arXiv:2304.09708v1 [math.SP] 19 Apr 2023

Klein-Gordon 方程组基态处线性化算子的谱

YAN CUI、BO XIA 和 KAI YANG

摘要。此前，人们已广泛研究了一类 Klein-Gordon 方程组的基态解的存在性。本文将研究基态处的线性化算子，并在径向情形下对该算子的谱给出完整描述：存在唯一的负特征值；在“1”（本质谱的底端）处不存在共振；本质谱中不存在嵌入特征值；以及谱隙性质（即，在区间 $(0,1]$ 中不存在特征值。

1. 引言

本文将研究该算子的谱性质。

$$\mathcal{D} := \begin{bmatrix} -\Delta + 1 - 3Q^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + 1 - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

在$L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)$，其中$\beta > 0$是一个参数。这里$Q$是方程的唯一正基态[7, 14]：

$$-\Delta\psi(x) + \psi(x) - \psi(x)^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

算子 $\mathcal{D}$ 出现在对 Klein-Gordon 方程组（非标准）平稳解稳定性的研究中，该方程组可用于描述带电介子在电磁场中的运动（参见 Segal [22]，或 [24] 的引言部分）。这类解满足以下椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 - u_1^3 - \beta u_1 u_2^2 = 0 \\ -\Delta u_2 + u_2 - u_2^3 - \beta u_1^2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

该方程组解的存在性已在 [24] 中得到证明（见下文定理 3.1）。记其中一个解为一对 (Q_1,Q_2)。在 (1.1) 的 (Q_1,Q_2) 处进行线性化，得到算子 $\mathcal{D}$，详见第 3 节。

下文中，我们将记作

$$L_\beta := -\Delta + 1 - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2. \tag{1.4}$$

Yan Cui 得到国家自然科学基金（编号：12001555）的资助。Bo Xia 得到国家自然科学基金（编号：12171446）的资助。Kai Yang 得到江苏省双创博士计划和江苏省自然科学基金（中国，编号：BK20200346）的资助。

因此，我们可以改写为

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_\beta \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

注意，对于 $\beta = 0$，$L_0 = -\Delta + 1 - 3Q^2$ 以及对于 $\beta = 1$，$L_1 = -\Delta + 1 - Q^2$。回顾一下，L_0 和 L_1 正是这两个算子 $L_\pm$，它们已在 [26, 4, 8, 9]中得到广泛研究。为方便读者，我们将这两个算子的谱相关结果总结如下（符号和概念见第 2 节）。

定理 1.1. 设 L_0 和 L_1 如上所述，则以下断言成立。

(i) L_0 和 L_1 都是作用于 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的自伴算子。(ii) L_0 有一个唯一的负特征值，记为 λ_0，而 L_1 是一个正算子，因此它没有负谱。(iii) 点 0 是 L_0 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的一个重数为三的特征值，相应的特征子空间由 $\partial_{x_1}Q$、$\partial_{x_2}Q$ 和 $\partial_{x_3}Q$ 张成。(iv) 点 0 是 L_1 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的一个重数为一的特征值，相应的特征子空间由 Q 张成。(v) 对于算子 L_0 和 L_1，区间 $(0, 1]$ 不包含任何谱点。此外，阈值 1 对于这两个算子都不是共振（沿径向方向）。(vi) 这两个算子的连续谱均为 $[1, \infty)$，其中不包含嵌入特征值。

证明。 (*i*) 的证明见 [11, 20]，而 (*ii*)-(*iv*) 的证明见 [27]。关于 (*vi*) 的证明，可以援引 Kato 的结果 [12]。

(v) 的证明有一段颇长的历史：Demanet 和 Schlag 最初在 [9] 中通过数值计算验证了这一断言；Costin、Huang 和 Schlag 首先建立了基态的分段解析逼近，并在径向假设下于 [8] 证明了该结论；最近，Li 和本文第三位作者利用 Q 的这一逼近以及 Sturm比较定理，终于在非径向情形下于 [15] 证明了该结果。■

注 1.2. 为了完整刻画 L_0, L_1 乃至 L_β 在 $\beta \in (0, 1)$ 中的谱，我们将介绍“谱的奇异连续部分”这一概念（定义见 [20] ）。由于基态 Q 是球对称的，并且沿径向指数衰减，我们可以应用 [20, 定理 XIII.21]，从而得知，对于每个 $\beta \in [0, 1]$，L_β 的谱的奇异连续部分为空集。

特别地，根据定理 1.1 可知，的完整谱 L_0。注意，L_0 和 L_β 是 $\mathcal{D}$的唯一非零项。因此，为了研究 $\mathcal{D}$的谱性质，我们首先求出 L_β的谱。

定理 1.3. 对于每个固定的数 $\beta \in (0,1)$，以下断言成立。 *ld.*

(i) 算子 L_β 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上只有一个负特征值，记作 λ_β。此外，相应的特征函数是一个不变号的光滑径向函数。(ii) 点 0 不属于 L_β 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的离散谱。(iii) 算子 L_β 在开区间 $(0, 1)$ 内，在 L^2 径向的 $(\mathbb{R}^3)$ 上没有离散谱。(iv) 点 1 不是 L_β 在 L^2 径向的$(\mathbb{R}^3)$ 上的特征值或共振。(v) 区间 $[1, \infty)$ 是 L_β 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的本质谱，其中不含任何嵌入特征值。

注记 1.4。 事实上，在平方可积径向函数空间中，任意实数都不是共振： [23] 意味着任意实数 $\lambda < 1$ 对于 L 都不是共振$_\beta$；由[1, 第 3] 节可知，任意实数 $\lambda > 1$ 都是共振。

