arXiv:2304.09651v1 [math.QA] 19 Apr 2023

非阿基米德顶点代数

维克托·G·卡茨

Abstract. 顶点代数理论的基础被推广到非阿基米德情形。

0. Introduction

这是与弗拉基米尔·G·别尔科维奇的合作成果。

顶点代数的概念由博赫兹 [Bo] 以无穷多个双线性乘积 $a_{(n)}b$, $n \in \mathbf{Z}$ 的形式引入，这些乘积满足一个三次恒等式，类似于李代数的雅可比恒等式，但复杂得多。这一概念严格定义了二维共形场论的手征部分，自别拉文、波利亚科夫和扎莫洛奇科夫的里程碑式论文 [BPZ] 发表以来，一直受到物理学家和数学家的深入研究。

在著作 [K], 中使用了简单得多的公理，并证明了它们与 Borcherds 恒等式等价。这些公理出自论文[FKRW], , 其灵感来自戈达德的论文 [G]。这些公理以场 $a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$ 的形式表述，它们是 n^{th} 乘法 $a_{(n)}$ 算子的生成级数，其中 $a_{(n)}b = 0$ 当 $n \gg 0$时。

更详细地说，顶点代数是一个定义在含幺交换环 K 上的向量空间 V (态空间), 配备一个向量 $|0\rangle$(真空向量)、一个自同态 T (无穷小平移算子), 以及一个从 V 到场空间的线性映射（态场对应） $a \mapsto a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$，其中 $a_{(n)} \in \mathrm{End}(V)$，对每个 $b \in V$， $a_{(n)}b = 0$，若 $n \gg 0$，并满足以下公理（a、 $b \in V$）：

(A.1)（真空） $T|0\rangle = 0$, $|0\rangle(z) = I_V$, $a(z)|0\rangle \in a + zV[[z]]$; (A.2)（平移协变性） $[T, a(z)] = \frac{d}{dz}a(z)$; (A.3)（局域性）$(z-w)^N[a(z)\ b(w)] = 0$ 对于 $N \gg 0$。

事实上，正如 [K], 所解释的，这些公理构成了任意量子场论 [W] 的魏特曼公理的核心部分。

本文沿着 [K], 的思路，发展非阿基米德顶点代数的概念，这是对顶点代数概念的推广。参见定义 2.1.1，其中它们被称为顶点 K-代数。具体而言，我们取 K 为交换非阿基米德巴拿赫环，取 V 为巴拿赫 K- 模。（对于 “ 通常的 ” 顶点代数，在 K 和 V 上取平凡巴拿赫范数。）此外，将 $a(z)$ 为场这一条件替换为

$$\lim_{n\to+\infty} a_{(n)}b = 0 \text{ for each } b \in V,$$

真空公理和平移协变公理保持不变，但局域性公理推广为

$$\lim_{N\to+\infty} (z-w)^N [a(z), b(w)] = 0.$$

最后，场态对应

$$a(z) \mapsto a(z)\,|0\rangle\,|_{z=0}$$

一般而言，它不是满射，但它是单射，其像为 V'（引理 2.1.2），因此一般来说，态场对应是一个定义域为 V' 的无界算子。因此，我们不能像 [FR] 中那样将态空间与场空间等同起来；而在普通顶点代数的情形下，人们总是这样做。

如果非阿基米德顶点代数 V 的 Banach K-模之间的场-态同态是可容许的，则称该代数为可容许的。在这种情况下，V' 是 V 的闭子模，且态-场同态是有界的。特别地，若 K 是赋有非平凡赋值的场，则 V 是可容许的，当且仅当 $V = V'$。

本文第一部分在非阿基米德 Banach 框架下发展形式分布与场的理论。特别地，我们证明了任意两个不定元中的局部形式分布都满足分解定理（引理 1.5.3）；对每个 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义两个场的 n^{th} 乘积 $a(z)_{(n)}b(z)$，并阐明其性质，尤其是 Dong 引理 1.8.7。

在第二部分中，我们定义了域 K 上的非阿基米德顶点代数，其中 K 是一个非阿基米德交换巴拿赫环，且作为阿贝尔群是无挠的（定义 2.1.1），并证明了它们的基本性质。特别地，我们证明了戈达尔唯一性定理（引理 2.2.1）、n^{th} 积恒等式（引理 2.7.2 ii）以及 Borcherds 恒等式（推论 2.2.5）。此外，我们建立了扩张定理（定理 2.4.1）；该定理结合环扩张引理（引理 2.4.4），使我们能够构造非阿基米德顶点代数的例子。在 §2.5 中，我们讨论了与李（超）代数相关的非阿基米德顶点代数构造。基于此，我们在第 2.6 小节中构造了自由玻色子和费米子顶点代数，以及通用 Virasoro 代数和仿射顶点代数。

最后，在 §2.7 中我们引入半径为 $r > 0$ 的非阿基米德李共形代数的概念（定义 2.7.1），并证明对于非阿基米德顶点代数，场空间具有半径为 r 的非阿基米德李共形代数结构，该结构由 λ-括号定义

$$[a(z)_\lambda b(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(a(z)_{(n)}b(z)\right),$$

其中

$$\lim_{n\to+\infty} r^n ||a(z)_{(n)}b(z)||/n! = 0,$$

参见命题 2.7.2。这里我们假设基 Banach 环 K 包含 Q，并令 $r = 1$（分别为 $r = |p|^{\frac{1}{p-1}}$），如果 Q 的赋值 $|.|$（由 K 诱导）是平凡的（分别为 p-进的）。

本文即将完成时，我们了解到论文 [FM],，其中引入并研究了 p-进顶点代数。他们的研究背景限制更多，因为他们假设基环 K 是一个 p-进场，并且态场对应是双射。另一方面，他们探讨了其理论与 p-进模形式之间的联系。

1. Formal distributions and fields

1.1. 非阿基米德巴拿赫代数和模（详情请参见 [B] ）。非阿基米德巴拿赫环是一个相对于非阿基米德巴拿赫范数 A 完备的含幺环。回顾一下，后者是一个函数 $||\ ||: A \to \mathbb{R}_+$

满足以下公理：(1) $||a|| = 0$ 当且仅当 $a = 0$；(2) $||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$；以及 (3) $||a + b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}$。非阿基米德范数的一个例子是平凡范数 $|\ |_0$，它在所有非零元素处的取值均为 1。任何抽象环相对于平凡范数都是完备的，即可以将其视为非阿基米德环。

巴拿赫 A-模是一个左 A-模 V，关于巴拿赫范数完备，即一个函数 $||\ ||: V \to \mathbb{R}+$，满足以下公理：(1) $||v|| = 0$当且仅当 $v = 0$；(2) 对所有 $a \in A$，$||av|| \leq ||a|| \cdot ||v||$；以及 (3) $||u + v|| \leq \max\{||u||, ||v||\}$。巴拿赫 A-代数是一个非阿基米德巴拿赫环 B，配备一个环同态 $\varphi: A \to B$，使得对所有 $a \in A$，$||\varphi(a)|| \leq ||a||$。

全文中，K 是一个固定的交换非阿基米德巴拿赫环，除非另有说明，所考虑的所有模都是 K-模或巴拿赫 K-模。

给定 Banach K-模 U 和 V，若存在一个正常数 C，使得对于所有 $u \in U$，$||Tu|| \leq C||u||$ 成立，则称 K-线性算子 $T: U \to V$ 是有界的。所有此类 C's 的下确界称为 T 的范数，记作 $||T||$。Banach$K$-模构成一个加性范畴，其中态射集合为 $\mathrm{Hom}(U, V) = \mathrm{Hom}_K(U, V)$，即从 U 到 V的所有有界 K-线性算子所构成的空间，称为 Banach K-模的同态。赋予上述范数后，这样的空间是一个 Banach K-模。若 $V = K$，则记作 U^*；若 $U = V$，则记作 $\mathrm{End}(V)$。注意，$\mathrm{End}(V)$ 是一个 Banach K-代数，并且，为 Banach K-代数 A 上的 Banach A-模 V 赋予 Banach A-模结构，与为 $\mathrm{End}(V)$ 赋予 Banach$A$-代数结构是等价的。给定 Banach A-模 U和 V，由有界 A-模同态构成的空间 $\mathrm{Hom}_A(U, V)$ 是 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 的一个闭 K-子模。当然，如果 A 是交换的，它仍然是一个 Banach A-模。

任意闭的 K-子模 U 都是 Banach K-模 V，并且关于诱导范数构成 Banach K-模。在此情形下，商 V/U 关于商范数构成 Banach$K$-模（陪集的范数是该陪集中元素范数的下确界）。Banach K-模的同态φ： $U \to V$，若由V 诱导的 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 上的 Banach 范数与通过代数同构 $\mathrm{Coim}(\varphi) \rightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ 从 $\mathrm{Coim}(\varphi) = U/\mathrm{Ker}(\varphi)$ 诱导的范数等价，则称其为可容许的。在此情形下，$\mathrm{Im}(\varphi)$ 关于从 V 诱导的范数是完备的，即它在 V中是闭的，并且上述代数同构实际上是 Banach K-模的同构。Banach$K$-模的双射同态当且仅当其为可容许的，才是一个同构（在 Banach K-模范畴中）。显然，任何等距映射都是可容许的同态。

给定 Banach K-模 U、V 和 W，若存在正常数 C，使得对所有 $u \in U$ 和 $v \in V$ 都有 $||\varphi(u, v)|| \leq C||u|| \cdot ||v||$，则 K-双线性映射 $\varphi: U \times V \to W$ 是有界的。Banach K-模 U 和 V 的完备张量积是一个 Banach K-模 $U \widehat{\otimes}_K V$，并配备一个有界的 K-双线性映射 $U \times V \to U \widehat{\otimes}_K V$，使得任意有界的 K-双线性映射 $U \times V \to W$ 都可通过唯一的有界 K-线性算子 $U \widehat{\otimes}_K V \to W$ 分解。显然，完备张量积在唯一同构意义下是唯一的，其构造如下。考虑通常张量积 $U \otimes_K V$（在 K 上），并为其赋予如下实值函数 $||\ ||$： $||x|| = \inf \max_i ||u_i|| \cdot ||v_i||$，其中下确界是对 $x \in U \otimes V$ 的所有有限和形式的表示 $\sum_i u_i \otimes v_i$ 取遍。这个函数是一个半范数（即它具有范数的性质 (2) 和 (3)），

并由此在 $U \otimes_K V$ 的核上定义一个范数。然后， $U\widehat{\otimes}_K V$ 就是关于该范数的商空间的完备化。注意，如果 V 是交换非阿基米德 Banach K'-模，且其系数代数为 K- 代数 K'，那么 $U\widehat{\otimes}_K V$ 具有 Banach K'- 模的结构（以显而易见的方式定义）。

注 1.1.1. (i) 函数 $||\ ||' \colon K \to \mathbb{R}_+$，定义为 $||a||' = \sup_{b\neq 0} \frac{||ab||}{||b||}$（它是乘法算子 a 的范数），是一个巴拿赫范数，并且等价于范数 $||\ ||$。例如， $||1||' = 1$。类似地，对于任意巴拿赫 K-模 V，函数 $||\ ||' \colon V \to \mathbb{R}_+$，定义为 $||v||' = \sup_{a\neq 0} \frac{||av||}{||a||}$，是在 V上的巴拿赫范数，与其范数 $||\ ||$等价，并且有 $||av||' \leq ||a||' \cdot ||v||'$。因此，我们总可以假设，$\mathbb{Z}$ 在 K 中的像的元素的范数至多为一。

(ii) 交换环 A 上的非阿基米德巴拿赫范数，如果它是乘法的，即对所有 a、$b \in A$都有 $||ab|| = ||a|| \cdot ||b||$，则称为一个（实）赋值。例如，根据奥斯特罗夫斯基定理，$\mathbb{Z}$ 上的任何赋值要么是平凡的，要么是对于某个素整数 p的 p-进赋值。后者意味着 $|p| < 1$。在此情况下， $|n| = |p|^e$，其中 e 是满足 p^e 整除 n的 p 的最大幂，而 $\mathbb{Z}$ 的完备化是 p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$。

1.2. Banach 模和代数的例子。对于 Banach K-模 V，令 $V[[z]]$ 表示所有满足 $||f|| = \sup\ ||v_n|| < \infty$ 的形式幂级数 $f = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$所构成的 Banach K-模，并令 $V\{z\}$ 表示 $V[[z]]_n$ 的 Banach K-子模，它由满足 $v_n \to 0$ 为 $n \to \infty$ 的级数构成。同样，令 $V[[z^{\pm 1}]]$ 表示所有满足 $||f|| = \sup ||v_n|| < \infty$ 的形式幂级数 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n$ 所构成的 Banach K- 模，并令 $V\{z^{\pm 1}\}$ 表示 $V[[z]]$ 的 Banach K-子模，它由满足 $v_n \to 0$ 为 $n \to \pm\infty$ 的级数构成。我们还引入一个中间 Banach K- 子模 $V[[z]] \subset V((z)) \subset V[[z^{\pm 1}]]$，它由满足 $v_n \to 0$ 为 $n \to -\infty$ 的级数 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \in V[[z^{\pm 1}]]$ 构成。

注意，对于任意 Banach K-模 V，规范的有界 K-线性算子 $V\widehat{\otimes}K\{z\} \to V\{z\}$ 是一个同构，但类似的算子 $V\widehat{\otimes}K[[z]] \to V[[z]]$ 和 $V\widehat{\otimes}K((z)) \to V((z))$ 则不是。

可以对上述构造进行迭代。例如，两个 Banach K-模$V[[z^{\pm 1}]][[w^{\pm 1}]]$ 和 $V[[w^{\pm 1}]][[z^{\pm 1}]]$（分别为 $V\{z^{\pm 1}\}\{w^{\pm 1}\}$ 和 $V\{w^{\pm 1}\}\{z^{\pm 1}\}$）都可规范地识别，并记作 $V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$（分别记作 $V\{z^{\pm 1}, w^{\pm 1}\}$）。但是$V((z))((w))$ 和 $V((w))((z))$ 是 $V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$的不同 Banach K-子模。它们的交集记作 $V((z,w))$，由所有如下级数构成：$f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} v_{mn} z^m w^n$，其中 $V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 中的 $v_{mn} \to 0$ 为 $\min(m,n) \to -\infty$。

现在假设上述 V 是一个 Banach K-代数 A。那么，所有引入的空间都是 Banach A-模。此外，空间 $A[[z]]$、$A\{z\}$、$A\{z^{\pm 1}\}$ 和 $A((z))$ 都是 Banach K-代数，$A((z))$ 是 Banach $A\{z^{\pm 1}\}$-代数；如果 V 是一个 Banach A-模，则 $V[[z^{\pm 1}]]$ 和 $V((z))$ 是 Banach $A\{z^{\pm 1}\}$-模。请注意，尽管 $A[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 不是代数，但任意一对元素 $f(z) \in A[[z^{\pm 1}]]$ 和 $g(w) \in A[[w^{\pm 1}]]$ 的乘积 $f(z)g(w)$ 都是良定义的，并且有 $||f(z)g(w)|| \leq ||f(z)|| \cdot ||g(w)||$。

例如，如果 K 和 A 上的范数都是平凡的，那么 $A\{z^{\pm 1}\}$ 是 Laurent 多项式 $A[z^{\pm 1}]$的代数， $A((z))$ 是 Laurent 幂级数的代数（即，在负次数单项式处至多只有有限个非零系数的级数），而 $A[[z^{\pm 1}]]$ 是关于 z 的双边形式幂级数空间。

1.3. Banach K模 $V((z,w))\{(z-w)^{-1}\}$。设 V是一个 Banach K模。

引理 1.3.1。以下结论成立：

(i) $V[[w^{\pm 1}]]((z))$ 上的乘法算子 $z-w$ 是等距映射；(ii) $\cap_{n=0}^{\infty}(z-w)^n V((z,w)) = 0$；(iii) $V((z,w))\{u\}$ 上的乘法算子 $u(z-w)-1$ 是等距映射.

