arXiv:2304.09701v1 [math.CO] 19 Apr 2023

固定直径图的支配集问题的复杂性

Valentin Bouquet† François Delbot‡ Christophe Picouleau*† Stéphane Rovedakis†

2023年4月20日

摘要

图 $G=(V,\ E)$ 的顶点集合 $S\subseteq V$ 是一个支配集，当且仅当每个顶点都有一个邻点属于 S 或者自身属于 S。 Dominating Set 是这样一个判定问题：给定一个图 G 和一个整数 $k\geq 1$，判断 G 是否存在大小至多为 k 的支配集。众所周知，即使对于无爪图，这个问题也是 NP 完全的。我们针对直径为 d 的无爪图类，给出了 Dominating Set 的复杂性二分结果。我们证明，对于每个固定的 $d\geq 3$ ，该问题都是 NP 完全的；而对于 $d\leq 2$，该问题可在多项式时间内求解。为证明 $d=2$ 的情形，我们证明 Minimum Maximal Matching 可在 $2K_2$-自由图上于多项式时间内求解。

关键词：最小支配集、最小极大匹配、直径、无爪图、线图、 $2K_2$-自由、复杂性。

1 引言

我们所讨论的图均为有限的、无向的、简单且无自环的图。关于图论的定义和符号表示，以及计算复杂性的相关定义和符号表示，读者可分别参阅 [1] 和 [5]。

给定一个图 $G=(V,E)$，如果一个集合 $S\subseteq V$ 满足对于每个$v\in V\setminus S$， $N(v)\cap S\neq\emptyset$，则称其为一个支配集。对于 G 的一个支配集 S，我们称 S 支配 G。G 中支配集的最小基数记为 $\gamma(G)$，称为支配数。满足 $|S|=\gamma(G)$ 的支配集 S 称为最小支配集。按照 [10]，这样的集合称为 G 的一个 γ-集。

与最小支配集相关的判定问题定义如下：

Dominating Set实例：一个图 $G=(V,\ E)$ 和一个整数 $k\geq 1$。问题： $\gamma(G)\leq k$ 是吗?

*通讯作者：chp@cnam.fr

†法国国立工艺学院，CEDRIC 实验室，巴黎（法国）。电子邮箱：valentin.bouquet@lecnam.net,chp@cnam.fr,stephane.rovedakis@cnam.fr

‡索邦大学，巴黎第六大学计算机科学实验室（LIP6），巴黎（法国）。电子邮箱：francois.delbot@lip6.fr

我们的目标是确定计算固定直径图的 γ-集或支配数的计算复杂性。本文组织如下。在下一节中，我们给出一些定义和记号。第 3 节专门讨论无星图；本节包含我们关于线图以及 $2K_2$-无图中的最小最大匹配的结果。第 4 节讨论排除某些固定长度圈的图。我们在第 5 节总结结果并给出复杂性二分。

2 定义与记号

给定一个图 $G = (V, E)$，其直径 $diam(G)$ 是所有顶点对的最短路径长度的最大值。对于顶点 $v \in V$， $N(v)$ 表示其开邻域，即 v 的邻点集合； $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ 其闭邻域。对于子集 $S \subseteq V$，记 $G[S]$ 为由 S 诱导的 G 的诱导子图，其顶点集为 S，边集为 $\{uv \in E \mid u, v \in S\}$。对于顶点 $v \in V$，记 $G - v = G[V \setminus \{v\}]$；对于子集 $V' \subseteq V$，记 $G - V' = G[V \setminus V']$。如果任意两条边都不共享端点，则集合 $M \subseteq E$ 是一个匹配。当不存在边 $e \in E \setminus M$ 使得 $M \cup \{e\}$ 为匹配时，匹配 M 是极大匹配。最小极大匹配是满足 $|M|$ 最小的极大匹配。如果任意两个不同的顶点 u、$v \in S$ 都不相邻，则集合 $S \subseteq V$ 称为稳定集或独立集。图 G 中独立集的最大基数记为 $\alpha(G)$。如果 S 外的每个顶点都与 S 中的某个顶点相邻，则稳定集 S 是极大的。如果任意两个不同的顶点 u、$v \in S$ 都相邻，则集合 $S \subseteq V$ 称为团。当 $N(v)$ 是一个团时，顶点 $v \in V$ 称为单纯顶点。如果 V 是一个团，则 G 是一个完全图。我们用 K_p、$p \geq 1$ 表示具有 p 个顶点的团或完全图； $k.K_p$ 是 k 个团的不交并。二部团 $K_{p,q}$ 是这样的图：其顶点集被划分为两个稳定集 A 和 B，满足 $|A| = p$、$|B| = q$，并且对于任意一对 $a \in A$、$b \in B$，边 ab 都存在。星是 $K_{1,p}$，爪是 $K_{1,3}$。具有 p 个顶点的诱导圈记为 C_p。当 $p \geq 4$ 时， C_p 是一个洞。 G 的围长记为 $g(G)$，其定义为一个（诱导）圈的最小长度。对于固定的图 H，当 G 包含 H 作为诱导子图时，我们记 $H \subseteq_i G$，并称 G 为 H-free，如果 G 没有与 H 同构的诱导子图。对于图的集合 $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_p\}$，如果没有与 H_i、$1 \leq i \leq p$ 同构的诱导子图，则 G 是 $(H_1, \ldots, H_p)$-free 或 $\mathcal{H}$-free。

本文研究的问题涉及直径固定为 $G = (V, E)$ 的图 $diam(G) = k$。注意，若图满足 $diam(G) = 1$，则它是一个团；若图满足 $diam(G) = 2$，则对于任意一对顶点 u, v，只要 $uv \notin E$，就存在一个顶点 $w \neq u, v$，使得 $w \in N(u) \cap N(v)$。

3 $K_{1,t}$-自由图

本节关注固定禁用星的直径和大小如何影响 Dominating Set 的计算复杂性。Yannakakis 和 Gavril [12] 已证明，对于无爪图， Dominating Set 是NP完全的。因此，我们首先关注以下问题：对于哪个值的 $d \geq 2$

