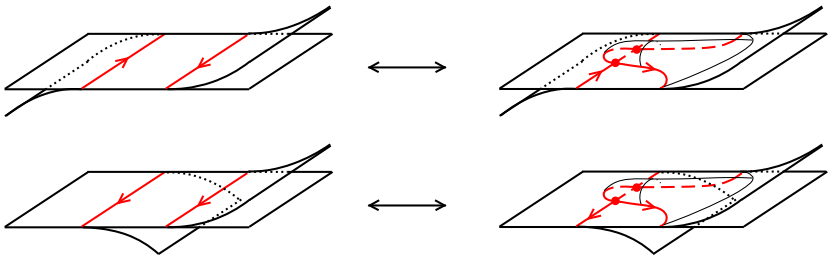


FIGURE 6. 第二类正则变换。

2.5. 由正流脊构造接触形式。 本小节简要回顾如何从闭、连通、定向光滑三维流形 M 的正流脊 P 构造接触形式；该正流脊在 [10]中引入。

对于一个 M 的正流脊 P，设 $Q = \mathsf{Nbd}(S(P);\ P)$，并令 $\mathcal{R}_i$ 为包含在 P 的某个区域 R_i 内的 $P \setminus \mathsf{Int}\ Q$ 的连通分支。设 $\mathsf{Nbd}(S(P);\ M)$ 是 M 中 $P(\ S)$ 的一个邻域，选取 M 中 P 的一个邻域 $N_P = \mathsf{Nbd}(P;\ M)$，使其相对于 $\mathsf{Nbd}(S(P);\ M)$ 足够薄，并设 $N_Q = \mathsf{Nbd}(P;\ M) \cap \mathsf{Nbd}(S(P);\ M)$。则$M$ 分解为

$$M = N_P \cup N_D = \left(N_Q \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_{\mathcal{R}_i} \right) \cup N_D,$$

其中，$N_{\mathcal{R}_i}$ 是包含 $\mathcal{R}_i$ 的 $N_P \setminus N_Q$ 的闭包的连通分支，它与 $\mathcal{R}_i \times [0,1]$ 微分同胚；N_D 是 $M \setminus N_P$ 的闭包，是一个三维球。N_P 的边界由“垂直部分”和“水平部分”组成。“垂直部分”是 N_P 的垂直面，如图 7 右侧所示，它构成一个环带。N_P 其余各面的并集为“水平部分”。我们将 N_D 视为 $D^2 \times [0,1]$，其中 D^2 是单位二维圆盘，因此 $\partial D^2 \times [0,1]$ 对应于 ∂N_P 的“垂直部分”。

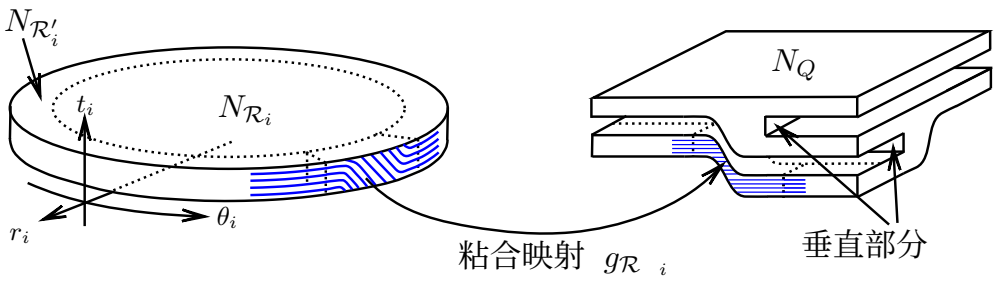


FIGURE 7. N_P的构造。

在 [10, 第 5], 节中构造的 η 上的1-形式称为参考1-形式，满足

(a) $\eta \wedge d\eta \geq 0$ 在 M 上，以及
(b) $d\eta = 0$ 在 $N_D \setminus$ 上（$\hat{}_W \cup \check{}W$）。

性质 (a) 在 [10, 引理 5.8] 中得到证明。性质 (b) 由引理 5.6 (1)、(2) 以及 [10]中的方程（5.4）推出。我们省略 $\hat{}_W \cup \check{}W$ 的定义。这部分出现在经过 P顶点的流的轨道的小邻域中，参见 [10,图 18], ；我们仅在定理 1.1 的证明中用到这一事实。

下一步是在正流脊 P 上构造一个 1-形式 β，使得 $M\, d\beta > 0$。设 $\mathrm{pr}_Q\colon Q \to Q'$ 是将 Q 投影到定向紧曲面 Q' 上的投影，使得对于 P 的每条边 e， Q 中赋予 e 相同定向的两个相邻区域被识别。注意， Q' 与 $S(P)$ 同伦等价。在 P 上的 1-形式意味着：它是通过投影 $\mathrm{pr}_Q\colon Q \to Q'$ 将 Q' 上的 1-形式的拉回与区域 $R_1, \dots, R_n$ of P 上的 1-形式粘合而得到的。在 P 上存在满足 $d\beta > 0$ 的 1-形式 β，这一点在 [10, 引理 63]中得到了证明。