证明。(i) 若 $f=\sum_{n\in\mathbf{Z}} f_n(w)z^{-n} \in V[[w^{\pm 1}]]((z))$，则 $||f||=\sup ||f_n||$ 且 $f_n \to_n 0$，当 $n\to+\infty$ 时。于是 $(z-w)f=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(f_{n+1}-wf_n)z^{-n}$，因此，

$$||(z-w)f|| = \sup_n ||f_{n+1}-wf_n|| .$$

假设 $f\neq 0$。给定 $\varepsilon>0$，令 m 为具有性质 $||f_m|| > ||f||-\varepsilon$ 且对所有 $n\geq m+1$ 都有 $||f_n|| \leq ||f||-\varepsilon$ 的极大者。于是 $||wf_m||=||f_m||$，因此 $||f_{m+1}-wf_m|| = ||f_m|| > ||f||-\varepsilon$，即 $||(z-w)f|| > ||f||-\varepsilon$。由于后者对每个 $\varepsilon>0$ 都成立，所需事实即得。

(ii) 对于 $n\in\mathbf{Z}$，令 L_n 为有界的 K-线性算子

$$V((z,w)) \to V((z)) : f=\sum_{i,j\in\mathbf{Z}} v_{ij}z^i w^j \mapsto \sum_{i\in\mathbf{Z}} v_{i,n-i}z^i .$$

容易看出，$||f||=\sup ||L_n f||$ 和 $L_{n+1}((z-w)f) = (z-1)L_n(f)$。$_n$因此，为验证所需事实，只需证明 $\cap_{n=0}^{\infty}(z-1)^n V((z)) = 0$。给定元素 $f=\sum_{i\in\mathbf{Z}} v_i z^i \in V((z))$，令 $l(f)$ 和 $r(f)$ 分别为满足 $||v_i|| = ||f||$的最小和最大 i，并令 $c(f) = r(f) - l(f)$。容易看出，$l((z-1)f) = l(f)$，且 $r((z-1)f) = r(f)+1$，因此，$c((z-1)f) = c(f)+1$。由此可知，元素 $f\in V((z))$ 至多可被 $z-1$的 $c(f)$ 次幂整除。

(iii) 如果 $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z,w)u^n \in V((z,w))\{u\}$，则 $f_n\to 0$ as $n\to+\infty$ and$||f||=\max_n ||f_n||$。有 $(u(z-w)-1)f = -f_0+\sum_{n=1}^{\infty}((z-w)f_{n-1}-f_n)u^n$，因此

$$||(u(z-w)-1)f|| = \max\{||f_0||, \max_{n\geq 1}||(z-w)f_{n-1}-f_n||\} .$$

如果 $||f|| = ||f_0||$，则该陈述显然成立。假设 $||f|| > ||f_0||$，并令 m为满足性质 $||f|| = ||f_m|| > ||f_n||$ for all $n\geq m+1$ 的最大者。由 (i)，$||(z-w)f_m|| = ||f_m||$，因此 $||(z-w)f_m - f_{m+1}|| = ||f_m|| = ||f||$。这就得到了所需的事实。□

令 $V((z,w))\{(z-w)^{-1}\}$ 表示 $V((z,w))\{u\}$ 除以闭 K-子模 $(u(z-w)-1)V((z,w))\{u\}$ 所得到的商。关于商范数，它是一个 Banach K- 模。我们用 $(z-w)^{-1}$ 表示 u 在其中的像。当然，如果 V 上的范数是平凡的，那么 $V((z,w))\{(z-w)^{-1}\} = V((z,w))[(z-w)^{-1}]$。

推论 1.3.2. 每个元素 $f\in V((z,w))\{(z-w)^{-1}\}$ 都有唯一的表示形式

$$f(z,w) = h(z,w) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(w)}{(z-w)^{n+1}} ,$$

其中 $h\in V((u,w))$ 和 $g_n\in V((w))$ 满足 $g_n\to 0$ as $n\to\infty$。此外还有 $||f|| = \max\{||h||, \max ||g_n||\}$。□$_n$

存在以下 Banach K-模的有界同态。

$$V((w))((z)) \xleftarrow{i_{z,w}} V((z,w))\{(z-w)^{-1}\} \xrightarrow{i_{w,z}} V((z))((w)) ,$$

其在 $V((z,w))$ 上的限制是标准的，并且分别将 $(z-w)^n$ for$n \in \mathbf{Z}$ 映射为其在定义域 $|z|>|w|$ 和 $|z|<|w|$ 中的分解。例如，有

$$i_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} w^n z^{-n-1} \quad \text{and} \quad i_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right)=-\sum_{n=-1}^{-\infty} w^n z^{-n-1} \ .$$

我们将算子记为 Δ （见 §1.5）

$$V((z,w))\{(z-w)^{-1}\} \to V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]] : f \mapsto i_{z,w}(f)-i_{w,z}(f) \ .$$

注意，该算子与乘以 $z-w$对易。

注 1.3.3。（i）对应关系 $z \mapsto z$, $w \mapsto -w$ 以显然的方式延拓为 Banach K-模 $V((z,w))$ 的一个等距自同构。该自同构将 $z-w$ 映为 $z+w$ ，并延拓为一个等距同构$V((z,w))\{(z-w)^{-1}\}\widetilde{\to}V((z,w))\{(z+w)^{-1}\}$: $f(z,w) \mapsto f(z,-w)$。因此，可以应用本小节的构造，尤其是算子$i_{z,w}$和$i_{w,z}$，应用于 Banach K-模 $V((z,w))\{(z+w)^{-1}\}$。

（ii）元素$i_{z,w}(f)$ 和 $i_{w,z}(f)$ 常分别记为 $f_>$和 $f_<$。

1.4. 导子与留数算子。对于 Banach K-模 V，导子 ∂_z: $V[[z^{\pm 1}]] \to V[[z^{\pm 1}]]$ 是一个范数为一的有界 K-线性算子。更一般地，对于每个 $i \geq 0$，存在一个定义良好的范数为一的有界 K-线性算子 $\partial_z^{(i)}=\frac{1}{i!}\partial_z^i$: $V[[z^{\pm 1}]] \to V[[z^{\pm 1}]]$

$$\partial_z^{(i)}(\sum_{n\in\mathbf{Z}} v_n z^n)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} \binom{n}{i} v_n z^{n-i} \ .$$

注意到这些算子 $\partial_z^{(i)}$彼此对易，并保持 Banach K-子模 $V[[z]]$、 $V((z))$ 和 $V\{z^{\pm 1}\}$。特别地，它们在 $V((z,w))$ 上诱导出算子，而后者可扩张为 K-线性有界算子$V((z,w))\{(z-w)^{-1}\}$，这些算子与算子 $i_{z,w}$、 $i_{w,z}$ 以及 Δ 对易。由于$\underline{(z-w)^{i+1}}=\partial_w^{(i)}(\frac{1}{z-w})$，可得

$$i_{z,w}\left(\frac{1}{(z-w)^{i+1}}\right)=\sum_{n\geq 0}\binom{n}{i} w^{n-i} z^{-n-1} \text{ and}$$

$$i_{w,z}\left(\frac{1}{(z-w)^{i+1}}\right)=-\sum_{n\leq -1}\binom{n}{i} w^{n-i} z^{-n-1} \ .$$

此外，令 Res_z 表示范数为一的有界 K-线性算子（留数算子）

$$V[[z^{\pm 1}]] \to V : f=\sum_{n\in\mathbf{Z}} v_n z^n \mapsto \mathrm{Res}_z f(z)=v_{-1} \ .$$

注意，对于所有 $i \geq 1$，$\mathrm{Res}_z \circ \partial_z^{(i)}=0$。如果 V 是 Banach A-模，则留数算子定义了一个有界的 K-双线性配对

$$A\{z^{\pm 1}\} \times V[[z^{\pm 1}]] \to V : (\varphi, f) \mapsto \mathrm{Res}_z(\varphi f) \ .$$

引理 1.4.1。上述配对给出了 Banach$K$-模的一个等距同构

$$V[[z^{\pm 1}]] \widetilde{\to} \mathrm{Hom}_A(A\{z^{\pm 1}\}, V) .$$

证明。该同态将元素 $v(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} v_j z_j \in V[[z^{\pm 1}]]$ 映射为同态 $\chi_v\colon A\{z^{\pm 1}\} \to V$，该同态将元素 $\varphi(z) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} a_i z^i \in A\{z^{\pm 1}\}$ 映射为元素 $\sum_{i+j=-1} a_i v_j$。由此可得 $||\chi_v(\varphi(z))|| \le ||v(z)||\cdot||\varphi(z)||$，即 $||\chi_v|| \le ||v(z)||$。反方向的同态将一个同态 χ：$A\{z^{\pm 1}\} \to V$ 映射为元素 $v_\chi(z) = \sum_{j\in J} \chi(z^{-j-1})z^j$。两个同态互为逆映射，并且 $||v_\chi(z)| = \sup_j\{||\chi(z^{-j-1})||\} = ||\chi||$。 □

根据引理 1.4.1，$V[[z^{\pm 1}]]$ 中的元素称为空间 $A\{z^{\pm 1}\}$上的形式分布。算子 $\mathrm{Res}_z\colon V((z,w)) \to V((w))$自然延拓为 $K((w))$-模的有界同态

$$\mathrm{Res}_z : V((z,w))\{(z-w)^{-1}\} \to V((w)) : f \mapsto \mathrm{Res}_z(i_{z,w}(f)) .$$

例如，$\mathrm{Res}_z(\frac{1}{z-w}) = 1$。

对于 $m \ge 1$，考虑 K-模的有界同态

$$V[[z]] \overset{\psi_m}{\to} V^m \oplus V[[z]] : f(z) \mapsto (f(0), (\partial_z f)(0), \dots, (\partial_z^{(m-1)})(0); \partial_z^{(m)} f(z)) .$$

引理 1.4.2。假设 V 作为阿贝尔群是无挠的。那么

(i) 同态 ψ_m 是单射；(ii) 此外，如果 K 是 Q-代数，且 K 上的范数在 Q 上诱导平凡范数，那么 ψ_m 是等距同构。

证明。如果 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$，那么

$$\psi_m(f(z)) = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}; \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} u_n z^{n-m}) .$$

因此，若 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$，则对于 $0 \le n \le m-1$ 和 $\binom{n}{m}(u_n - v_n) = 0$，有 $u_n = v_n$ for $n \ge m$。那么，(i) 中的假设蕴含对于 $n \ge m$ 有 $u_n = v_n$。(ii) 中的附加假设蕴含对于所有 $v \in V$ 以及所有非零 $\alpha \in$Q，均有 $||\alpha v|| = ||v||$，由此得到所需结论。□

1.5. δ函数。形式δ函数 $\delta(z-w)$ 是 $K[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 中的元素，其定义为 $\delta(z-w) = \Delta(\frac{1}{z-w})$，即，

$$\delta(z-w) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^n w^{-n-1} .$$

由于 $(z-w)\cdot\frac{1}{z-w} = 1$，可得 $(z-w)\delta(z-w) = 0$。更一般地，对于每个 $i \ge 0$，有

$$\partial_w^{(i)}\delta(z-w) = \Delta\left(\frac{1}{(z-w)^{i+1}}\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \binom{n}{i} w^{n-i} z^{-n-1}$$

以及 $(z-w)^{i+1}\partial_w^{(i)}\delta(z-w) = 0$。此外还有

$$\mathrm{Res}_z((z-w)^i \partial_w^{(i)}\delta(z-w)) = \mathrm{Res}_z\left(\Delta\left(\frac{1}{(z-w)^{j-i+1}}\right)\right) = \delta_{i,j} .$$

设 V 是一个 Banach K-模。

引理 1.5.1. 如果元素 $f \in V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 可以表示为 $f = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(w)\partial_w^{(i)}\delta(z-w)$ 的形式，其中 $g_i(w)$ 是 $V[[w^{\pm 1}]]$ 的元素，使得 $g_i(w) \to 0$ 作为 $i \to \infty$，那么 $g_i(w) = \mathrm{Res}_z((z-w)^i f(z,w))$ 且 $||f|| = \max_i ||g_i||$。

证明。 $g_i(w)$ 的公式由表述之前的等式得出；特别地， $f(z,w)$ 的这种表示是唯一的。由于 $||\partial_w^{(i)}\delta(z-w)|| \leq 1$，因此 $||f(z,w)|| \leq \max_i ||g_i(w)||$；又由于 $g_i(w) = \mathrm{Res}_z((z-w)^i f(z,w))$，可得 $||g_i(w)|| \leq ||f(z,w)||$。□

令 $V[[w^{\pm 1}]]\{\delta(z-w)\}$ 表示由 $V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 中可表示为引理 1.5.1 形式的元素组成的闭 K-子模。于是该引理表明，这种表示是唯一的。再令 $V((w))\{\delta(z-w)\}$ 表示 $V[[w^{\pm 1}]]\{\delta(z-w)\}$ 的子空间，其中的元素满足：对所有 $i \geq 0$，$g_i(w) \in V((w))$。

推论 1.5.2. 对于算子 $\Delta: V((z,w))\{(z-w)^{-1}\} \to V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$，有 $\mathrm{Ker}(\Delta) = V((z,w))$ 且 $\mathrm{Im}(\Delta) = V((w))\{\delta(z-w)\}$。□

引理 1.5.3。（分解定理）元素 $f(z,w) \in V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 的以下性质等价：

(a) $f \in V[[w^{\pm 1}]]\{\delta(z-w)\}$;
(b) $(z-w)^N f(z,w) \to 0$ as $N \to \infty$.