对于直径固定为 d 的无爪图， Dominating Set 是否仍然是NP完全的? 作为初步回答，我们证明，对于直径为 $d \geq 3$ 的无爪图， Dominating Set 是NP完全的。接下来需要考虑的是直径为 2 的无爪图。为此，我们首先关注作为无爪图子类的线图。对于线图 $L(G)$，我们知道， Domi-nating Set 的复杂性与在 G 中计算最小极大匹配的复杂性密切相关。此外，Martin 等人 [11] 已证明，如果 $L(G)$ 是直径为 2 的线图，那么 G 是 $2K_2$-自由的。因此，我们证明可以在 $2K_2$-自由图中用多项式时间计算最小极大匹配。随后，我们利用文献中的已知结果证明，对于其他直径为 2 的无爪图， Dominating Set 是多项式时间可解的。在厘清直径和爪的所有可能情形后，我们回答以下问题：对于哪些星图， Dominating Set 在直径为 2 的无星图中仍然是多项式时间可解的? 作为回答，我们证明，对于直径为 2 的 $K_{1,\,4}$-自由图， Dominating Set 是NP完全的。

3.1 直径为 $d \geq 3$ 的无爪图

以下结果的证明主要讨论直径为 3 的无爪图。我们将在证明的最后说明如何调整针对无爪图的构造，以适用于直径更大的情形。

引理 3.1 对于任意整数 $d \geq 3$, Dominating Set 在直径为 d 的无爪图中是NP完全的。

证明：我们先讨论 $d = 3$ 的情形。我们给出一个多项式变换，将 Dominating Set 归约到三次图 [8]，而该问题是 NP 完全的。设 $G = (V, E)$ 是一个三次图，且其顶点数为 n。我们据此构造一个直径为 3 的无爪图 $G' = (V', E')$。如图1所示，我们将每个顶点 v 替换为子图 G_v。每个 G_v 中三个三角形里的所有顶点（图1中的灰色顶点）都与顶点 s 相连，并且彼此相连，形成一个含有 $3n + 1$ 个顶点的团 K。最后，将顶点 t 与 s 相连。图2是 G' 的简化表示。

我们证明 G' 是无爪的。从图2可以看出， s 和 t 都不是诱导爪的中心。对于 $3n$ 个灰色顶点中的每个顶点 u，其邻域可以划分为团 $K \setminus \{u\}$ 和子图 G_v内部由三个白色顶点构成的团。因此， K 中没有顶点是诱导爪的中心。剩下需要考虑的是每个子图 G_v中的白色顶点。由于 G_v 的六个内部顶点与 $G' - G_v$中的顶点不连通，因此它们不是诱导爪的中心。 G_v 的三个外部顶点各自恰好与 $G' - G_v$ 中的一个顶点连通。由于它们在 G_v 中的邻域是一个团，因此这些顶点不是诱导爪的中心。因此， G' 是无爪的。

我们证明 G' 的直径为 3。对于每个子图 G_v，其中的每个顶点都与 K的一个灰色顶点连通。由于 $s \in K$ 顶点 t 与任意灰色顶点之间的距离为 2，因此它与任意 G_v的每个白色顶点之间的距离为 3。任意 $3n$灰色顶点到这些子图中每个白色顶点的距离至多为 2

G_v 而对于任意一对白色顶点，它们之间的距离至多为 3。因此， G' 的直径为 3。

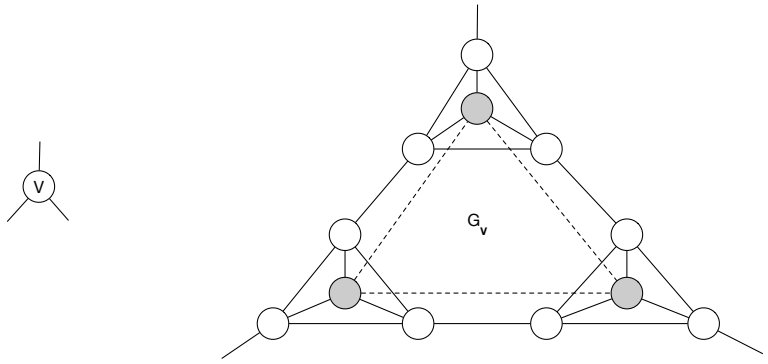


图1：与顶点 v 关联的构件。灰色顶点属于团K，其对应的边用虚线表示。

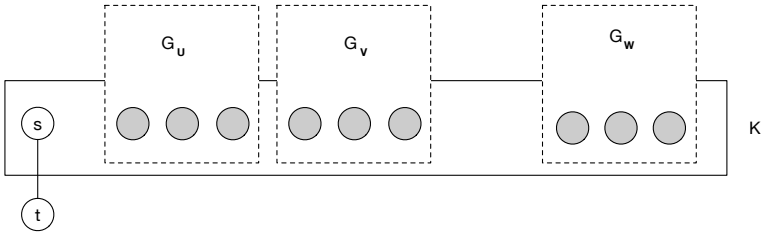
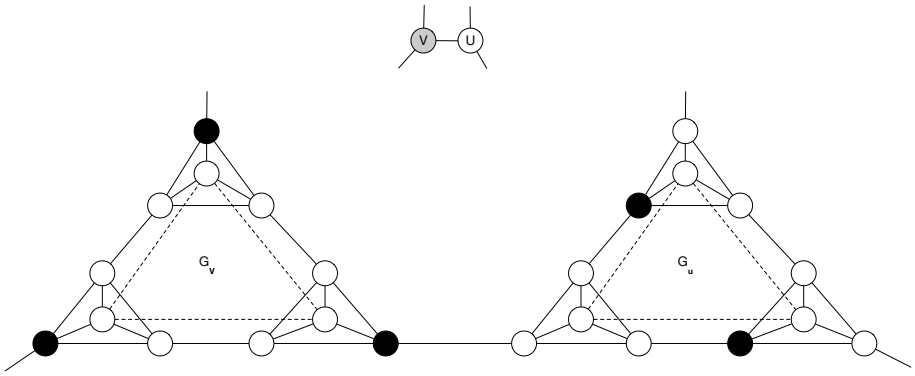


图2： G'的轮廓。

令 $k' = 2n + k + 1$。首先，我们证明，如果 G 具有一个大小不超过 k 的支配集，那么 G' 具有一个大小不超过 k' 的支配集。给定 G 的一个支配集 D，我们构造 G' 的一个支配集 D'。由于 t 是一个叶节点，我们可以将 s 加入 G'。对于每个顶点 $v \in D$，如图3左侧所示，我们将其关联子图 G_v 的三个外部顶点加入 D'。注意，这三个顶点支配 G_v 以及 N 的三个顶点（$V'(G_v)$）$\setminus V'(G_v)$。因此，还需要支配与顶点 $u \in V \setminus D$ 关联的每个 G' 的所有内部顶点 G_u。为此，如图3右侧所示，我们将 G_v 的两个内部顶点加入。因此，如果 G 具有一个大小为 k 的支配集，那么 G' 具有一个大小为 k' 的支配集。

