arXiv:2304.09709v1 [math.LO] 19 Apr 2023

有限深度和有限弱宽度传递逻辑的有限公理化

YAN ZHANG

Abstract. 本文研究了有限深度和有限弱宽度的传递逻辑的有限公理化。我们证明了每个具有有限深度和弱宽度 1、且由有根传递框架刻画的传递逻辑都是有限公理化的，其中所有反链至多包含 n 个非自反点。作为否定结果，我们证明，对于每个$n \geqslant 3$ 和 $k \geqslant 2$，都存在深度为 n 且弱宽度为 k 的非有限公理化传递逻辑。

本文研究有限深度且具有有限弱宽度的传递逻辑的有限公理化，也就是说，包含某个 $n \geqslant 1$ 的弱宽度公式 Wid_n^+。这些公式是 [5]，中宽度公式的较弱形式，并且每个 Wid_n^+ ($n \geqslant 1$) 都对应于有根传递框架中的如下条件：由根的某个真后继生成的所有子框架，其宽度至多为 n。作为否定结果，我们通过构造框架的无限不可约序列，证明对于每个 $n \geqslant 3$ 和 $k \geqslant 2$，都存在深度为 n 且弱宽度为 k 的非有限公理化传递逻辑。作为肯定结果，我们证明，每个包含适用于某个 $n \geqslant 1$ 的 $\mathsf{Wid}_n^\bullet$ 的有限深度且弱宽度为 1 的传递逻辑都是有限公理化的；其中 $\mathsf{Wid}_n^\bullet$ 对应于有根传递框架中的如下条件：其中每个反链至多包含 n 个非自反点。

第1节提供预备概念和事实，第2节给出其所有扩张都具有有限模型性质的传递逻辑的有限公理化标准。在第3节中，我们介绍有限深度和有限弱宽度的传递逻辑，并证明非有限公理化结果。随后，我们在第4节中提出有限深度和弱宽度 1 的传递逻辑的有限公理化这一主要结果，并在第5节中总结全文。

1. Preliminaries

本节列出一些标准的预备概念和定理，完整介绍可参见标准的模态逻辑教材（例如 [2], [1]）。模态公式由命题变元构成，使用真值函项联结词和必然算子 $\Box$。我们将简单地称其为公式。正规模态逻辑（或简称模态逻辑）是一个模态公式集合，其中包含所有真值函项重言式以及 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$，并且对肯定前件式、代换和必然化规则封闭。按照惯例，我们用 K（K4）表示最小的

Key words and phrases. 模态逻辑、有限公理化、传递逻辑、有限深度、有限宽度。

模态逻辑（包含 $\Box p \to \Box\Box p$）。对于每个模态逻辑 L，L 的一个扩张是一个模态逻辑 L′，满足 L $\subseteq$L′。设 L 为任意模态逻辑，并设 Δ 为任意公式集合，L $\oplus\,\Delta$ 是包含 L $\cup\,\Delta$的最小模态逻辑；对于每个公式 ϕ，我们用 L $\oplus\,\phi$ 表示 L $\oplus\,\{\phi\}$。按照惯例，我们用 S4 表示 K4 $\oplus\,\Box p \to p$。如果 L′ 在 L 上是有限公理化的，则 L′ = L $\oplus\,\Delta$ 对于某个有限的 Δ成立；如果它在 K 上是有限公理化的，则称其为有限公理化的。

设 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 为任意满足 $w \in W$的框架，设 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{F}$上的任意模型。对于每个公式 ϕ，我们用 $\mathfrak{M}, w \vDash \phi$表示 $\mathfrak{M}$ 在 w处满足 ϕ，用 $\mathfrak{F}, w \vDash \phi$表示 $\mathfrak{M}'$，对 $\mathfrak{F}$上的每个模型 $\mathfrak{M}'$，用 $w \vDash \phi$ 表示 $\mathfrak{M}'$，并用 $\mathfrak{F} \vDash \phi$ 表示 ϕ 在 $\mathfrak{F}$中有效（$\mathfrak{F}$ 是 ϕ的一个框架）。对于任意公式集 Δ 和任意框架类 $\mathscr{C}$，它们之间的有效性关系 $\vDash$ 按通常方式定义，我们将用 Log($\mathscr{C}$)表示模态逻辑 $\{\phi\colon\ \mathscr{C} \vDash \phi\}$。对于所有 $u, v \in W$，若 Ruv 成立但 Rvu不成立，则令 $\vec{R}uv$成立；若 Ruv和 Rvu 均不成立，则令$u \perp_R v$成立。对于所有 $u, v \in W$，当 Ruv时，我们称 u看见 v,$\vec{}$，并称 v 为 u的后继；当 Ruv时，我们称 v 为 u的真后继，并称u 为 v的真前驱。对于每个 $X \subseteq W$，令 $X{\uparrow_R} = \{v\colon$ 对于 $u \in X\}$，Ruv；$X{\downarrow_R} = \{v\colon$ 对于 $u \in X\}$，Rvu；以及 $X{\uparrow_R^-} = X{\uparrow_R} - X$ 和 $X{\downarrow_R^-} = X{\downarrow_R} - X$。当$R$在上下文中明确时，我们省略“$_R$”，改用“$X{\uparrow}$”和“$X{\downarrow}$”。对于每个$w \in W$，令 $w{\uparrow} = \{w\}{\uparrow}$, $w{\downarrow} = \{w\}{\downarrow}$, $w{\uparrow^-} = \{w\}{\uparrow^-}$ 和 $w{\downarrow^-} = \{w\}{\downarrow^-}$。

对于每个两两不相交的框架（模型）族 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ ($\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$)，我们用 $\biguplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ ($\biguplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i$) 表示 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ ($\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$) 的不相交并。对于每个框架 $\mathfrak{F} = \langle W、 R\rangle$，以及定义在 $\mathfrak{F}$ 上的每个模型 $\mathfrak{M}$，对于每个非空 $X \subseteq W$，我们用 $\mathfrak{F}\restriction X$($\mathfrak{M}\restriction X$) 表示 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{M}$) 在 X 上的限制，并用 $\mathfrak{F}|_X$ ($\mathfrak{M}|_X$) 表示由 X 生成的 $\mathfrak{F}$ 的子框架（$\mathfrak{M}$ 的子模型）；当 $X = \{w\}$ 时，我们分别用 $\mathfrak{F}|_w$ 和 $\mathfrak{M}|_w$ 表示 $\mathfrak{F}|_{\{w\}}$ 和 $\mathfrak{M}|_{\{w\}}$。对于框架 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$（模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$），当 f 是将 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{M}$) 归约到 $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{M}'$) 的一个归约时，我们称函数 f 将 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{M}$) 约化到 $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{M}'$)；如果存在一个函数将 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{M}$) 约化到 $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{M}'$)，则称 $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{M}$) 可约到 $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{M}'$)。我们假定读者熟悉关于在这些框架/模型构造下真理和有效性保持的相关定理。

设 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 为一个传递框架。对于所有 $w, u \in W$，$w \sim_R u$，当且仅当 $w = u$，或者 Rwu 且 Ruw 时成立。$\mathfrak{F}$ 中的一个簇是模 $\sim_R$ 意义下的一个等价类。对于每个 $w \in W$，我们用 $\boldsymbol{c}_{(w)}$ 表示包含 w 的簇。对于 $\mathfrak{F}$ 中的每个簇 $\boldsymbol{c}$，如果它是 $\mathfrak{F}$ 中一个非自反点构成的单元素集合，则 $\boldsymbol{c}$ 是退化的；否则，它是非退化的。令 $k \geqslant 1$。如果存在一个 $\vec{R}$-链 $\{u_1, \ldots, u_n\}$，满足 $n > k$，则 $\mathfrak{F}$ 中的点 u_1 的秩大于 k；如果存在一个 $\vec{R}$-链 $\{u_1, \ldots, u_k\}$，且 u_1 的秩不大于 k，则其秩为 k。如果 $\mathfrak{F}$ 包含一个秩为 k 的点，但不包含任何秩大于 k 的点，则称其秩为 k；如果对于某个 $k \geqslant 1$，其秩为 k，则称其具有有限秩。以下公式来自 [9], ，其中 $i \geqslant 1$:

$$\mathsf{B}_1 = \Diamond\Box p_1 \to p_1,$$
$$\mathsf{B}_{i+1} = \Diamond(\Box p_{i+1} \wedge \neg \mathsf{B}_i) \to p_{i+1}.$$