$\hat{}$ 从这个 β 出发，我们在 N_P 上构造一个 1-形式 β。令 $\mathrm{pr}_{\mathcal{R}_i}\colon N_{\mathcal{R}_i} = \mathcal{R}_i \times [0,1] \to \mathcal{R}_i$ 为第一投影，并设 $N_{\mathcal{R}_i'} = \mathrm{Nbd}(\partial\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_i) \times [0,1] \subset \mathcal{R}_i \times [0,1]$。令 $g_{\mathcal{R}_i}\colon N_{\mathcal{R}_i'} \to N_Q$ 为从 $N_{\mathcal{R}_i}$ 到 N_Q 的粘合映射。选取 $\mathrm{Nbd}(\partial\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_i)$ 上的坐标 (r_i, θ_i)，使得 $\{r_i = 0\} = \partial\mathrm{Nbd}(\partial\mathcal{R}_i; \mathcal{R}_i) \setminus \partial\mathcal{R}_i$， $\{r_i = 1\} = \partial\mathcal{R}_i$，并且 (r_i, θ_i) 的定向与 $\mathcal{R}_i$ 的定向一致，见图 7 左侧。令 $\mathrm{pr}^{N_Q}\colon N_Q \to Q$ 为一个典范投影。根据 P 上的 1-形式 β，我们通过在 $N_Q \setminus \bigcup_{i=1}^n g_{\mathcal{R}_i}$ 上粘合 $\mathrm{pr}^*_{N_Q}\beta(N_{\mathcal{R}_i'})$ 来定义 N_P 上的 1-形式 $\hat{}\,\beta$，并

$$(1 - \sigma(r_i))\mathrm{pr}^*_{\mathcal{R}_i}\beta + \sigma(r_i)(\mathrm{pr}_{N_Q} \circ g_{\mathcal{R}_i})^*\beta$$

在 $N_{\mathcal{R}_i}$[1] 上，其中 $\sigma(r_i)$ 是一个单调递增光滑函数，满足 $\sigma(\varepsilon) = 0$ 且 $\hat{}\sigma(1-\varepsilon) = 1$，对任意充分小的 $\varepsilon \geq 0$ 都成立。文献 [10, 的引理 6.6] 验证了 $\beta + R\eta$ 是 N_P 上的接触形式，其 Reeb 向量场对任意 $R > 0$ 都与 P 正向横截。

接下来，我们将 1-形式 $\hat{}\,\beta$ 延拓到 $N_D = D^2 \times [0,1]$。我们稍微延伸坐标 $[0,1]$，并对充分小的 $\varepsilon > 0$ 设定 $N_D^\varepsilon = D^2 \times [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$。设 $\hat{}\,\beta_E$ 和 $\hat{}\,\beta_F$ 分别为 $D^2 \times [-\varepsilon, 0]$ 和 $D^2 \times [1, 1+\varepsilon]$ 上的 1-形式 $\hat{}\,\beta$。在 N_D^ε 上固定坐标 $(u,\ v,\ w)$，使得 1-形式 β_E 和 β_F 在其定义域内沿 w 坐标平移时保持不变。随后，我们以典范方式将这些形式延拓到整个 N_D 上，并仍以 β_E 和 β_F 表示它们。现在，我们通过将 β 从 N_P 延拓到 $N_D = D^2 \times [0,1]$，在 M 上定义 1-形式 β_M：

$$\hat{\beta}_M = (1 - \tau(w))\hat{\beta}_E + \tau(w)\hat{\beta}_F,$$

其中 $\tau\colon [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \to [0,1]$ 是一个单调递增光滑函数，使得 $\tau(w) = 0$对于 $-\varepsilon \leq w \leq 0$，且 $\tau(w) = 1$对于 $1 \leq w \leq 1+\varepsilon$。 M上的接触形式，如定理 1.1] $\hat{}$ [10,中所述，给定为 $\beta_M + R\eta$，其中 $R > 0$足够大。

3. Proof of Theorem 1.1

在本节中，我们给出定理 1.1 的证明。

[1]这是 [10], 中的公式 (6.1)，其中使用了一个投影 $\mathrm{pr}\colon N_Q \to Q'$，使得 $\mathrm{pr}|_Q = \mathrm{pr}_Q$，而非 pr^{N_Q}。公式 (6.1) 中 $(\mathrm{pr} \circ g_{\mathcal{R}_i})^*\beta$ 和 $\mathrm{pr}^*_{\mathcal{R}_i}\beta$ 的位置应互换。这不会影响 [10]中的后续讨论。

定义。 称 Z 上的向量场 M 为开书（M， Σ， L， ϕ）的单值化向量场 ，如果

- Z 与绑定 L 相切，且由 Σ诱导的 L 定向与 Z的方向一致，并且

对于任意 $t \in [0,1]$， • Z 都与 $\operatorname{Int}\Sigma \times \{t\}$ 正向横截。

特别地，第 2.1 节中用于定义由开书支撑的接触结构的 Reeb 向量场，是该开书的单值化向量场。我们先证明以下命题。

命题 3.1. 设(M, Σ, L, ϕ) 是一个闭、连通、定向3维流形 M 的开书分解，其页是亏格至少为2 的曲面，且其绑定连通。则 M 上存在一个正流脊，它承载由该开书的某个单值化向量场生成的流。

证明。 设 g 为 Σ 的亏格， $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_{g-1}, c_1, \ldots, c_g$ 为图 8 所示页上的简单闭曲线。令 σ_{a_i}、 σ_{b_i} 和 σ_{c_i} 分别表示沿 a_i、 b_i 和 c_i的右手德恩扭转。