反之，设 D' 是 G' 的一个大小小于或等于 $k' = 2n + k + 1$ 的支配集。由于 t 是一个叶节点，我们可以假设 $s \in D'$。对于每个子图 G_v，其六个内部顶点诱导出一个 C_6，因此 $|V'(G_v) \cap D'| \geq 2$。三个外部顶点支配 G_v（见图3左侧）。因此，$2 \leq |V'(G_v) \cap D'| \leq 3$。所以至多有 k 个子图 G_v 满足 $|V'(G_v) \cap D'| = 3$，而对于其他子图，$|V'(G_v) \cap D'| = 2$。当 $|V'(G_v) \cap D'| = 2$ 时，三个外部顶点中的一个不被 $V'(G_v) \cap D'$ 中的顶点支配（见图3右侧），因此它由其在 G_u，$u \neq v$，中的邻点支配，其中 uv 是 G 的一条边。因此，当 G_v 包含 D' 的三个顶点时取 $v \in D$，否则取 $v \notin D$，我们得到一个 G 的支配集，其大小至多为 k。



Fi图 3： v 属于 G 的一个支配集，而 u 不属于 G的支配集。

现在设 $d \geq 4$。 G' 的构造如图4所示。取 k' =$2n + k + 1 + \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$ 时，论证与上文相同。□

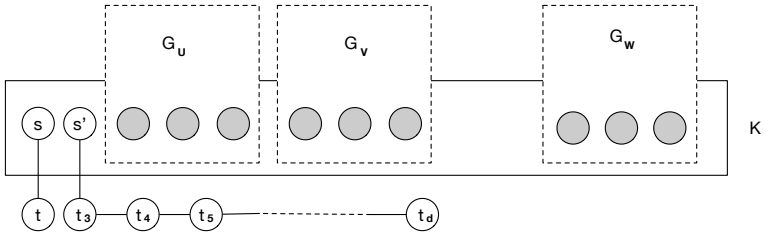


图4： $d \geq 4$的 G' 概要。

3.2 直径为 2 的线图

给定一个图 G， G的线图 记作 $L(G)$，其顶点是 G的边；当且仅当对应的边在 G 中关联时， $L(G)$中的两个顶点相邻。线图类也可以用以下禁用子图列表来定义：

定理 3.2（[2]**第 110 页**）图 G 是线图，当且仅当 G 不含与图 *5* 中九个禁用图同构的诱导子图。

我们用 $\mathcal{F}$ 表示这九个禁用图组成的集合。由于线图可以用一个有限的禁用子图集合 $\mathcal{F}$ 来定义，因此可以在多项式时间内判断一个图是否为线图。下面给出已知最佳线图识别算法之一的计算复杂性。

性质 3.1（**Lehot** [6]）我们可以在 $|E|+O$（$|V|$）中测试给定的图 $G =$ （V, E）是否为线图。

Martin 等人 [11]（引理 11）证明了，线图与$2P_2$-free 图（即 $2K_2$-free 图）密切相关，并具有以下性质：

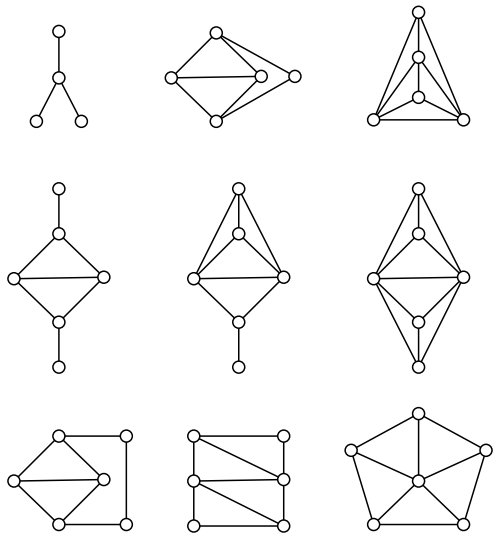


图 5：$\mathcal{F}$ 线图的九个禁用子图集合。

性质 3.2（Martin 等人 [11]）设 G 是一个既不是三角形也不是星的图。那么，$L(G)$ 的直径为 *2*，当且仅当 G是 $2K_2$-*free*。

根据Yannakakis和Gavril [12]，我们知道 G 的最小极大匹配对应于 $L(G)$的最小支配集。

因此，根据性质 3.2，我们可以从在 $2K_2$-free 图中计算最小极大匹配的复杂性，推导出计算直径为 2 的线图的 DominatingSet 的复杂性。Yannakakis和Gavril [12] 已知，计算最小极大匹配是一个 NP完全问题（即使对于三次图也是如此）。我们证明，可以在多项式时间内为 $2K_2$-free 图计算最小极大匹配。

在开始讨论之前，我们需要以下两个结果。第一个结果是著名的霍尔二分图匹配定理。

定理 3.3（Hall定理 [1]）二分图 $G = (X \cup Y, E)$ 存在一个覆盖 X 的所有顶点的匹配，当且仅当

$$|N(S)| \geq |S| \quad for\ every\ S \subseteq X$$

第二个结果来自 Farber [4]，他证明了 C_4-自由图的团数量是多项式级的。

性质 3.3（Farber [4]）如果 $G = (V, E)$ 是一个 C_4-自由图，那么 G 至多有 $\binom{|V|}{2}$ 个团。

由此可知，其补类中的图（即 $2K_2$-自由图）具有多项式数量的极大稳定集。

推论 3.4 如果 $G = (V、E)$ 是一个 $2K_2$-自由图，那么 G 至多有 $\binom{|V|}{2}$ 个稳定集。

在 [3] Dhanalakshmi 等人利用这一最新结果证明了以下性质 .