对于 K4 $\oplus$ B_n (S4 $\oplus$ B_n)，我们使用 K4B_n (S4B_n)，其中 $n \geqslant 1$。如果一个传递逻辑包含 B_n 但不包含 B_{n-1}（假定 $\mathsf{B}_0 = \perp$），则称其深度为 n ($n \geqslant 1$)；如果它对某个 $k \geqslant 1$ 包含 B_k，则称其具有有限深度。以下结论已在 [9] 中得到:

命题 1.1. 对于每个传递框架 $\mathfrak{F}$ 和每个 $n \geqslant 1$，$\mathfrak{F} \vDash \mathsf{B}_n$ 当且仅当 $\mathfrak{F}$ 的秩至多为 n。

定理 1.2。所有具有有限深度的传递逻辑都具有有限模型性质。

传递框架 $\mathfrak{F} = \langle W$ 中的反链 $R\rangle$ 是满足以下条件的集合：对于所有 u、$v \in A$、$u \neq v$，仅当 $u \perp_R v$ 时才有 $A \subseteq W$。每当我们谈及框架中的反链 $\{u_0, \ldots, u_n\}$ 时，我们都预设 u_0、.....、u_n 彼此不同。如果对于框架中的每个反链 A 都有 $|A| \leqslant n$，则称传递框架的宽度至多为 n （$n \geqslant 1$）。以下公式来自 [5], ，其中 $n \geqslant 1$:

$$\mathsf{Wid}_n = \bigwedge_{i \leqslant n} \Diamond p_i \to \bigvee_{0 \leqslant i \neq j \leqslant n} \Diamond (p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)).$$

如果一个传递逻辑包含 Wid_n 但不包含 Wid_{n-1} （假设 $\mathsf{Wid}_0 = \bot$），则称其宽度为 n ($n \geqslant 1$)；如果它对某个 $k \geqslant 1$ 包含 Wid_k，则称其具有有限宽度。以下命题引自 [5]:

命题 1.3. 对每个有根传递框架 $\mathfrak{F}$ 和每个 $n \geqslant 1$, $\mathfrak{F} \vDash \mathsf{Wid}_n$ 当且仅当 $\mathfrak{F}$ 的宽度至多为 n。

2. 有限公理化的判据

本节给出模态逻辑 L 的所有扩张可在 L 上有限公理化的充要条件。对于每个模态逻辑族 $\{\mathrm{L}_i\}_{i \in I}$， $\bigoplus_{i \in I} \mathrm{L}_i$ 是包含 $\bigcup_{i \in I} \mathrm{L}_i$ 的最小模态逻辑。以下是一个塔斯基的著名定理（例如参见 [2]）：

定理 2.1. 设 L 和 L′ 是任意模态逻辑，且 L $\subseteq$L′。那么，L′ 在 L 上有限公理化，当且仅当不存在一条无限递增的 $\subset$-链 $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_2 \subset \cdots$，其各项都是 L 的扩展，且满足 $\mathrm{L}' = \bigoplus_{i \in \omega} \mathrm{L}_i$。

设 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \omega}$ 是任意框架无限序列。如果对于所有满足 $i < j (i \neq j)$ 的 i、$j \in I$，$\mathfrak{F}_j$ 的任何点生成子框架都不能约化为 $\mathfrak{F}_i$，则称 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \omega}$ 为后向不可约（前向-后向不可约，或简称不可约）。对于每个框架类 $\mathscr{C}$，如果 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \omega}$ 是关于 $\mathscr{C}$ 的后向不可约（或不可约）序列，则 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \omega}$ 是后向不可约（或不可约）的，并且对于每个 $i \in \omega$ 都有 $\mathfrak{F}_i \in \mathscr{C}$。若模态逻辑 L 由框架类 $\mathscr{C}$ 刻画，则 L $= \mathrm{Log}(\mathscr{C})$。

下面的定理根据向后不可约序列给出了有限公理化的一个充分条件，其证明通过应用定理 2.1 得出。

定理 2.2。设 L 是一个模态逻辑，设 $\mathscr{C}$ 是 L 的一个框架类，使得 L 的每个扩张都由 $\mathscr{C}$ 的一个子类刻画。若不存在关于 $\mathscr{C}$ 的向后不可约序列，则 L 的所有扩张都可在 L 上有限公理化。

证明。假设 L′ 扩张了 L，但不能在 L 上有限公理化。根据定理 2.1，存在 L 的扩张所构成的一个无限递增的 $\subset$-链 $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}_1 \subset \cdots$，于是对于每个 $i \in \omega$，存在一个 $\phi_i \in \mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$，因此根据假设，对于 $\mathscr{C}$ 的某个成员 $\mathfrak{F}_i$，有 $\mathfrak{F}_i \nvDash \phi_i$ $\mathfrak{F}_i \vDash \mathrm{L}_i$，这意味着对于每个 i，$j \in \omega$ 满足 $i < j$、$\mathfrak{F}_i \nvDash \phi_i$ 和 $\mathfrak{F}_j \nvDash \phi_i$。因此，$\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \omega}$ 是关于 $\mathscr{C}$ 的一个向后不可约序列。 ■

从现在起，每当我们谈到这类框架（对于 L）上的后向不可约（或不可约）序列时，我们指的都是相对于这类框架（对于 L）的框架类而言的后向不可约（或不可约）序列。以下推论常用于研究扩张具有有限模型性质（f.m.p.）的模态逻辑的有限公理化问题（参见例如 [3], [7] 和 [10]）。

推论 2.3. 设 L 为任意一个模态逻辑，其所有扩张均具有有限模型性质。若不存在 L 的有限根框架的后向不可约序列，则 L 的所有扩张均可在 L 上有限公理化。

证明。令 $\mathscr{C}$ 是 L 的有限根框架类。由假设可知，L 的每个扩张都由 $\mathscr{C}$ 的一个子类刻画。因此，结论由定理 2.2 得出。 ■

在下文中，我们证明推论 2.3 的逆命题，并将其与推论 2.3 结合起来，从而得到关于（反向）不可约序列的有限公理化的最终判据。设 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 是一个有限根传递框架，其中 $W = \{w_0, \ldots, w_n\}$ 与 w_0 一起作为 $\mathfrak{F}$ 的根，并且 w_0、.....、w_n 两两不同。我们称 $\langle w_0$、.....、$w_n\rangle$ 为 $\mathfrak{F}$ 中点的排序。设 p_0、.....、p_n 是彼此不同的命题字母，并称以下公式的合取为关于 $\langle w_0$、.....、$w_n\rangle$ 的 $\mathfrak{F}$ 的框架公式：

- p_0,
- $\Box(p_0 \vee \cdots \vee p_n)$,
- $\bigwedge\{(p_i \to \neg p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg p_j)\colon\ i$、$j \leqslant n$ 和 $i \neq j\}$,
- $\bigwedge\{(p_i \to \Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \Diamond p_j)\colon\ i$、$j \leqslant n$ 和 $Rw_iw_j\}$,
- $\bigwedge\{(p_i \to \neg\Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg\Diamond p_j)\colon\ i$、$j \leqslant n$ 且非 $Rw_iw_j\}$。

$\mathfrak{F}$ 中关于 $\mathfrak{F}$ 的框架公式[1] 是相对于点的排序 $\langle u_0, \ldots, u_n\rangle$ 的 $\mathfrak{F}$ 框架公式，其中 u_0 是一个根。

引理 2.4. 设 $\mathfrak{F} = \langle W$、$R\rangle$ 是一个有限根传递框架，其中 ϕ 是关于 $\mathfrak{F}$ 中各点的排序 $\langle w_0$、...、$w_n\rangle$ 的框架公式。那么 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 的根 w_0 处是可满足的。

证明. 设 $\mathfrak{M} = \langle\mathfrak{F}$，其中对于每个 $i \leqslant n$，$V(p_i) = \{w_i\}$。不难验证，$\mathfrak{M}$、$w_0 \vDash \phi$。 ■