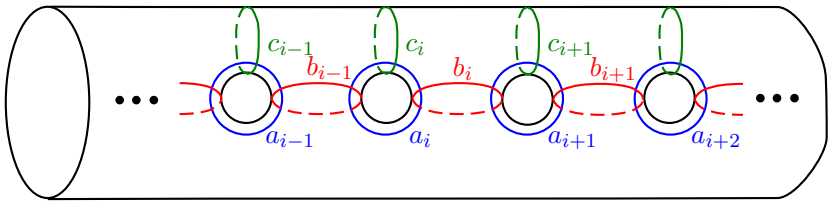


FIGURE 8. 德恩扭转所对应的曲线。

我们将开书的单值化表示为一系列德恩扭转的乘积，如$w_1^{m_1} w_2^{m_2} \cdots w_n^{m_n}$所示，其中 w_k是沿其中一条曲线 $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_{g-1}, c_1, \ldots, c_g$进行的德恩扭转。这里我们按从左到右的顺序读取乘积。设 $f\colon M \setminus \operatorname{Int}\operatorname{Nbd}(L;\, M) \to S^1$是开书的一个光滑非奇异映射。按逆时针顺序在 S^1 上选取 $6n$ 个点 $q_1, \ldots, q_{6n}$， 并令 $\Sigma_j = f^{-1}(q_j)$。我们赋予每个 Σ_j 以开书页的定向。

我们首先绘制一个图，它将在每个 Σ_j 上成为 $S(P)$，如图 9、10、11、12、13 和 14 所示，具体取决于 j 模 6 的值。

对于每个 $j = 1$， ....., $6n$，红色图 G_j^{red}在 Σ_j上与蓝色图 G_j^{blue}在 Σ_{j+1}上作为无向图在同痕意义下重合，我们将其记为 G_j，且它们的定向相反。这里我们将 $\Sigma_{6n+1} = \Sigma_1$视为如此。我们在 Σ_j 与Σ_{j+1} 之间附加 $G_j \times [0,1]$， 使得 $G_j \times \{0\} = G_j^{red}$和 $G_j \times \{1\} = G_j^{blue}$。我们为 $G_j \times [0,1]$的每个区域赋予一个定向，使其在边界上诱导的定向与 G_j^{red}和 G_j^{blue}的边的定向一致。图15展示了 $G_j \times [0,1]$上的定向。这个分支多面体的顶点可以看作是 Σ_j 上一条红边与一条蓝边的交点，或是 Σ_j上的一个三价顶点。前一种情况下的任何顶点都属于ℓ型，因为蓝边从左向右与红边相交，且相对于