性质 3.4（Dhanalakshmi 等人 [3]） 如果 $G = (V、E)$ 是一个 $2K_2$-自由图，那么存在一种用于枚举所有极大稳定集的算法，其运行时间为多项式时间。

我们准备证明关于 $2K_2$-free 图的最小极大匹配结果。但为此，我们证明一个更一般的结果，即:

引理 3.5 令 $\mathcal{C}$ 为具有多项式数量极大稳定集且这些极大稳定集可在多项式时间内枚举的图类。

为每个 $G = (V, E) \in \mathcal{C}$ 计算最小极大匹配可以在多项式时间内完成。

证明：我们给出 G 相对于 G 的一个最小极大匹配 M_S 的结构。令 Q_S 为未被 M_S 覆盖的顶点。由于 M_S 是极大的，因此 Q_S 要么为空集，要么是一个稳定集。因此，存在 G 的一个极大稳定集 S，使得 $Q_S \subseteq S$。令 $\mu' \subseteq M_S$ 为 M_S 中一个端点位于 S 中的边，$\mu = M_S \setminus \mu'$ 为 M_S 中剩余的边。令 T（μ）为 $V \setminus S$ 中未被 μ 覆盖的顶点，即 T（μ）$= \{v \in N \setminus S \mid uv \in \mu'\}$。我们断言 T（μ）是一个稳定集。反设不然，则存在一条边 v_1v_2，其中 v_1、$v_2 \in T$（μ）。由于 u_1v_1、$u_2v_2 \in \mu'$，可知 $M =$（$M_S \cup \{v_1v_2\}$）$\setminus \{u_1v_1, u_2v_2\}$ 是一个满足 $|M| < |M_S|$ 的极大匹配，这与假设矛盾。因此，B_S（μ）$= G[T$（μ）$\cup S]$ 是一个二分图。

因此，每个最小极大匹配 $M_S = \mu \cup \mu'$ 都对应于 S 的一个极大稳定集 G，使得 μ 是 $G[V \setminus S]$的一个极大匹配，而 μ' 是 $B_S(\mu)$ 的一个最大匹配，覆盖 $T(\mu)$ 的所有顶点。

构造 M_S 的方法如下。提示 S 一个极大稳定集。计算 μ 在 $G[V \setminus S]$ 中的一个最大匹配。因此，$T(\mu)$ – $V \setminus S$ 中未被 μ 覆盖的顶点集 – 是一个稳定集，并且 $B_S(\mu)$ 是一个二分图。令 $q(S) = |S| - |T(\mu)|$ 且$\Theta(S) = {}^{|V|-q}{}_{(S)\ 2}$。注意，根据最小极大匹配 M_S 的结构，我们有 $|M_S| \leq \Theta(S)$。

如果 $B_S(\mu)$ 具有覆盖所有顶点 $T(\mu)$ 的最大匹配 μ'，那么 $M = \mu \cup \mu'$ 是大小为 $\Theta(S) = |\mu| + |\mu'|$ 的极大匹配。下文中，我们称这样的 (S, μ) 是 公平 的。

我们证明，如果（S，μ）不是公平的，那么存在（S_1，μ_1），使得 $|S_1| > |S|$，且 Θ（S_1）$< \Theta$（S）。假设（S，μ）不是公平的。那么，B_S（μ）没有能够覆盖 T（μ）的所有顶点的匹配。因此，根据定理 3.3，存在 $T' \subseteq T$（μ），使得 $|N$（T'）$| < |T'|$，其中 N（T'）$= \{u \in N$（v）$\cap S \mid v \in T'\}$。取 T'为极大的。令 P 为由 μ 覆盖的顶点集 w 的极大稳定集，使得 N（w）$\cap S \subseteq N$（T'），且 N（w）$\cap T' = \emptyset$。令 $S_1 =$（$S \setminus N$（T'）$) \cup T' \cup P$。那么S_1 是一个极大稳定集，并且

$$\begin{aligned} |S_1| &= |S| + |T'| - |N(T')| + |P| \\ &> |S| \end{aligned}$$

令 μ_1 为 $G[V \setminus S_1]$中的最大匹配。注意， $|T（\mu）| = |V| - |S| - 2|\mu|$。由于 $|\mu_1| \geq |\mu| - |P|$，可知

$$\begin{aligned} |T(\mu_1)| &= |V| - |S_1| - 2|\mu_1| \\ &\leq |V| - |S_1| - 2|\mu| + 2|P| \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} q(S_1) - q(S) &= |S_1| - |T(\mu_1)| - |S| + |T(\mu)| \\ &\geq |S_1| - |V| + |S_1| + 2|\mu| - 2|P| - |S| + |V| - |S| - 2|\mu| \\ &\geq 2(|S_1| - |S| - |P|) \end{aligned}$$

由于 $|S_1| - |S| - |P| = |T'| - |N(T')| > 0$，因此 $q(S_1) > q(S)$。此外，由于 $\Theta(S) = {}^{|V|-q}{}_{(S)\,2}$ 且 $\Theta(S_1) = {}^{|V|-q}{}_{(S_1)\,2}$，因此 $\Theta(S_1) < \Theta(S)$。

我们的算法如下：对于所有极大稳定集 S，我们在 $G[V \setminus S]$中计算 μ 最大匹配。如果(S, μ)是公平的，那么我们就得到一个大小为 $\Theta(S)$的极大匹配；否则，我们对极大稳定集 $S_1 = (S \setminus N(T')) \cup T' \cup P$执行相同操作。由于 $|S_1| > |S|$ 该过程会以一个大小为 $\Theta(S')$的极大匹配 S' 结束 $<\Theta(S)$。取一个大小最小的极大匹配 $\Theta(S)$，我们得到一个最小极大匹配 M_S。

由于 G 极大稳定集的数量是多项式级的，且我们可以在多项式时间内枚举它们，因此我们的算法是多项式时间的。□

由于我们可以为极大稳定集数量为多项式级且可在多项式时间内枚举的图计算最小极大匹配，因此由性质 3.2 可得：

定理 3.6 Dominating Set 直径为 2 的线图可在多项式时间内求解。

3.3 直径为 2 的无爪图

由于线图是无爪图的真子类，因此剩下需要考虑的是不是线图的无爪图。对于直径为 2 的无爪图，我们将使用 Martin 等人的以下结果。[11]

定理 3.7（Martin 等人 [11]） 每个具有不同邻域、没有 W-连接，且 G 直径为 2 的无爪图 $\alpha（G） > 3$以及 $|V（G）| > 13$，都是真圆弧图或线图。

图 G 具有不同邻域，当且仅当不存在一对相邻顶点 u，v使得 $(N(u) \setminus \{v\}) \subseteq (N(v) \setminus \{u\})$，即 $N[u] \subseteq N[v]$。

一个 W-联接 是由两个不相交的非空顶点集组成的有序对（A，B），满足 $|A| + |B| > 2$、A 和 B 均为团，A 与 B既不完全邻接也不完全反邻接，并且 $V（G）$中的每个顶点 $\setminus$（$A \cup B$）要么与 A 完全邻接，要么与其完全反邻接，同时要么与 B完全邻接，要么与其完全反邻接。注意，如果 G 是连通的且包含一个 W-联接，那么对于任意一对 $u \in A$、$v \in B$，$\{u, v\}$ 都是 G 的一个 γ-集，因此 $\gamma（G） \leq 2$。