证明。(a)$\Longrightarrow$(b) 如果 f 可表示为 (a) 的形式，那么

$$(z-w)^N f(z,w) = \sum_{i=N}^{\infty} g_i(w)(z-w)^N \partial_w^{(i)}\delta(z-w)$$

并且，因此， $||(z-w)^N f(z,w)|| \leq \max_{i \geq N} ||g_i|| \to 0$，当 $N \to \infty$。

(b)$\Longrightarrow$(a) 对于 $i \geq 0$，我们令 $g_i(w) = \mathrm{Res}_z((z-w)^i f(z,w))$。假设意味着 $g_i \to 0$ as $i \to \infty$。因此，我们可以将 $f(z,w)$ 替换为 $f(z,w) - \sum_{i=0}^{\infty} g_i(w)\partial_w^{(i)}\delta(z-w)$，并假设对于所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Res}_z((z-w)^i f(z,w)) = 0$。在这种情况下，我们断言 $f(z,w) = 0$。事实上，后者很容易推出 $f(z,w) \in V[[w^{\pm 1}]][[z]]$，因此，该断言由引理 1.3.1(i) 得出。□

注记 1.5.4. 由于乘以 $z-w$ 的算子在 $V[[w^{\pm 1}]]((z))$ 上是等距的（引理 1.3.1(i)），因此，具有引理 1.5.3 所述等价性质的非零 $V[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 元素不能属于 $V[[w^{\pm 1}]]((z))$。

1.6. 形式分布的互局部性。

定义 1.6.1. Banach Lie K-代数是一个 Banach K-模 $\mathfrak{g}$，并具有 Lie K-代数结构，且满足性质 $||[u,v]|| \leq ||u|| \cdot ||v||$，其中对所有 u、$v \in \mathfrak{g}$ 均成立。

例如，对于任意 Banach K-模 V，$\mathrm{End}(V)$ 是一个 Banach Lie K-代数。设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Banach Lie K-代数。

定义 1.6.2. 如果形式分布 $a(z)$ $b(z) \in \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$ 互局部（或简称局部），则称它们为互局部（或简称局部）。

$$(z-w)^N [a(z), b(w)] \to 0 \ as \ N \to \infty \ .$$

例 1.6.3. 假设形式分布 $a(z)$ 和 $b(z)$ 不依赖于 z，即它们只是元素 $a, b \in \mathfrak{g}$。那么 a 和 b 互局部，当且仅当它们对易，即 $[a,b]=0$。

将形式分布 $a(z) \in \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$ 在 z 中的分解写成 $a(z)=\sum_{n\in \mathbf{Z}}(a(z))_{(n)}z^{-n-1}$ 的形式很方便。为简洁起见，也写作 $a_{(n)}=(a(z))_{(n)} \in \mathfrak{g}$，即

$$a(z)=\sum_{n\in \mathbf{Z}} a_{(n)}z^{-n-1} .$$

引理 1.6.4. 对于每一对互局部的形式分布 $a(z)$ $b(z) \in \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$，以下结论成立：

(i) 存在唯一的分解

$$[a(z),b(w)] = \sum_{i=0}^{\infty}(a(w)_{(i)}b(w))\partial_z^{(i)}\delta(z-w) ,$$

其中 $a(w)_{(i)}b(w) \in \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$；此外，有

$$a(w)_{(i)}b(w)=\mathrm{Res}_z((z-w)^i[a(z),b(w)]) ,$$

$a(w)_{(i)}b(w) \to 0$ 当 $i\to\infty$ 时，以及 $|||[a(z)\ b(w)]||| = \max_{i\geq 0}\{||a(w)_{(i)}b(w)||\}$；

(ii) 对于每个 $m,n \in \mathbf{Z}$，都有

$$[a_{(m)},b_{(n)}] = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(a(z)_{(i)}b(z))_{(m+n-i)} ;$$

(iii) 对于每个 $m \geq 0$，形式分布 $\partial_z^{(m)}a(z)$ 和 $b(z)$ 是互局部的。

证明。命题 (i) 由定义以及引理 1.5.1 和 1.5.3 得出，而命题 (ii) 由 (i) 得出。

(iii) 我们对 m 使用归纳法证明该命题。若 $m=0$，则根据假设命题成立。设 $m\geq 1$，且该命题对所有更小的值都成立。由于在 $\mathfrak{g}[[z^{\pm 1},w^{\pm 1}]]$ 中乘以 $z-w$ 不会增大范数，因此只需证明：对于每个 $\varepsilon>0$，存在充分大的 N，使得元素 $(z-w)^N[\partial_z^{(m)}a(z)\ b(w)]$ 的范数至多为 ε。令 n 满足：对于所有 $0\leq i\leq m-1$ 和 $j\geq n$，元素 $(z-w)^j[\partial_z^{(i)}a(z)\ b(w)]$ 的范数至多为 ε。有

$$\begin{aligned}\partial_z^{(m)}((z-w)^N[a(z),b(w)]) &= (z-w)^N[\partial_z^{(m)}a(z),b(w)] \\ &\quad +\sum_{i=1}^{m}\binom{N}{i}(z-w)^{N-i}[\partial_z^{(m-i)}a(z),b(w)] .\end{aligned}$$

如果 $N\geq m+n$ 那么，根据归纳法，左侧和右侧的第二项至多为 ε。由此可知，第一项也是如此。□

1.7. 量子场与正规序乘积。设 V 为一个巴拿赫K-模。

定义 1.7.1。形式分布

$$a(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_{(n)}z^{-n-1}\in\mathrm{End}(V)[[z^{\pm1}]]$$

若对任意 $v\in V$，都有$a(z)v\in V((z))$（即 $a_{(n)}(v)\to 0$ 是 $n\to+\infty$），则称其为取值于 End(V) 的量子场（或简称场）。

例如，End(V)((z)) 的所有元素都是场，特别地，恒等算子 $I_V\in$ End(V) 是一个场。容易看出，所有场构成的空间 End(V)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 在 End(V)$[[z^{\pm1}]]$ 中是闭的，并且在算子 $\partial_z^{(n)}$、 $n\geq 0$ 的作用下保持不变。

引理 1.7.2. 若 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是场，则对每个 $n\geq 0$，元素$a(w)_{(n)}b(w)=\mathrm{Res}_z((z-w)^n[a(z)\ b(w)])$（见引理1.6.4(i)）是一个场。

证明。如果 $a(w)_{(n)}b(w)=\sum_{p\in\mathbf{Z}}c_{(p)}w^{-p-1}$，则有

$$c_{(p)}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[a_{(i)},b_{(p+n-i)}]\ .$$

由此可知，对于每个向量 $v\in V$，都有

$$||c_{(p)}(v)||\leq\max_{0\leq i\leq n}\{||a_{(i)}||\cdot||b_{(p+n-i)}(v)||,||b_{(p+n-i)}(a_{(i)}(v))||\}\ .$$

显然，后一数值在 p 趋于 $+\infty$ 时趋于零。 □

对于如上所述的元素 $a(z)\in$ End(V)$[[z^{\pm1}]]$，我们设

$$a(z)_+=\sum_{n\leq-1}a_{(n)}z^{-n-1}\text{ and }a(z)_-=\sum_{n\geq0}a_{(n)}z^{-n-1}\ .$$

两个场 $a(z)$ $b(z)\in$ End(V)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 的正规序乘积定义为

$$:a(z)b(z):\ =a(z)_+b(z)+b(z)a(z)_-\ .$$

例如，对于任意场 $a(z)$，有：$a(z)I_V:=:I_Va(z):=a(z)$。

引理 1.7.3. 正规序乘积 :$a(z)b(z)$: 是 End(V)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 中定义良好的元素，其范数至多为 $||a(z)||\cdot||b(z)||$。

证明。我们有

$$a(z)_+b(z)=\sum_{p\in\mathbf{Z}}c_pz^{-p-1}\text{ and }b(z)a(z)_-=\sum_{p\in\mathbf{Z}}d_pz^{-p-1}\ ,$$

其中

$$c_p=\sum_{\substack{m+n=p-1\\m\leq-1}}a_{(m)}b_{(n)}\ \text{ and }\ d_p=\sum_{\substack{m+n=p-1\\m\geq0}}b_{(n)}a_{(m)}\ .$$

尽管这两个无穷和在 End(V) 上的巴拿赫范数下都不收敛，但它们在弱拓扑下收敛到有界线性算子。下面以算子 c_p 为例说明这一点。给定一个向量 $v\in V$，有$||(a_{(m)}b_{(n)})(v)||\leq||a_{(m)}||\cdot||b_{(n)}(v)||$。由于 $m+n=p-1$ 且 $m\leq-1$，后一个数在 $n\to+\infty$ 时趋于零，因此 $c_p(v)$ 定义良好。此外，给定$\varepsilon>0$，存在 n_0，使得对所有 $n\geq n_0$，都有 $||b_{(n)}(v)||\leq\varepsilon$。由此可得

$$||c_p(v)||\leq\max\{\max_{p\leq n<n_0}||a_{(p-1-n)}||\cdot||b_{(n)}||\cdot||v||,\max_{n\geq n_0}||a_{(p-1-n)}||\varepsilon\}$$

因此， $||c_p||\leq||a(z)||\cdot||b(z)||$。 □

引理 1.7.4. 对于每个 $m \geq 0$，都有

$$\partial_z^{(m)}(:a(z)b(z):) = \sum_{i=0}^{m} :\partial_z^{(i)}a(z)\partial_z^{(m-i)}b(z): .$$

证明。该结论显然由以下事实得到：算子 $\partial_z^{(m)}$与算子 $a(z) \mapsto a(z)_+$ 以及 $a(z) \mapsto a(z)_-$ 对易。□

引理 1.7.5。设 U 和 V 是 Banach K-模，且 $a(z) \in \mathrm{End}(U)\langle\langle z\rangle\rangle$和 $b(z) \in \mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$。则

(i) 对每个 $n \in \mathbb{Z}$，和式 $\sum_{i+j=n-1} a_{(i)} \otimes b_{(j)}$ 在 $U\widehat{\otimes}_K V$的弱拓扑中收敛于一个有界算子 $c_{(n)} \in \mathrm{End}(U\widehat{\otimes}_K V)$，其范数至多为$||a(z)|| \cdot ||b(z)||$；(ii) 对任意 $x \in U\widehat{\otimes}_K V$，当 $c_{(n)}(x) \to 0$ 为 $n \to +\infty$ 时，因此和式$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{(n)}z^{-n-1}$ 是 $\mathrm{End}(U\widehat{\otimes}_K V)\langle\langle z\rangle\rangle$中的一个元素，记为 $a(z)\widehat{\otimes}b(z)$；(iii) 若 $a'(z)\ a''(z) \in \mathrm{End}(U)\langle\langle z\rangle\rangle$ 和 $b'(z)\ b''(z) \in \mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$ 是互局部场对，则 $\mathrm{End}(U\widehat{\otimes}V)\langle\langle z\rangle\rangle$ 中的场 $a'(z)\widehat{\otimes}b'(z)$ 和 $a''(z)\ \widehat{\otimes}b''(z)$ 互局部。

证明。(i) 设 $x\otimes y$ 是 $U\otimes_K V$ 的非零元素。由于 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是场，因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，使得对于所有 i、$j \geq N$，都有 $||a_{(i)}(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{||b\ z\ ()||\cdot||y||}$，且 $||b_{(j)}(y)|| \leq \frac{\varepsilon}{||a\ z\ ()||\cdot||x||}$。因此，若 $i \geq N$，则有

$$||(a_{(i)} \otimes b_{(j)})(x \otimes y)|| \leq ||a_{(i)}(x)|| \cdot ||b_{(j)}(y)|| \leq \frac{\varepsilon}{||b(z)|| \cdot ||y||} \cdot ||b_{(j)}(y)|| \leq \varepsilon ,$$

对于 $j \geq N$ 也有类似的不等式。这意味着所考虑的和弱收敛，并在 $U\widehat{\otimes}_K V$ 上诱导出一个有界算子 $c_{(n)}$，其范数至多为 $||a(z)|| \cdot ||b(z)||$，即 (i) 成立。

(ii) 若 $n \geq 2N+1$ 和 $i+j = n-1$，则 i 或 j 至少为 N，因此$||c_{(n)}(x\otimes y)|| \leq \varepsilon$。这就证明了 (ii)。

(iii) 将对易子 $[a'(z)\widehat{\otimes}b'(z)\ a''(w)\widehat{\otimes}b''(w)]$, 视为 $\mathrm{End}(U\widehat{\otimes}V)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ 中的一个元素，它是下列元素的像

$$[a'(z), a''(w)] \otimes b'(z)b''(w) + a''(w)a'(z) \otimes [b'(z), b''(w)] .$$

由于元素 $b'(z)b''(w)$ 和 $a''(w)a'(z)$ 的范数有界，因此我们看到，对易子的范数乘以 $(z-w)^N$ 后，当 N 趋于无穷时，该乘积趋于零。□

引理 1.7.5 表明，对于 Banach K-模 U 和 V，存在一个定义良好的有界 Banach K-模同态

$$\mathrm{End}(U)\langle\langle z\rangle\rangle\widehat{\otimes}\mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle \to \mathrm{End}(U\widehat{\otimes}V)\langle\langle z\rangle\rangle : a(z) \otimes b(z) \mapsto a(z)\widehat{\otimes}b(z) ,$$

并且有 $||a(z)\widehat{\otimes}b(z)|| \leq ||a(z)|| \cdot ||b(z)||$。

1.8. 量子场的第 n 个乘积。设 V 是一个 Banach K-模。根据引理 1.7.2，对于每个 $n \geq 0$，场的第 n 个乘积 $a(z)_{(n)}b(z)$ 是一个场。可以将场空间上的这些 K-双线性运算扩展到任意 $n \in \mathbb{Z}$。也就是说，如果 $n = -m-1 < 0$，我们设

$$a(z)_{(n)}b(z) = \ :(\partial_z^{(m)}a(z))b(z): .$$

（根据引理 1.7.3，以及空间 End(V)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 在算子 $\partial_z^{(m)}$、 $m \geq 0$ 的作用下保持不变这一事实，后者是一个场。）例如，对于任意场 $a(z)$，当 $n \geq 0$ 时，有 $a(z)_{(n)}I_V = 0$；当 $n = -m-1 < 0$ 时，有 $a(z)_{(n)}I_V = \partial_z^{(m)}a(z)$。注意，始终有 $||a(z)_{(n)}b(z)|| \leq ||a(z)|| \cdot ||b(z)||$。

例 1.8.1。与例 1.6.3 一样，设场 $a(z)$ 和 $b(z)$ 不依赖于 z，即它们只是算子 a，$b \in$ End(V)。那么它们的 n 次乘积是复合 ab，若 $n = -1$；若 $n \neq 0$，则为零。

引理 1.8.2。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有

$$a(w)_{(n)}b(w) = \mathrm{Res}_z(a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n)) \ .$$

证明。根据定义，若 $n \geq 0$，则 $a(w)_{(n)}b(w) = g_n(w)$ 对于 $g_n(w) = \mathrm{Res}_z((z-w)^n[a(z)\ b(w)])$ 成立。这与所需公式的右端一致。若 $n = -m-1 < 0$，该公式由以下等式得出：

$$\mathrm{Res}_z\left(a(z)i_{z,w}\left(\frac{1}{(z-w)^{m+1}}\right)\right) = \partial_w^{(m)}a(w)_+ \text{ and}$$

$$\mathrm{Res}_z\left(a(z)i_{w,z}\left(\frac{1}{(z-w)^{m+1}}\right)\right) = \partial_w^{(m)}a(w)_- \ ,$$

这些等式可由 §1.4 中已确立的 $i_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}^{m+1}\right)$ 和 $i_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}^{m+1}\right)$ 的公式直接推出。□

推论 1.8.3. 若场 $a(z)$ 和 $b(z)$ 互局部，则对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有

$$a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n) = \sum_{j=0}^{\infty}(a(w)_{(n+j)}b(w))\partial_w^{(j)}\delta(z-w) \ .$$

证明. 若整数 N 足够大，使得 $N+n \geq 0$，则左边的元素乘以 $(z-w)^N$ 后等于 $(z-w)^{N+n}[a(z)\ b(w)]$。由于 $a(z)$ 和 $b(z)$ 互局部，当 $N \to +\infty$ 时，后者趋于零。这意味着左边的元素满足引理 1.5.3 的条件 (b)，因此该元素具有以下形式：$\sum_{j=0}^{\infty} g_j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$，其中 $g_j(w) \to 0$ as $j \to \infty$。根据引理 1.5.1，元素 $g_j(w)$ 等于

$$\begin{aligned} & \mathrm{Res}_z((a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n))(z-w)^j) \\ = \ & \mathrm{Res}_z(a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^{n+j}) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^{n+j})) \\ = \ & a(w)_{(n+j)}b(w) \ . \end{aligned}$$

所需结论得证。 □

引理 1.8.4. 对任意一对场 $a(z)$ 和 $b(z)$，以及每个 $n \in \mathbb{Z}$，以下结论成立：

(i) $\partial_z(a(z)_{(n)}b(z)) = (\partial_z a(z))_{(n)}b(z) + a(z)_{(n)}\partial_z b(z)$；(ii) 若 T 是 K 上有界的线性端同态，且 $[T, a(z)] = \partial_z a(z)$ 以及 $[T, b(z)] = \partial_z b(z)$，则

$$[T, a(z)_{(n)}b(z)] = Ta(z)_{(n)}b(z) + a(z)_{(n)}Tb(z) \ .$$

证明。(i) 若 $n<0$，由定义以及引理 1.7.4 中关于正规序乘积的类似等式（对于 $m=1$）可得该等式。设 $n\geq 0$。则 $a(w)_{(n)}b(w)=\mathrm{Res}_z((z-w)^n[a(z)\ b(w)])$，而 $\partial_w^{(m)}(a(w)_{(n)}b(w))$ 等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_z(a(z)\partial_w^{(m)}((z-w)^nb(w))-\partial_w^{(m)}((z-w)^nb(w)a(z)))\\=\ &\mathrm{Res}_z(a(z)\partial_w((z-w)^n)b(w)-\partial_w((z-w)^n)b(w)a(z))\\+\ &\mathrm{Res}_z(a(z)(z-w)^n\partial_wb(w)-(z-w)^n\partial_wb(w)a(z))\ .\end{aligned}$$