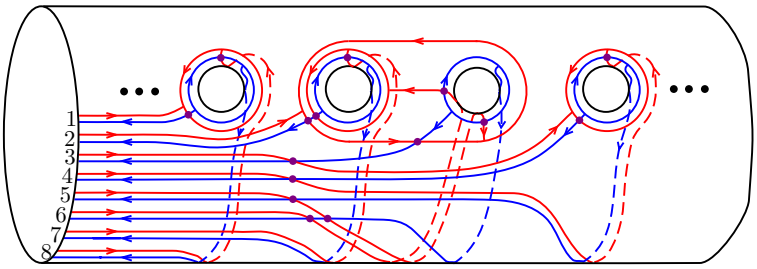


FIGURE 9. Σ_{6k}上的奇异集 $S(P)$。

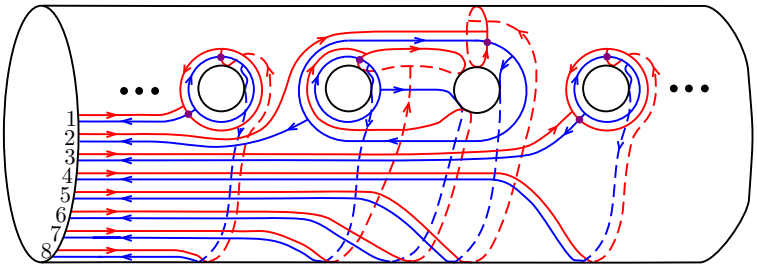


FIGURE 10. Σ_{6k+1}上的奇异集 $S(P)$。

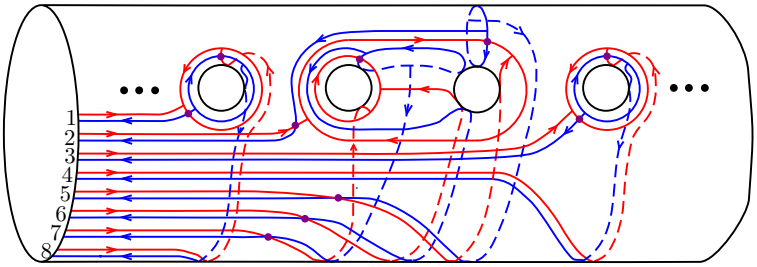


FIGURE 11. Σ_{6k+2}上的奇异集 $S(P)$。

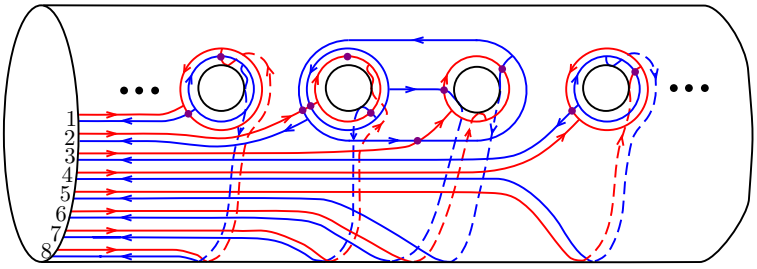


FIGURE 12. Σ_{6k+3}上的奇异集 $S(P)$。

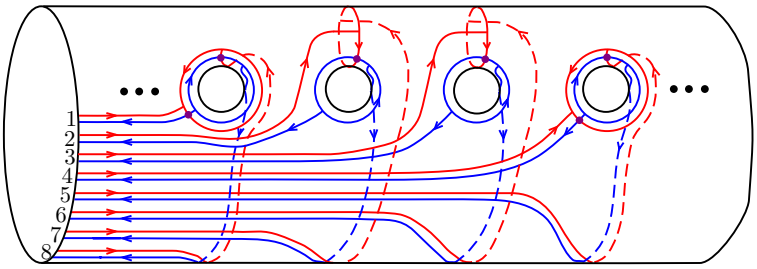


FIGURE 13. 奇异集 $S(P)$ 在 Σ_{6k+4} 上。

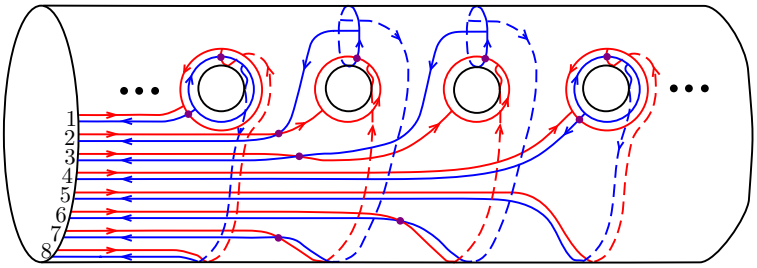


FIGURE 14. 奇异集 $S(P)$ 在 Σ_{6k+5} 上。

使其与红边的定向一致。其他顶点是图15中出现的那些顶点，我们可以直接从图中验证它们属于 ℓ 型。

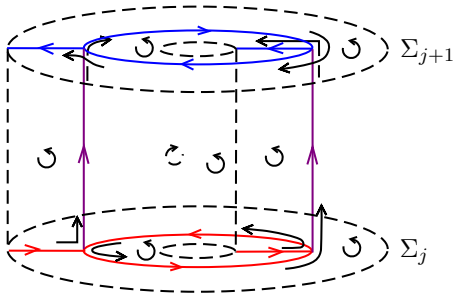


FIGURE 15. 附加 $G_j \times [0,1]$。图中的黑色箭头表示顶点处 $S(P)$ 浸入的光滑方向。

如果 $w_k = \sigma_{a_p}^{m_p}$，那么我们按图16左侧所示修改 Σ_{6k+1} 上第 p 个蓝色圆（若满足 $m_p > 0$），若满足 $m_p < 0$，则按右侧所示修改。我们可以验证，经过此修改出现的所有顶点都属于 ℓ 型。

如果 $w_k = \sigma_{b_p}^{m_p}$ 那么，我们对图17左侧所示的 Σ_{6k+2} 上的蓝色曲线进行相同的修改；如果 $w_k = \sigma_{c_p}^{m_p}$那么，我们对蓝色

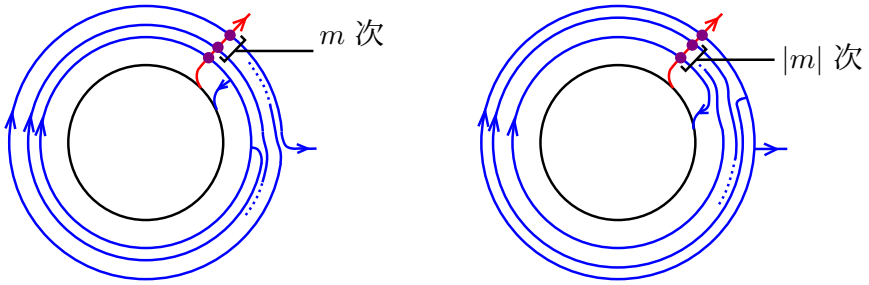


FIGURE 16. 根据德恩扭转 $\sigma_{a_p}^{m_p}$对多面体进行修改。

曲线进行相同的修改，该曲线显示在 Σ_{6k+5} 右侧。这些修改产生的所有顶点也都是 ℓ型。

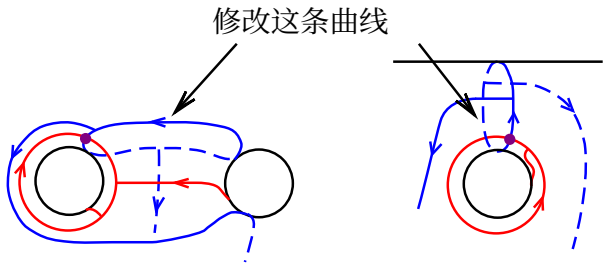


FIGURE 17. 与德恩扭转$\sigma_{b_p}^{m_p}$ 和 $\sigma_{c_p}^{m_p}$对应的修改曲线。

我们可以在 $M \setminus \text{Int Nbd}(L;\, M)$ 上选择开书的单值化向量场，使其与上文构造的分支多面体正向横截。我们用 P_1 表示嵌入在 $M \setminus \text{Int Nbd}(L;\, M)$ 中得到的分支多面体。