A 圆弧 图是圆上弧集合的交图。如果存在一个相应的弧模型，使得没有弧包含另一条弧，则称圆弧图是真 的。

为了证明对于直径为 2 的无爪图， Dominating Set可以在多项式时间内求解，我们使用 Hsu 和 Tsai [7] 关于圆弧图的以下结果。

定理 3.8（Hsu 和 Tsai [7]） Dominating Set 可在 O（n）时间内求解圆弧图。

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 3。9 Dominating Set 对于直径为 2 的无爪图是多项式时间可解的。

证明：设 $G = (V, E)$ 是一个直径为 2 的无爪图。我们可以假设 $\gamma(G) \geq 4$，否则可以使用暴力法在 $O(n^5)$ 时间内计算出 G 的最小支配集。因此， G 没有 W-join。由于 $\gamma(G) \leq \alpha(G)$，可知 $\alpha(G) > 3$。此外，我们可以假设 $|V| > 13$，否则可以在 $O(1)$ 中计算出一个 γ-集。

假设存在一对相邻顶点 u, v，使得 $(N(u) \setminus \{v\}) \subseteq (N(v) \setminus \{u\})$。对于 $G - u$ 的每个 γ-集 D，都有 $N(u) \cap D \neq \emptyset$ 于 G。因此， $G - u$ 的一个 γ-集也是 G 的一个 γ-集。此外， $diam(G - u) = diam(G) = 2$。因此，我们可以搜索所有此类顶点对 u, v，并从 G 中删除 u。这可以在 $O(n^3)$ 时间内完成。

因此，我们可以假设 G 具有不同邻域，且没有 W-联接， $\alpha(G) > 3$，并且 $|V(G)| > 13$。根据定理 3.7， G 是真圆弧图或线图。根据性质 3.1，我们可以在多项式时间内检验 G 是否为线图。如果 G 是线图，那么根据定理 3.6，我们可以在多项式时间内计算 G 的一个 γ-集。否则， G 是真圆弧图，根据定理 3.8，我们可以在线性时间内计算 G 的一个 γ-集。□

3.4 $K_{1,4}$-无直径为 2 的图

在上一节中，我们证明了对于直径为 2 的 $K_{1,3}$-无图， Dominating Set 是多项式时间可解的。这里我们将展示，当我们研究 $K_{1,4}$-无图时，情况有所不同。

定理 3。10 Dominating Set 对于$K_{1,4}$-无图且直径为2的问题是NP-完全的。

证明：我们给出一个从 Vertex Cover （见 [5]）出发的多项式变换。给定$I = (G = (V, E), k)$ 的一个实例 Vertex Cover，我们构造一个实例 $I' = (G', \gamma)$，其中 G' 是$K_{1,4}$-自由且直径为 2，并且 $\gamma = k$。

我们首先构造 $G' = (V', E')$。 V' 的顶点被划分为 $V_1, E_1, E_2, S, \{s\}$。我们对这些集合以及 G' 的边作如下定义：

- 对于每个顶点 $v \in V$，都存在一个顶点 $v_1 \in V_1$，即 $V_1 = \{v_1 \mid v \in V\}$；

- 对于每条边 $uv \in E$，都存在一个顶点 $e^1_{uv} \in E_1$ 和 $e^2_{uv} \in E_2$，即 $E_1 = \{e^1_{uv} \mid uv \in E\}$ 和 $E_2 = \{e^2_{uv} \mid uv \in E\}$；
- 对于每个 $u_1 \in V_1$，顶点 $\{u_1\} \cup \{e^1_{uv} \mid u = u_1\}$ 和 $\{u_1\} \cup \{e^2_{uv} \mid u = u_1\}$ 构成两个团；
- $V_1 \cup S \cup \{s\}$ 是一个团；
- 对于每一对 e，$e' \in E_1 \cup E_2$ 满足 $N(e) \cap N(e') \cap V_1 = \emptyset$ 的对象，都存在一个顶点 $s_{e,\ e'} \in S$ 以及两条边 $s_{e,\ e'}e$，$s_{e,\ e'}e' \in E'$。注意，这些边 e，e' 对应于 G 中两条不相邻边的副本。

由于 $V_1 \cup S \cup \{s\}$ 是一个团，且每对顶点 e、$e' \in E_1 \cup E_2$ 在 $V_1 \cup S$中都有一个公共邻居，因此可得 $diam(G') = 2$。我们证明 G' 是K_1,4-自由图。对于 G'的每个顶点，我们都将其邻域划分为至多三个团。对于 $u_1 \in V_1$：$N(u_1) \cap E_1$、$N(u_1) \cap E_2$，以及 $N(u_1) \cap (S \cup V_1 \cup \{s\})$。对于$e^i_{uv} \in E_i$、$i \in \{1, 2\}$：$N(e^i_{uv}) \cap N(u_1)$、$N(e^i_{uv}) \cap N(v_1)$，以及 $N(e_{uv}) \cap S$。对于 s_e、$_{e'} \in S$：$\{s_{e,e'}, e\}$、$\{s_{e,e'}, e'\}$和 $V_1 \cup S \cup \{s\}$。对于顶点 s：$N(s) = S \cup V_1$。因此，G' 是K_1,4-自由图。

令 $C, |C| \le k = \gamma$，为 G 的一个顶点覆盖。那么，它在 V_1 中的对应副本是 G' 的一个支配集，其大小至多为 γ。

设 $I' = (G', \gamma)$ 为一个正实例，因此存在 $\Gamma, |\Gamma| \le \gamma$，它们构成 G' 的一个支配集。根据 Γ，我们将构造一个支配集 Γ'，使得 $\Gamma' \subseteq V_1$。由于$N(s) = V_1 \cup S$，我们可以假设 $s \notin \Gamma$。令 S_i 为 S 中在 E_i 中有两个邻点的顶点，即 $S_i = \{s_{e,e'} \mid e, e' \in E_i\}$, $i = 1$, 2。令 $\Gamma_i = \Gamma \cap (E_i, S_i)$。不失一般性，$|\Gamma_1| \le |\Gamma_2|$。令 $\Gamma' = \Gamma \setminus \Gamma_2$。对于每个 $e^1 \in \Gamma^1$，我们将 e^2 添加到 Γ' 中；对于每个 $s_{e^1,e'^1} \in \Gamma_1$，我们将 s_{e^2,e'^2} 添加到 Γ' 中。由于 $G'[E_1 \cup S_1 \cup V_1]$ 与 $G'[E_2 \cup S_2 \cup V_1]$ 同构，因此可知 Γ' 是 G' 的一个支配集，且满足 $|\Gamma'| \le \gamma$。