代入等式 $\partial_w((z-w)^n)=-\partial_z((z-w)^n)$，然后代入等式 $\mathrm{Res}_z(a(z)\partial_z((z-w)^n))=-\mathrm{Res}_z(\partial_za(z)(z-w)^n)$，即可得到所需结论。

(ii) 根据引理 1.8.2，左侧等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_z(Ta(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n)-a(z)b(w)Ti_{z,w}((z-w)^n)\\-\ &Tb(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n)-b(w)a(z)Ti_{w,z}((z-w)^n))\\=\ &\mathrm{Res}_z(Ta(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n)-a(z)Tb(w)i_{z,w}((z-w)^n)\\+\ &a(z)Tb(w)i_{z,w}((z-w)^n)-a(z)b(w)Ti_{z,w}((z-w)^n)\\-\ &Tb(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n)+b(w)Ta(z)i_{w,z}((z-w)^n)\\-\ &b(w)Ta(z)i_{w,z}((z-w)^n)-b(w)a(z)Ti_{w,z}((z-w)^n))\\=\ &\mathrm{Res}_z([T,a(z)]b(w)i_{z,w}((z-w)^n)-b(w)[T,a(z)]i_{w,z}((z-w)^n))\\+\ &\mathrm{Res}_z(a(z)[T,b(w)]i_{z,w}((z-w)^n)-[T,b(w)]a(z)i_{w,z}((z-w)^n)).\end{aligned}$$

根据假设，后一个表达式等于所需等式的右侧。□

若场 $a(z)$ 满足关于端同态$T\in\mathrm{End}(V)$ 的平移协变性，即 $[T,a(z)]=\partial_za(z)$，则称其具有平移协变性。

推论 1.8.5. 若场 $a(z)$ 和 $b(z)$ 关于端同态 $T\in\mathrm{End}(V)$ 均为平移协变，则对所有 $n\in\mathbb{Z}$，它们的 n-次乘积 $a(z)_{(n)}b(z)$ 也具有平移协变性。□

引理 1.8.6. 假设对于 $a(z)$ 和 $b(z)$，以及某个元素 $v\in V$，有 $a(z)v,b(z)v\in V[[z]]$。如果对于 $n\in\mathbb{Z}$，$c(z)=a(z)_{(n)}b(z)$，那么

(i) $c(z)v\in V[[z]]$;

(ii) $c_{(-1)}v=a_{(n)}(b_{(-1)}v)$.

证明。（i）根据引理 1.8.2，$c(w)v$ 等于

$$c(w)v=\mathrm{Res}_z(a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n))v-\mathrm{Res}_z(b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n))v\ .$$

由于 $a(z)v\in V[[z]]$，且级数 $i_{w,\ z}((z-w)^n$ 不含 z 的负幂，第二个加项等于零。由于 $b(w)v\in V[[w]]$，且元素 $i_{z,\ w}((z-w)^n$ 不含 w 的负幂，第一个加项属于 $V[[w]]$。结论得证。

(ii) 我们可以将值 $w=0$ 代入上述等式，得到 $c(0)v=\mathrm{Res}_z(a(z)b(0)z^n)v=a_{(n)}(b(0)v)$。由于 $c(z)\ b(z)\in V[[z]]$，有 $c(0)=c_{(-1)}$ 和 $b(0)=b_{(-1)}$，所需的等式即得。□

引理 1.8.7。（董引理）如果 $a(z)$、$b(z)$ 和 $c(z)$ 是两两互相局域场，那么对每个 $n\in\mathbb{Z}$，场 $a(z)_{(n)}b(z)$ 和 $c(z)$ 都是互局部的。

证明。根据引理 1.8.2，只需证明当 $N \to \infty$ 时，元素 $(w-u)^N P$ 趋于零，其中

$$\begin{aligned} P &= (a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n))c(u) \\ &\quad - c(u)(a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n)) \\ &= [a(z)b(w), c(u)]i_{z,w}((z-w)^n) - [b(w)a(z), c(u)]i_{w,z}((z-w)^n) \end{aligned}$$

给定 $\varepsilon > 0$，令 k 使得 $k \geq \max\{n, -n\}$，并且对于所有 $m \geq k$，元素 $(z-w)^m[a(z)\ b(w)], (z-u)^m[a(z)\ c(u)]$ 以及 $(w-u)^m[b(w)\ c(u)]$ 的范数至多为 ε。对于 $N = 3k$，我们有

$$(w-u)^{3k} = (w-u)^k \sum_{m=0}^{2k} \binom{2n}{m} (w-z)^m (z-u)^{2k-m} .$$

为验证所需事实，我们分别计算 $(w-u)^{3k}P$ 中$0 \leq m \leq k$ 以及 $k+1 \leq m \leq 2k$时的各个被加项。

（1）若 $0 \leq m \leq k$，我们将等式代入 P的公式中

$$[a(z)b(w), c(u)] = a(z)[b(w), c(u)] + [a(z), c(u)]b(w) \text{ and}$$

$$[b(w)a(z), c(u)] = b(w)[a(z), c(u)] + [b(w), c(u)]a(z) ,$$

并由假设推出，元素 $(w-u)^k(z-u)^{2k-m}P$的范数至多为 $\varepsilon \max\{||a(z)||, ||b(w)||\}$。

（2）若 $k+1 \leq m \leq 2k$，我们使用等式

$$P = [[a(z), b(w)], c(u)]i_{z,w}((z-w)^n) + [b(w)a(z), c(u)]\Delta((z-w)^n) .$$

第一项与 $(z-w)^m$ 的乘积的范数至多为 $\varepsilon||c(u)||$。若 $n \geq 0$，则 $\Delta((z-w)^n) = 0$，因此第二项等于零。若 $n = -p-1 < 0$，则 $\Delta((z-w)^p) = \partial_w^{(p)}\delta(z-w)$。由于 $(z-w)^{p+1}\partial_w^{(p)}\delta(z-w) = 0$ （见 §1.5），且 $k \geq -n = p+1$，乘以 $(w-z)^m$ 后，第二项便消失。□

1.9. 由互相局域场生成的闭 K-子模。设 $\mathcal{F}$ 是一族互相局域场。由 $\mathcal{F}$ 生成的 K-子模，是 $\mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$ 中包含 $\mathcal{F} \cup \{I_V\}$ 的所有场、且在所有 n-积作用下保持不变的最小K-子模 $\mathcal{F}_{\min}$。由 $\mathcal{F}$ 生成的闭 K-子模，是 $\mathcal{F}_{\min}$ 在 $\mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$ 中的闭包 $\overline{\mathcal{F}}_{\min}$。

引理 1.9.1. 在上述情况下，以下结论成立：

(i) 来自 $\overline{\mathcal{F}}_{\min}$ 的所有场都互局部；(ii) $\overline{\mathcal{F}}_{\min}$ 在所有 n-乘积作用下保持不变；(iii) 给定 $v \in V$，若对于所有 $\varphi(z) \in \mathcal{F}$，$\varphi(z)v \in V[[z]]$ 都成立，则对于所有场 $\varphi(z) \in \overline{\mathcal{F}}_{\min}$，同样成立；(iv) 若来自 $\mathcal{F}$ 的所有场相对于某个端同态 $T \in \mathrm{End}(V)$ 平移协变，则对于所有场 $\varphi(z) \in \overline{\mathcal{F}}_{\min}$，同样成立。

证明。董引理 1.8.7 蕴含来自 $\mathcal{F}_{\min}$ 的所有场互局部。性质 (ii) 可推广到 $\mathcal{F}_{\min}$，而性质 (iii)-(iv) 可推广到 $\overline{\mathcal{F}}_{\min}$，这也显而易见。因此，为了证明 (i) 和 (ii)，我们可以用 $\mathcal{F}_{\min}$ 替换 $\mathcal{F}$。

设 $\{a^i(z)\}_{i\geq 1}$ 和 $\{b^i(z)\}_{i\geq 1}$ 是来自 $\mathcal{F}$ 的场序列，它们分别收敛于场 $a(z)$ 和 $b(z)$。对于 (i)（分别地，对于 (ii)），我们需要证明 $a(z)$ 和

$b(z)$ 是互局部的（分别地，序列 $a^i(z)_{(n)}b^i(z)$ 收敛到 $a(z)_{(n)}b(z)$）。对每个 $i \geq 1$，都有

$$[a(z), b(w)] - [a^i(z), b^i(w)] = [a(z) - a^i(z), b(w)] + [a^i(z), b(w) - b^i(w)]$$

（resp. $a(z)_{(n)}b(z) - a^i(z)_{(n)}b^i(z) = (a(z) - a^i(z))_{(n)}b(z) + a^i(z)_{(n)}(b(z) - b^i(z))$）。给定 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $i \geq 1$，使得 $||a(z) - a^i(z)|| < \varepsilon$，$||b(z) - b^i(z)|| < \varepsilon$，并且 $||a^i(z)|| = ||a(z)||$。那么，右端两个加项的范数均小于 $\varepsilon \max\{||a(z)||, ||b(z)||\}$。这立即推出 (ii)。此外，我们可以找到 $N \geq 1$，使得对于所有 $j \geq N$，都有 $||(z-w)^N[a^i(z)\ b^i(w)]|| < \varepsilon$。乘以 $(z-w)^j$ 不会增大上述两个加项的范数，但左端第二个加项乘以 $(z-w)^j$ 后的范数小于 ε。由此可得，当 $N \to \infty$ 时，$(z-w)^N[a(z)\ b(w)]|| \to 0$。□

2. Vertex K-algebras

2.1. 非阿基米德顶点代数的定义。本节中，我们假设交换巴拿赫环 K 以及所考虑的所有巴拿赫 K-模都作为阿贝尔群无挠。

定义 2.1.1. 顶点 K-代数由以下数据组成：

(a)（态空间）一个无挠巴拿赫 K-模 V；(b)（真空向量）一个元素 $|0\rangle \in V$；(c)（平移算子）一个有界的 K-线性算子 $T\colon V \to V$，满足 $T|0\rangle = 0$；(d)（场空间）一个闭的 K-子模 $\mathrm{Fld}(V) \subset \mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$，其中包含恒等算子 $I_V \in \mathrm{End}(V)$；

并满足以下性质：

(V.1) $\varphi(z)|0\rangle \in V[[z]]$ 对所有 $\varphi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$ 均成立；(V.2) $\mathrm{Fld}(V)$ 中的所有场都关于 T 平移协变；(V.3) $\mathrm{Fld}(V)$ 中的所有场都互局部；(V.4) $\mathrm{Fld}(V)$ 在所有 n-阶乘积下封闭；(V.5) 对于以下有界同态的像 V'

$$\mathrm{Fld}(V) \to V : \varphi(z) \mapsto \varphi_{(-1)}|0\rangle\ ,$$

其 K-饱和 $\{v \in V \big| \lambda v \in V' \text{ 对于非零的 } \lambda \in K\}$ 在 V中稠密。

为简洁起见，上述对象称为顶点 K-代数 V。(V.5) 中的有界同态记为 fs (field-statee)。

引理 2.1.2。场-态同态 $fs\colon \mathrm{Fld}(V) \to V$ 是单射。

证明。设 $\varphi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$ 是同态 fs 的核中的一个场，并设 $\psi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$。由于 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是互局部的，因此可得

$$(z-w)^N\varphi(z)\psi(w)|0\rangle - (z-w)^N\psi(w)\varphi(z)|0\rangle \to 0 \text{ as } N \to +\infty\ .$$

性质 (V.2) 意味着 $[T, \varphi_{(n)}] = (-n)\varphi_{(n-1)}$，并且由于 $T|0\rangle = 0$，可得对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$T\varphi_{(n)}|0\rangle = (-n)\varphi_{(n-1)}|0\rangle$。此外，由于 $fs(\varphi(z)) = \varphi_{(-1)}|0\rangle = 0$，且 V 是一个无挠阿贝尔群，因此根据归纳法，对所有 $n < 0$，都有 $\varphi_{(n)}|0\rangle = 0$。最后，由性质 (V.1)，对所有 $n \geq 0$，都有 $\varphi_{(n)}|0\rangle = 0$。因此，$\varphi(z)|0\rangle = 0$，故上述表达式的第二项为零。由此可得 $(z-w)^N\varphi(z)\psi(w)|0\rangle \to 0$，因为 $N \to +\infty$。最后，

由于 $\psi(w)|0\rangle \in V[[w]]$，我们可以在左边代入 $w=0$，从而得到$z^N\varphi(z)\psi_{(-1)}|0\rangle \to 0$，因为 $N \to +\infty$。所考虑元素的范数等于 $\varphi(z)\psi_{(-1)}|0\rangle$ 的范数，因此后一个元素等于零。由于 V 是一个 K-模上的无挠元素，性质 (V.5) 随即推出$\varphi(z)=0$。□

引理 2.1.2 表明，存在一个 K-模之间的双射同态

$$V' \to \mathrm{Fld}(V) : a \mapsto Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} ,$$

其为 fs 的逆，并记作 sf (态-场)。它可视为一个无界算子 $sf\colon V \to \mathrm{Fld}(V)$，其定义域为 V'。K-模 V' 关于由 $||a||' = ||Y(a,z)||$ 定义的巴拿赫范数是完备的，同态 $sf\colon (V', ||\ ||') \to \mathrm{Fld}(V)$ 是等距的，而典范嵌入 $(V', ||\ ||') \to V$ 是有界的。

定义 2.1.3. 若 Banach 场-模 $fs : \mathrm{Fld}(V) \to V$ 的场-态同态是可容许的，则称顶点 K-代数 V 为可容许的。

在这种情况下，V' 是 V 的一个闭 K子模，且态-场算子 $sf : V' \to \mathrm{Fld}(V)$是有界的。如果 K 是具有非平凡赋值的非阿基米德域，那么根据巴拿赫开映射定理，顶点 K代数 V 是可容许的，当且仅当 $V'=V$。

例 2.1.4. 设 V是一个顶点 K-代数，其平移算子 T为零。那么 $\mathrm{Fld}(V)$中的所有场都不依赖于 z，并且根据例 1.6.3 和 1.8.1，$\mathrm{Fld}(V)$是 $\mathrm{End}(V)$的一个交换 Banach K-子代数；此外，根据性质 (V.5)，场-态同态 $\mathrm{Fld}(V) \to V$：$\varphi \mapsto fs(\varphi) = \varphi|0\rangle$ 所得到的像 V' 的 K-饱和在 V中稠密。反之，给定一个无挠 Banach K-模 V 和一个元素 $|0\rangle \in V$，$\mathrm{End}(V)$的任意具有上述性质的交换 Banach K-子代数，都在 V上定义了一个平移算子为零的顶点 K-代数结构。例如，设 K 为 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$, $V = \mathbf{Q}_p\{x\}$，并且 $|0\rangle = 1 + px + p^2x^2 + \ldots$。再设 $\mathrm{Fld}(V)$为 $\mathrm{End}(V)$的交换 Banach K-子代数，它由对应于 $\mathbf{Q}_p$ 中元素的无穷序列 $\varphi = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots)$且满足 $||\varphi|| = \sup_n\{|\lambda_n|\} < \infty$的算子组成，并按如下方式作用于 V：$\varphi(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha_n x^n$。那么 V 是一个顶点K-代数，但它不是可容许的。事实上，对于上述的 φ，有 $fs(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n p^n x^n$。因此，若对于 $n \geq 0$，φ_n 是由 $\varphi_n(x^m) = \delta_{m,n}x^m$定义的算子，则有 $||\varphi_n|| = 1$ 和 $||fs(\varphi_n)|| = |p|^n$。后者在 n 趋于无穷时趋于零，即算子 fs 不是可容许的。