接下来，我们在 $\text{Nbd}(L;\, M)$ 中构造一个分支多面体。对于每个 (i, j)，$i = 1, \ldots, 2g, j = 1, \ldots, 6n$，我们定义图18所示的多面体 $P_{i,j}$。将 $P_{i,j}$ 的左侧与 $P_{i+1,j}$ 的右侧按规范方式粘合，其中将 $P_{2g+1,j}$ 视为 $P_{1,j}$；对 $j = 1$，...，$6n$，将所得多面体记为 P_j。随后粘合 P_j 和 P_{j+1}，使 $P_{i,j}$ 的顶部与 $P_{i,j+1}$ 的底部重合，其中将 P_{6n+1} 视为 P_1。将所得多面体记为 P_2。按照图18所示为 P_2 的各区域赋予定向，使 P_2 成为分支多面体。P_2 的边界由 $2g$ 个圆和一个连通图组成。在每个 $2g$ 圆上粘贴一个圆盘 D_i，并将所得分支多面体记为 P_3。我们可以将 P_3 适当地嵌入实心环面 $D^2 \times S^1$ 中。将这个 $D^2 \times S^1$ 视为 $\text{Nbd}(L;\, M)$，并粘合 P_3 和 P_1，使 $\partial P_3 \cap P_j$ 上的简单闭曲线（绿色曲线）与 P_1 中 Σ_j 的边界重合。将嵌入 M 中所得的分支多面体记为 P_4。容易验证，P_4 的所有顶点都属于 ℓ-型。

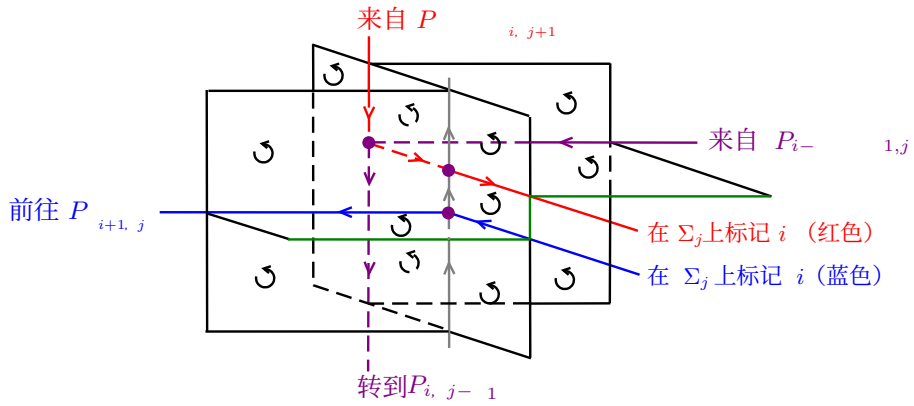


FIGURE 18. 片 $P_{i,\ j}$。

补集 $M \setminus \hat{} P_4$ 由 $2g + 6n$ 个开球 $B_1, \ldots, B_{2g}$ 和 $B'_1, \ldots, B'_{6n}$ 组成，其中 $B_1, \ldots, B_{2g}$ 这些开球是由 $\hat{}\ P_3$ 围成的连通分支，而每个 B'_j, $j = \hat{}\ 1, \ldots, 6n$，都是 $M \setminus P_4$ 中的连通分支，且包含 $M \setminus$ 中位于 Σ_j 与 Σ_{j+1} 之间的连通分支 $\left(\hat{}P_4 \cup \mathrm{Nbd}(L;\ M)\right)$。

奇异集 $S(P)$ 由 $2g+6n$ 浸入圆 C_1、……、C_{2g}和 C'_1、……、C'_{6n}组成，其中 C_i 是经过 $P_{i,\ 1}$、……、$P_{1,\ 6n}$的简单闭曲线，在图18中以 Gray 绘制； C'_j 是如下给出的简单闭曲线：从图9中 Σ_{6k} 上的标签1（红色）$\hat{}$出发，沿箭头前进。令 $P_{i_0,\ 6k}$ 为包含起点的 P_4 的片。该曲线经过 $P_{i_0,\ 6k+1}$ ，如图15中的黑色箭头所示，然后回到 Σ_{6k+1}上的标签1（蓝色）。接着，如图18所示，它前往 Σ_{6k+1} 上的标签2，然后向下到达 Σ_{6k}上的标签2（红色）。根据同样的观察，我们看到它依次经过 Σ_{6k} 上的标签1、 2、……、 8（红色）。该曲线继续前进，最后回到 Σ_{6k}上的标签1（红色）。这就是曲线C'_1。同理，曲线 C'_j、 $j = 2$、……、 $6n$也定义如下。

如图 19 所示，我们对每个 $i = 1, \ldots, 2g$，修改 C_i on P_i,1 的一部分，并移除由此操作产生的双边形。这一修改不会产生新的顶点，而是连接 B_i to B'_1 ，并使 C_i and C'_1 成为一个浸入圆。对每个 $C_1, \ldots, C_{2g}$ 应用这一修改后，我们得到一个分支多面体 P_5，其中只有 ℓ-型顶点；此时， $M \setminus \hat{}P_5$ 由 $6n$ 个开球 $B''_1, B'_2, \ldots, B'_{6n}$ 组成，而 $S(P)$由 $6n$ 个浸入圆 $C''_1, C'_2 \ldots, C'_n$ 组成，其中 B''_1 是将 $B_1, \ldots, B_{2g}$ 与 B'_1 连接后得到的开球， C''_1 是将 $C_1, \ldots, C_{2g}$ 与 C'_1连接后得到的浸入圆。

对于每个 $j = 2$, ……, $6n$，我们都对 C''_1on$P_{1,\ j}$ 的同一部分施加相同的修改。这不会产生新的顶点，将 B'_j 与 B''_1 相连，并使 C''_1, C'_2, ……, C'_n to $\hat{}$ 成为一个浸入圆。所得的分支多面体 P_6 满足：所有顶点 $\hat{}$ 都是 ℓ-型， $M \setminus P_6$ 是一个开球，而 $S(P)$ 是一个圆的浸入像。