一个直接的推论是

推论 1.5。固定 $\beta \in (0, 1)$。在积空间 $L^2{}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3) \times L^2{}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)$ 上， $\mathcal{D}$的谱为

$$\{\lambda_0\} \cup \{\lambda_\beta\} \cup [1, \infty).$$

此外， λ_0 和 λ_β 是简单特征值，点 1 既不是特征值也不是共振，并且集合 $[1, \infty)$ 是本质谱，其中没有嵌入特征值。

证明。我们首先确定 $\mathcal{D}$的特征值。设 ψ_0 是与 λ_0 对应的 L_0 的特征函数， ψ_β 是与 λ_β对应的 L_β 的特征函数。于是可以验证，λ_0和 λ_β是 $\mathcal{D}$ 的特征值，其对应的特征函数分别为 $(\psi_0, 0)^{\mathsf{T}}$ 和 $(0, \psi_\beta)^{\mathsf{T}}$。我们将证明它们是 $\mathcal{D}$的全部特征值。设 λ 是$\mathcal{D}$的一个特征值，则取一个非零特征函数 $h = (h_1, h_2)^{\mathsf{T}} \in H^2{}_{rad}(\mathbb{R}^3) \times H^2{}_{rad}(\mathbb{R}^3)$， 使得

$$L_0 h_1 = \lambda h_1, \quad \text{and} \quad L_\beta h_2 = \lambda h_2. \tag{1.6}$$

如果 h_1 不是零函数，则可知 λ 是 L_0的特征值。回顾这里处于径向情形，我们看到 λ_0 是 L_0 的唯一特征值，因此$\lambda = \lambda_0$。如果 h_2 是非零函数，我们可以使用相同的论证得出 $\lambda = \lambda_\beta$。特别地，点 1 不是特征值。

由定理 1.1 和 1.3 可知 $\sigma_{ess}(L_0) = \sigma_{ess}(L_\beta) = [1, \infty)$。然后，根据命题 2.5 可得 $\sigma_{ess}(\mathcal{D}) = [1, \infty)$。此外，由于 λ_0 和 λ_β 是 $\mathcal{D}$ 的全部特征值，且二者都小于下边缘 1，因此算子 $\mathcal{D}$ 在 $\sigma_{ess}(\mathcal{D})$中不具有任何嵌入特征值。

由定理 3.1 和 1.3 可知，阈值点“1”对于 L_0 和 L_β都不是共振点。然后，根据定义 2.6 可直接推断，它对于 $\mathcal{D}$也不是共振点。 ■

注记 1.6。 正如 Marzuola 和 Simpson 所指出的（见 [17]）在 Schr¨odinger 方程的情形下，底部共振和嵌入特征值同时存在，要求势具有“特定性质”，人们认为这种情况很罕见。我们确实在此对耦合 Schr¨odinger 方程组验证了这一观点，尽管相应的基态解以及由此得到的势函数具有诸如球对称性、指数衰减和光滑性等非常良好的性质。

注记 1.7。 具体而言，推论 *1.5* 意味着耦合 Klein-Gordon 系统的基态具有谱不稳定性

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 + u_1 - u_1^3 - \beta u_1 u_2^2 = 0 \\ \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 + u_2 - u_2^3 - \beta u_1^2 u_2 = 0 \end{cases} \qquad \beta > 0 \tag{1.7}$$

假设基态 $(Q_1, Q_2) \in H^1 \times H^1$ 是唯一的（见注释 *3.3*）。然而，正如在 Schr¨方程的情形中所考虑的 [27], 我们预期该基态是轨道稳定的。值得一提的是，根据定理 *1.3*，我们可以仿照 Grillakis、Shatah 和 Stauss 提出的抽象哈密顿系统轨道稳定性与不稳定性的一般理论 [10] 来研究这一问题。

本文结构安排如下：在第 2 节，我们将介绍函数记号并回顾谱理论中的基本概念；在第 3 节，我们将通过线性化过程推导矩阵算子 $\mathcal{D}$；在最后的第 4 节，我们将证明主要定理1.3。

2. 预备知识

本节中，我们给出本文所用的符号记法，并回顾有关自伴算子谱的概念。

我们将用 L^2 表示定义在整个欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 上的平方可积实值函数空间，用 $L^2_{\text{径向的}}$ 表示 L^2中由径向函数构成的空间。我们还用 H^1 表示 L^2, 的子空间，其中每个元素都具有平方可积梯度。类似地，我们用 $H^1_{\text{径向的}}$ 表示 H^1, 中由球对称函数构成的子空间。

由于我们在此考虑的函数均为实值函数，因此我们将范围限定在实希尔伯特空间。我们首先回顾一下。

定义 2.1. 设 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个实希尔伯特空间，且 $(Dom(A), A)$ 是一个从 $Dom(A)$ 到 H 的稠密定义线性算子。

(1) 记 $Dom(A^*) := \{u \in H: \exists u^* \in H$ 使得 $\langle u, Av\rangle = \langle u^*, v\rangle, \forall v \in Dom(A)\}$，并对所有 $u \in Dom(A^*)$ 定义 $A^*u := u^*$。注意，对于每个 $u \in Dom(A^*)$，u^* 是唯一确定的，因此 A^* 定义良好。称 $(Dom(A^*), A^*)$ 为 $(Dom(A), A)$ 的伴随算子。(2) 如果 $(Dom(A), A) = (Dom(A^*), A^*)$，则称 $(Dom(A), A)$ 是自伴的

通常，可以使用 Kato-Rellich 定理（[11]）来判断对拉普拉斯算子 $-\Delta$ 添加势函数所得到的扰动是否为自伴算子。下文中，如果无需强调其定义域，我们将 $(Dom(A),A)$ 简记为A。接下来回顾

定义 2.2. 设 $(Dom(A), A)$ 是某个实希尔伯特空间（$H, \langle\cdot,\cdot\rangle$）上的自伴算子。

(1) 复平面中满足 $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I : Dom(A) \to H$ 为双射$\}$ 的子集称为 A 的预解集。(2) 集合 $\sigma(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ 称为 A 的谱。(3) 若方程 $(A - \lambda I)u = 0$ 在 H 中存在非零解，则称数 λ 为 A 的特征值。点谱 $\sigma_{pt}(A)$ 由 A 的特征值构成。(4) 满足 $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I$ 是单射但非满射$\}$[1] 的子集称为 A 的连续谱。

