背景无关的因果性概念

A. Capolupo[1], * 和 A. Quaranta[1], †萨莱诺大学“E.R. Caianiello”物理系，以及意大利国家核物理研究所萨莱诺附属组，教宗若望保禄二世街132号，84084 菲夏诺（SA），意大利

我们在一般流形上提出了一种因果序概念，使其独立于底层的微分结构和拓扑结构。我们证明，足够正则的因果序可以从一个特定的集合代数中恢复；该代数的作用类似于拓扑和 σ 代数。随后，我们讨论如何为因果集代数赋予一种自然的测度。

arXiv:2304.09714v1 [math-ph] 19 Apr 2023

I. 引言

自从发现黑洞会产生粒子 [1] 并确立黑洞热力学 [2–4], 以来，人们揭示了时空因果结构与热力学基本原理之间的深刻联系 [5]。因果结构可谓广义相对论几何层面的核心；众所周知，任何时空都可以由其因果序重构，且重构结果在共形变换下唯一 [6]。这足以让人怀疑，在某种意义上，因果性可能比时空流形的微分性质更为根本。我们可以设想构造这样的时空理论：其中不给定微分结构，而只假设存在因果序。甚至可以进一步推测，未来的量子引力理论或许根本不具有自然的微分流形结构。因此，可能有必要提出一种从拓扑和微分概念中抽象出来并与之分离的因果性概念。本文旨在基于一个特定的集合代数，以集合论方式构造因果序；原则上，这种构造不同于流形上给定的任何拓扑。这种构造与拓扑和 σ-代数有些相似，但其中并集（完备化）由一种新型运算取代，而且内在地包含一种对偶性。因果集代数直观上源自洛伦兹流形的因果结构，并立足于双锥结构的物理直觉。与亚历山德罗夫拓扑等其他构造相比 [7], ，它的优点在于直接反映了我们通过对洛伦兹流形的经验所认识到的因果结构这一物理概念。此外，我们将发现，可以在因果集代数上引入一种受统计力学启发的自然测度。视界熵（特别是黑洞熵）将被视为更一般构造在洛伦兹流形上的一个特例。本文结构如下：第二节讨论闵可夫斯基时空这一典范例子，确定符号约定，并找出与因果相关的特定子集；第三节抽象出因果集的概念，并说明可以从代数中重构偏序关系；第四节引入因果测度和形式熵的概念，并分析视界熵这一具体情形；最后，第五节为结论。

II. 流形上的因果结构 S

让我们首先回顾闵可夫斯基时空 $M^{1,3}$ 中的因果序，即 $\mathbb{R}^4$ 配备洛伦兹度规的闵可夫斯基时空。

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)\ . \tag{1}$$

令 $A^2 = \eta_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$，向量 A^μ 为:

- $A^2 > 0$类时
- $A^2 = 0$类光
- $A^2 < 0$类空

如果采用 $-+.+.+$ 符号差，约定则相反。既是类时又是类光的向量 A^μ $A^2 \geq 0$称为因果的。洛伦兹符号差在流形 $\lhd$ 上诱导出如下预序:

$$x \lhd y \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \tag{2}$$

* capolupo@sa.infn.it

† anquaranta@unisa.it

对于任意两个点 $x\,y \in M^{1,\,3}$。在更一般的洛伦兹流形上，该条件被替换为存在一条端点为 x 和 y的因果曲线。关系（2）具有自反性和传递性。引入因果序还需要另一项信息，即时间定向。对于任意点 x，满足 $x-y$ 为因果的点 y 的集合，我们将其记为 $C(x)$，它具有双锥的结构，即

$$C(x) = C_1(x) \cup C_2(x) \tag{3}$$

与 $C_1(x) \cap C_2(x) = \{x\}$。时间定向是在每个 $C_i(x)$ 点处对其中一个锥 x的光滑选取，未来指向锥$C_+(x)$ 位于 x，且对于任意 x，y，$z \in M^{1,3}$

$$z \in C_+(y)\ \&\ y \in C_+(x) \Rightarrow z \in C_+(x)\ . \tag{4}$$

我们将剩下的锥记为 $C_-(x)$。关于闵可夫斯基时空作为向量空间的特殊性质，有几点需要提醒。在一般的洛伦兹流形上，只要按照上文所述修改预序的概念，这些定义仍然有意义。条件 $x-y$ 因果的应替换为存在一条端点为 x和 y的因果曲线。此时集合 $C_i(x)$ 可能不再呈现锥的形状。不过，在任意点 x处的切空间上，这种形状在局部仍然保留；根据定义，该切空间与 $M^{1,3}$ 同构。时间定向可以由选取一个类时向量场来诱导。闵可夫斯基时空上的自然选取由坐标诱导，其类时分量记为 x^0。未来锥是