下面是来自 [1], 的引理 3.20，证明留给读者。

引理 2.5. 设 $\mathfrak{F}$ 是一个有限根传递框架，其中 ϕ 是一个框架公式；再设 $\mathfrak{G} = \langle U$、$S\rangle$ 是满足 $u \in U$ 的任意传递框架。那么，ϕ 在 $\mathfrak{G}$ 的 u 处可满足，当且仅当 $\mathfrak{G}|_u$ 可约为 $\mathfrak{F}$。

命题 2.6. 设 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$ 是有限根传递框架的一个不可约序列。那么存在连续统多个 L = 逻辑集($\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$) 的扩张。

证明。对于每个 $i \in \omega$，令 ϕ_i 为 $\mathfrak{F}_i$的框架公式；对于每个 $I \subseteq \omega$，令 $\mathrm{L}_I = \mathrm{Log}(\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I})$。任取 I、$J \subseteq \omega$，使得存在一个 $i \in I - J$。对于每个 $k \in J$，由于根据假设和引理 2.5，$i \neq k$、ϕ_i 在$\mathfrak{F}_k$中不可满足，因此 $\mathfrak{F}_k \vDash \neg\phi_i$。于是可推出 $\neg\phi_i \in \mathrm{L}_J$。根据引理 2.4，$\mathfrak{F}_i \nvDash \neg\phi_i$，继而 $\neg\phi_i \notin \mathrm{L}_I$，因此 $\mathrm{L}_I \neq \mathrm{L}_J$。类似的论证表明，若存在一个 $j \in J - I$，则 $\mathrm{L}_I \neq \mathrm{L}_J$。因此，对于所有满足 $I \neq J$的 I、$J \subseteq \omega$，都有 $\mathrm{L}_I \neq \mathrm{L}_J$。由此可推出，L 存在连续统多个扩张。 ■

对于每个框架 $\mathfrak{F} = \langle W$、$R\rangle$，我们使用 $\|\mathfrak{F}\|$ 作为 $|W|$。以下内容很容易验证：

事实 2.7. 设 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$ 为一个框架无限序列，使得对于一个 $m \geqslant 1$，对于所有 $i \in \omega$ 都有 $\|\mathfrak{F}_i\| \leqslant m$。那么存在一个无限 $I \subseteq \omega$，使得 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ 中的所有框架都是同构的。

[1] $\mathfrak{F}$ 的框架公式也称为 *Jankov-Fine formula* 的 $\mathfrak{F}$（参见 [1]）。“框架公式”一词可追溯至 [4]。

命题 2.8. 每个有限框架的无限向后不可约序列都有一个无限不可约子序列。

证明。设 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$ 是一个有限框架的后向不可约序列。根据事实 2.7，不存在 $m\in\omega$ 使得对所有 $i\in\omega$ 都有 $\|\mathfrak{F}_i\|\leqslant m$。因此，存在一个无限的 $I\subseteq\omega$，使得对所有满足 $i<j$ 的 i、$\|\mathfrak{F}_i\|<\|\mathfrak{F}_j\|$，都有 $j\in I$；因此，$\mathfrak{F}_i$ 的点生成子框架都不能约化为 $\mathfrak{F}_j$。于是可知 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ 是不可约的。 ■

定理 2.9. 设 L 是一种传递逻辑，其所有扩张都具有有限模型性质。那么以下条件等价:[2]

(i) L 的所有扩张在 L 上都是有限公理化的；(ii) 对于 L，不存在有限根框架的无限向后不可约序列；(iii) 对于 L，不存在有限根框架的无限不可约序列。

证明。根据不可约序列的定义和命题 2.8，(ii) 等价于 (iii)。根据推论 2.3 和命题 2.6，(ii) 蕴含 (i)，且 (i) 蕴含 (iii)，因此 (i) 等价于 (ii)。 ■

3。 Transitive Logics of Finite Depth and of Finite Weak Width

本节将介绍弱宽度公式 Wid_n^+ $(n\geqslant 1)$，讨论其框架条件，随后证明，只要 $n\geqslant 3$ 和 $k\geqslant 2$ 成立，$\mathsf{K4B}_n\oplus\mathsf{Wid}_k^+$ 就存在不可有限公理化的扩张。

对于每个 $n\geqslant 1$，令 Wid_n^+ 为以下公式:

$$\mathsf{Wid}_n^+ = q\wedge\Diamond(\Box\neg q\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\Diamond p_i))\to\bigvee_{0\leqslant i\neq j\leqslant n}\Diamond(p_i\wedge(p_j\vee\Diamond p_j)).$$

若一个传递逻辑包含 Wid_n^+ 但不包含 Wid_{n-1}^+，则其弱宽度为 n $(n\geqslant 1)$；若它包含 Wid_k^+ （其中 $k\geqslant 1$），则其具有有限弱宽度。

命题 3.1. 设 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$ 是一个传递框架，且 $w\in W$ 和 $n\geqslant 1$。那么 $\mathfrak{F},w\vDash\mathsf{Wid}_n^+$ 当且仅当对每个满足 $\vec{R}wu$ 的 u，$\mathfrak{F}|_u$ 的宽度至多为 n。

证明。假设对于框架 $\mathfrak{F}$ 上的一个模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M},w\nvDash\mathsf{Wid}_n^+$。由于 $\mathfrak{M},w\vDash q\wedge\Diamond(\Box\neg q\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\Diamond p_i))$，存在一个 $u\in w\uparrow$，使得 $\mathfrak{M},u\vDash\Box\neg q\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\Diamond p_i)$，并且随后 Rwu，且对于每个 $i\leqslant n$，$\mathfrak{M},v_i\vDash p_i$ 对某个 $v_i\in u\uparrow$ 成立。任取满足 $i\neq j$ 的 i，$j\leqslant n$。由于 $\mathfrak{M},w\nvDash\bigvee_{0\leqslant i\neq j\leqslant n}\Diamond(p_i\wedge(p_j\vee\Diamond p_j))$，且由 R 的传递性可知 Rwv_i，因此可得 $\mathfrak{M},v_i\vDash p_i$ 和 $\mathfrak{M},v_i\nvDash p_j\vee\Diamond p_j$，并且$\mathfrak{M},v_j\vDash p_j$ 和 $\mathfrak{M},v_j\nvDash p_i\vee\Diamond p_i$，于是 $v_i=v_j$、Rv_iv_j 和 Rv_jv_i 均不成立。因此 $\{v_0,\dots,v_n\}$ 是一个反链，进而 $\mathfrak{F}|_u$ 的宽度大于 n，因为$\{v_0,\dots,v_n\}\subseteq u\uparrow$。

假设存在一个 $u\in\mathsf{c}_{(w)}\uparrow^-$，使得 $\mathfrak{F}|_u$ 的宽度大于 n。那么存在一个反链 $\{v_0,\dots,v_n\}\subseteq u\uparrow$。令 $\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{F},V\rangle$，其中对每个 V，$q=\{w\}$，并且对每个 $i\leqslant n$，$V(p_i)=v_i$。由于 $\vec{R}wu$ 和 $\{v_0,\dots,v_n\}\subseteq u\uparrow$，不难看出 $\mathfrak{M}$、$u\vDash\Box\neg q\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\Diamond p_i)$，进而 $\mathfrak{M}$、$w\vDash q\wedge\Diamond(\Box\neg q\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\Diamond p_i))$。对于每个 $v\in w\uparrow$ 和每个 $i\leqslant n$，如果 $\mathfrak{M}$、$v\vDash p_i$，根据 V 的定义，我们知道 $v=v_i$，并且对于满足 $j\neq i$ 的每个 $j\leqslant n$，$\mathfrak{M}$、$v\nvDash p_j\vee\Diamond p_j$。因此，对于每个 $v\in w\uparrow$，$\mathfrak{M}$、$v\nvDash$

[2]由于可以从 L 的一列有限根框架的无限不可约序列构造出连续统个 L 的扩展，因此我们还有以下等价关系：存在连续统个不可有限公理化的 L 的扩张，当且仅当存在一列 L 的有限根框架的无限向后不可约序列，当且仅当存在一列 L 的有限根框架的无限不可约序列。