在某些情况下，特征值可能嵌入连续谱中。为了将这些嵌入特征值与其他特征值区分开来，我们引入离散谱的概念。

定义 2.3。设 A 是实希尔伯特空间 H 上的自伴算子。

(1) A 的离散谱 $\sigma_{disc}(A)$ 是由谱中的孤立点组成的集合，这些孤立点对应的特征值的特征子空间具有有限维数。

[1]自伴算子 A 的剩余谱集合为空。

(2) A 的本质谱 σ_{ess}(A) 定义为 σ(A)\σ_{disc}(A)。

为了判断某一点是否属于本质谱，我们将使用

定理2.4 (韦尔判据， [11])。 设 T 为一个自伴算子。那么 λ 属于本质谱，当且仅当存在一个序列 u_n 属于 Dom(T)，满足 $\|u_n\| = 1$，$u_n \to_{n\to\infty} 0$ 且 $\|(T-\lambda)u_n\| \to_{n\to\infty} 0$。

利用这一结果，我们将根据其对角实体的本质谱，确定对角形式的矩阵算子的本质谱。

2.1. 抽象理论。设 (Dom(T_1),T_1) 和 (Dom(T_2),T_2) 是希尔伯特空间 H 上两个稠密定义的算子。接下来考虑矩阵形式的算子

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

其定义域为 H 上的 Dom(T_1) × Dom(T_2)。我们希望根据 T_1 和 T_2 的相关信息，推导出 (Dom(T_1) ×Dom(T_2), $\mathcal{T}$) 的谱信息。

考虑到算子 $\mathcal{D}$ 的形式，我们假设 (Dom(T_1), T_1) 和 (Dom(T_2), T_2) 在 H 上都是自伴的。那么算子 (Dom(T_1) ×Dom(T_2), $\mathcal{T}$) 也是 H ×H 上的自伴算子，因此 $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}$。此外，它的本质谱完全由 T_1 和 T_2 的谱决定。

命题2.5. 在上述关于 T_1 和 T_2，的假设下，我们有

$$\sigma_{ess}(T_1) \cup \sigma_{ess}(T_2) = \sigma_{ess}(\mathcal{T})$$

证明. 设 $\lambda \in \sigma_{ess}(T_1) \cup \sigma_{ess}(T_2)$。为方便起见，我们可以假设 $\lambda \in \sigma_{ess}(T_1)$。我们将使用 T_1 对应于 λ 的韦尔序列，为 $\mathcal{T}$ 构造一个对应于同一个 λ 的韦尔序列。关键观察是

$$T_1 h = \lambda h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{T} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

其中 $\|(h, 0)^T\|_{H\times H} = \|h\|_H$。根据韦尔判据（定理2.4），取 $h_n \in$ Dom(T_1) 作为对应于 (T1, λ) 的韦尔序列。于是，由 (2.2) 可知，$(h_n, 0)^T \in$Dom($\mathcal{T}$) 是对应于 ($\mathcal{T}, \lambda$) 的韦尔序列。这就意味着 $\lambda \in \sigma_{ess}$ ($\mathcal{T}$)，结合定理2.4即可得出。

对于反向包含关系，我们取 $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{T})$。根据定理 2.4，我们选取一个 Weyl 序列 (h_n, f_n)$^T \in$Dom($\mathcal{T}$)，它对应于 ($\mathcal{T}$， λ，并满足

$$\|(h_n, f_n)^T\|_{H\times H} = 1,\ (h_n, f_n)^T \to_{n\to\infty} (0,0)^T,\ \text{and}\ \|(\mathcal{T}-\lambda)(h_n, f_n)^T\|_{H\times H} \to_{n\to\infty} 0. \tag{2.3}$$

利用鸽巢原理，我们可以选取一个子序列 (h_{n_k}, f_{n_k})$^T \in$Dom($\mathcal{T}$)，其中的一个分量（例如第一个分量）满足

$$\|h_{n_k}\|_H \geq \frac{1}{2}, \forall k \geq 1; h_{n_k} \to_{k\to\infty} 0,\ \text{and}\ \|(T_1-\lambda)h_{n_k}\|_H \to_{k\to\infty} 0. \tag{2.4}$$

通过重整化论证，我们可以为（T_1， λ）得到一个Weyl序列。由定理2.4 可知 $\lambda \in \sigma_{ess}$（T_1），从而完成命题2.5的证明。■

在本节末尾，我们回顾共振的概念。对于标量方程，我们将采用 [13, 8]中的定义。由于我们的算子 $\mathcal{D}$ 采用矩阵形式，我们也采用 [21], 中的共振概念。

定义 2.6. 设 λ 为实数。我们称 $\mathcal{D}$ 在 λ 处存在共振，意即存在分布解 $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)^{\mathsf{T}} \notin \mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2$ 满足方程。

$$\mathcal{D}f = \lambda f \tag{2.5}$$

满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\right)(1+|x|)^{-2\gamma} dx < \infty, \quad \forall \gamma > \frac{1}{2}.$$

如果 $\mathcal{D}$ 在 λ处存在共振，我们也可以简单地说 λ 是 $\mathcal{D}$的一个共振，或者说 $\mathcal{D}$在 λ处发生共振。