令 E'_i 为满足 $\Gamma' \cap N(e^i_{uv}) \cap V_1 = \emptyset$, $i = 1, 2$ 的顶点 $e^i_{uv} \in E_i$。对于每个 $e^1_{uv} \in E'_1$，都存在 $e^2_{uv} \in E'_2$，反之亦然，因为 $N(e^1_{uv}) \cap V_1 = N(e^2_{uv}) \cap V_1$。由于 $N(e^1_{uv}) \cap N(e^2_{uv}) \cap S = \{s_{e,e'}\}$，且 $e = e^1_{uv}, e' = e^2_{uv}$，并且 S 的每个顶点在 $E_1 \cup E_2$中恰有两个邻点，因此可得 $|E'_1| \le |S \cap \Gamma'|$。然后，我们从 Γ' 中移除 S 的顶点，并针对每个 $e^1_{uv} \in E'_1$用 $u_1 \in V_1$ 替换它们。因此，Γ' 是 G' 的一个支配集，且满足 $|\Gamma'| \le \gamma$。注意，$\Gamma' \subseteq V_1$。

令 C 为 G 中 $\Gamma' \cap V_1$ 的顶点的副本。由于每个顶点 $e^1_{uv} \in E_1$ 在 $\Gamma' \cap V_1$ 中都有一个邻点，因此 C 是 G 的一个顶点覆盖，且 $|C| \le k$。□

4 禁止含圈的图

上一节讨论的是不含星图的直径为二的图。星图是无环图的特殊情形。本节讨论当 H 为固定大小的圈或圈的集合时不含 H的图。接下来的几节将先讨论不含 C_3 的图，然后讨论不含（C_3，C_4）的图。

4.1 直径为 2 的无三角形图

我们首先给出一个引理，该引理将在关于不含 C_3的图的主要结果证明中使用。

引理 4.1 设 G 为一个图。若 u和 v 是两个不同的顶点，且 $N(u) \subseteq N(v)$，并且 v 是单纯顶点，则 $\gamma(G) = \gamma(G-v)$。

证明：我们注意到，对于任何含有单纯顶点 w 的图，都存在一个不包含 w的 γ-集。因此，存在一个 G 的 γ-集 S，使得 $v \notin S$。注意， S是 $G-v$的一个支配集。由于 $N(u) \subseteq N(v)$，可知 u是单纯顶点，且 v不是 u的邻点。因此，存在一个 $G-v$ 的 γ-集 S'，使得 $u \notin S'$。于是，S' 是 G的一个支配集。由此可得 $|S| = |S'|$，即 $\gamma(G) = \gamma(G-v)$。□

我们展示关于无三角形图的主要结果。

定理 4。2 Dominating Set 对于直径为 2 的无三角形图是 NP-完全的。

证明：我们给出一个多项式变换，从 Dominating set 出发，该问题对于直径为2 的分裂图是NP-完全的（见 [9]）。对于来自 $I = (G, k)$的一个Dominating set实例，我们构造一个实例 $I' = (G', k')$。在 $I = (G, k)$中， $G = (K \cup S, E)$ 是一个直径为 2的分裂图，其中 K 是一个团，而 S 是一个稳定集。令$u, v \in S$：首先，由于 S 的顶点是单纯的，根据引理4.1，我们可以假设 $N(u) \not\subseteq N(v)$ 且 $N(v) \not\subseteq N(u)$；其次，由于 $diam(G) = 2$，存在 $w \in K$ 使得 $u-w-v$ 是 G的一条路径。由 G 我们按如下方式构造 $G' = (V', E')$。我们取一个 K 的副本 K_1 以及 S的两个副本 S_1, S_2。为简单起见，对于 $v \in K$，其在 K_1 中的副本记为 v_1；而对于 $v \in S$，其在S_1, S_2中的副本分别记为 v_1, v_2。然后我们添加两个顶点 t和 s。对于每一对 $u \in K, v \in S$：如果 $uv \in E$，则我们添加边 u_1v_1；否则为 $uv \notin E$，并添加边 u_1v_2。对于每个 $v \in S$，我们添加边 v_1v_2。然后我们将 t 与 K_1 完全相连，并将 s 与 S_2完全相连。最后，我们添加边 st。注意， $\{t\}, K_1, \{s\}, S_1, S_2$是将 G' 划分为稳定集的一个划分。最后，我们取 $k' = k+1$。

我们证明 G' 是无三角形的。由于 $N(t) = K_1 \cup \{s\}$ 和 $N(s) = S_2 \cup \{t\}$ 是两个稳定集，因此 t 和 s 不可能处于同一个三角形中。因此，如果存在一个三角形，它有一个顶点 $u_1 \in K_1$、一个位于 S_1 中的顶点，以及一个位于 S_2 中的顶点。因此，该三角形包含边 v_1v_2。但当 u_1v_1 是一条边时， u_1v_2 不是一条边，反之亦然。因此， G' 是无三角形的。

我们证明 $diam(G') = 2$。我们注意到，对于图中的任意顶点， t 和 s 的距离至多为二。因此，我们可以将重点放在 $K_1 \cup S_1 \cup S_2$的顶点上。由于 t 与 K_1完全相连，而 s 与 S_2 完全相连，因此对于任意一对 v_1、 $u_1 \in K_1$，以及 v_2、 $u_2 \in S_2$，分别存在路径 v_1-t-u_1和 v_2-s-u_2。由于$diam(G) = 2$，对于任意一对 v_1、 $u_1 \in S_1$，存在 $w_1 \in K_1$，使得 $v_1 - w_1 - u_1$是 G'的一条路径。现在，设 $u_1 \in S_1$、 $v_1 \in K_1$以及 $u_2 \in S_2$、 $v_1 \in K_1$分别满足 $uv \notin E$和 $uv \in E$。那么， $u_2v_1 \in E'$和 $u_1v_1 \in E$分别成立，因此$u_1-u_2-v_1$和 $u_2-u_1-v_1$分别是 G'的一条路径。现在设 $u_1 \in S_1$、 $v_2 \in S_2$、 $u \neq v$。根据引理 4.1，我们可以假设存在 $w \in N(u)$ $w \notin N(v)$。因此， u_1w_1、 $v_2w_1 \in E'$ 和 $u_1 - w_1 - v_2$ 是 G'的一条路径。所以， $diam(G') = 2$。