$\bigvee_{0\leqslant i\neq j\leqslant n}(p_i\wedge(p_j\vee\Diamond p_j))$，由此可知 $\mathfrak{M}$、$w\nvDash\bigvee_{0\leqslant i\neq j\leqslant n}\Diamond(p_i\wedge(p_j\vee\Diamond p_j))$，从而 $\mathfrak{M}$、$w\nvDash\mathbf{Wid}_n^+$。 ■

在下文中，我们将通过构造秩 3 的有限根传递框架的不可约序列，证明只要 $n\geqslant 3$ 和 $k\geqslant 2$，$\mathbf{K4B}_n\oplus\mathbf{Wid}_k^+$ 就存在不可有限公理化的扩张。

我们现在构造由秩3 的有限根传递框架组成的不可约序列，其中每个秩2 的点恰好有两个真后继。对于每个 $n\in\omega$，令 $B_n=\{X\in\mathscr{P}(C_n)\colon\ |X|=2\}$，其中 $C_n=\{k\colon\ k\leqslant n+1\}$，并令$\mathfrak{H}_n=\langle W_n,\ E_n\rangle$，其中

$$W_n=\{a\}\cup B_n\cup C_n,$$
$$E_n=\{\langle a,u\rangle:u\in B_n\cup C_n\}\cup\{\langle b,c\rangle\in B_n\times C_n:c\in b\}.$$

容易看出，对于每个 $n\in\omega$，在 $\mathfrak{H}_n$、a 中的每一个都是秩 3，而 B_n 的成员是秩 2，C_n 的成员则是秩 1。注意，对于每个 $n\in\omega$，$\mathfrak{H}_n$ 是一个有限严格偏序。由于这些框架中所有秩 2 的点恰好有两个真后继，以下事实成立:

事实 3.2. 对于每个 $n\geqslant 2$，$\mathbf{Wid}_n^+$ 在 $\{\mathfrak{H}_n\}_{n\in\omega}$ 的所有成员中都有效。

在引理 3.4 的证明中，我们利用了关于归约的以下简单事实:

事实 3.3. 设 f 是 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的归约，其中 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$ 都是传递的，并设 w 是 $\mathfrak{F}$ 中的一个点。则以下结论成立:

(i) 若 $f(w)$ 在 $\mathfrak{G}$ 中是死端，则 w 在 $\mathfrak{F}$ 中也是死端；(ii) 对每个 $n\geqslant 1$，若 $f(w)$ 在 $\mathfrak{G}$ 中的秩为 n，则 w 在 $\mathfrak{F}$ 中的秩至少为 n .

引理 3.4. $\{\mathfrak{H}_n\}_{n\in\omega}$ 不可约。

证明。令 $k,n\in\omega$ with $k<n$。我们只证明 $\mathfrak{H}_n$ 不能约化为 $\mathfrak{H}_k$，另一方向显然，因为 $|W_k|<|W_n|$。我们用 R 表示 E_n，用 S 表示 E_k。根据定义，对于每个 $b\in B_n$，$b{\uparrow}_{E_n}=b$，因此根据假设，

$$b{\uparrow}_R=b\text{ for each }b\in B_n. \tag{1}$$

反证，假设 f约化到 $\mathfrak{H}_n$ $\mathfrak{H}_k$。由事实 3.3 可得 $f(a)=a$,$f[B_n]=B_k$和 $f[C_n]=C_k$。由于 $k<n$, $C_k\subset C_n$，因此存在互不相同的$c,c'\in C_n$，使得 $f(c)=f(c')$。令 $b=\{c,c'\}\in B_n$。那么，对于某些互不相同的 $v,v'\in C_k$，有 $f(b)=\{v,v'\}\in B_k$。根据定义，

$$Sf(b)v,\ Sf(b)v'\text{ and }f(b)\neq v,v'. \tag{2}$$

由于 $f(c)=f(c')$，所以要么 $v\neq f(c)$ $f(c')$，要么 $v'\neq f(c)$ $f(c')$。若 $v\neq f(c)$ $f(c')$，则由 (1) 和 (2) 可得 $Sf(b)v$，但对每个 $u\in b{\uparrow}_R=\{c,c'\}$，都有 $f(u)\neq v$，这与假设 f约化到 $\mathfrak{H}_n$ $\mathfrak{H}_k$ 矛盾。同理，若 $v'\neq f(c)$ $f(c')$，则$Sf(b)v'$，但对每个 $u\in b{\uparrow}_R$，都有 $f(u)\neq v'$，这再次与该假设矛盾。 ■

定理 3.5. 设 $n\geqslant 3$ 和 $k\geqslant 2$。存在 $\mathbf{K4B}_n\oplus\mathbf{Wid}_k^+$ 的不可有限公理化的扩张。[3]

[3]根据脚注 2，我们实际上可以证明，只要 $n\geqslant 3$ 和 $k\geqslant 2$，就存在连续统多个 $\mathbf{K4B}_n\oplus\mathbf{Wid}_k^+$ 的扩张。

证明. 根据命题 1.1 和事实 3.2，对于每个 $n \in \omega$， $\mathfrak{H}_n$ 都是 $\mathsf{K4B}_n \oplus \mathsf{Wid}_k^+$ 的框架。由引理 3.4 和定理 2.9 可得，存在 $\mathsf{K4B}_n \oplus \mathsf{Wid}_k^+$ 的不可有限公理化的扩张。 ■

4. Finite Axiomatizability of Transitive Logics of Finite Depth and of Weak Width 1

考虑以下公式，其中 $n \geqslant 1$:

$$\mathsf{Wid}_n^\bullet = \bigwedge_{i \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge \Box\neg p_i) \to \bigvee_{0 \leqslant i \neq j \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)).$$

在本节中，我们讨论带有 $n \geqslant 1$ 的 $\mathsf{Wid}_n^\bullet$ 的框架条件，研究树上的良拟序，然后证明每个包含 $\mathsf{Wid}_n^\bullet$ for an$n \geqslant 1$ 的有限深度和弱宽度 1 的传递逻辑都是有限公理化的。

4.1. $\mathsf{Wid}_n^\bullet$ 的传递框架。设 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 为任意框架，并设 A 为 $\mathfrak{F}$ 中的反链。若对所有 $w \in A$， Rww 均不成立，则称 A 是非自反的。

命题 4.1. 设 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 是任意传递框架，且设 $w \in W$ 和 $n \geqslant 1$。那么 $\mathfrak{F}, w \vDash \mathsf{Wid}_n^\bullet$ 当且仅当对 $\mathfrak{F}|_w$ 中的每个非自反反链 A，都有 $|A| \leqslant n$。

证明。假设对于模型 $\mathfrak{M}$ 在 $\mathfrak{F}$ 上， $\mathfrak{M}, w \nvDash \mathsf{Wid}_n^\bullet$。由于 $\mathfrak{M}, w \vDash \bigwedge_{i \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge \Box\neg p_i)$，我们得知，对于每个 $i \leqslant n$， $\mathfrak{M}, u_i \vDash p_i$ 都是一个非自反点 $u_i \in w\uparrow$。任取满足 $i \neq j$ 的 $i, j \leqslant n$。由于 $\mathfrak{M}, w \nvDash \bigvee_{0 \leqslant i \neq j \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$，由 Rwu_i 和 $\mathfrak{M}, u_i \vDash p_i$ 可得 $\mathfrak{M}, u_i \nvDash p_j \vee \Diamond p_j$；进一步由 Rwu_j 和 $\mathfrak{M}, u_j \vDash p_j$ 可得 $\mathfrak{M}, u_j \vDash p_j$ 且 $\mathfrak{M}, u_j \nvDash p_i \vee \Diamond p_i$。因此， $u_i = u_j$、 Ru_iu_j 和 Ru_ju_i 均不成立。故 $\{u_0, \ldots, u_n\}$ 是 $\mathfrak{F}|_w$ 中一个非自反反链，其基数大于 n。