3. 矩阵算子 $\mathcal{D}$ 的推导

在本节中，我们将回顾如何求解方程组（1.3），并推导 $\mathcal{D}$。

3.1. Schr¨odinger 方程组的解。

回顾一下，我们将要考虑的方程组是

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 - u_1^3 - \beta u_1 u_2^2 = 0 \\ -\Delta u_2 + u_2 - u_2^3 - \beta u_1^2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u_i : \mathbb{R}^3 \ni x \longmapsto u_i(x) \in \mathbb{R}, i = 1,2$ 是未知量。该方程组通过以下变分论证求解。我们首先为（3.1）关联能量泛函

$$E[u_1, u_2] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{i=1,2}\left(|\nabla u_i|^2 + |u_i|^2\right)\right] dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left[u_1^4 + u_2^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2\right] dx. \tag{3.2}$$

通常，我们尤为关注（3.1）的如下解：其每个分量都不恒为零。为了得到这样的解，我们引入以下约束集

$$\mathcal{N}_1 := \left\{(u_1, u_2) \in \left(H^1 \backslash \{0\}\right)^2 : \int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u_i|^2 + |u_i|^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^3}\left[u_i^4 + \beta u_1^2 u_2^2\right] dx, i = 1, 2 \right\}.$$

对于以下约束极小化问题

$$A := \inf_{(u_1,u_2)\in\mathcal{N}_1} E[u_1, u_2], \tag{3.3}$$

$$A_r := \inf_{(u_1,u_2)\in\mathcal{N}_1 \cap \left(H^1_{rad} \times H^1_{rad}\right)} E[u_1, u_2], \tag{3.4}$$

Sirakov 证明了

定理 3.1 （[24]）。 对于每个 $\beta \in [0, +\infty)$ ，都有

(i) $A = A_r$;

（ii）这两个最小值都由这一对达到

$$\left(\sqrt{\frac{1}{1+\beta}}Q,\ \sqrt{\frac{1}{1+\beta}}Q\right) =: (Q_1, Q_2)$$

其中 Q(x) 是方程 (1.2) 的唯一正基态解。

通过变分方法，A 的极小化子是方程组 (3.1) 的弱解（见 [16,引理 3] 或 [24, 注 3]）。关于其他类型的解以及解的唯一性，我们给出以下几点说明。

注3.2。 事实上，方程组 (3.1) 确实存在某个分量恒等于零的解，例如 $(Q,0)^{\mathsf{T}}$。理论上，利用 Nehari流形

$$\mathcal{N}_0 := \left\{(u_1,u_2)\in H^1\times H^1\backslash\{(0,0)\} : \int_{\mathbb{R}^3}\left[\sum_{i=1,2}\left(|\nabla u_i|^2+|u_i|^2\right)\right]dx = \int_{\mathbb{R}^3}\left[u_1^4+u_2^4+2\beta u_1^2u_2^2\right]dx\right\},$$

作为约束集，用于以下极小化问题

$$A_0 := \inf_{(u_1,u_2)\in\mathcal{N}_0} E[u_1,u_2].$$

Sirakov 还证明：A_0 是一个正数，由 $H^1\times H^1\backslash\{(0,0)\}$ 中的一对径向函数 (u_1,u_2) 取到。

注 3.3. 在 [24], Sirakov 将 A_0 的极值子称为方程 (3.1) 的非平凡解，而将 A 的极值子称为非标准解。在 [24, 注 2], Sirakov 猜想，(Q_1,Q_2) 是方程 (3.1) 在平移意义下唯一的正解。这一问题引起了广泛关注：利用隐函数定理，Wei 及其合作者[16, 25] 证明了在某些较小的 β_0 情况下，$\beta>1$ 和 $0<\beta<\beta_0$ 情形中此类解的唯一性；基于某种形式的分岔方法，Chen和Zou [6] 在$1>\beta>\beta_1$ 情形下证明了当某些 β_1 接近 1 时，该猜想成立。对于 $\beta\in[\beta_0,\beta_1]$，这一猜想是否成立至今仍是一个悬而未决的问题。此外，Chen和Zou [5] 证明了这一猜想的一个较弱版本，即定理 3.1 中的 (Q_1,Q_2) 是极小化问题 (3.3) 在平移意义下的唯一解。

3.2. 的推导 $\mathcal{D}$。 设 (Q_1,Q_2) 是 (3.1 的一个非平凡解（由定理3.1 保证）。在该解处对 (3.1) 进行线性化，我们得到算子

$$\mathcal{L} := \begin{bmatrix} -\Delta+1-\frac{3+\beta}{1+\beta}Q^2 & \frac{-2\beta}{1+\beta}Q^2 \\ \frac{-2\beta}{1+\beta}Q^2 & -\Delta+1-\frac{3+\beta}{1+\beta}Q^2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

由于 Q 指数衰减，可以使用 Kato-Rellich定理来验证：

(1) $\mathcal{L}$ 的定义域为 $H^2\times H^2 =: \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$。(2) 稠密定义算子 $(\mathrm{Dom}(\mathcal{L}),\ \mathcal{L})$ 是作用于 $L^2\times L^2$ 上的自伴算子。因此，$\mathcal{L}$ 的谱包含于实数轴 $\mathbb{R}$。

为了将 $\mathcal{L}$ 对角化，我们引入一个从 $L^2\times L^2$ 到其自身的等距作用，该作用由矩阵诱导

$$W := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

更准确地说，该作用为

$$W : L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$$
$$(h_1, h_2)^{\mathsf{T}} \longmapsto \left(\frac{h_1 + h_2}{\sqrt{2}}, \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{2}}\right)^{\mathsf{T}}.$$

然后我们将 $\mathcal{L}$ 对角化，得到

$$W^{-1}\mathcal{L}W = \begin{bmatrix} -\Delta + 1 - 3Q^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + 1 - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 \end{bmatrix} \equiv \mathcal{D}. \tag{3.6}$$