令 D 为 G 的一个支配集，其中 $|D| \leq k$。令 D' 为 D 在 $K_1 \cup S_1$ 中的顶点的副本所构成的集合。那么 $D' \cup \{t\}$ 是 G' 的一个支配集，并且$D' \cup \{k\} \leq k+1 = k'$。

反之，设 D' 是 G' 的一个支配集，且满足 $|D| \leq k' = k+1$。由于 $N(s) = S_2 \cup \{t\}$，因此可得 $|D' \cap (\{t,s\} \cup S_2)| \geq 1$。首先，设 $S_2 \cap D' = \emptyset$。于是 $|D' \cap \{t,s\}| \geq 1$。对每个（若存在） $v_1 \in D' \cap S_1$，取唯一的 $u_1 \in N(v_1) \cap K_1$。于是取 $D = (D' \setminus \{v_1 : v_1 \in D' \cap S_1\} \cup \{u_1 : u_1 \in N(v_1)\ u_1$唯一 $v_1 \in D' \cap S_1\}) \setminus \{t,s\}$。其次，$|S_2 \cap D'| \geq 1, t \in D'$。对每个 $v_2 \in D' \cap S_2$，取唯一的 $u_1 \in N(v_1) \cap K_1$（v_1 是 S_1 中 v_2 的邻点)。于是取 $D = (D' \setminus \{v_2 : v_2 \in D' \cap S_2\} \cup \{u_1 : u_1 \in N(v_1)\ u_1$唯一 $v_2 \in D' \cap S_2\}) \setminus \{t\}$。第三，$|S_2 \cap D'| \geq 1, t \notin D'$。对于每个未被 K_1 中的顶点支配或未被自身支配的 $v_1 \in S_1$，有 v_1 被 S_2 中与其相邻的 v_2 支配。任取 $w \in N(v_1) \cap K_1$。由于 $t \notin D'$，我们有 w 被 $u_1 \in N(w) \cap S_1, u_1 \neq v_1$ 支配，或被 $u_2 \in S_2, u_2 \neq v_2$ 支配。

在第一种情况下，我们在 D' 中用 w 替换了 u_1；在第二种情况下，我们在 D' 中用 w 替换了 u_2，即 。然后我们取 $D = D' \cap (K_1 \cup S_1)$。在所有情况下，我们都取 D 的顶点的副本 D。我们得到，D 是 G 的一个支配集，且满足$|D| \leq k$。□

我们推导出，对于某些 H-自由图类，其中 $C_3 \subseteq_i H$，无三角形图上的 Dominating Set 是NP完全的。根据定理 3.2，线图可以由 $\mathcal{F}$ 的九个禁用诱导子图定义，见图 5。除了爪之外，它们都包含一个三角形。由定理 4.2 可得：

推论 4。3 Dominating Set 对于直径为2的 H-自由图是NP-完全的，$H \in \mathcal{F} \setminus \{claw\}$。

4.2 围长固定的图

然而，根据定理 4.2， Dominating Set 对于直径为 2 的 C_3-free 图是 NP完全的，我们将证明，当 C_4 也作为一个禁诱导子图时，计算复杂性会发生变化，也就是说，对于（C_3, C_4）-free 图这一类，或者换句话说，对于围长为 5 或更大且直径为 2 的图这一类。首先，我们证明没有必要研究直径为 2 的围长至少为 6 的图，因为这类图不存在。

性质 4.1 不存在具有 $diam(G) = 2$ 且围长为 $g(G) \geq 6$ 的图 G。

证明：假设存在一个V, E）且具有 g（G） ≥ 6 和 $diam$（G） $= 2$ 的图 $G =$。设 $C =$（$v_1, v_2, \ldots, v_g, v_1$）为 G 中的一个最短洞，$g \geq 6$。由于 $diam$（G） $= 2$，存在 $w \in N$（v_1） $\cap N$（v_4），$w \notin C$。但是这样就得到 $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, w\}] = C_5$，矛盾，因为 g（G） ≥ 6。□

我们给出围长为 5 且直径为 2 的图的一个性质。

性质 4.2 如果 $G = (V, E)$ 是一个具有 $g(G) = 5, diam(G) = 2$ 的图，那么对于任意一对 $u, v \in V, uv \notin E$，都有 $|N[u] \cap N[v]| = 1$。

证明：由于 $diam(G) = 2$，我们有 $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$。如果 $|N[u] \cap N[v]| \geq 2$，那么 $C_4 \subseteq_i G$。□

我们现在可以展示关于直径为 2 且围长为 5 的图的结果。

性质 4.3 设 $G = (V, E)$ 是一个围长为 5 且直径为 2 的图。则 $\gamma(G) = \Delta(G)$，并且我们可以在时间 $O(1)$内找到 G 的最小支配集。

证明：由于 $C_5 \subseteq_i G$，我们有 $\Delta(G) \geq 2$。$\Delta(G) = 2$ 的情况对应于 $G = C_5$，且该性质成立。因此，我们可以考虑 $\Delta(G) \geq 3$。令 $u \in V$ 满足 $d(u) = \Delta(G) = \Delta$。

令 $N(u) = \{v_1, \ldots, v_\Delta\}$。令 $W = V \setminus N[u]$且令 $W_i = \{w \in W \mid v_i w \in E\}$。注意到 $|W_i| \leq \Delta - 1$，并且由于 $diam(G) = 2$，我们有 $\bigcup W_i = W$。由于 G不含三角形，因此每个 W_i 都是一个独立集。根据性质 4.2，不存在顶点 $w \in W$使得 $w \in W_i \cap W_j$，$1 \leq i < j \leq \Delta$。因此，$W_1, \ldots, W_\Delta$ 是将 W 划分为若干独立集的一个划分。

设 $w \in W_i$。根据性质 4.2，对于每个 j，若有 $j \neq i$，则 $|N[w] \cap N[v_j]| = 1$。由此可知，w 在每个 W_j 中都有一个邻点。设 w，$w' \in W_i$。根据性质 4.2，我们有 $N(w) \cap N(w') \cap W_j = \emptyset$，$i \neq j$。因此 $|W_1| = \cdots = |W_\Delta| = \Delta - 1$，从而$G$ 是 Δ-正则的。

假设存在 S，它是 G 的一个最小支配集，且满足 $|S| < \Delta$。那么存在一个 $i \in \{1, \ldots, \Delta\}$，使得 $S \cap (W_i \cup \{v_i\}) = \emptyset$。由于 $N(v_i) \cap S \neq \emptyset$，可得 $u \in S$。由于 $|W_i| = \Delta - 1$，并且对于每一对 w，$w' \in W_i$，都有 $N[w] \cap N[w'] = \{v_i\}$，因此可得 $|S \cap W| = \Delta - 1$。但这意味着 $|S| = \Delta$，矛盾。