假设 $\{u_0, \ldots, u_n\}$ 中存在一个非自反的反链。令 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}、 V\rangle$，其中对每个 $i \leqslant n$， $V(p_i) = u_i$。容易看出，对每个 $i \leqslant n$， $\mathfrak{M}、 u_i \vDash p_i \wedge \Box\neg p_i$，因此 $\mathfrak{M}、 w \vDash \bigwedge_{i \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge \Box\neg p_i)$。对于每个 $v \in w\uparrow$ 和每个 $i \leqslant n$，如果 $\mathfrak{M}、 v \vDash p_i$，根据 V 的定义，我们知道 $v = u_i$，并且对于满足 $j \neq i$ 的每个 $j \leqslant n$， $\mathfrak{M}、 v \nvDash p_j \vee \Diamond p_j$。因此，对于每个 $v \in w\uparrow$， $\mathfrak{M}、 v \nvDash \bigvee_{0 \leqslant i \neq j \leqslant n}(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$，由此可推出 $\mathfrak{M}、 w \nvDash \bigvee_{0 \leqslant i \neq j \leqslant n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$，从而 $\mathfrak{M}、 w \nvDash \mathsf{Wid}_n^\bullet$。 ■

以下命题是命题 4.1 的直接推论。

命题 4.2. 对于每个有根传递框架 $\mathfrak{F}$ 以及每个 $n \geqslant 1$， $\mathfrak{F} \vDash \mathsf{Wid}_n^\bullet$ 当且仅当$|A| \leqslant n$ 对于 $\mathfrak{F}$ 中的每个非自反的反链 A。

4.2. 良拟序。设 A 为任意集合。集合 A 上的二元关系 R 是拟序，当且仅当它是自反且传递的。设 A上的 $\preceq$ 是一个拟序。我们称 $\preceq$ 为良拟序（简称：wqo），当且仅当 A 的元素的每个无限序列 $(a_k)_{k \in \omega}$ 都包含其无限子序列 $(a_k)_{k \in I \subseteq \omega}$，使得对于所有满足 $i < j$ 的 i、 $j \in I$，都有 $a_i \preceq a_j$。注意，如果 A 是有限的，则 A 上的任意拟序都是良拟序；并且，如果 A上的 $\preceq$ 是良拟序，则 $A' \subseteq A$ 上的 $\preceq$ 也是良拟序。设 6 为通常的小于序。我们如下在 ω 上定义一个新序 4： $m \preccurlyeq n$ 当且仅当 $m = n = 0$ 或 $0 < m \leqslant n$。

事实 4.3。6 和 4 在 ω 上都是良拟序。

[4]另一种广为人知的 *well-quasi-order* 定义如下： $\preceq$ 是一个 *well-quasi-order*，当且仅当对于元素 A 的每个无限序列 $(a_k)_{k \in \omega}$，都存在两个元素 a_i、 a_j，使得 $a_i \preceq a_j$ 且 $i < j$。这两个定义等价，其等价性的证明见 [6]中的引理 2.5。

以下引理出自 [8], ，读者也可参阅[6]中的引理 2.6。

引理 4.4。设 $\preceq_1$ 和 $\preceq_2$ 分别是集合 A_1 和 A_2 上的良拟序，并设 $\preceq$ 是 $A_1 \times A_2$ 上按如下方式定义的序： $\langle a_1, a_2\rangle \preceq \langle a_1', a_2'\rangle$ 当且仅当 $a_1 \preceq_1 a_1'$ 和 $a_2 \preceq_2 a_2'$。那么 $\preceq$ 是 $A_1 \times A_2$ 上的良拟序。

设 A 是任意集合。我们用 A^* 表示 A 上所有有限序列（或字符串）的集合，用 $\ell(s)$ 表示序列 s 的长度；对于每个 $i \leqslant k$，我们用 $\#_i(s)$ 表示 s 的第 i 个成员，编号从 0 开始。对于每个 $n \geqslant 0$，我们固定 $\mathsf{Seq}_{\leqslant n}(A) = \{s \in A^* : \ell(s) \leqslant n\}$。设 $\preceq$ 是 A 上的拟序。我们按如下方式在 A^* 上定义序 $\trianglelefteq$ 和 $\ll$：

- 对于所有 $s, t \in A^*$，$s \trianglelefteq t$，当且仅当 $\ell(s) = \ell(t)$，并且对于每个 $i < \ell(s)$，$\#_i(s) \preceq \#_i(t)$。
- 对所有 s，$t \in A^*$ 其中 $s = (a_i)_{i<k}$ 且 $t = (b_i)_{i<n}$，$t \ll s$ 当且仅当以下任一情况成立：$n = k = 0$，或 $n \geqslant k > 0$ 且 $a_k \preceq b_n$ 且 $s \trianglelefteq t'$ 对于一个子序列 t'（属于 t）。

很容易看出，$\trianglelefteq$ 和 $\ll$ 都是 A^*上的拟序。此外，通过简单的归纳法，可以应用引理 4.4 得到以下引理。

引理 4.5. 如果 $\preceq$ 是 A 上的良拟序，那么对于所有 $n \geqslant 0$，$\trianglelefteq$ 都是 $\mathsf{Seq}_{\leqslant n}(A)$ 上的良拟序。

以下定理是 [6], 中定理 3.2 的一个略强的表述，但同样的证明方法也适用于此处。该定理的一个受限版本，其中 A 是自然数集，已按照与 [6] 相同的思路在 [3] 中得到了证明。

定理 4.6。如果 $\preceq$ 是 A 上的良拟序，那么 $\ll$ 是 A^* 上的良拟序。

树是一个二元组 $\langle T, \leq\rangle$，其中 T 是一个非空集合，$\leq$ 是 T 上满足向下连通性（$\forall m \forall m' \exists w$（$w \leq m \wedge w \leq m'$））且没有向下分支（$\forall m \forall w \forall w'$（$w \leq m \wedge w' \leq m \rightarrow w \leq w' \vee w' \leq w$））的偏序。$w < u$ 被定义为 $w \leq u \wedge w \neq u$。设 $\mathfrak{T} = \langle T, \leq\rangle$ 是任意树。注意，集合 $anc_{\mathfrak{T}}$（w）$= \{u \in T : u \leq w\}$ 在 $\leq$下构成一条链，并且有限树总是具有唯一的根。我们用 dom（$\mathfrak{T}$）表示 $\mathfrak{T}$ 的定义域，并在根存在时用 $root$（$\mathfrak{T}$）表示 $\mathfrak{T}$ 的根。对于任意 $w \in T$，w 在 $\mathfrak{T}$ 中的层级为 $lev_{\mathfrak{T}}$（w）$= |anc_{\mathfrak{T}}$（w）$|$，w 的直接后继集合为 $suc_{\mathfrak{T}}$（w）$= \{u \in T : w < u \wedge \neg\exists v$（$w < v < u$）$\}$，而 $\mathfrak{T}$ 的高度为 $heit$（$\mathfrak{T}$）$= max\{lev_{\mathfrak{T}}$（$w$）$: w \in T\}$。给定一个标签集合 Σ，Σ- 树是一个二元组 $\langle \mathfrak{T}, \tau\rangle$，其中 $\mathfrak{T}$ 是一棵树，τ 是定义在 $\mathfrak{T}$ 上、从 dom（$\mathfrak{T}$）到 Σ 的标记函数。设 $\mathfrak{t} = \langle \mathfrak{T}, \tau\rangle$ 是任意 Σ-树，其中 $\mathfrak{T} = \langle T, \leq\rangle$。如果其底层树 $\mathfrak{T}$ 是有限的，则 Σ-树 $\mathfrak{t}$ 是有限的；高度（定义域、根等）也可自然地从底层树推广到 Σ- 树。对于每个 $\Delta \subseteq \Sigma$，dom（$\mathfrak{t}$）$^{\Delta} = \{w \in dom$（$\mathfrak{t}$）$: \tau$（w）$\in \Delta\}$，并且我们用 dom（$\mathfrak{t}$）^{l} 表示 dom（$\mathfrak{t}$）$^{\{l\}}$。

在下文中，我们只考虑有限的 ω树，并用$\mathbf{T}^{\omega}$ 表示所有有限 ω树的集合。对于每个 m、$n \geqslant 1$，我们固定

$$\mathbf{T}^{\omega}_{=m,<n} = \{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}^{\omega} : heit(\mathfrak{t}) = m \wedge \left|dom(\mathfrak{t})^0\right| < n\},$$
$$\mathbf{T}^{\omega}_{\leqslant m,<n} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{T}^{\omega}_{=m,<n}.$$