这一推导 $\mathcal{D}$ 似乎与原方程（3.1）并无密切联系。事实上，可以通过以下线性化过程直接推导出该算子。设（u_1,u_2）是（3.1）的解，并且函数 v_1,v_2 由下式隐式定义：

$$(u_1, u_2)^{\mathsf{T}} = W(v_1, v_2)^{\mathsf{T}}. \tag{3.7}$$

然后 v_1 和 v_2 解方程组

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + v_1 - \frac{1}{4}\left[(v_1 + v_2)^3 + (v_1 - v_2)^3\right] - \frac{\beta}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)v_1 = 0 \\ -\Delta v_2 + v_2 - \frac{1}{4}\left[(v_1 + v_2)^3 - (v_1 - v_2)^3\right] + \frac{\beta}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)v_2 = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

由于 \((Q_1, Q_2)^{\mathsf{T}}\) 是方程组（3.1）的一个解，因此，变换后的二元组 $(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)^{\mathsf{T}} := W(\tilde{Q}_1,Q_2)^{\mathsf{T}} = \left(q\frac{2}{1+\beta}Q, 0\right)^{\mathsf{T}}$ 是方程组（3.8）的一个解。在 $(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)^{\mathsf{T}}$ 处对方程组（3.8）进行线性化，得到线性化算子。

$$\begin{bmatrix} -\Delta + 1 - 3Q^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + 1 - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

这正是对角算子 $\mathcal{D}$。

注3.4。 正如注 *3.2* 中所暗示的，二元组 $(Q,0)$ 也是方程 (3.1) 的一个解。在这一非平凡但标准的解处对方程 (3.1) 进行线性化，可得到如下对角算子

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} -\Delta + 1 - 3Q^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + 1 - \beta Q^2 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

注意到，对于每个 $\beta \in (1, 3)$，该算子恰好就是算子 $\mathcal{D}$，其对应参数为 $\frac{3-\beta}{1+\beta}$，因此我们可以确定每个这样的 $\beta \in (1, 3)$ 对应的 $\mathcal{L}_1$ 的谱。

注3.5。 事实上，Sirakov[24] 考虑了以下更一般的方程组

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 - \mu_1 u_1^3 - \beta u_1 u_2^2 = 0, \\ -\Delta u_2 + u_2 - \mu_2 u_2^3 - \beta u_1^2 u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

并证明它存在基态解 $(Q_1, Q_2) = (\sqrt{k}Q, \sqrt{l}Q)$，其中 k、l 由线性方程组确定

$$\begin{cases} k\mu_1 + l\beta = 1, \\ k\beta + l\mu_2 = 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

按照本节中的线性化方法，我们可以在 (3.11) 处对 (Q_1,Q_2) 进行线性化，从而得到算子：

$$\tilde{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -\Delta + 1 - 3Q^2 & 0 \\ 0 & -\Delta + 1 - \frac{3(\mu_1-\beta)(\mu_2-\beta)}{\mu_1\mu_2-\beta^2}Q^2 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

当 $\frac{3(\mu_1-\beta)(\mu_2-\beta)}{\mu_1\mu_2-\beta^2} \in (1,3)$ 时，我们可以应用定理 *1.3* 来确定 $\tilde{\mathcal{L}}$ 在径向情形下的谱。

我们预期，与某些比[2, 5, 24]（参见(3.11) 更为一般的方程组相关的谱问题也可以加以研究。

4. 定理证明 1.3

本节致力于证明我们的主要结果：定理1.3。对于每个 $\beta \in (0,1)$，我们回顾

$$L_\beta = -\Delta + 1 - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2. \tag{4.1}$$

我们首先确定 L_β 的本质谱。

证明 (v)。由 $\sigma(-\Delta) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty)$ 可得 $\sigma_{ess}(-\Delta+1) = [1,\infty)$。由于基态 Q 在无穷远处指数衰减，由函数 $\frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2$ 诱导的乘法算子是 $-\Delta+1$ 的相对紧扰动。根据 Weyl定理（参见 [11]），可得

$$\sigma_{ess}(L_\beta) = \sigma_{ess}(-\Delta+1) = [1,\infty) \tag{4.2}$$

注意到，基态解 Q 的衰减速度快于任意给定多项式倒数。这使我们能够使用 [12] 中的结果，从而得出 L_β 在其连续谱下边缘以上没有嵌入特征值。由此完成了定理 1.3 中（v）的证明。■

关于 离散谱，我们首先通过确定负特征值来展开论证。

（i）的证明。为证明其存在，利用 Q 满足的方程，经过一些计算可得

$$\left\langle L_\beta Q, Q \right\rangle = -\frac{2(1-\beta)}{1+\beta}\left\langle Q^4, 1 \right\rangle. \tag{4.3}$$

由 $\beta < 1$ 以及 Q 不为零这一事实可知，$DL_\beta Q, QE < 0$。这表明 L_β 至少有一个负特征值。因此，要得到所述结论，只需证明它至多有一个负特征值。

为达到这一目的，我们确实可以仿照 L_0, 的相同命题的证明，参见例如 [18]。不过，我们在此给出一个简明证明，借助 Glaszmann 引理的一个应用（[3]）。

设 $\mu_1 \le \mu_2$ 是 L_β 的前两个特征值。注意到第一个特征值是单特征值，我们甚至可以假设 $\mu_1 < \mu_2$。如前所示，$\sigma_{ess}(L_\beta) = \sigma_{ess}(L_0) = [1,\infty)$ 且 $L_\beta \ge L_0$。由此，根据 [3, 第 227] 页的定理 4，结合 $\gamma = 1$，我们可以得出

$$\mu_1 \ge \lambda_0, \quad \mu_2 \ge 0. \tag{4.4}$$

这一结果表明，L_β 的第二个特征值（如果存在）是非负的，这意味着至多只有一个负特征值。这就完成了定理 i 中（1.3）的证明。■

通过进一步利用比较论证，我们可以比较不同 β 取值下的这些特征值 λ_β。

命题 4.1。固定 $0 \le \beta_1 < \beta_2 \le 1$。令 λ_{β_1} 和 λ_{β_2} 分别为 L_{β_1} 和 L_{β_2}的第一个特征值。则 $\lambda_{\beta_1} < \lambda_{\beta_2}$。