注意，$N(u)$ 是 G 的支配集，因此 $\gamma(G) = \Delta(G)$。由于 G 是 Δ-正则的，可知对于任意 x，$N(x)$ 都是 G 的最小支配集。因此，我们可以在 $O(1)$ 时间内计算最小支配集。□

我们现在可以证明一个复杂性二分结果。

定理 4.4 对于围长为 g 且直径为 2 的图，当 $g \in \{3, 4\}$ 时，Dominating Set 是 NP-完全的；当 $g \geq 5$ 时，则可在多项式时间内求解。

证明：由性质 4.2 可知，当一个图的直径为 2 时，其围长至多为 5。因此，结合性质 4.3，支配集问题对于 $g \geq 5$ 可在多项式时间内求解。定理 3.10 的证明中使用的图的围长为 3，而定理 4.2 的证明中使用的图的围长为 4。□

5 结论

综合第 3 节和第 4 节的结果，我们给出了两个（几乎）二分性结论，并针对剩余情形证明了一些部分性结果。

我们给出了无爪图的一个二分分类结果。

定理 5.1 对于直径固定的无爪图，d，Dominating Set 在 $d \geq 3$ 时是NP-完全的，否则是多项式时间可解的。

证明：引理 3.1 证明了 $d \geq 3$ 的情形。定理 3.6 证明了 $d = 2$ 的情形。当 $d = 1$ 时，图是一个团，因此取任意一个顶点即可得到一个最小支配集。□

我们给出了直径为 2 的 H-自由图的结果。

定理 5.2 对于直径2的 H-自由图， Dominating Set 在 $H' \subseteq_i H$, $H' \in \{2K_2, C_3, C_4, C_5, K_{1,4}\}$ 时是NP完全的；在 $H \subseteq_i H', H' \in \{P_4, K_{1,3}\}$ 时可在多项式时间内求解。

证明：我们知道，对于 $(2K_2, C_4, C_5)$-自由分裂图， Dominating Set 是 NP 完全的。根据定理 4.2 和定理 3.10，对于 C_3-自由图以及 $K_{1,4}$-自由图，该问题同样是 NP 完全的。

对于满足 P_4-自由条件的余图，Dominating Set 可在多项式时间内求解，因为对于这类直径为 2 的图， G 满足 $\gamma(G) \leq 2$。根据定理 3.9，我们得到了无爪图的结果。□

未包含在定理 5.2 中的连通图 H 是椅子图，即具有五个顶点 v_i、 $1 \leq i \leq 5$ 和四条边 v_1v_2、 v_2v_3、 v_1v_4、 v_1v_5 的图，以及双爪图，即具有六个顶点 v_i、 $1 \leq i \leq 6$ 和五条边v_1v_2、 v_1v_3、 v_1v_4、 v_2v_5、 v_2v_6的图。非连通图为 $\{K_{1,3}+aK_1, P_4+aK_1, chair+aK_1$、 $biclaw + aK_1\}$、 $a \geq 1$。

我们利用定理 5.2 求解 $(K_{1、3}+aK_1)$-无图和 (P_4+aK_1)-无图的情形。

推论 5.3 设 $a \geq 1$ 为固定整数，且 $H \in \{K_{1,3} + aK_1, P_4 + aK_1\}$。Dominating Set 对于直径为2的 H-无图类是多项式时间可解的。

证明：设 $H' \in \{K_{1,3}, P_4\}$，且令 G 为一个 H-自由图。根据定理 5.2，当 G 为 H'-自由时，我们可以在多项式时间内计算 G 的最小支配集。

因此，我们假设 G 包含 H' 作为诱导子图。令 $G' = G - N[H']$。注意， $\alpha(G') < a$。由于 $\gamma(G') \leq \alpha(G')$，可知 $\gamma(G') < a$。于是，$\gamma(G) \leq \gamma(N[H']) + \gamma(G') \leq 4 + a - 1$。我们可以在 $O(n^4)$ 中找到 H'。然后通过暴力法，我们可以在 $O(n^{a+5})$ 中计算 G 的最小支配集。□

我们尚未确定 Dominating Set 对于 $(chair+aK_1)$-自由图类以及对于任意固定非负 a 的 $(biclaw+aK_1)$-自由图类的复杂性。

对于 $chair$-自由图或 $biclaw$-自由图的情形，将具有特别的研究价值。另一个尚未解决的问题涉及线图这一类图。根据定理 3.9，我们知道，对于直径为 2 的线图， Dominating Set 是多项式时间可解的。现在，给定任意固定整数 $d \geq 3$，对于直径为 d 的线图， Dominating Set 能否在多项式时间内求解?

参考文献

[1] J.A. Bondy、U. S. R. Murty，《图论》，Springer，（2008）。

[2] A. Brandst¨adt、V.B. Le 和 J. Spinrad，《图类：综述》，《离散数学与应用》SIAM 专著系列，1999年。[3] S. Dhanalakshmi、N. Sadagopan 和 V. Manogna（2016），关于 $2K_2$-自由图，《纯数学与应用数学国际期刊》109（7），167-173。[4] M. Farber，关于桥接图的直径和半径，《离散数学》73（3）（1989年），249-260。[5] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，《计算机与难解性：*NP* 完全性理论指南》，Freeman，1979年。[6] P. G. H. Lehot，用于检测线图并输出其根图的最优算法，《ACM 杂志》21（1974年），569-575。[7] W.-L. Hsu、K.-H. Tsai（1991），圆弧图上的线性时间算法，《信息处理快报》40，123-129。[8] T. Kikuno、N. Yoshida、Y. Kakuda（1980），立方平面图中支配集问题的 *NP* 完全性，《IEICE 汇刊》6，443-444。[9] D. Lokshtanov、N. Misra、G. Philip、M. S. Ramanujan 和 S. Saurabh，难度 r直径为 $(r+1)$ 的图上的支配集，《参数化与精确计算国际研讨会》，《计算机科学讲义》8246（2013年），255-267。[10] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi、P. J. Slater，《图支配理论基础》，Marcel Dekker 公司，（1998年）。[11] B. Martin、D. Paulusma、E. J. van Leeuwen，无爪图中的非连通割，《计算机与系统科学杂志》113（2020年），60-75。[12] M. Yannakakis、F. Gavril，图中的边支配集，《SIAM 应用数学杂志》38（3）（1980年），364-372。