$$C_+(x) = \{y \in M^{1,3} | (x-y)^2 \geq 0\ \&\ y^0 \geq x^0\}\ . \tag{5}$$

借助时间定向，我们可以将因果序定义为偏序关系

$$x \preceq y \Leftrightarrow y \in C_+(x) \tag{6}$$

显然　　它具有自反性、反对称性和传递性（由式（4）可知）。还有一个等价定义

$$x \preceq y \Leftrightarrow C_+(y) \subseteq C_+(x)\ . \tag{7}$$

我们先给出基本术语

定义 1. 若一对 $(M, \preceq)$ 连同 $\preceq$ 在 M 上构成偏序，则等价地称其为 M 上的偏序集、因果性或因果序。

一般而言，我们不会对 M 作为流形的性质作任何假设。

A. 侧向符号表示法与术语

在洛伦兹流形中，至少存在两种偏序概念：用于仅涉及类时关系的时序，以及包含类光分离的因果序。我们只关注因果序（不过，所有这些考量同样适用于时序）。光锥或零锥通常指的是切空间中特定的子集，而不是流形中的区域。本文将用这一术语指代后者。在讨论洛伦兹流形的因果结构时，不完整菱形（见下文）被认为与给定点的因果过去和因果未来重合 $J^{\pm}(p)$。

B. 反向因果性

双锥结构显然内在地具有反向因果性。考虑时间定向 $\{C_+(x)\ C_-(x)\}$，并将反向定向定义为在每个 x 处选择互补选项。这相当于切换未来锥和过去锥。如果$\mathcal{O} = \left\{(C_+(x)\ C_-(x))\ | x \in M^{1,3}\right)\}$ 是锥对的集合，则时间定向的反演可以视为一个映射$T:\ \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ 使得

$$T\left((C_+(x), C_-(x))\right) = (C_-(x), C_+(x))\ . \tag{8}$$

显然，$T^2 = \mathrm{Id}$。反向因果序 $\preceq^{-1}$ 是由反转后的对所诱导的序，即。

$$x \preceq^{-1} y \Leftrightarrow C_-(y) \subseteq C_-(x)\ . \tag{9}$$

显然

$$x \preceq^{-1} y \Leftrightarrow y \preceq x \,. \tag{10}$$

若将其视为流形 T 上的映射： $M^{1,\ 3} \Rightarrow M^{1,\ 3}$， T即只是时间反演（视为作用于$M^{1,\ 3}$上的主动变换） $T(x^0,\ x^j) = (-x^0,\ x^j)$。我们有

$$T(x) \preceq T(y) \Leftrightarrow y \preceq x \tag{11}$$

因此我们可以认定

$$x \preceq^{-1} y \Leftrightarrow T(x) \preceq T(y) \,. \tag{12}$$

从现在起，我们将把 T： $M \to M$ 视为一个反演序关系的可逆自同构。显然，双锥结构同时承载了因果序及其反演的信息。

C. 抽象化锥结构： ∇ 和 Δ 集

从因果序关系的角度来看，锥具有一些重要性质。为明确起见，让我们聚焦于未来锥$C_+(x)$:

1. 完备性 对于任意 $y \in C_+(x)$，集合 $C[x,y] = \{z \in M^{1,3} | x \preceq z \& z \preceq y\}$ 包含于 $C_+(x)$ 中。这直接源于 $C_+(x)$ 的定义，其本质上表明，锥包含了从基点 x 延伸至其任一元素 $y \in C_+(x)$ 的所有可能因果曲线。

2. 发散性 对于任意不满足因果序关系 $\preceq$ 的 $y, z \in C_+(x)$，都存在第三个点 $w \in C_+(x)$，使得 $w \preceq y$ 且 $w \preceq z$。这相当明显，因为至少基点 $w = x$ 满足每个 y, z 的关系。这意味着，无论如何在 $C_+(x)$ 中选取 y, z，从某一点开始，它们总是共享一个共同的“过去”。

过去锥恰好是其镜像，它们在因果上完备，并且是收敛的，也就是说，对于任何一对不满足因果序关系的 y、 $z \in C_-$（x）， $\preceq$ 都存在第三个点 $w \in C_+$（x），使得 $y \preceq w$ 且 $z \preceq w$。我们将这些定义形式化，以便后续使用。

定义 II.1. 给定流形 M 上的因果序 $\preceq$，我们将端点为 x、 y 的菱形区域定义为

$$C[x,y] = \{z \in M | x \preceq z \preceq y\} \,. \tag{13}$$

注意，通常 $C[x,y] \neq C[y,x]$，而且菱形区域可能是空集。我们将端点为 x 的不完整上（下）菱形区域定义为以下集合

$$C[\infty, x](C[x,\infty]) = \{z \in M | z \preceq x (x \preceq z)\} \tag{14}$$

定义 II.2. 子集 $U \subseteq M$ 是因果完备的，当且仅当

$$C[x,y] \subseteq U \; \forall \, x, y \in U \,. \tag{15}$$

定义 II.3. 子集 $U \subseteq M$ 是收敛的（发散的），当且仅当对于任意不与 $\preceq$ 相关的 x、 $y \in U$，都存在 $z \in U$ 使得 t

$$x \preceq z \,\&\, y \preceq z \; (z \preceq x \,\&\, z \preceq y) \tag{16}$$

Th这个定义分别等价于直接因果性和反向因果性中的有向集定义 y.