证明。反设 $\lambda_{\beta_1} \ge \lambda_{\beta_2}$。取一个特征函数 f_{β_2}，使得 $L_{\beta_2} f_{\beta_2} = \lambda_{\beta_2} f_{\beta_2}$。由于 λ_{β_1} 是 L_{β_1} 的第一个特征值，我们有

$$0 \le \left\langle (L_{\beta_1} - \lambda_{\beta_1}) f_{\beta_2}, f_{\beta_2} \right\rangle .$$

另一方面，由假设 $\lambda_{\beta_1} \ge \lambda_{\beta_2}$，我们得到

$$\left\langle (L_{\beta_1} - \lambda_{\beta_1}) f_{\beta_2}, f_{\beta_2} \right\rangle \le \left\langle (L_{\beta_1} - \lambda_{\beta_2}) f_{\beta_2}, f_{\beta_2} \right\rangle = -\frac{3(\beta_2 - \beta_1)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)} Q^2 \left\langle Q^2 f_{\beta_2}, f_{\beta_2} \right\rangle < 0$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了 β 严格为正这一事实，以及 Q 和 f_{β_2} 均不为零。结合这两方面，我们得到 $0 < 0$，这是不可能的。这表明 $\lambda_{\beta_1} < \lambda_{\beta_2}$。■

对于非负特征值，我们确实有

命题 4.2. 对于每个 $\beta \in (0, 1)$，算子 L_β作用于 $L^2_{rad}(\mathbb{R}^3)$ 上时，在 $[0, 1]$ 中没有特征值。

证明。令 $\lambda \in [0, 1]$。假设存在一个径向的 H^2 函数 ψ 满足 $L_\beta \psi = \lambda \psi$。由椭圆正则性理论（例如参见 [19]），我们知道 ψ 是光滑的，并且在空间无穷远处指数衰减。基于这一正则性结果，我们将证明以下结果，它体现了我们的关键论证。

断言 4.3. ψ 恒等于零。

证明。回忆 $\lambda \in [0, 1]$，并且 ψ 满足 $L_\beta \psi = \lambda \psi$。我们用反证法，假设它不是零函数。改写该方程

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' - (1 - \lambda)\psi + \frac{3 - \beta}{1 + \beta} Q^2 \psi = 0, \ r > 0. \tag{4.5}$$

记 $\varrho = 1 - \lambda \in [0, 1]$，并令 $F_\epsilon := r\psi(r)$，我们看到 F_ϵ 满足

$$F_\epsilon'' = \left(\epsilon - \frac{3 - \beta}{1 + \beta} Q^2 \right) F_\epsilon \tag{4.6}$$

注意到 $F_\epsilon(0) = 0$。如果 $F_\epsilon'(0)$ 的值为零，则可推出 F_ϵ 恒等于零。因此，F_ϵ' 在 $r = 0$ 处不为零。将 F_ϵ 除以 $-F_\epsilon'(0)$，并仍以 F_ϵ 表示所得函数，我们需要考虑

$$\begin{cases} F_\epsilon'' = \left(\epsilon - \frac{3 - \beta}{1 + \beta} Q^2 \right) F_\epsilon \\ F_\epsilon(0) = 0, F_\epsilon'(0) = -1 \end{cases} . \tag{4.7}$$

断言 4.4。F_ϵ 必须在 $(0,\infty)$ 上变号。此外，记 F_ϵ 的第一个正零点为 $r_\epsilon > 0$，则有 $r_\epsilon \geq r_0$。

证明。反设对于所有 $r > 0$，$-F_\epsilon(r)$ 始终为正。注意，L_β 有唯一的负特征值 $\lambda_\beta < 0$，满足 $L_\beta h = \lambda_\beta h$，其中 h 是某个严格正函数 $\in L^2(\mathbb{R}^3)$。记 $H := rh$，并作适当的归一化，便得到 $-F_\epsilon$ 和 H 分别满足的方程

$$\begin{cases} (-F_\epsilon)'' = \left(\epsilon - \dfrac{3-\beta}{1+\beta}Q^2\right)(-F_\epsilon) \\ (-F_\epsilon)(0) = 0, \quad (-F_\epsilon)'(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} H'' = \left(1 - \lambda_\beta - \dfrac{3-\beta}{1+\beta}Q^2\right)H \\ H(0) = 0, \quad H'(0) = 1 \end{cases}.$$

由于 $\epsilon - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 < 1 - \lambda_\beta - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2$，由 Sturm比较定理（见 [15]）可知，对于所有 $r \geq 0$，$-F_\epsilon(r) \leq H(r)$。另一方面，H 的渐近行为为 $\sim e^{-\sqrt{1-\lambda_\beta}r}$，而对于所有 $r \gg 1$，$-F_\epsilon \sim e^{-\sqrt{\epsilon}r}$。结合这两点，得到 $\varrho \geq 1 - \lambda_\beta$，这与假设 $\varrho = 1 - \lambda < 1 - \lambda_\beta$ 矛盾。因此，F_ϵ 变号。

所断言结果的第二部分源于对Sturm比较定理的另一次应用。这完成了断言4.4的证明。■

接下来，我们将 F_ϵ 与唯一满足以下条件的函数 G 进行比较。

$$\begin{cases} G'' = -3Q^2 G \\ G(0) = 0, G'(0) = -1 \end{cases}. \tag{4.8}$$

<escape>在[15] 中证明了G 在 $(0,+\infty)$ 中恰好改变一次符号。这里，我们将G对应的唯一正零点记为r_*。由于 $-\frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 \geq -3Q^2$，因此，根据 Sturm比较定理，我们推得$r_0 \geq r_* > 0$。由此，我们还可以得到$r_\epsilon \geq r_0$。</escape>