再次设 V为任意顶点 K-代数。由算子 sf 的定义可知，对任意 $a \in V'$，都有 $a = a_{(-1)}|0\rangle$。特别地，若 $|0\rangle = 0$，则 $V = 0$。若 $|0\rangle \neq 0$，则 $||a|| \leq |||0\rangle|| \cdot ||a||'$ 和 $|||0\rangle||' = 1$。此外，根据性质 (V.2)，$Ta_{(n)}|0\rangle = -na_{(n-1)}|0\rangle$，因此 $Ta = a_{(-2)}|0\rangle$。

引理 2.1.5. 对每个 $n \geq 0$，以下结论成立：

(i) 存在良定义的 K-线性算子 $\frac{1}{n!}T^n\colon V' \to V'$，并且有$\frac{1}{n!}T^n = T_{(n)}$ 对于 K- 线性算子 $T_{(n)}\colon V' \to V'$，其定义为 $T_{(n)}a = a_{(-n-1)}|0\rangle$；(ii) 存在良定义的 K-线性算子 $e^{zT}\colon V' \to V'[[z]]$，其定义为$e^{zT}a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}T^n a$，并且有 $e^{zT}a = Y(a,z)|0\rangle$;

(iii) 如果 V 上的整数乘法算子是可容许的，那么算子 $\frac{1}{n!}T^n$ 可扩展为 V 中 V' 的闭包$\overline{V}'$ 上的有界算子 $\overline{V}' \to \overline{V}'$。

证明。等式 $Ta_{(n)}|0\rangle = -na_{(n-1)}|0\rangle$ 蕴含

$$T^m a_{(n)}|0\rangle = (-1)^m n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)a_{(n-m)}|0\rangle$$

对所有 $m \geq 0$ 均成立，特别是 $T^m a_{(-1)}|0\rangle = m!a_{(-m-1)}|0\rangle$。由于 $a_{(-1)}|0\rangle = a$ 且 V作为阿贝尔群是无挠的，因此可得 $\frac{1}{m!}T^m a = a_{(-m-1)}|0\rangle$。这说明 (i) 成立。由于 $||T^{(m)}a|| \leq ||a||'\cdot|||0\rangle||$，元素 $e^{zT}a$ 属于 $V'[[z]]$，故 (ii) 成立。在 (iii) 的假设下，存在常数$C > 0$，使得对所有 $v \in V$均有 $||v|| \leq C||m!v||$。这说明 $||T^{(m)}|| \leq C||T^m||$，故 (iii) 成立。□

注记 2.1.6。（i）在 V 上的顶点 K-代数结构，为每个$n \in \mathbf{Z}$ 定义了一个 K-双线性运算 $V' \times V \to V$: $(a,b) \mapsto a_{(n)}b$。根据定义，对于每一对 $(a,b) \in V' \times V$，都有 $||a_{(n)}b|| \leq ||a||'\cdot||b||$ 和 $a_{(n)}b \to 0$，且它们是 $n \to +\infty$。回顾一下，若 V 是可容许的，则 V' 在 V 中是闭的，并且其上的范数 $||\ ||'$ 和 $||\ ||$ 等价。

（ii）若 K 是一个场，则 V' 的 K-饱和与 V' 一致。

（iii）若 K 和 V 上的巴拿赫范数是平凡的，则任何顶点 K-代数都是可容许的，但 V' 不一定与 V 一致（见 §2.6）。

定义 2.1.7. 顶点 K-代数 $U \to V$ 的同态是 Banach K-模 φ 之间的同态 $U \to V$，满足

(H.1) $\varphi(|0\rangle) = |0\rangle$; (H.2) $\varphi \circ T = T \circ \varphi$; (H.3) $\varphi(U') \subset V'$; (H.4) 对所有 $a \in U'$、$b \in U$ 和 $n \in \mathbf{Z}$, $\varphi(a_{(n)}b) = \varphi(a)_{(n)}\varphi(b)$; (H.5) 诱导同态 $\mathrm{Fld}(U) \to \mathrm{Fld}(V)$: $Y(a,z) \mapsto Y(\varphi(a)\ z)$ 是有界的。

定义 2.1.8. 顶点 K-代数 V的理想是闭的 K-子模 $J \subset V$，使得 V/J是无挠 K-模，$TJ \subset J$，并且对于所有 $\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_{(n)}z^{-n-1} \in \mathrm{Fld}(V)$ 和 $n \in \mathbf{Z}$, $\psi_{(n)}J \subset J$。

引理 2.1.9. 给定顶点 K-代数 V 的一个理想 J，商 V/J 具有典范的顶点 K-代数结构，使得典范映射 $\pi: V \to V/J$ 是顶点 K-代数的同态。

证明. V/J 上的顶点 K-代数结构由真空向量$\pi(|0\rangle)$、平移算子 $\pi(T)$ 以及场空间 $\mathrm{Fld}(V/J)$ 定义；后者是形如 $\pi(\psi(z)) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi(\psi_{(n)})z^{-n-1}$ 的 $\mathrm{End}(V/J)$-值场所构成的 K-模的闭包，其中 $\psi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$。（这里，$\pi(T)$ 和 $\pi(\psi_{(n)})$ 分别是由 T 和 $\psi_{(n)}$ 在 V/J 上诱导的算子。）事实上，后一个 K-模显然具有性质 (V.1)–(V.5)，而根据引理 1.9.1，这些性质对其闭包 $\mathrm{Fld}(V/J)$ 也成立。由此即得所证。□

引理 2.1.9 以及 vertex K-代数的态-场同态的单射性意味着，对于每个元素 $a \in J \cap V'$，都有 $a_{(n)}V \subset J$。还要注意，V 的理想 J 是非平凡的（即，$J \neq V$）当且仅当 $|0\rangle \notin J$。

2.2. 顶点代数的基本性质。设 V 是一个顶点 K-代数。

引理 2.2.1。（戈达德唯一性定理）假设场 $X(z)$ 与 Fld(V) 中的所有场互局部，并且对于某个 $\varphi(z) \in \text{Fld}(V)$， $X(z)|0\rangle = \varphi(z)|0\rangle$。那么 $X(z) = \varphi(z)$。

证明。首先，将 $X(z)$ 替换为 $X(z) - \varphi(z)$，我们可以假设 $X(z)|0\rangle = 0$，我们的目的是证明在这种情况下 $X(z) = 0$。根据假设，对于每个 $\psi(z) \in \text{Fld}(V)$ 和 $N \geq 0$，我们有

$$(z-w)^N [X(z), \psi(w)]|0\rangle = (z-w)^N X(z)\psi(w)|0\rangle$$

并且根据真空公理，右端属于 $V[[z^{\pm 1}, w]]$。由引理 1.3.1(i)，在 $V[[z^{\pm 1}, w]]$ 上乘以 $(z-w)^N$ 是一个等距映射，因此有

$$||(z-w)^N [X(z), \psi(z)]|0\rangle|| = ||X(z)\psi(w)|0\rangle|| \geq ||X(z)\psi_{(-1)}|0\rangle|| \ .$$

根据局域性假设，当 $N \to \infty$ 时，左端趋于零。因此，对于所有 $b \in V'$，都有 $X(z)b = 0$。由于 V' 的 K-饱和在 V 中稠密，我们得到 $X(z) = 0$。□

引理 2.2.2. (i) K-模 Fld(V) 在算子 $\partial_z^{(n)}$ 以及 $\partial_z^{(n)} Y(a,z) = Y(T^{(n)}a, z)$ 的作用下保持不变，其中任意 $a \in V'$ 和 $n \geq 0$ 均成立；

(ii) 对任意 a、$b \in V'$ 和 $n \in \mathbb{Z}$， $Y(a,z)_{(n)} Y(b,z) = Y(a_{(n)}b, z)$。

证明. (i) 对于 $n = -m-1 < 0$，有 $\partial_z^{(m)} Y(a,z) = Y(a,z)_{(n)} I_V$，由于 Fld($V$) 包含 I_V 且在 n-乘积下保持不变，因此可得 $\partial_z^{(m)} Y(a,z) \in \text{Fld}(V)$。此外，我们将引理 2.2.1 应用于场 $X(z) = \partial_z^{(m)} Y(a,z)$。根据引理 1.6.4(iii)，它与 Fld($V$) 中的所有场均互局部。还可得

$$X(z)|0\rangle = \partial_z^{(m)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} a z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} T^{(m+n)} a z^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} (T^{(m)} a) z^n \ .$$

后者为 $Y(T^{(m)} a, z)|0\rangle$，因此由引理 2.2.1 可得 $X(z) = Y(T^{(m)}a, z)$。(ii) 该等式由引理 1.8.6(ii) 和 2.1.2 得出。□

推论 2.2.3。对于所有 a、$b \in V'$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，均有

$$T(a_{(n)}b) = (Ta)_{(n)}b + a_{(n)}(Tb) \ .$$

证明。将算子 fs 作用于引理 1.8.4(i) 的等式，并利用引理 2.2.2(ii) 中的等式，即得所需结论。□

推论 2.2.4。对于每一对 $(a,b) \in V' \times V$ 以及每个 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $||a_{(n)}b|| \preceq |a||' \cdot ||b||$。此外，若 $b \in V'$，则 $||a_{(n)}b||' \leq ||a||' \cdot ||b||'$。

证明。由此可得 $||a_{(n)}b|| \leq ||a_{(n)}|| \cdot ||b|| \leq ||a||' \cdot ||b||$。如果 $b \in V'$，那么同样有 $a_{(n)}b \in V'$，并且有

$$||a_{(n)}b||' = ||Y(a_{(n)}b, z)|| \leq ||Y(a,z)|| \cdot ||Y(b,z)|| = ||a||' \cdot ||b||' \ .$$

该陈述得证。 □

推论 2.2.5。（Borcherds 恒等式）对于所有的 a、$b \in V'$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，令 $a(z) = Y(a,z)$ 且 $b(z) = Y(b,z)$，则有

$$a(z)b(w)i_{z,w}((z-w)^n) - b(w)a(z)i_{w,z}((z-w)^n) = \sum_{j=0}^{\infty}(a_{(n+j)}b)(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)\ .$$

证明。该恒等式可由推论1.8.3中的等式得到；根据引理 2.2.2(ii)，其中的 $a(w)_{(n+j)}b(w)$ 被替换为 $(a_{(n+j)}b)(w)$。□

推论 2.2.6。由算子 $a_{(n)}$（对所有 $a \in V'$ 和 $n \in \mathbb{Z}$）生成的 $\mathrm{End}(V)$ 的 K-子模是 $\mathrm{End}(V)$ 的一个李子代数，记为 Lie_V。

证明。该结论由引理 1.6.4(ii) 和 2.2.2(ii) 得出。 □

引理 2.2.7。对于所有 a、$b \in V'$，有：

(i) $e^{wT}Y(a,z)e^{-wT} = i_{z,w}Y(a,z+w)$;
(ii) (Skewsymmetry) $Y(a,z)b = e^{zT}Y(b,-z)a$.

证明。(i) 设 $f(z,w)$ 和 $g(z,w)$ 分别表示等式的左边和右边。则有 $f(z,0) = Y(a,z) = g(z,0)$，因此，

$$\partial_w f(z,w) = Te^{wT}Y(a,z)e^{-wT} - e^{wT}Y(a,z)Te^{-wT} = [T, f(z,w)].$$

另一方面，根据平移协变公理，有 $\partial_w g(z,w) = [T, g(z,w)]$，，所需结论由引理 1.4.2(i) 得出。

（ii） $Y(a,z)$ 与 $Y(b,z)$ 的互局部性意味着

$$(z-w)^N Y(a,z)e^{wT}b - (z-w)^N Y(b,w)e^{zT}a \to 0 \text{ as } N \to +\infty\ .$$

根据（i），第二个加项等于

$$(z-w)^N e^{zT}e^{-zT}Y(b,w)e^{zT}a = e^{zT}i_{w,z}((z-w)^N Y(b,w-z))a\ .$$

由于 $Y(b,w-z) \in \mathrm{End}(V)\langle\langle w-z\rangle\rangle$，因此

$$(z-w)^N Y(b,w-z) - i_{w,z}((z-w)^N Y(b,w-z)) \to 0 \text{ as } N \to +\infty$$

因此，有

$$(z-w)^N Y(a,z)e^{wT}b - (z-w)^N e^{zT}Y(b,w-z)a \to 0 \text{ as } N \to +\infty\ .$$

代入 $w = 0$，并利用乘以 z^N 是等距算子的事实，便得到所需结论。□

推论 2.2.8。（i）对于所有 a、$b \in V'$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，都有

$$a_{(n)}b = -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n}T^{(m)}(b_{(m+n)}a)\ ;$$

（ii）对于所有 $a(z)$ $b(z) \in \mathrm{Fld}(V)$，都有

$$a(z)_{(n)}b(z) = -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\partial_z^{(m)}(b(z)_{(m+n)}a(z))\ .$$

证明。由引理 2.2.7(ii)可直接得到断言（i）。断言（ii）由（i）和引理 2.2.2(ii)推出。□

同理，推论 2.2.5 蕴含 Borcherds 恒等式的另外两种形式。

推论 2.2.9。 (i) 对于所有 a、 b、 $c \in V'$ 和 m、 n、 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (a_{(n+j)}b)_{(m+k-j)}c = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} ((a_{(m+n-j)}(b_{(k+j)}c) - (-1)^n (b_{(n+k-j)}(a_{(m+j)}c));$$

(ii) 如果将所有的 a、 b、 $c \in V'$ 替换为 $a(z)$ $b(z)$ $c(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, 则 (i) 中的恒等式成立。

注意, 通过令 $c = |0\rangle$、 $m = -1$ 和 $k = 0$, 可由推论 2.2.9 得到推论 2.2.8。

2.3. 交换顶点 K-代数。

引理 2.3.1. 顶点 K-代数 V 的以下性质彼此等价:

(a) 对所有 $\varphi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, $\varphi(z) \in \mathrm{End}(V)[[z]]$;

(b) 对所有 $\varphi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, $\varphi(z) \in \mathrm{End}(V)((z))$;

(c) 对所有 $\varphi(z)$ $\psi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, $[\varphi(z)\ \psi(w)] = 0$。

证明。(a)$\Longrightarrow$(b) 的蕴含是显然的。假设 (b) 成立。那么对于所有$\varphi(z)$ $\psi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, 有 $[\varphi(z)\ \psi(w)] \in \mathrm{End}(V)[[w^{\pm 1}]]((z))$。由于场$\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 互局部, $(z-w)^N[\varphi(z)\ \psi(w)] \to 0$ as $N \to \infty$。但是, 依据引理 1.3.1, 乘以 $z-w$ 在 $\mathrm{End}(V)[[w^{\pm 1}]]((z))$ 上是一个等距映射。这蕴含了 (c)。最后, 假设 (c) 成立。那么 $\varphi(z)\psi(w)|0\rangle \in V[[z^{\pm 1}, w]]$ and$\psi(w)\varphi(z)|0\rangle \in V[[z, w^{\pm 1}]]$。由于两个向量相等, 故可知它们都包含于 $V[[z,w]]$ 中。代入 $w = 0$, 对于所有$\psi(z) \in \mathrm{Fld}(V)$, 得到 $\varphi(z)\psi_{(-1)}|0\rangle \in V[[z]]$。由于同态 fs 的像 V' 的 K-饱和在 V 中稠密, 我们得到 $\varphi(z) \in \mathrm{End}(V)[[z]]$。 □