注意，$\mathbf{T}^{\omega}_{=1,<n} = \mathbf{T}^{\omega}_{\leqslant 1,<n}$ 以及其中所有的 ω-树都只有一个节点，即根。为了便于讨论，我们将一个 Σ-树 $\mathfrak{t} = \langle \mathfrak{T}, \tau\rangle$ 表示为以下三元组：

$$\mathfrak{t} = \langle (root(\mathfrak{t}), \tau(root(\mathfrak{t}))), (\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m), (\mathfrak{t}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{t}_{m+n})\rangle, \tag{3}$$

其中

- $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m$ 都是由 $\{w \in suc_{\mathfrak{t}}(root(\mathfrak{t}))$中的一个元素生成的 $\mathfrak{t}$ 的子树 $: \tau(w) = 0\}$,
- $\mathfrak{t}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{t}_{m+n}$ 都是由 $\{w \in suc_{\mathfrak{t}}(root(\mathfrak{t})) : \tau(w) > 0\}$, 中的一个元素生成的 $\mathfrak{t}$ 的子树, 并且
- $\tau_{m+n}(root(\mathfrak{t}_{m+n})) = min\{\tau_i(root(\mathfrak{t}_i)) : m \leqslant i \leqslant m+n\}$, 其中 τ_i 是 $\mathfrak{t}_i$中的标记函数。

我们称上述三元组为 $\mathfrak{t}$的标准表示三元组。注意，标准表示三元组的最后两个元素可能是空序列，例如，当所表示的树只有一个节点时。回想一下，$m \preccurlyeq n$ 当且仅当$m = n = 0$ 或 $0 < m \leqslant n$。我们在 T^ω 上归纳定义 $\sqsubseteq$ 如下:

(i) 对任意 ω-树 $\mathfrak{t} = \langle (r, s), (), () \rangle$ 以及任意 ω-树 $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t} \sqsubseteq \mathfrak{t}'$ 当且仅当 $\mathfrak{t}'$ 是单节点树且 $s \preccurlyeq \tau'(root(\mathfrak{t}'))$，其中 τ'是 $\mathfrak{t}'$中的标记函数；(ii) 对任意 ω-树 $\mathfrak{t} = \langle (r, s), (\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m), (\mathfrak{t}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{t}_{m+n}) \rangle$ 以及任意 ω- 树 $\mathfrak{t}' = \langle (r', s'), (\mathfrak{t}'_1, \ldots, \mathfrak{t}'_k), (\mathfrak{t}'_{k+1}, \ldots, \mathfrak{t}'_{k+l}) \rangle$, $\mathfrak{t} \sqsubseteq \mathfrak{t}'$ 当且仅当 $s \preccurlyeq s'$，并且(a) $m = k$ 且对每个 $1 \leqslant i \leqslant m$，$\mathfrak{t}_i \sqsubseteq \mathfrak{t}'_i$; (b) 要么 $l = n = 0$，要么 $l \geqslant n > 0$ 且 $\mathfrak{t}_{m+n} \sqsubseteq \mathfrak{t}'_{k+l}$，并且存在$j_{m+1}, \ldots, j_{m+n}$使得 $k+1 \leqslant j_{m+1} < \cdots < j_{m+n} \leqslant k+l$，且对每个满足 $m+1 \leqslant h \leqslant m+n$的 h，$\mathfrak{t}_h \sqsubseteq \mathfrak{t}'_{j_h}$。

注意，如果我们在 (a)和(b)中将 $\sqsubseteq$ 替换为 $\preceq$，那么它们分别与 $\trianglelefteq$ 的定义和 $\ll$ 的定义完全相同。

定理 4.7。对于所有 $m, n \geqslant 1$, $\sqsubseteq$ 是 $\mathsf{T}^\omega_{\leqslant m}$上的一个良拟序$_{,<n}$。

证明。只需证明对于所有 $m, n \geqslant 1$, $\sqsubseteq$ 在 $\mathsf{T}^\omega_{=m,<n}$上是良拟序。我们对 m进行归纳法。基本情形（$m = 1$）成立，这是因为事实 4.3。考虑 $m = k+1$。假设对于所有 $n \geqslant 1$, $\sqsubseteq$ 在 $\mathsf{T}^\omega_{=k,<n}$上是良拟序。令$n \geqslant 1$，并令$(\mathfrak{t}_i)_{i\in\omega}$ 为来自 $\mathsf{T}^\omega_{=k+1,<n}$的元素的任意无限序列，其中$\mathfrak{t}_i = \langle (r_i, s_i) (\mathfrak{t}^i_1, \ldots, \mathfrak{t}^i_{m_i}), (\mathfrak{t}^i_{m_i+1}, \ldots, \mathfrak{t}^i_{m_i+n_i}) \rangle$ 对于每个 $i \in \omega$。根据事实4.3，我们有一个$(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_1}$ 的无限子序列 $(\mathfrak{t}_i)_{i\in\omega}$，使得 $(s_i)_{i\in I_1}$ 是一个无限4-链。由于对于每个 $i \in \omega$都有 $|dom(\mathfrak{t}_i)^0| < n$，因此存在一个$(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_2}$ 的无限子序列 $(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_1}$，使得对于所有 $i, j \in I_2$都有 $m_i = m_j$。于是根据引理 4.3和假设，对于每个 $i < j \in I_3$ 都有 $m_i = m_j$，并且对于每个 $1 \leqslant h \leqslant m_i$都有 $\mathfrak{t}^i_h \sqsubseteq \mathfrak{t}^j_h$，从而存在一个$(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_3}$ 的无限子序列 $(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_2}$。应用定理4.6和假设，我们得到一个$(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_4}$ 的无限子序列 $(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_3}$，使得对于每个 $i < j \in I_4$，要么 $n_i = n_j = 0$，要么 $n_j \geqslant n_i > 0$ 且 $\mathfrak{t}^i_{m_i+n_i} \sqsubseteq \mathfrak{t}^j_{m_j+n_j}$，并且存在 j_{m_i+1}，...，$j_{m_i+n_i}$，使得 $m_j+1 \leqslant j_{m_i+1} < \cdots < j_{m_i+n_i} \leqslant m_j+n_j$，以及对于满足 $m_i+1 \leqslant h \leqslant m_i+n_i$的每个 h都有 $\mathfrak{t}^i_h \sqsubseteq \mathfrak{t}^j{}_{j_h}$。根据 $\sqsubseteq$的定义，$(\mathfrak{t}_i)_{i\in I_4}$是一个无限 $\sqsubseteq$-链，因此我们有，对于所有 $n \geqslant 1$, $\sqsubseteq$ 在 $\mathsf{T}^\omega_{=k+1,<n}$上是良拟序。 ■

4.3. 有限公理化。回顾一下，如果传递逻辑包含 Wid^+_1，则称其具有弱宽度 1。本小节将证明所有具有有限深度和有限弱宽度 1 的传递逻辑都是有限公理化的，并且这些逻辑包含 $\mathsf{Wid}^\bullet_n$，对于一个 $n \geqslant 1$（定理 4.12）。

令 $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ 为传递框架。$\mathfrak{F}$ 的骨架是 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{F}) = \langle \mathfrak{sk}(W)\ \mathfrak{sk}(R) \rangle$，其中 $\mathfrak{sk}(W)$ 是 $\mathfrak{F}$ 中的簇的集合，并且对于所有 c、$\mathsf{d} \in \mathfrak{sk}(W)$，$\langle \mathsf{c}, \mathsf{d} \rangle \in \mathfrak{sk}(R)$ 当且仅当Rwu 对某个 $w \in \mathsf{c}$ 和 $u \in \mathsf{d}$ 成立（事实上，当且仅当 Rwu 对所有 $w \in \mathsf{c}$ 和 $u \in \mathsf{d}$ 成立）。对于集合 W 上的任意二元关系 R，我们用 R^* 表示 R 的自反闭包，即 $R \cup \{\langle w, w \rangle : w \in W\}$，并用 R^{-1} 表示 R 的逆关系，即 $\{\langle w, u \rangle : \langle u, w \rangle \in R\}$。我们固定 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^* = \langle \mathfrak{sk}(W)\ \mathfrak{sk}(R)^* \rangle$ 和 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1} = \langle \mathfrak{sk}(W),\ (\mathfrak{sk}(R)^*)^{-1} \rangle$。