最后，函数 $F(r) := F_\epsilon(r + r_\epsilon)/F'_\epsilon(r_\epsilon)$ 和 $G_*(r) := G(r + r_*)/G'(r_*)$ 分别满足以下方程

$$\begin{cases} F'' = \left(\epsilon - \dfrac{3-\beta}{1+\beta}Q^2(r+r_\epsilon)\right)F \\ F(0) = 0, F'(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} G_*'' = (-3Q^2(r+r_*))G_* \\ G_*(0) = 0, G_*'(0) = 1 \end{cases}. \tag{4.9}$$

现在我们比较这两个平移后的函数。由于 $r_* \leq r_\epsilon$，且 Q 递减，因此 $\varrho - \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2(r+r_\epsilon) \geq -3Q^2(r+r_*)$。由 Sturm比较定理可得 $F \geq G_*$。然而，我们回顾一下 [15] 中的定理 6.1：$G_*(r)$ 在 $r > 0$ 时保持为正，并且对于某个 $c_0 > 0$，$\min_{r \geq 1} G_*(r)\, r \geq c_0$。结合这两点可知，对于所有充分大的 r，$F_\epsilon(r) \geq c_0 r$，这意味着 $F_\epsilon \notin L^2((0,+\infty), dr)$。反过来，这一排除结果意味着原函数 ψ 不属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$，与初始假设矛盾。至此，断言 4.3 的证明完成。■

由命题 4.3 可知 $\psi \equiv 0$，这意味着对于 $[0,1]$，算子 L_β作用于 $L^2{}_{rad}(\mathbb{R}^3)$ 上不存在特征值。由此完成命题4.2的证明。■

命题4.2 蕴含定理 1.3 中的条目（iii）。由于 $L^2{}_{rad}$（$\mathbb{R}^3$）是L^2（$\mathbb{R}^3$）的真子空间，定理 1.3 中所断言的结果（ii）不能由此命题推出。因此我们将给出

（ii）的证明。设 $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$ 是一个解，满足

$$L_\beta \psi = 0. \tag{4.10}$$

我们将证明 ψ 是零函数。我们通过反证法进行论证，假设 ψ 是一个非零函数。我们将通过分析 ψ的球面展开中的每个系数来得到矛盾。为此，我们首先回顾二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上标准拉普拉斯算子的特征值及其对应的特征函数的相关事实。

设 μ_k，$e_k(\omega)$ 为 $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征数据。于是我们有

- $\mu_0 = 0 < \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2 < \mu_4 \leq \cdots$
- $\{e_k\}_{k\geq 0}$ is an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{S}^2)$.

对于每个 $k \geq 0$，我们设

$$\psi_k(r) := \int_{\mathbb{S}^2} \psi(r,\omega) e_k(\omega) d\omega. \tag{4.11}$$

然后，当 r 趋于无穷大时，$\psi_k(r)$ 指数衰减至零，并且它满足方程式。

$$\psi_k'' + \frac{2}{r}\psi_k' - \psi_k + \left(\frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 - \frac{\mu_k}{r^2}\right)\psi_k = 0,\ r > 0. \tag{4.12}$$

注意，对于 $k = 0$，方程（4.12）实际上就是方程（4.5），其中 $\lambda = 0$。因此，命题4.3 意味着 $\psi_0 \equiv 0$ 在 $(0,\infty)$ 上成立。因此，我们将证明，对于每个 $k \geq 1$，都有 $\psi_k \equiv 0$。

ψ 的径向部分刚刚已被证明恒等于零。因此，对于某个 $k \geq 1$，ψ_k 并非恒等于 0。必要时，将 ψ_k 乘以 -1，我们可以假设 $\psi_k(0) \geq 0$。通过一个简单的反证法（与断言 4.3 证明开头所用的方法相同），我们可以得到 $\psi_k(0) > 0$。因此，存在一个 $\rho_k \in (0,\infty]$，使得对于$0 < r < \rho_k$，有 $\psi_k(r) > 0$，且 $\psi_k(\rho_k) = 0$。

将（4.12）乘以 $Q'(r)\, r^2,$，对区间 $(0,\rho_k)$ 上得到的等式积分，并应用分部积分，得到

$$\rho_k^2 \psi_k'(\rho_k) Q'(\rho_k) + \int_0^{\rho_k} \left(Q''' + \frac{2}{r}Q'' - Q' + \frac{3-\beta}{1+\beta}Q^2 Q'\right)\psi_k r^2 dr - \mu_k \int_0^{\rho_k} Q'\psi_k dr = 0. \tag{4.13}$$

由于 Q 是基本解，它也满足方程

$$Q''' + \frac{2}{r}Q'' - \frac{2}{r^2}Q' - Q' + 3Q^2 Q' = 0 \tag{4.14}$$

将其代入（4.13），并利用 L_0 与 L_β 之间的关系，得到

$$\rho_k^2 \psi_k'(\rho_k) Q'(\rho_k) + (2-\mu_k)\int_0^{\rho_k} Q'\psi_k dr - \frac{4\beta}{1+\beta}\int_0^{\rho_k} Q^2 Q'\psi_k r^2 dr = 0. \tag{4.15}$$

注意到 $Q'(r) < 0$ 对每个 $r > 0$。在点 $r = \rho_k$处，容易看出 $\psi'_k(\rho_k) \leq 0$。因此，(4.15) 左端的第一项是非负的。结合假设$\beta > 0$，我们看到第三项严格为正。由 $k \geq 1$ 可知 $\mu_k \geq 2$，从而$2 - \mu_k \leq 0$，因此第二项为正。综合以上各点，我们看到(4.15) 的左端严格为正，而右端为零。这就产生了矛盾，因为(4.15) 是一个恒等式。证明完毕。

■

注意，命题4.2 还意味着点‘1’不是 L_β 在 $L^2_{rad}(\mathbb{R}^3)$ 上的特征值，这正是 (iv) 的前半部分。因此，要完成证明，只需证明