具有引理 2.3.1 等价性质的顶点 K-代数 V 称为交换的。例如, 平移算子为零的顶点 K-代数（来自例 2.1.4）是交换的。

定义 2.3.2. 强交换 Banach K-代数是四元组 $(V, |0\rangle, T, A)$, 由一个 Banach 无挠 K-模 V、一个元素 $|0\rangle \in V$、一个有界算子 $T \in \mathrm{End}(V)$（满足 $T|0\rangle = 0$）以及一个 Banach K-子代数 $A \subset \mathrm{End}(V)[[z]]$组成, 并满足

(C.1) 对所有 $a(z)$ $b(z) \in A$, 有 $[a(z)\ b(w)] = 0$; (C.2) A 在算子 $\partial_z^{(n)}$作用下保持不变, 对所有 $n \geq 0$均如此; (C.3) 对所有 $a(z) \in A$, 有 $[T, a(z)] = \partial_z a(z)$; (C.4) 若 V' 是同态 $A \to V$: $a(z) \mapsto a(0)|0\rangle$的像, 则 V' 的K-饱和在 V中稠密。

注意, (C.4) 中的同态是单射（参见引理 2.1.2）。事实上, 设对于 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)} z^n \in A$, 有 $a(0)|0\rangle = a^{(0)}|0\rangle = 0$。(C.3) 的性质推出, 对所有 $n \geq 0$, 都有 $Ta^{(n)}|0\rangle = (n+1)a^{(n+1)}|0\rangle$; 再由归纳法可得, 对所有 $n \geq 0$, 都有 $a^{(n)}|0\rangle = 0$, 即 $a(z)|0\rangle = 0$。于是, 对于每个$b(z) \in A$, 都有 $a(z)b(w)|0\rangle = b(w)a(z)|0\rangle = 0$。因此, 对所有 $b(z) \in A$, 都有 $a(z)b(0)|0\rangle = 0$, 即 $a(z)V' = 0$; 而 (C.4) 的性质推出 $a(z) = 0$。因此, 我们可以用 $a(z)$ 表示元素 $a \in V'$ 在 A 中的原像。

此类对象 $(V, |0\rangle, T, A)$ 的态射 $\to (U, |0\rangle, T, B)$ 是一个有界 K-线性同态 $\varphi: V \to U$它将 $|0\rangle$ 映射到 $|0\rangle$, 并将 V'映射到 U', 与 T对易, 而诱导映射 $V' \to B$: $a \mapsto \varphi(a)(z)$ 产生一个 Banach K-代数的有界同态 $A \to B$。

引理 2.3.3. 对应关系 $V \mapsto (V, |0\rangle, T, \mathrm{Fld}(V))$ 在交换顶点 K-代数范畴与强交换 Banach K-代数范畴之间建立了一个等价关系。

证明。首先，我们注意到，对于任意场 $\varphi(z)$ $\psi(z) \in \mathrm{End}(V)[[z]]$，有$\varphi(z)_{(n)}\psi(z) = 0$ for $n \geq 0$，且 $\varphi(z)_{(n)}\psi(z) = (\partial_z^{(m)}\varphi(z))\psi(z)$ for $n = -m-1 < 0$。令 V为交换顶点 K-代数。由引理 2.3.1，性质 (C.1) 成立；由 (V.3) 和 (V.5)，性质 (C.3) 和 (C.4) 分别成立。上述备注表明，$\mathrm{Fld}(V)$ 在乘法以及算子 $\partial_z^{(n)}$ 的作用下封闭，即 $(V, |0\rangle, T, \mathrm{Fld}(V))$ 是一个强交换巴拿赫 K-代数。反过来，如果后者成立，那么性质 (V.1)-(V.5) 显然都成立，因此 V 是一个交换顶点 K-代数。根据两类范畴中态射的定义，很容易得出所考虑的对应关系诱导出范畴等价。□

推论 2.3.4. 设 V 是一个交换顶点 K-代数。那么

(i) K-双线性运算 $V' \times V \to V$: $(a, b) \mapsto a \cdot b = Y(a, 0)b$ 在 $(V', ||\ ||')$ 上定义了一个交换 Banach K-代数结构，其单位元为 $|0\rangle$；并且在后者上，V 具有 Banach 模结构；(ii) 对每一对 $(a, b) \in V' \times V$，都有 $Y(a, z)b = (e^{zT}a) \cdot b$；(iii) 算子 T 在 $(V', ||\ ||')$ 上是关于上述乘法的导子，且其范数至多为一。

在可容许情形下，由于范数 $||\ ||$与范数 $||\ ||'$等价，V' 关于范数 $||\ ||$是一个 Banach K-代数。

证明。(i) 设 $a, b \in V'$。由于 $b = Y(b, 0)|0\rangle$，我们有 $a \cdot b = Y(a, 0)Y(b, 0)|0\rangle$，并由引理 2.3.1 的性质 (c) 得到 $a \cdot b = b \cdot a$。此外，等式$Y(a, 0)Y(b, 0) = Y(b, 0)Y(a, 0)$ 给出等式 $a\cdot(b\cdot c) = b\cdot(a\cdot c)$，对所有 $a, b, c \in V'$ 均成立，因此我们得到 $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (c \cdot b) = c \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b) \cdot c$。若 $a \in V'$ 且 $b \in V$，则$||a \cdot b|| \leq ||a||' \cdot ||b||$。若进一步有 $b \in V'$，则由推论 2.2.4 得 $||a \cdot b||' = ||a_{(-1)}b||' \leq ||a||' \cdot ||b||'$。

(ii) 由于 $Y(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}az^n$，因此有

$$Y(a, z)b = \sum_{n=0}^{\infty}(T^{(n)}a)bz^n = \sum_{n=0}^{\infty} Y(T^{(n)}a, 0)bz^n = \sum_{n=0}^{\infty}((T^{(n)}a) \cdot b)z^n = (e^{zT}a) \cdot b\ ,$$

由此可得结论 (ii)。

(iii) 对于 $a, b \in V'$，引理 2.2.3 推出

$$T(a \cdot b) = T(a_{(-1)}b) = (Ta)_{(-1)}b + a_{(-1)}(Tb) = (Ta) \cdot b + a \cdot (Tb)\ ,$$

即，T是一个导子。利用 (i)，我们得到 $||Ta||' = ||a_{(-2)}|0\rangle||' \leq ||a||' \cdot |||0\rangle||' \leq ||a||'$（若 $|0\rangle \neq 0$，则第二个不等式取等号）。因此，算子 T 在 $(V', ||\ ||')$ 上的范数至多为一。□

例 2.3.5. (i) 设 A 是一个交换 Banach K-代数，配备一组有界的 K-线性算子 $\{T_{(n)}\}_{n\geq 0}$，使得 $T^{(0)} = I_A$ 且 $T_{(n)}(a\ b) = \sum_{i+j=n} T_{(i)}a \cdot T_{(j)}b$ 对所有 $n \geq 0$ 以及 a、$b \in A$ 均成立。假设集合 $A' = \{a \in A \big|$ 存在 $C > 0$，使得对所有 $n \geq 0\}$ 均有 $||T^{(n)}a|| \leq C||a||$，且该集合在 A 中稠密。那么，A 是一个交换顶点 K-代数，其中 $Y(a, z)$ 对于 $a \in A'$ 定义为乘法

由 $e^{zT}a = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}az^n$ 给出。如果存在 $C > 0$，使得对所有 $n \geq 0$ 均有 $||T^{(n)}|| \leq C$，那么 A 是可容许的。

(ii) 配备算子系 $T^{(n)} = \partial_t^{(n)}$，$n \geq 0$ 的交换巴拿赫 K-代数 $K\{t^{\pm 1}\}$ 是一个可容许的交换顶点 K-代数。

(iii) 对于正实数 r，令 $K\{r^{-1}t\}$ 表示形式幂级数 $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$ 构成的交换巴拿赫K-代数，其中 $|\lambda_n|r^n \to 0$ 为 $n \to \infty$，并配备巴拿赫范数 $||f|| = \max_n\{|\lambda_n|r^n\}$。导子算子 ∂_t的范数为 r^{-1}，且对于 $n \geq 0$，算子 $T^{(n)} = \partial_t^{(n)}$ 的范数为 r^{-n}。因此，若 $r \geq 1$，则 $K\{r^{-1}t\}$ 是一个可容许的交换顶点 K-代数。若 $r < 1$，则A 不是可容许的（见例 2.4.3）。

2.4. 扩张定理。设给定一个无挠 Banach K-模V、一个元素 $|0\rangle \in V$、一个有界自同态 $T \in \mathrm{End}(V)$，以及一个场族

$$\mathcal{F} = \left\{ a^j(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a^j_{(n)} z^{-n-1} \right\}_{j \in J} \subset \mathrm{End}(V)\langle\langle z \rangle\rangle \ .$$

令 $V_{\mathcal{F}}$ 为包含元素 $|0\rangle$ 且在形如 $v \mapsto a^j{}_{(n)}v$ 的 K-线性端同态作用下保持不变的最小 K-子模，其中 $j \in J$ 且$n \in \mathbf{Z}$。此外，假设上述数据具有以下性质：

(E.1)（真空公理） $T|0\rangle = 0$ 和 $a^j(z)|0\rangle \in V[[z]]$ 对所有 $j \in J$均成立；(E.2)（平移协变性） $[T, a^j(z)] = \partial_z a^j(z)$对所有 $j \in J$均成立；(E.3)（局域性）场 $a^j(z) \in \mathcal{F}$ 互局部；(E.4)（完备性） K-子模 $V_{\mathcal{F}}$ 的 K-饱和在 V中稠密。

定理 2.4.1. 在上述情形下，K上存在一种顶点V-代数结构，其中 Fld(V) 是由 $\mathcal{F}$ 生成的 $\mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$ 的闭 K-子模。

证明. 根据引理 1.9.1，定义 2.1.1 中性质 (V.1)-(V.4) 均成立；根据同一定义中的引理 1.8.6(ii)，性质 (V.5) 也成立。□

设 U 是一个顶点 K-代数，V 是一个顶点 K'-代数 V，其底环为交换的非阿基米德巴拿赫 K-代数 K'。完备张量积$U\widehat{\otimes}_K V$ 是一个巴拿赫 K'-模。假设 K' 和 $U\widehat{\otimes}_K V$ 具有本节开头所述的性质，即它们是无挠阿贝尔群；并假设 $U\widehat{\otimes}_K V$ 是一个无挠 K'-模。

请注意，$\mathbf{Z}$ 上针对 K' 的赋值不一定与针对 K 的赋值相同。例如，对于带有平凡赋值的 $K = \mathbf{Z}$ 和带有 p-进赋值的 $K' = \mathbf{Z}_p$（p-进整数环），二者的赋值并不相同。

推论 2.4.2. 在上述情形下，完备张量积 $U\widehat{\otimes}_K V$ 是一个顶点 K'-代数，其真空向量为 $|0\rangle\widehat{\otimes}|0\rangle$，平移算子为 $T\widehat{\otimes}I_V + I_U\widehat{\otimes}T$，态空间为 Fld($U\widehat{\otimes}_K V$)；后者是 End($U\widehat{\otimes}_K V$)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 的闭 K-子模，由形如 $\varphi(z)\widehat{\otimes}\psi(z)$ 的场生成，其中 $\varphi(z) \in$Fld(U) 且 $\psi(z) \in$ Fld(V)。□

例 2.4.3. 假设 $r < 1$ 属于例 2.3.5。则 $\partial_t^{(n)}$ 的范数随着 n 一起趋于无穷大。我们将定理 2.4.1 应用于巴拿赫空间 $V = K\{r^{-1}t\}$、真空元 $1 \in K\{r^{-1}t\}$、平移算子 $T = \partial_t$ 和场族 $\mathcal{F} = \{e^{zT}a \big| a \in K[t]\}$。性质 (E.1)-(E.3) 显然

成立，并且由于多项式环 $K[t]$ 在 $K\{r^{-1}t\}$ 中稠密，性质 (E.4) 得以满足。因此，$K\{r^{-1}t\}$ 是一个交换顶点 K-代数，但它不是可容许的。

在接下来各小节所考察的所有顶点 K-代数示例中，我们都从交换环 R上的普通顶点 V 代数出发，其中 V 作为阿贝尔群是无挠的，并且 R 和 V 都赋予平凡巴拿赫范数。于是，对于从 $R \to K$ 到交换非阿基米德环 K的每个单同态，根据推论 2.4.2，我们得到一个非阿基米德顶点K-代数 $V_K = V\widehat{\otimes}_R K$。

引理 2.4.4。在上述情形下，假设 V 是一个自由 R-模。那么以下结论成立：

(i) 如果场-态同态 $fs : \mathrm{Fld}(V) \to V$是双射的，则场-态同态 $\mathrm{Fld}(V_K) \to V_K$ 是等距同构；(ii) 如果 K 上的巴拿赫范数在 R上诱导出平凡范数，则场-态同态 $\mathrm{Fld}(V_K) \to V_K$ 是等距单射。

特别地，在这两种情况下，顶点 K-代数 V_K 都是可容许的。

证明。设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是 V 在 R上的一组基。每个元素 $v \in V_K$ 都可以唯一地表示为一个和 $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$，其中 $\lambda_i \in K$，以及 $\lambda_i \to 0$，这里是相对于 I的有限子集补集滤子的表示，并且有 $||v|| = \max_{i\in I}\{||\lambda_i||\}$。这意味着典范同态 $V \to V_K$ 和 $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V_K)$都是等距的。此外，设 U 为 K的子模，它由有限和$v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$组成。那么，在情形 (i) 下，$U$ 在 V_K 中稠密；在情形 (ii) 下，其 Z-饱和在 V_K 中稠密。

(i) 对于一个元素 $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in U$，我们令 $\varphi(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i sf(e_i) \in \mathrm{End}(V_K)((z))$。由于 $fs(\varphi(z)) = v$，因此有 $||f|| \le ||\varphi(z)||$。另一方面，由于 $||sf(e_i)|| = 1$，因此有 $||\varphi(z)|| \le \max_{i\in I}\{||\lambda_i||\} = ||v||$。这意味着 $||fs(\varphi(z))|| = ||\varphi(z)||$，所需结论得证。

(ii) 对每个非零元素 $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in U$，存在 $N \ge 1$，使得对于所有满足 $\lambda_i \ne 0$ 的 $i \in I$，都有 $Ne_i \in V'$，特别地，$Nv \in V'$。令 $\varphi(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i sf(Ne_i)$。则 $\varphi(z) \in \mathrm{Fld}(V_K)$，且 $fs(\varphi(z)) = N \cdot \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$。根据假设，$||Ne_i|| = 1$，因此有

$$||\varphi(z)|| \le \max_{i\in I}\{||\lambda_i||\} = ||fs(\varphi(z))|| \le ||\varphi(z)|| .$$

因此，$||fs(\varphi(z))|| = ||\varphi(z)||$。这就得到了所需的结论。 □

2.5. 与李代数相关的顶点 K-代数。设 R 为一个作为阿贝尔群无挠的交换环，设 $\mathfrak{g}$ 为一个李 R- 代数，作为 R- 模无挠；设 T 为 $\mathfrak{g}$ 的一个导子，并设 $\mathcal{F}$ 为一族两两局部的形式分布

$$\mathcal{F} = \left\{ a^j(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^j_{(n)} z^{-n-1} \right\}_{j\in J} \subset \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]] .$$

T 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用自然地扩展为对形式分布空间 $\mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$ 的作用。令 $\mathcal{F}_T$ 表示包含 $\mathcal{F}$ 且在 T 的作用下保持不变的 $\mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$ 的最小 R-子模。此外，假设上述数据具有以下性质：

(L.1) 由元素 $a^{j}{}_{(n)}$ 对所有 $j \in J$ 和 $n \in \mathbf{Z}$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 的 R 子模的 R 饱和，与 $\mathfrak{g}$ 重合；(L.2) 对所有 $j \in J$， $T(a^j(z)) = \partial_z a^j(z)$；(L.3) 对每个 $n \geq 0$，来自 $\mathcal{F}$ 的任意一对形式分布的 n 阶乘积都属于 $\mathcal{F}_T$。

令 $\mathfrak{g}_-$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 R-子模，由所有满足 $j \in J$ 和 $n \geq 0$ 的元素 $a^{j}{}_{(n)}$ 生成。由性质 (L.2) 和引理 1.6.4(ii) 可知， $\mathfrak{g}_-$ 是 $\mathfrak{g}$ （湮灭子代数）的一个 T-不变李 R-子代数。令 V 为 R-代数 $U(\mathfrak{g})$ 的商$U(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$，其中 $U(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的包络代数，而 $\mathfrak{a}$ 是左理想 $U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_-$ 的 R-饱和。

注意，在 $U(\mathfrak{g})$ 中，左乘 $\mathfrak{g}$ 的元素会在 V 上诱导出 $\mathfrak{g}$ 的一个 R-线性作用。这给出了一个同态 $\mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]] \to \mathrm{End}[[z^{\pm 1}]]$，并将集合 $\mathcal{F}$ 映为 $\mathrm{End}[[z^{\pm 1}]]$ 中一族两两局部的形式分布 $\mathcal{F}\big|_V$。还要注意， $\mathfrak{g}$ 上的导子 T 会在 V 上诱导出 T 的作用。

引理 2.5.1。在上述情形中，$\mathcal{F}\big|_V$ 中的形式分布实际上是取值于 $\mathrm{End}(V)$ 的量子场，即 $\mathcal{F}\big|_V \subset \mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle$。

Notice that since the valuation on V is trivial, then $\mathrm{End}(V)\langle\langle z\rangle\rangle = \mathrm{End}(V)((z))$.