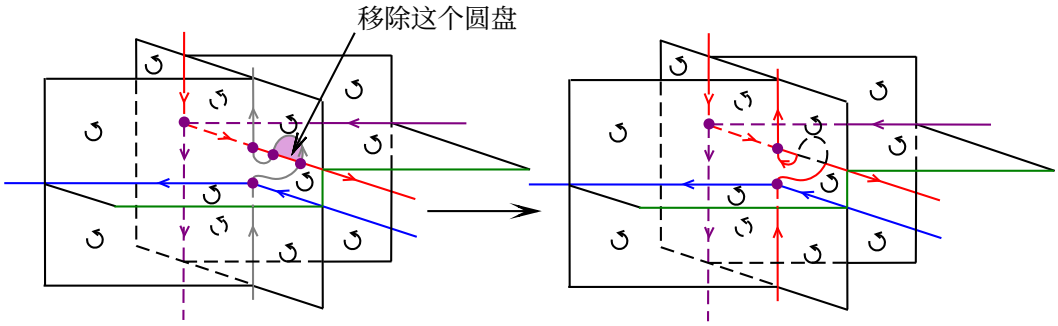


FIGURE 19. 对 P_i上的 C_i 进行修改，j_0。

我们可以直接看出，该开书存在一个单值化向量场，其 ˆ 生成的流由 P_6承载。因此得到所述结论。□

为了证明定理 1.1，我们需要证明以下更强的命题。

命题 3.2。 设$(M、\ \Sigma、\ L、\ \phi)$ 是一个闭合、连通、定向三维流形 M 上的开书分解，其页为亏格至少为2 的曲面，且绑定连通。则存在 M 的一个正流脊 P 以及定义在 M 上的接触形式 α，使得 ***Reeb*** 流由 P 承载，同时也是该开书的单值化向量场。

ˆ证明。根据命题 3.1，存在一个正流脊 P_6，其流是该开书的单值化向量场。在构造 P_6时，多面体 P_3 包含于 Nbd$(L;\ M)$ 中。设 N_T是$M \setminus$ Int Nbd$(L;\ M)$ 内 ∂Nbd$(L;\ M)$ 的一个小管状邻域。设$(z',\ r',\ \theta')$是 N_T上的局部坐标，如图 20 所示。我们在 $N_D = D^2 \times [0,1]$ 上选取坐标$(u,\ v,\ w)$，使 $\frac{\partial}{\partial w}$与$\partial$Nbd$(L;\ M)$相切。然后，我们在ˆ P_6上取一个 1-形式 β，并按照第 2.5 节中的说明，在 M上构造一个接触形式 α'，使得 ker α' 由ˆ P_6支撑。

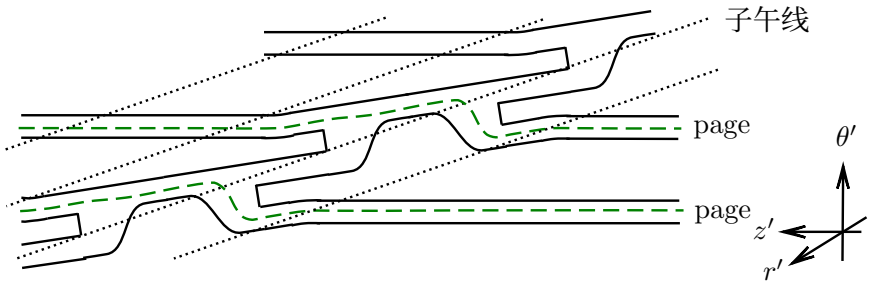


FIGURE 20. N_P、页与开书的子午线在 ∂Nbd$(L;\ M)$ 上的相互位置。

我们可以在 $M \setminus$ Int Nbd$(L;\ M)$ 中设置开书各页的位置，使这些页与 $R_{\alpha'}$ 横截，因为 α' 的 Reeb 流由

ˆP_6 承载。然而，我们并非总能选择 Nbd(L; M) 中开书各页的位置，使得 $R_{\alpha'}$ 与 Nbd(L; M) 中的这些页横截。例如，如果 $R_{\alpha'}$ 沿着 L 以与开书相反的方向缠绕，那么我们肯定无法选择这样的位置。因此，我们需要在 Nbd(L; M) 中重构 α'，使得 $R_{\alpha'}$ 与 Nbd(L; M) 中某个开书的各页横截。

令 $D_s^2 \times S^1$ 为配备接触形式 $\alpha_b = h_1(r)dz + h_2(r)d\theta$ 的实心环面，其中 D_s^2 是半径为 $s > 0$ 的二维圆盘，(r, θ) 是 D_s^2 的极坐标，并且 $h_1(r)$ 和 $h_2(r)$ 是满足以下条件的函数：

- $(h_1(0),\ h_2(0)) = (1,0)$,
- $\left(\frac{dh_1}{dr}(0),\ \frac{dh_2}{dr}(0)\right) = (0,\ 1)$,
- h_1 单调递减，h_2 单调递增。

曲线 $(h_1(r),\ h_2(r))$ 如图21所示。注意，α_b 是接触形式，其 Reeb 向量场 R_{α_b} 与 $-\frac{dh_1}{dr}(r)\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{dh_2}{dr}(r)\ \frac{\partial}{\partial z}$ 平行且方向相同。