断言 4.5。点“1”不是 L_β over $L^2_{rad}(\mathbb{R}^3)$ 的共振点。

证明。 事实上，断言 4.3 的证明同样表明，阈值点 1 不是 L_β 的共振点。按照断言 4.3 证明中的记号，我们有

$$F_0(r) \geq c_0 r, \quad \forall r \geq 1, \tag{4.16}$$

其中 c_0 是一个严格为正的数。利用变量代换，我们可以对任意$\gamma \leq 3$进行计算

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 (1+|x|)^{-\gamma} dx \geq c_1 \int_1^\infty |F_0(r)|^2 (1+r)^{-\gamma} dr \geq c_1 c_0^2 \int_1^\infty (1+r)^{-\gamma} r^2 dr = \infty. \tag{4.17}$$

这里 c_1 是另一个正的常数。取 $\gamma = 0$，可得 $\psi \notin L^2(\mathbb{R}^3)$。将这一点与上述不等式结合，根据共振的定义，我们可以得出阈值点 1 不是共振点。

■

参考文献

[1] S. Agmon. 薛定谔算子的谱性质与散射理论。比萨高等师范学校科学类年刊 (4), 2(2):151–218, 1975年。[2] A. Ambrosetti 和 E. Colorado. 若干耦合非线性薛定谔方程的驻波。伦敦数学会杂志，第二辑，75(1):67–82, 2007年。[3] M. S. Birman 和 M. Z. Solomjak. 希尔伯特空间中自伴算子的谱理论。施普林格·荷兰，1987年。[4] S.-M. Chang、S. Gustafson、K. Nakanishi 和 T.-P. Tsai. 非线性薛定谔孤立波的线性化算子的谱。《SIAM数学分析杂志》，39(4):1070–1111, 2007/08年。¨Z. Chen 和 W. Zou. 临界指数下耦合薛定谔方程的正最小能量解与相分离。理性力学与分析档案，205(2):515–551, 2012年。¨Z. Chen 和 W. Zou. 耦合薛定谔方程组存在最小能量解的一个最优常数。变分法与偏微分方程，48(3-4):695–711, 2013年。[7] C. V. Coffman. $\delta u - u + u^3 = 0$ 的基态解的唯一性及其他解的变分刻画。理性力学与分析档案，46:81–95, 1972年。[8] O. Costin、M. Huang 和 W. Schlag. 三维空间中 $L_\pm$ 的谱性质。《非线性》，25(1):125–164, 2012年。[9]L. Demanet 和 W. Schlag. 线性化非线性薛定谔方程谱隙条件的数值验证。《非线性》，19(4):829–852, 2006年。[10] M. Grillakis、J. Shatah 和 W. Strauss. 存在对称性时孤立波的稳定性理论。I.《泛函分析杂志》，74:160–197, 1987年。[11] B. Helffer. 谱理论及其应用，剑桥高等数学研究丛书第139卷。剑桥大学出版社，剑桥，2013年。[12] T. Kato. 变系数约化波动方程解的增长性质。《纯粹与应用数学通讯》，12:403–425, 1959年。[13] C. Kenig 和 D. Mendelson. 随机初始数据下的聚焦型能量临界非线性波动方程。《国际数学研究通知》，(19):14508–14615, 2021年。[14] M. K. Kwong. $\Delta u - u + u^p = 0$ 在 R^n 中正解的唯一性。理性力学与分析档案，105(3):243–266, 1989年。[15] D. Li 和 K. Yang. 关于线性化非线性薛定谔算子的谱隙性质。arXiv: 2110.14393, 2021年10月。[16] T. C. Lin 和 J. Wei. 勘误：“¨个耦合非线性薛定谔方程组的基态，$\mathbb{R}^n$，$n \leq 3$”。[《数学物理通讯》255 (2005年)，第3期，629–653；MR2135447]。《数学物理通讯》，(2):573–576, 2008年。

[17] J. L. Marzuola 和 G. Simpson。矩阵哈密顿算子的谱分析。《非线性》，24(2):389–429，2010年12月。[18] K. Nakanishi 和 W. Schlag。不变流形与色散型哈密顿演化方程。苏黎世高等数学讲义。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2011年。¨[19] W.-M. Ni 和 I. Takagi。半线性诺伊曼问题中最小能量解峰值位置的确定。《杜克数学杂志》，70(2):247–281，1993年。[20] M. Reed 和 B. Simon。现代数理物理方法。IV：算子分析。1978年。[21] W. Schlag。轨道不稳定非线性薛定谔方程的稳定流形。《数学年刊》（第2辑），169(1):139–227，2009年。¨I. E. Segal。量子场论中的非线性偏微分方程。载于《应用数学研讨会论文集》，第XVII卷，第210–226页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1965年。[22] B. Simon。薛定谔半群。《美国数学会通报》，7(3):447–526，1982年。[23] B. Sirakov。中国的非线性薛定谔方程组的最小能量孤立波。《数学物理通讯》，271(1):199–221，2007年。¨J. Wei 和 W. Yao。某些耦合非线性薛定谔方程正解的唯一性。《纯粹与应用分析通讯》，11(3):1003–1011，2012年。[24] M. I. Weinstein。非线性薛定谔方程与锐插值估计。《数学物理通讯》，87(4):567–576，1982/83年。 ℝ″M. I. Weinstein。非线性薛定谔方程基态的调制稳定性。《SIAM数学分析杂志》，16(3):472–491，1985年。（YAN CUI）暨南大学数学系，中国广州。电子邮箱：cuiy32@jnu.edu.cn（BO XIA）中国科学技术大学数学科学学院，中国合肥。电子邮箱：xiabomath@ustc.edu.cn，xaboustc@hotmail.com（KAI YANG）东南大学数学学院，中国江苏省南京市，211189。电子邮箱：yangkai99sk@gmail.com，kaiyang@seu.edu.cn