证明。步骤 1。令 F 为形式分布 $a(z) \in \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]]$ 的 R-子模，其中对所有 $n \geq 0$ 均有 $a_{(n)} \in \mathfrak{g}_-$。根据定义，有 $\mathcal{F} \subset F$，而性质 (L.2) 蕴含 $\mathcal{F}_T \subset F$。由性质 (L.3) 可知，对每个 $i \geq 0$ 以及任意一对形式分布 $a(z)$ $b(z) \in \mathcal{F}$，均有 $a(z)_{(i)}b(z) \in F$，特别地，对所有 $k \geq 0$，有 $(a(z)_{(i)}b(z))_{(k)} \in \mathfrak{g}_-$。

步骤 2. 对任意一对 $a(z)$ $b(z) \in \mathcal{F}$ 和 $n \in \mathbf{Z}$，有

$$[a(z), b_{(n)}] \in \mathfrak{g}((z)) + \mathfrak{g}_-[[z^{\pm 1}]] \subset \mathfrak{g}[[z^{\pm 1}]] \ .$$

事实上，根据引理 1.6.4(ii)，有

$$[a(z), b_{(n)}] = \sum_{m \in \mathbf{Z}} [a_{(m)}, b_{(n)}] z^{-m-1} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (a(z)_{(i)}b(z))_{(m+n-i)} z^{-m-1} \ .$$

由于 $a(z)$ 和 $b(z)$ 互局部，存在 $N \geq 0$，使得对所有 $i > N$，都有 $a(z)_{(i)}b(z) = 0$。因此，对于 $m \geq 0$， z^{-m-1} 处的系数等于

$$\sum_{i=0}^{\min(m,N)} \binom{m}{i} (a(z)_{(i)}b(z))_{(m+n-i)} \ .$$

若 $n \geq 0$，则对所有 $0 \leq i \leq m$，都有 $m+n-i \geq 0$，并且根据步骤 1，该系数属于 $\mathfrak{g}_-$。若 $n = -k-1$ 对 $k \geq 0$成立，则对于 $m \geq N+k+1$，有 $m+n-i \geq 0$，并且根据步骤 1， z^{-m-1} 处的系数属于 $\mathfrak{g}_-$。

步骤 3. 引理的陈述成立。事实上，根据性质（L.1），只需证明：对于任意 $b(z) \in \mathcal{F}$ 以及任意具有如下形式的元素 $x \in U(\mathfrak{g})$：$x = a^{j_1}{}_{(n_1)} \ldots a^{(j_s)}{}_{(n_s)}$，都有 $b(z)x \in U(\mathfrak{g})((z)) + U(\mathfrak{g})g_-[[z^{\pm 1}]]$。若 $s = 0$，则 $x = 1$，所需结论由包含关系 $a(z) \in F$ 得出（见步骤 1）。假设 $s \geq 1$，并且该结论对于较小的 s 成立。于是，对于值较小且形式相同的 y，有 $x = a^{j}{}_{(n)}y$，其中 s。有

$$b(z)x = [b(z), a^j_{(n)}]y + a^j_{(n)}b(z)y \ .$$

根据步骤 2，右侧的第一项属于 $U(\mathfrak{g})((z))$ $+U(\mathfrak{g})g_-[[z^{\pm 1}]]$；根据归纳法，第二项也属于该集合。□

推论 2.5.2. 在上述情形下，V上存在一个顶点 R-代数结构，其中真空向量 $|0\rangle$ 是 V 中 1 的像，V 的端同态 T 由 $\mathfrak{g}$ 上的导子 T 诱导，并且 Fld(V) 是由 $\mathcal{F}\big|_V$ 生成的 End(V)$\langle\langle z\rangle\rangle$ 的 R-子模。□

推论 2.5.2 中的顶点 R-代数记为 $V(\mathfrak{g},\mathcal{F})$。

2.6. 顶点 K 代数的例子。

自由玻色顶点 K-代数

设 $B=\mathbf{Z}[x_1,x_2,\ldots]$ 是变量 x_1、x_2、.....上系数在 Z 中的多项式环，其中 Z 和 B 赋予平凡巴拿赫范数。再设 $|0\rangle=1$、$T=\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)x_i\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}$：$B\to B$，以及 $\mathcal{F}=\{a(z)\}$ 对于 $a(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_{(n)}z^{-n-1}$，定义为 $a_{(n)}=n\frac{\partial}{\partial x_n}$ 对于 $n>0$、$a_{(n)}=x_{-n}$ 对于 $n<0$，以及 $a_{(0)}=0$。这些数据具有 §2.4 中的性质 (E.1)-(E.4)，因此根据定理 2.4.1，它们在 B 上给出了一个可容许顶点 Z-代数结构。注意，B 是一个自由阿贝尔群，由有限和 $\sum_\mu\lambda_\mu x^\mu$ 构成，这些和取遍非负整数序列 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$，其中除有限多个以外的所有项都等于零，并且其中 $x^\mu=\prod_{i=1}^{\infty}x^{\mu_i}$ 和 $\lambda_\mu\in\mathbf{Z}$。还要注意，由于来自 (E.4) 的 K-子模 $B_{\mathcal{F}}$ 与 B 重合，场-态同态 $fs:\mathrm{Fld}(B)\to B$ 是双射。因此，根据引理 2.4.4(i)，对于任意 K，$B_K=B\hat{\otimes}_{\mathbf{Z}}K$ 是一个可容许顶点 K-代数，对于该代数，场-态同态 $fs:\mathrm{Fld}(B_K)\to B_K$ 是等距同构。

有时，在文献中，自由玻色子顶点代数会以略有不同的形式呈现。具体来说，设 $B^t=\mathbf{Z}[y_1,y_2\ldots]$ 是一个类似的多项式环，并设 $|0\rangle=1$, $T=\sum_{i=2}^{\infty}iy_i\frac{\partial}{\partial y_{i-1}}$：$B\to B$，以及 $\mathcal{F}^t=\{b(z)\}$（对 $b(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}b_{(n)}z^{-n-1}$），定义为 $b_{(n)}=\frac{\partial}{\partial y_n}$（对 $n>0$）、$b_{(n)}=-ny_{-n}$（对 $n<0$），以及$b_{(0)}=0$。注意，这些数据具有 §2.4 中相同的性质 (E.1)-(E.4)，因此，根据定理 2.4.1，它们在 B^t 上给出一个可容许顶点 Z-代数结构。但在这种情况下，场-态同态 $fs:\mathrm{Fld}(B^t)\to B^t$ 不是满射。存在一个顶点 Z-代数同态 $B\to B^t:\ x_i\mapsto iy_i$，与 Q 张量积后成为同构。

无论如何，根据推论 2.4.2，对于任意的 K，B_K^t 都是一个顶点 K-代数。根据引理 2.4.4(ii)，如果 Z 在 K 中的像上的赋值是平凡的，那么 B_K^t 是可容许的。现在假设赋值 $|\ |$ 在 Z 于 K 中的像上是 p-进的。我们断言，在这种情况下，B_K^t 不是可容许的。事实上，对于 $n>0$ 有 $||b_{(n)}||=1$，并且对于 $n<0$有 $||b_{(n)}||=|n|$。空间 Fld(B_K^t)还包含所有$m\geq 1$对应的场 $\partial_z^{(m)}b(z)$。有

$$\partial_z^{(m)}b(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^m\binom{m+n}{m}b_{(n)}z^{-m-n-1}$$

因此，$fs(\partial^{(m)}b(z))=b_{(-m-1)}|0\rangle=(m+1)y_{m+1}$。后一个元素的范数等于 $|m+1|$。考虑 $m=p^k-1$ with$k\geq 1$时的上述元素。对于 m 的这一取值，有 $||fs(\partial_z^{(m)}b(z))||=|p|^k$。另一方面，上述和中 $n=p$ 的二项式系数等于 $\binom{m+p}{p}$，因此，

它不可被 p 整除。由于 $||b_{(p)}|| = 1$，这意味着 $||\partial_z^{(m)} b(z)|| = 1$。由于$|p|^k \to 0$ as $k \to \infty$，我们看到算子 fs 不可容许，因此顶点 K-代数 B_K^t 不可容许。

自由费米子顶点 K-代数

为简化论述，我们一直考虑具有平凡宇称 $p = \overline{0}$ 的态空间。这一讨论很容易推广到超空间。具体而言，$V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$，其中 $V_{\overline{j}}$ 对于 $\overline{j} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 K-模，而宇称 p 由 $p(v) = \overline{j}$ 定义，其中 $v \in V_{\overline{j}}$。在顶点代数定义中，假设 $|0\rangle \in V_{\overline{0}}$、$TV_{\overline{j}} \subset V_{\overline{j}}$，并且对易子按“超”意义理解。自由费米子代数是此类对象中最重要的例子。

令 $F = \mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ 为 Z 上关于 ξ_1、ξ_2、.....的格拉斯曼超代数，其中 $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$、$\xi_i^2 = 0$，且 $p(\xi_i) = \overline{1}$。Z 和 F 均赋予平凡范数。再令 $|0\rangle = 1$ 和 $T = \sum_{i=1}^{\infty} i\xi_{i+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$，其中 $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ 是奇导子（即，$\frac{\partial}{\partial \xi_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} g + (-1)^{p(f)} f \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$），满足 $\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{i,\, j}$。最后，令 $\mathcal{F} = \{\varphi(z)\}$ 对于 $\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{(n)} z^{-n-1}$，其定义为：当 $n \geq 0$ 时为 $\varphi_{(n)} = \frac{\partial}{\partial \xi_{n+1}}$，当 $n < 0$ 时为 $\varphi_{(n)} = \xi_{-n}$。这些数据具有 §2.4 中的性质 (E.1)-(E.4)，因此根据定理 2.4.1，它们在 F 上给出了一个可容许顶点 Z-代数结构。注意，F 是由有限和 $\sum_\nu a_\nu \xi^\nu$ 组成的自由阿贝尔群，这些有限和取遍 $\nu = \{\nu_1 < \ldots < \nu_m\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$ 的有限子集，并且其中 $\alpha_\nu \in \mathbb{Z}$、$\xi^\nu = \xi_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{\nu_m}$ 和 $\xi^\emptyset = 1$。还要注意，在此情形下，场-态同态 fs 是一个双射。因此，根据引理 2.4.4(i)，对于任意 K，F_K 是一个可容许顶点 K-代数，其中场-态同态 $fs : \mathrm{Fld}(F_K) \to F_K$ 是等距同构。

Universal Virasoro vertex K-algebra

Virasoro 代数是环 $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$，（即 Z 对 2 的幂作局部化所得的环）上的李代数 Vir，其自由生成元为 L_n，其中 $n \in \mathbb{Z}$，且 C 满足以下关系

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n} \frac{m^3 - m}{12} C, \ [C, L_m] = 0 \text{ for all } m, n \in \mathbf{Z} \ .$$

（ R 和 Vir 都赋予平凡范数。）令 $L_{(n)} = L_{n-1}$，考虑形式分布 $L(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_{(n)} z^{-n-1}$。上述关系可写成以下等价形式

$$[L(z), L(w)] = \partial_w L(w) \delta(z-w) + 2L(w) \partial_w \delta(z-w) + \frac{C}{2} \partial^{(3)} \delta(z-w) \ .$$

由此可得 $(z-w)^4 [L(z)\ L(w)] = 0$，因此 $L(z)$ 与自身互局部。$\mathcal{F} = \{L(z)\ C\}$ 显然满足性质（L.1）。若 $T = \mathrm{ad}(L_{-1})$，则 $T(L_{(n)}) = [L_{-1}, L_{n-1}] = -nL_{(n-1)}$，因此 $T(L(z)) = \partial_z L(z)$，即性质（L.2）成立。上述等式意味着 $L(z)_{(0)} L(z) = \partial_z L(z)$、$L(z)_{(1)} L(z) = 2L(z)$、$L(z)_{(3)} L(z) = \frac{C}{2}$，且对其他所有$i$值，$L(z)_{(i)} L(z) = 0$。这意味着性质（ L.3 ）也成立。因此，根据推论 2.5.2，我们得到一个顶点 R-代数 $\mathrm{VIR} = V(\mathrm{Vir}\ \{L(z)\ C\})$，称为普适 Virasoro 顶点代数。

注意，Vir 的湮灭子代数是 $\mathrm{Vir}_- = \oplus_{n \geq -1} RL_n$。由对易关系可知，VIR 是一个自由的 R-模，由有限和 $\sum_{m,\mu} \lambda_{m,\mu} C^m L^\mu$ 构成，其中取遍非负整数序列

$(m,\mu) = (m,\mu_1,\mu_2,\ldots)$，其中除有限多个外均为零，并且$L^\mu = \prod_{i=1}^{\infty} L_{-i-1}^{\mu_i}$ 和 $\lambda_{m,\mu} \in R$。另请注意，场-态同态$fs : \mathrm{Fld(VIR)} \to \mathrm{VIR}$ 是一个双射。因此，根据引理 2.4.4，对于任何使 2 可逆的 K，VIR_K 是一个可容许的顶点 K- 代数，其场 - 态同态 $\mathrm{Fld}(\mathrm{VIR}_K) \to \mathrm{VIR}_K$ 是一个等距同构。注意，

$$\mathrm{VIR}_K = \{f = \sum \lambda_{m,\mu} C^m L^\mu \big| \lambda_{m,\mu} \in K \text{ and } ||\lambda_{m,\mu}|| \to 0 \text{ as } m + \langle\mu\rangle \to \infty\} ,$$

其中求和遍历如上所述的 (m,μ) 以及 $\langle\mu\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} i\mu_i$。$\mathrm{VIR}_K$ 上的巴拿赫范数定义为 $||f|| = \max_\mu\{|\lambda_\mu|\}$。

引理 2.6.1。 (i) 若 c 满足 $|c| \le 1$，则 $(C-c)\mathrm{VIR}_K$ 是 VIR_K 的非平凡理想，而商 $\mathrm{VIR}_K^c = \mathrm{VIR}_K/(C-c)\mathrm{VIR}_K$ 是一个可容许的顶点 K-代数，其场-态同态 $fs : \mathrm{Fld}(\mathrm{VIR}_K^c) \to \mathrm{VIR}_K^c$ 是双射；