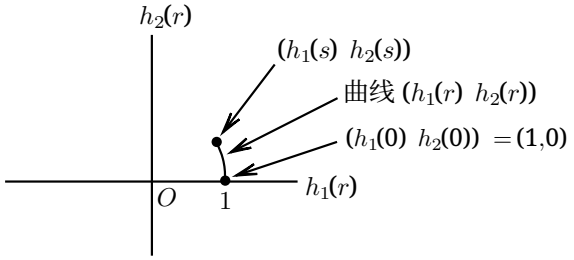


FIGURE 21. 曲线（h_1（r）h_2（r））。

令 g_T为从 $N_T' = \{(r,\ \theta,\ z) \in D_s^2 \times S^1 \mid s' \le r \le s\}$ 到 N_T的微分同胚，将 $\partial D_{s'} \times \{p\}$、$p \in S^1$映射为开书的子午线，并将 $\{q\} \times S^1$、$q \in \partial D_{s'}$映射为 N_T中的页，其中 s' 是满足 $s' < s$ 且充分接近 s的正实数，并且进一步满足

(i) $g_T^*\eta = \nu_1(\theta,\ z)\,d\theta + \nu_2(\theta,\ z)\,dz$，其中 $\nu_1(\theta,\ z) > 0$ 且 $\nu_2(\theta,\ z) \ge 0$；以及 (ii) R_{α_b} 正向横截于 ker($g_T^*\eta$)。

我们可以选择如图22所示的这种微分同胚。

设 $\alpha_c = g_T^*(\alpha')$。我们在 N_T 上定义接触形式 α_T 如下：

$$\alpha_T = (1 - \chi(r))\alpha_b + \chi(r)\alpha_c,$$

其中，χ 是一个单调递增光滑函数，当 $r \le s'$ 时取值为 0，当 $r \ge s$时取值为 1。于是

$$\begin{aligned}\alpha_T \wedge d\alpha_T =& (1-\chi(r))^2\alpha_b \wedge d\alpha_b + \frac{d\chi}{dr}(r)\alpha_b \wedge dr \wedge \alpha_c \\ &+ (1-\chi(r))\chi(r)(\alpha_b \wedge d\alpha_c + \alpha_c \wedge d\alpha_b) + \chi(r)^2\alpha_c \wedge d\alpha_c.\end{aligned}$$

第二项是 $\frac{d\chi}{dr}(r)\alpha_b \wedge dr \wedge \alpha_c = \frac{d\chi}{dr}(r)(h_1(r)dz + h_2(r)d\theta) \wedge dr \wedge g_T^*(\hat{}\beta_M + R\eta)$。由于 $g_T^*\eta = \nu_1(\theta,\ z)d\theta + \nu_2(\theta,\ z)dz$，且 $\nu_1(\theta,\ z) > 0$ 和 $\nu_2(\theta,\ z) \ge 0$ 满足条件 (i),

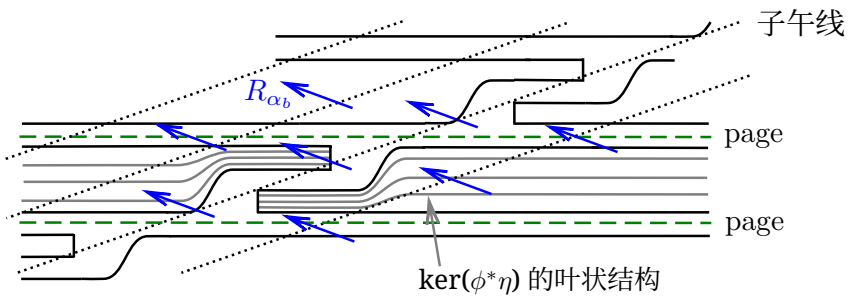


FIGURE 22. N_P 的原像、页、由 g_T 确定的开书的子午线、Reeb 向量场 R_{α_b}（蓝色箭头）以及 ker($g_T^*\eta$) 的叶状结构（以灰色绘出）在 ∂Nbd(L; M) 上的相对位置。

我们有

$$(h_1(r)dz + h_2(r)d\theta) \wedge dr \wedge g_T^*\eta = (h_1(r)\nu_1(\theta,z) - h_2(r)\nu_2(\theta,z))dz \wedge dr \wedge d\theta.$$

我们选择 $s > 0$ 足够小，这意味着 $h_2(r)$ 足够小，因此 $(h_1(r)\nu_1(\theta,\ z) - h_2(r)\nu_2(\theta,\ z))$ $dz \wedge dr \wedge d\theta > 0$。选择足够大的 R 后，我们可以得出结论：第二项非负。

ˆ 现在我们考察第三项。代入 $\alpha_c = g_T^*(\beta_M + R\eta)$，得到

$$\alpha_b \wedge d\alpha_c + \alpha_c \wedge d\alpha_b = \alpha_b \wedge g_T^*(d\hat{\beta}_M) + g_T^*(\hat{\beta}_M + R\eta) \wedge d\alpha_b,$$

其中我们在第 2.5 节的性质 (b) 中使用了 $d\eta = 0$ 关于 $N_D \setminus (\hat{W} \cup \check{W})$ 的结论。注意，由于本证明第一段中坐标 $(u,\ v,\ w)$ 的选取，$N_T \cap (\hat{W} \cup \check{W}) = \emptyset$。由于条件 (ii)，$R_{\alpha_b}$ 正向横截于 ker η，因此有 $g_T^*\eta \wedge d\alpha_b > 0$。所以，当 R 足够大时，第三项为正。因此，α_T 是 N_T 上的接触形式。这意味着我们可以沿着 $N_T = g_T(N_T')$，通过粘合映射 g_T，将 $M \setminus$Int Nbd(L; M) 上的接触形式 α' 与 Nbd(L; M) 上的接触形式 α_b 粘合起来。我们将所得的 M 上的接触形式记为 α''。