设 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$ 是 Wid_1^+ 的任意有限传递框架，且 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1}$ 是一棵有限树。$\mathfrak{F}$ 的表示树如下：ω-树：

$$\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})=\left\langle \mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1},\tau\right\rangle, \tag{4}$$

其中，对于每个 $\mathsf{c}\in\mathfrak{sk}(W)$，若 c 是 $\mathfrak{F}$ 中的非退化簇，则 $\tau(\mathsf{c})=|\mathsf{c}|$；否则$\tau(\mathsf{c})=0$。

引理 4.8. 对于任意满足以下条件的有限传递框架 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$：对于 Wid_1^+，$\mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1}$和 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{G})^{-1}$ 是有限树；若 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})\sqsubseteq\mathfrak{rt}(\mathfrak{G})$，则 $\mathfrak{G}$ 可约化为 $\mathfrak{F}$。

证明。我们对 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})$ 的高度进行归纳证明。设 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})=\left\langle \mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1}、\ \tau\right\rangle$ 以及$\mathfrak{rt}(\mathfrak{G})=\left\langle \mathfrak{sk}(\mathfrak{G})^{-1}、\ \sigma\right\rangle$，并设 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})\sqsubseteq\mathfrak{rt}(\mathfrak{G})$。考察 $heit(\mathfrak{rt}(\mathfrak{F}))=1$。根据 $\sqsubseteq$的定义，我们有

$$heit(\mathfrak{rt}(\mathfrak{G}))=1 \text{ and} \tag{5}$$

$$\tau(root(\mathfrak{sk}(\mathfrak{F})^{-1}))\preccurlyeq\sigma(root(\mathfrak{sk}(\mathfrak{G})^{-1})). \tag{6}$$

根据（5），$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$ 都是全框架，即只包含一个簇。设 c 和 d 分别是 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$ 中唯一的簇。由（6）可知，$\tau(\mathsf{c})\preccurlyeq\tau(\mathsf{d})$。根据 4 的定义，或者有 $\tau(\mathsf{c})=\tau(\mathsf{d})=0$，或者有 $0<\tau(\mathsf{c})\leqslant\tau(\mathsf{d})$。若前者成立，则由（4）可知 c 和 d 都是退化簇；若后者成立，则由（4）可知 c 和 d 都是非退化簇，且$|\mathsf{c}|<|\mathsf{d}|$。无论哪种情况，都存在一个从 d 到 c 上的函数 f，将 $\mathfrak{G}$ 约化为 $\mathfrak{F}$。

考虑 $heit(\mathfrak{rt}(\mathfrak{F}))=k$。令 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})=\langle(\mathsf{r}\ s),(\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_m),(\mathsf{t}_{m+1},\ldots,\mathsf{t}_{m+n})\rangle$ 和$\mathfrak{rt}(\mathfrak{G})=\langle(\mathsf{r}',s'),(\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}'_k)\ \ (\mathsf{t}'_{k+1},\ldots,\mathsf{t}'_{k+l})\rangle$。由于 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})\sqsubseteq\mathfrak{rt}(\mathfrak{G})$，我们有

(i) $s\preccurlyeq s'$，(ii) 对每个 $1\leqslant i\leqslant m,\ \ m=k$，(iii) 要么 $l=n=0$，要么 $l\geqslant n>0$并且 $\mathsf{t}_{m+n}\sqsubseteq\mathsf{t}'_{k+l}$，且存在 $j_{m+1},\ldots,j_{m+n}$ 使得 $k+1\leqslant j_{m+1}<\cdots<j_{m+n}\leqslant k+l$，并且对每个满足$m+1\leqslant h\leqslant m+n$的 h，都有 $\mathsf{t}_h\sqsubseteq\mathsf{t}'_{j_h}$。

按照基本情形中的相同理由，由 (i) 可知，存在一个从 r' 到 r 的函数 f，使得 f 将 $\mathfrak{G}\restriction\mathsf{r}'$ 约化为 $\mathfrak{F}\restriction\mathsf{r}$。由于 $heit(\mathfrak{rt}(\mathfrak{F}))=k$，$\mathsf{t}_1$、…、$\mathsf{t}_m$、$\mathsf{t}_{m+1}$、…、$\mathsf{t}_{m+n}$ 的高度均小于 k，因此根据 (ii)、(iii) 和归纳假设可知，对于每个 $1\leqslant i\leqslant m$，存在一个函数 f_i，将 $\mathfrak{G}\restriction(\bigcup dom(\mathsf{t}'_i))$ 约化为 $\mathfrak{F}\restriction(\bigcup dom(\mathsf{t}_i))$；对于每个满足 $m+1\leqslant h\leqslant m+n$ 的 h，存在一个函数 f_h，将 $\mathfrak{G}\restriction(\bigcup dom(\mathsf{t}'_{j_h}))$ 约化为 $\mathfrak{F}\restriction(\bigcup dom(\mathsf{t}_h))$。令 $\neg J=\{k+1,\ldots,k+l\}-\{j_{m+1},\ldots,j_{m+n}\}$。由 (iii) 可得 $\mathsf{t}_{m+n}\sqsubseteq\mathsf{t}'_{k+l}$，因此 $|root(\mathsf{t}_{m+n})|\preccurlyeq\left|root(\mathsf{t}'_{k+l})\right|$。于是，由 (3) 可得 $0<|root(\mathsf{t}_{m+n})|\leqslant min\{\left|root(\mathsf{t}'_j)\right|:\ j\in\neg J\}$，因此 $root(\mathsf{t}_{m+n})$ 以及 $\{root(\mathsf{t}'_j)$ 的元素：$j\in\neg J\}$ 均为非退化簇。令 g 为任意一个从 $\bigcup\bigcup_{j\in\neg J}dom(\mathsf{t}'_j)$ 到 $\bigcup dom(\mathsf{t}_{m+n})$ 的函数，使得对于每个 $j\in\neg J$，$g[root(\mathsf{t}'_j)]=root(\mathsf{t}_{m+n})$。这是可行的，因为 $|root(\mathsf{t}_{m+n})|\leqslant min\{\left|root(\mathsf{t}'_j)\right|:\ j\in\neg J\}$。容易看出，$g$ 将 $\mathfrak{G}\restriction(\bigcup\bigcup_{j\in\neg J}dom(\mathsf{t}'_j))$ 约化为 $\mathfrak{F}\restriction(\bigcup dom(\mathsf{t}_{m+n}))$。最后，令 $h=f\cup g\cup\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant m+n}$。不难验证，$h$ 将 $\mathfrak{G}$ 约化为 $\mathfrak{F}$。■

回想一下，对于每个非空的 $X\subseteq W$，我们用 $\mathfrak{F}\restriction X$ 表示 $\mathfrak{F}$ 在 X 上的限制。应用命题 3.1，下面的事实很容易验证。

事实 4.9. 设 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$ 是 Wid_1^+的任意有根有限传递框架，并设 c 是 $\mathfrak{F}$中的初始簇。那么存在 $\mathfrak{F}$的不相交子框架 $\mathfrak{F}_1,\ldots\mathfrak{F}_n$，使得对于每个 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathfrak{F}\restriction(\mathsf{c}\uparrow^-)=\biguplus_{1\leqslant i\leqslant n}\mathfrak{F}_i$和 $\mathfrak{sk}(\mathfrak{F}_i)^{-1}$ 都是有限树。