(ii) If c is invertible in K and $|c| > 1$, then $(C-c)\mathrm{VIR}_K = \mathrm{VIR}_K$;

证明。 (i) 考虑 VIR_K 的巴拿赫子空间

$$W = \{f = \sum_\mu \lambda_\mu L^\nu \big| \lambda_\mu \in K \text{ and } ||\lambda_\mu|| \to 0 \text{ as } \langle\mu\rangle \to \infty\} ,$$

其中求和遍历如上所述的非负整数序列 $\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots)$，并且 $||f|| = \max_\mu\{||\lambda_\mu||\}$。于是存在一个典范的等距同构 $\mathrm{VIR}_K \xrightarrow{\sim} W\{C\}$，我们可以用 $W\{C\}$ 代替 VIR_K。在 $W\{C\}$ 上乘以 $C-c$，等于等距自同构 $W\{C\} \to W\{C\}$ 与乘以 C 的复合；其中前者在 W 上恒等，并将 C 变为 $C-c$。这就证明了该断言。

(ii) 如果 c 可逆且 $|c| > 1$，则级数 $1 + \frac{C}{c} + \frac{C^2}{c^2} + \ldots$ 属于 $K\{C\}$，并且其与 $1 - \frac{C}{c}$ 的乘积等于一。由于 $K\{C\} \subset \mathrm{VIR}_K$，结论得证。□

代数 VIR_K^c 称为中心荷为 c 的通用 Virasoro 顶点 K-代数。

Universal affine vertex K-algebra

设 $\mathfrak{g}$ 是一个李 R-代数，在 $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上自由且秩有限，其中秩为整数 $N \ge 1$，并假设 $\mathfrak{g}$ 带有非退化对称的 R-双线性型$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to R : (a,b) \mapsto (a|b)$。后者产生相应的 Kac-Moody 仿射化 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] + R\mathrm{K}$，其定义关系如下

$$[at^m, bt^n] = [a,b]t^{m+n} + m\delta_{m,-n}(a|b)\mathrm{K},\ [\mathrm{K}, at^m] = 0$$

对于所有 $a,b \in \mathfrak{g}$ 和 $m,n \in \mathbb{Z}$。对每个 $a \in \mathfrak{g}$，考虑形式分布$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (at^n) z^{-n-1}$。那么，上述关系可以写成等价形式

$$[a(z), b(w)] = [a,b](w)\delta(z-w) + (a|b)\partial_w\delta(z-w)\mathrm{K},\ [\mathrm{K}, a(z)] = 0 .$$

由此可得 $(z-w)^2[a(z)\ b(w)] = 0$，因此，$\mathcal{F} = \{a(z)\}_{a\in\mathfrak{g}} \cup \{\mathrm{K}\}$ 是一组两两局部的形式分布。$\mathcal{F}$ 的性质（L.1）显然成立。由于 $-\partial_t(a(z)) = \partial_z a(z)$，$T = -\partial_t$ 的性质（L.2）成立。上述等式意味着 $a(z)_{(0)}b(z) = [a,b](z)$，$a(z)_{(1)}b(z) = (a|b)\mathrm{K}$，并且对于 $i \ge 2$，$a(z)_{(i)}b(z) = 0$。这意味着性质（L.3）也成立。因此，根据推论 2.5.2，我们得到一个顶点 R-代数 $V(\mathfrak{g},\mathcal{F})$，称为万有仿射顶点

代数，该代数与对子 $(\mathfrak{g}, (.|.))$ 相关联。注意，场-态同态 $\mathrm{Fld}(V(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})) \to V(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$ 是一个双射。

$\widehat{\mathfrak{g}}$的湮灭子代数是 $\widehat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{g}[t]$。取 $\mathfrak{g}$ 在R 上的一组基 $\{e_1, \dots, e_p\}$，并对每个 $1 \leq i \leq p$和 $n \geq 1$，令$x_{i,\ n} = e_i t^{-n} \in \widehat{\mathfrak{g}}$。那么 $V(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$是一个自由的 R-模，并且作为 R-模，它同构于多项式环$R[\mathrm{K} x_{i,\ n}]_{1 \leq i \leq p,\ n \geq 1}$。后者在 R 上的一组基由单项式 $\mathrm{K}^m \cdot x^\mu$构成，其中 $m \geq 0$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$，每个 μ_i 都是一个由非负整数组成的无限序列$(\mu_{i,\ 1}, \mu_{i,\ 2}, \dots)$，且其中只有有限多个不等于零，并且 $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot x_p^{\mu_p}$满足 $x_i^{\mu_i} = \prod_{n=1}^{\infty} x^{\mu_{i,\ i\ n}}{}^{n}$，。

现在假设 N 在交换巴拿赫环 K中可逆。由引理 2.4.4(i)， $V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F}) = V(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F}) \widehat{\otimes}_R K$ 是一个可容许的顶点 K-代数，称为与 $(\mathfrak{g}, (\ |\ ))$ 相关的万有仿射顶点 K-代数。于是有

$$V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F}) = \left\{ f = \sum \lambda_{m,\mu} \mathrm{K}^m x^\mu \middle| \lambda_{m,\mu} \in K \text{ and } \lambda_{m,\mu} \to 0 \text{ as } m + \langle \mu \rangle \to \infty \right\},$$

其中 m 和 μ 如上所述，且 $\langle \mu \rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} i n \mu_{i,\ n}$。下述结论可用与引理 2.6.1 相同的方法验证。

引理 2.6.2。(i) 若 $|k| \leq 1$，则 $(\mathrm{K} - k) V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$ 是 $V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$ 的一个非平凡闭子空间，且商 $V_K^k(\widehat{\mathfrak{g}}) = V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F}) / (\mathrm{K} - k) V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$ 是一个可容许的顶点 K-代数，其场-态同态 $fs\colon \mathrm{Fld}(V_K^k(\widehat{\mathfrak{g}})) \to V_K^k(\widehat{\mathfrak{g}})$ 是双射；

（ii）若 k在 K 和 $|k| > 1$中可逆，则$(\mathrm{K} - k) V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F}) = V_K(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathcal{F})$。 □

代数 $V_K^k(\widehat{\mathfrak{g}})$ 称为 level k 的万有仿射顶点 K-代数。

例如，假设 $K = R = \mathbb{Z}$ 和 $\mathfrak{g}$ 是交换李代数 $\mathbb{Z}$，并配备双线性型 $(a|b) = ab$。那么 $V_K^1(\widehat{\mathfrak{g}})$ 与自由玻色顶点 K-代数 B_K 典范同构。

在上述所有例子中，所涉及的李代数都自然地具有 $\mathbb{Z}$-分次。也就是说，Virasoro 代数（分别为仿射李代数）的分次由 $\deg L_n = n$ （分别由 $\deg a t^n = n$ for $a \in \mathfrak{g}$）给出。这些分次在相应的普适顶点 K-代数上诱导出 $\mathbb{Z}$-分次。由于奇异向量在这些分次下的最高分量是一个奇异向量，因此这些顶点 K-代数对最大分次理想取商后是一个简单顶点 K-代数。相同的论证表明，自由玻色子和费米子顶点 K-代数是简单的。

2.7. 顶点 K-代数与李共形 K-代数。对于一个巴拿赫 K-模和一个正实数 r，记 $V\{r^{-1}\lambda\}$ 为形式幂级数 $v = \sum_{n=0} \lambda^n v_n$ 构成的巴拿赫 K-模，其中 $v_n \in V$ 和 $||a_n|| r^n \to 0$ 作为$n \to \infty$，并赋予巴拿赫范数 $||v|| = \max_n ||v_n||$。注意，存在一个等距同构 $K\{r^{-1}\lambda\} \widehat{\otimes}_K V \xrightarrow{\sim} V\{r^{-1}\lambda\}$。若 K 是一个非阿基米德域，则 $K\{r^{-1}\lambda\}$ 是仿射直线在 K 上的半径为 r 、以零为中心的闭圆盘上解析函数构成的函数代数。

定义 2.7.1. 半径为 r 的李共形 K-代数是一个巴拿赫 K-模L，其配备有一个有界的 K-线性端同态 $T: L \to L$ 以及一个有界的K-线性同态（λ-括号）

$$L \widehat{\otimes}_K L \to L\{r^{-1}\lambda\} : a \otimes b \mapsto [a_\lambda b]$$

具有以下性质：

(L.1) $(sesquilinearity)$ $[Ta_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b]$, $[a_\lambda Tb] = (\lambda + T) a_\lambda b]$;

(L.2) (*skew-symmetry*) $[b_\lambda a] = -[a_{-\lambda-T}b]$;
(L.3) (*Jacobi identity*) $[a_\lambda[b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c] + [b_\mu[a_\lambda c]]$.

(L.2) 中的右端应理解如下：若 $[a_\lambda b] = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x_n$，则 $[a_{-\lambda-T}b] = \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda-T)^n x_n$。

现在，假设我们的交换巴拿赫环 K 包含有理数域 Q。那么，Q 上由 K 上的赋值诱导出的赋值，要么是关于素数 p 的 p-进赋值，要么是平凡赋值。在前一种情况下，我们令 $r_p = |p|^{\frac{1}{p-1}}$; 在后一种情况下，我们令 $p = 1$ 并令 $r_1 = 1$。在以下陈述中， V 是一个顶点 K-代数。

命题 2.7.2。场空间 Fld(V) 关于导子 ∂_z 和 λ-括号，是一个半径为 r_p 的李共形 K-代数，其定义为

$$[\varphi(w)_\lambda\psi(w)] = \mathrm{Res}_z(e^{\lambda(z-w)}[\varphi(z),\psi(w)]) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(\varphi(w)_{(n)}\psi(w)) \ .$$

证明。步骤 1。第二个等式成立。事实上，右端等于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}!$ Res$_z$((($z-w$)^n[φ(z) ψ(w)]]，并且根据引理1.6.4(i)中的定义，后者等于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}!$ (φ(z)$_{(n)}\psi$(z))。

步骤 2. 上述等式右边的和属于 Fld(V)$\{r_p^{-1}\lambda\}$。事实上，如果 $p = 1$，那么 $|n!| = 1$，并且由于场 φ(z) 和场 ψ(z) 是互局部的，所以 $||\varphi(z)_{(n)}\psi(z)|| \to 0$ as $n \to \infty$。这意味着 λ^n 处的系数在 n 趋于无穷时趋于零。假设 p 是素数。那么整数 n! 中 p 的次数至多为 $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \ldots \leq \frac{n}{p-1}$。由此可得 $|n!| \geq |p|^{\frac{n}{p-1}}$，因此 $\frac{r_p^n}{|n!|} \leq 1$。由于场 φ(z) 和场 ψ(z) 是互局部的，结论得证。

步骤 3。等式 (L.1) 成立。事实上，我们有

$$[\partial_w\varphi(w)_\lambda\psi(w)] = e^{-\lambda w}\mathrm{Res}_z([e^{\lambda z}\partial_z\varphi(z),\psi(w)]) \ .$$

由于 $e^{\lambda z}\partial_z\varphi$($z$) $= \partial_z$($e^{\lambda z}\varphi$(z)) $- \lambda e^{\lambda z}\varphi$($z$) 且 Res$_z$($\partial_z$($e^{\lambda z}\varphi$($z$))) $= 0$，第一个等式成立。此外，有

$$[\varphi(w)_\lambda\partial_w\psi(w)] = \mathrm{Res}_z(e^{\lambda z}[\varphi(z),e^{-\lambda w}\partial_w\psi(w)]) \ .$$

由于 $e^{-\lambda w}\partial_w\psi$($w$) $= \lambda e^{-\lambda w}\psi$($w$) $+ \partial_w$($e^{-\lambda w}\psi$(w))，第二个等式得证。

步骤 4。等式 (L.2) 成立。事实上， [φ(z)$_{-\lambda-\partial_z}\psi$($z$)] 等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda-\partial_z)^n}{n!}(\varphi(z)_{(n)}\psi(z)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\lambda^i\partial_z^{(n-i)}(\varphi(z)_{(n)}\psi(z))$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+i}\partial_z^{(m)}(\varphi(z)_{(m+i)}\psi(z)) \ .$$

根据推论 2.2.8(ii)，内层求和等于 $-\psi$(z)$^{(i)}\varphi$(z)，因此，整个表达式等于 $-[\psi(z)_\lambda\varphi(z)]$。

步骤 5. 等式 (L.3) 成立。事实上，由步骤 1 可知，(L.3) 的左边等于

$$[\varphi(z)_\lambda[\psi(z)_\mu\chi(z)]] = \mathrm{Res}_z\mathrm{Res}_y(e^{\lambda(z-w)+\mu(y-w)}[\varphi(z),[\psi(y),\chi(w)]]) \ .$$

根据经典雅可比恒等式，有

$$[\varphi(z),[\psi(y),\chi(w)]] = [[\varphi(z),\psi(y)],\chi(w)] + [\psi(y),\varphi(z),\chi(w)]] \ .$$

因此，(l.3) 的左边是以下各项之和

$$\mathrm{Res}_y(e^{(\lambda+\mu)(y-w)}[\mathrm{Res}_z(e^{\lambda(z-y)}[\varphi(z),\psi(y)]),\chi(w)])\ ,$$

它等于 $[[\varphi(z)_\lambda\psi(z)]_{\lambda+\mu}\chi(z)]$, 以及

$$\mathrm{Res}_y(e^{\mu(y-w)}[\psi(y),\mathrm{Res}_z(e^{\lambda(z-w)}[\varphi(z),\chi(w)])])\ ,$$

它等于 $[\psi(z)_\mu[\varphi(z)_\lambda\chi(z)]]$。所需的等式由此得出。 □

推论 2.7.3. 在 V 可容许时，子空间 V' 是一个 Lie 共形 K-代数，其半径为 r_p，关于平移算子 T 和 λ-括号定义如下:

$$[a_\lambda b]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(a_{(n)}b)\ .$$

证明。由于 V 可容许，空间-场同态 $fs:\mathrm{Fld}(V)\to V'$ 是 Banach K-模的同构。该结论由命题 2.7.2 和引理 2.2.2 得出。□

例 2.7.4. 设 V 是一个交换顶点 K-代数。那么 $\mathrm{Fld}(V)\subset V[[z]]$, 并且由于对所有 $\varphi(z)\ \psi(z)\in V[[z]]$ 和 $n\geq 0,\ \ \varphi(z)_{(n)}\psi(z)=0$，可知相应 Lie 共形 K- 代数上的 λ- 括号为零。

References

[BPZ] 别拉文，A. A.；波利亚科夫，A. M.；扎莫洛奇科夫，A. B.： *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory* **241** 1984 2, 333 380 ，《核物理 B》（），第期。[B] 别尔科维奇，V. G.： *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*，《数学调查与专著》第33卷，美国数学学会，1990年。[Bo] 博赫兹，R.： *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*，《美国国家科学院院刊》83（1986），第10期，3068–3071页。[FM] 弗朗，C.；梅森，G.： *p-adic vertex operator algebras*，《数论研究》9（2023），第2期，论文编号27。

[ ] *Towards deformed chiral algebras* 9706023 FR 弗兰克尔，[ ] $\mathcal{W}_{1+\infty}$ *and* $\mathcal{W}$ gl_N *with central charge N* E.；列谢季欣，N.：，arXiv:q-alg/ FKRW 弗兰克尔，E.；Kac，V.；拉杜尔，A.；王，W.：（），《数学物理通讯》170（1995），第2期，337–357页。[G] 戈达德，P.： *Meromorphic conformal field theory. Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)* 556 587, 7, ，-《高级数学物理丛书》，世界科学出版社，蒂内克，新泽西州，1989年。[K] Kac，V. G.： *Vertex algebras for beginners. Second edition*，《大学讲座丛书》第10卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年。[W] 魏特曼，A. S.： *Quantum field theory in terms of vacuum expectation values*，《物理评论》（第2辑）101（1956），860–866页。