ˆ我们可以将 P_6在 $M \setminus$Int Nbd(L; M) 中延拓至 Nbd(L; M)，使向量场 $R_{\alpha''}$在 Nbd(L; M) 中正向横截于 ˆ P_6。因此， α''的 Reeb 流由 ˆ P_6承载。我们还可以将 $M \setminus$ Int Nbd(L; M) 中开书的页延拓至 Nbd(L; M)，并使绑定为 $L = \{0\} \times S^1 \subset D_s \times S^1$，从而 $R_{\alpha''}$ 横截于页的内部且与 L相切。因此， $R_{\alpha''}$ 是该开书的单值化向量场。证明至此完成。□

定理 *1.1* 的证明。设 ξ 是 M 上给定的接触结构。根据定理 2.1，存在 M 的一个开书分解以及 M 上的一个接触形式 α，使得 Reeb 向量场 R_α 是该开书的单值化向量场。通过使用正 Hopf 带的拼接，我们可以假设该开书的页的亏格至少为 2，且绑定是连通的。注意，对开书所作的这一修改不会改变接触结构 [17]。设 P 和 α'' 分别为证明命题 3.2 时得到的 M 的正流脊以及 M 上的接触形式，其中 α'' 的 Reeb 流由 P 承载，并给出该开书的一个单值化向量场。由于 ker α

和 $\ker \alpha''$ 由同一个开书支撑，根据 Gray 稳定性 [7],，存在一个从 $\ker\ \alpha$ 到 $\ker\ \alpha''$ [6] 的一参数接触形式族，因此存在一个接触同胚 ψ，将 $(M,\ \ker\ \alpha)$ 映射到 $(M,\ \ker\ \alpha'')$。因此，我们已经证明，对于给定的接触结构 $\ker \alpha$，$\psi^*\alpha''$ 是一个接触形式，使得 $\ker\ \alpha = \ker\ \psi^*\alpha''$，且由 Reeb 向量场 $R_{\psi^*\alpha''}$ 生成的流由正流脊 $\psi^{-1}(\hat{}P_6)$ 承载。也就是说，$\ker \alpha$ 由 $\psi^{-1}(\hat{}P_6)$ 支撑。证明完毕。□

下面是定理 1.1 的一个推论。

推论 3.3。 任何流脊都可以通过依次应用第一类和第二类正则变换变形为正流脊。

证明。 对于任意一个无奇异流的同伦类，都存在一个接触结构，使其 Reeb 流属于同一个同伦类 [2]。根据定理 1.1，任意接触结构都由一个正流脊支撑。因此，根据定理 2.2，我们可以找到一系列正则变换，将给定的流脊与该正流脊联系起来。□

References

[1] Benedetti, R., Petronio, C., 三维流形的分支标准脊，数学讲义第 1653 卷，施普林格出版社，柏林，1997。[2] Eliashberg, Y. *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*，《数学发明》**98** (1989)，第 3 期，623–637。[3] Endoh, M., Ishii, I., *A new complexity for 3-manifolds*，《日本数学杂志》(新系列)**31** (2005)，131–156。[4] Etnyre, J. B., *Lectures on open book decompositions and contact structures*，《Floer 同调、规范理论与低维拓扑》，103–141，Clay 数学论文集第 5 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2006。[5] Geiges, H.，《接触拓扑导论》，剑桥高等数学研究丛书第 109 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008。[6] Giroux, E., 接触几何：从三维到更高维，《国际数学家大会论文集》第 II 卷（北京，2002），405–414，高等教育出版社，北京，2002。[7] Gray, J. W., *Some global properties of contact structures*，《数学年刊》(第 2 辑)**69** (1959)，421–450。[8] Ishii, I., *Flows and spines*，《东京数学杂志》**9** (1986)，505–525。[9] Ishii, I., *Moves for flow-spines and topological invariants of* 3*-manifolds*，《东京数学杂志》**15** (1992)，297–312。[10] Ishii, I., Ishikawa, M., Koda, Y., Naoe, H., *Positive flow-spines and contact* 3*-manifolds*，即将发表于 Annali di Matematica Pura ed Applicata（ 1923 1912 05774 [ ] -），arXiv: . [11] *Branched spines and Heegaard genus of 3-manifolds* math.GT Koda, Y.,，《数学手稿》**123** (2007)，第 3 期，285–299。[12] Martinet, J., *Formes de contact sur les variétiés de dimension 3*，数学讲义第 209 卷，第 142–163 页，1971。[13] Matveev, S.，《算法拓扑学与三维流形分类》，算法与数学计算丛书第 9 卷。施普林格出版社，柏林，2003。[14] Ozbagci, B., Stipsicz, A.I.，《接触三维流形上的手术与 Stein 曲面》，Bolyai 学会数学研究丛书第 13 卷，施普林格出版社，2004。[15] Petronio, C., *Generic flows on* 3*-manifolds*，《京都数学杂志》**55** (2015)，第 1 期，143–167。[16] Thurston, W., Winkelnkemper, H., *On the existence of contact forms*，《美国数学会会刊》**52** (1975)，345–347。[17] Torisu, I., *Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds*，《国际数学研究通报》**9** (2000)，441–454。

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-8522, Japan

Department of Mathematics, Hiyoshi Campus, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-8521, Japan
Email address: ishikawa@keio.jp

Department of Mathematics, Hiyoshi Campus, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-8521, Japan / International Institute for Sustainability with Knotted Chiral Meta Matter, Hiroshima University, 1-7-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8526,Japan

Email address: koda@keio.jp

Department of Mathematics, Chuo University, 1-13-27 Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, Japan*Email address*: naoe@math.chuo-u.ac.jp