设 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$ 是 Wid_1^+ 的任意有根有限传递框架，并设 c 是 $\mathfrak{F}$中的初始簇。根据事实 4.9，$\mathfrak{F}$ 存在不相交子框架$\mathfrak{F}_1,\dots\mathfrak{F}_h$，使得对于每个$1\leqslant i\leqslant h$，$\mathfrak{F}\upharpoonright\mathsf{c}\uparrow^{-}=\biguplus_{1\leqslant i\leqslant h}\mathfrak{F}_i$和 $\mathfrak{st}(\mathfrak{F}_i)^{-1}$都是有限树。令 $\mathsf{T}=\{\mathfrak{rt}(\mathfrak{F}_1)\dots,\mathfrak{rt}(\mathfrak{F}_h)\}$，并假设 $\{\mathsf{t}_1,\dots,\mathsf{t}_m\}=\{\mathsf{t}\in\mathsf{T}:\ \mathsf{t}=\langle\mathfrak{T},\tau\rangle\wedge\tau(root(\mathsf{t}))=0\}$以及 $\{\mathsf{t}_{m+1},\dots,\mathsf{t}_{m+n}\}=\{\mathsf{t}\in\mathsf{T}:\ \mathsf{t}=\langle\mathfrak{T},\tau\rangle\wedge\tau(root(\mathsf{t}))>0\}$，其中 $\tau_{m+n}(root(\mathsf{t}_{m+n}))=min\{\tau_i(root(\mathsf{t}_i)):\ m\leqslant i\leqslant m+n\}$，且 τ_i 是 t_i中的标记函数。$\mathfrak{F}$ 的标准表示树如下所示，是一个 ω-树：

$$\mathfrak{srt}(\mathfrak{F})=\langle(\mathbf{c},\tau(\mathbf{c})),(\mathsf{t}_1,\dots,\mathsf{t}_m),(\mathsf{t}_{m+1},\dots,\mathsf{t}_{m+n})\rangle,$$

其中，对于每个 $\mathsf{c}\in\mathfrak{st}(W)$，若 c 是 $\mathfrak{F}$ 中的非退化簇，则 $\tau(\mathsf{c})=|\mathsf{c}|$；否则 $\tau(\mathsf{c})=0$。注意，对于任意有限传递框架 $\mathfrak{F}$，只要 $\mathfrak{srt}(\mathfrak{F})$ 和 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})$ 均有定义，它们总是彼此不同，因为 $\mathfrak{srt}(\mathfrak{F})$ 的根是 $\mathfrak{F}$ 中的初始簇，而 $\mathfrak{rt}(\mathfrak{F})$ 的根是 $\mathfrak{F}$ 中的末端簇。应用引理 4.8，可以类似于引理 4.8 中的归纳情形证明下面的引理。

引理 4.10. 设 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$ 是 Wid_1^+ 的有限传递框架，并且 $\mathfrak{srt}(\mathfrak{F})\sqsubseteq\mathfrak{srt}(\mathfrak{G})$。那么 $\mathfrak{G}$ 可约为 $\mathfrak{F}$。

引理 4.11. 设 $n,k\geqslant 1$，并设 $(\mathfrak{F}_k)_{k\in\omega}$ 是 $\mathsf{Wid}_k^\bullet$ 的一个有限有根传递框架无限序列，其秩至多为 m，且弱宽度为 1。那么存在一个无限 $I\subseteq\omega$，使得对所有 $i,j\in I$，若 $i<j$，则 $\mathfrak{F}_j$ 可约为 $\mathfrak{F}_i$。

证明。由于每个 $\mathfrak{F}_i$ 都是秩至多为 m的 $\mathsf{Wid}_k^\bullet$ 的框架，根据命题 4.1，$\mathfrak{F}_i$中至多有 $m\times k$ 个退化簇，因此对于每个 $i\in\omega$，$\mathfrak{srt}(\mathfrak{F}_i)\in\mathsf{T}^{\omega}_{\leqslant m,<m\times k+1}$。然后，根据定理 4.7，我们得到存在一个无限的 $I\subseteq\omega$，使得 $(\mathfrak{srt}(\mathfrak{F}_i))_{i\in I}$ 是一个无限的 $\sqsubseteq$-链，因此根据引理 4.10，对于所有满足 $i<j$的 i、$j\in I$，$\mathfrak{F}_j$ 都可约为 $\mathfrak{F}_i$。 ■

定理 4.12. 对于所有 n、$k\geqslant 1$，$\mathsf{K4B}_n\oplus\{\mathsf{Wid}_1^+$ 的所有扩张，$\mathsf{Wid}_k^\bullet\}$ 都是有限公理化的，因此也是可判定的。

证明。令 $\mathsf{L}=\mathsf{K4B}_n\oplus\{\mathsf{Wid}_1^+,\ \mathsf{Wid}_k^\bullet\}$ 且 n、$k\geqslant 1$。根据定理 1.2，L 的所有扩张都具有有限模型性质。为了证明 L 的所有扩张都是有限公理化的，根据定理 2.9，只需令 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$ 为 L 的任意无限序列的有限根框架，并证明它不是不可约的。对于每个 $i\in\omega$，由于 $\mathfrak{F}_i$ 是 B_n 和 Wid_1^+ 的框架，根据命题 1.1 和 3.1，显然 $\mathfrak{F}_i$ 的秩至多为 n，且弱宽度为 1。于是根据引理 4.11，$\mathfrak{F}_j$ 可约为 $\mathfrak{F}_i$，其中某个 i、$j\in\omega$ 满足 $i<j$，因此 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\omega}$ 不是不可约的。 ■

由于对于所有 n、$k\geqslant 1$，$\mathsf{S4B}_n$ 都是 $\mathsf{K4B}_n\oplus\{\mathsf{Wid}_k^\bullet\}$ 的扩张，以下推论可由定理 4.12 立即得出：

推论 4.13. 对于所有 $n\geqslant 1$，$\mathsf{S4B}_n\oplus\{\mathsf{Wid}_1^+\}$ 的所有扩张都是有限公理化的，因此也是可判定的。

5. Conclusion

在本文中，我们证明了如下否定性结果：对于所有 $n\geqslant 3$ 和 $k\geqslant 2$，都存在非有限公理化的 $\mathsf{K4B}_n\oplus\mathsf{Wid}_k^+$ 扩张，其证明方法是构造有限根传递框架的无限不可约序列。

深度为 3 且弱宽度为 2。作为我们的正面结果，我们通过在有限高度的 ω 树上应用良拟序，证明了对于所有 n、$k \geqslant 1$，$\mathsf{K4B}_n \oplus \{\mathsf{Wid}_1^+, \mathsf{Wid}_k^\bullet\}$ 的所有扩张都是有限公理化的。可以证明，对于所有 $n \geqslant 3$ 和 $k \geqslant 1$，$\mathsf{K4B}_n \oplus \mathsf{Wid}_k^\bullet$ 存在不可有限公理化的扩张。因此，公式 Wid_1^+ 在我们的有限公理化结果中发挥着关键作用。然而，以下问题仍未解决：对于每个 $n \geqslant 1$，$\mathsf{K4B}_n \oplus \mathsf{Wid}_1^+$ 的所有扩张是否都是有限公理化的？最后，由于第3节中构造的框架的无限不可约序列不验证任何公式 $\mathsf{Wid}_k^\bullet$，因此以下问题尚无定论：对于每个 n、$k \geqslant 1$ 和 $m \geqslant 2$，$\mathsf{K4B}_n \oplus \{\mathsf{Wid}_m^+, \mathsf{Wid}_k^\bullet\}$ 的所有扩张是否都是有限公理化的？

References

[1] Patrick Blackburn、Maarten de Rijke 和 Yde Venema, *Modal logic*, 《剑桥理论计算机科学丛书》, 第53卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2001年。[2] Alexander Chagrov 和 Michael Zakharyaschev, *Modal logic*, 《牛津逻辑指南》, 第35卷, 牛津大学出版社, 牛津, 1997年。[3] Kit Fine, *The logics containing S4.3*, 《数学逻辑与数学基础杂志》17（1971年）, 371–376。[4] , *An ascending chain of S4 logics*, 《Theoria》40（1974年）, 110–116。[5] , *Logics containing K4. Part I*, 《符号逻辑杂志》39（1974年）, 31–42。[6] Jean H. Gallier, *What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ₀? A survey of some results in proof theory* **53** 1991 3, 199 260 ,

《纯粹与应用逻辑年刊》（）, 第–期。[7] Michael C. Nagle, *The decidability of normal* K5 *logics*, 《符号逻辑杂志》46（1981年）, 319–328。[8] C. St. J. A. Nash-Williams, *On well-quasi-ordering finite trees*, 波士顿 Birkhäuser 出版社, 1987年。[9] Krister Segerberg, *An essay in classical modal logic*, 由哲学学会和乌普萨拉大学哲学系出版的《哲学研究》, 乌普萨拉, 1971年。[10] Ming Xu, *Some normal extensions of K4.3*, 《Studia Logica》101（2013年）, 583–599。

Department of Philosophy, Renmin University of China