定义 II.4. M 的子集是 Δ （∇）集，当且仅当它因果完备且收敛（发散）。

注意，根据上述定义，因果集（Δ 或 ∇）的集合远大于锥的集合。它实际上包括被一个给定的类空曲面截断的锥。关于洛伦兹流形上因果集的更详细描述将在第 4 节给出。

定义 II.5. 配备偏序关系 $\preceq$ 的流形 M 具有交叉性质，当且仅当对于任意的 x、 y、 z、 $w \in M$，若 x、 $y \preceq z$、 w 且 x、 y 不存在 $\preceq$关系，则至少有一对 $C[x,z]$ & $C[y,w]$ 或 $C[x,w]$ & $C[y,z]$ 的交集非空。

示例：具有标准因果序的 $(1+1)d$ 闵可夫斯基时空显然满足交叉性质。设 p,q 是彼此类空的任意两个点（不满足 $\preceq$-相关），并设 r,s 是满足 $x,y \preceq r,s$ 的任意两个不同的点。两对线段 $[x,r],[y,s]$ 或 $[x,s],[y,r]$ 中至少有一对在某个点 p 处相交。由于每条线段都是类时的，并且根据后者的定义，$r^0,s^0 \geq p^0 \geq x^0,y^0,p$ 必然属于 $C[x,r]$ 和 $C[y,s]$。

我们证明如下命题

命题 II.6. 在满足交叉性质的流形上，两个 Δ 集的交集是 Δ，两个 ∇集的交集是 ∇。

证明. 设 A,B 是 Δ集。对于任意 $x,y \in A, C[x,y] \subseteq A$，以及任意 $x,y \in B, C[x,y] \subseteq B$。于是对于任意 $x,y \in A \cap B$，我们有 $C[x,y] \subseteq A$ 和 $C[x,y] \subseteq B$，即 $C[x,y] \subseteq A \cap B$。这证明了完备性。收敛性则稍微棘手一些。任取两个不满足 $\preceq$ 相关关系的 x,y。由于 A,B 是 Δ，存在 $r \in A$ 和 $s \in B$，使得 $x,y \preceq r,s$。若 $r = s$，则结论成立，因此不妨设 $r \neq s$。以下两对中至少有一对交集非空：$C[x,r]$ & $C[y,s]$ 或 $C[x,s]$ & $C[y,r]$。交集中的任意点 p 都满足 $x,y \preceq p$。此外，由于 A,B 都是完备的，任何这样的点 p 必须同时包含在二者之中，即 $p \in A \cap B$。 □

命题II.7. 设 T: $M \to M$ 是序反转自同构。T下一个 Δ 集的像是 ∇，反之亦然。

证明. 设 A是一个 Δ集，且设 $x,y \in A$。由于 A是完备的 $C[x,y] \subseteq A$，并且 $T(C[x,y]) \subseteq T(A)$。对于任意点 $z \in C[T(y)\ T(x)]$，有

$$x \preceq T^{-1}(z) \preceq y \tag{17}$$

即 $T^{-1}(z) \in C[x,y]$。因此 $z = T(T^{-1}(z)) \in T(C[x,y]) \subseteq T(A)$，故 $T(A)$ 是完备的。对于任意 $x,y \in T(A)$，若二者不 $\preceq$相关，则存在 $z \in A$，使得 $T^{-1}(x) \preceq z$& $T^{-1}(y) \preceq z$。但此时点 $T(z) \in T(A)$ 满足 $T(z) \preceq x,y$。这证明了 $T(A)$ 是发散的。反向命题的证明类似。 □

命题 II.8。设 A, B是 M的任意两个子集。那么 $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B)$，且 $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$

证明。设 $z \in A \cap B$。由于 $z \in A, T(z) \in T(A)$，且由于 $z \in B, T(z) \in T(B)$。因此 $T(A \cap B) \subseteq T(A) \cap T(B)$。类似地，假设 $z \in T(A) \cap T(B)$。鉴于 $z \in T(A)$，$T^{-1}(z) \in A$，并且考虑到 $z \in T(B)$，$T^{-1}(z) \in B$。但于是 $T^{-1}(z) \in A \cap B$，从而 $z = T(T^{-1}(z)) \in T(A \cap B)$，这意味着 $T(A) \cap T(B) \subseteq T(A \cap B)$。第二个陈述的证明类似。设 $z \in A \cup B$。由于 $z \in A$或 $z \in B$，$T(z) \in T(A)$ 或 $T(z) \in T(B)$，即 $z \in T(A) \cup T(B)$。因此$T(A \cup B) \subseteq T(A) \cup T(B)$。接着考虑 $z \in T(A) \cup T(B)$。由于 $z \in T(A)$ 或 $z \in T(B)$，$T^{-1}(z) \in A$ 或 $T^{-1}(z) \in B$，即 $T^{-1}(z) \in A \cup B$。因此 $z = T(T^{-1}(z)) \in T(A \cup B)$，且 $T(A) \cup T(B) \subseteq T(A \cup B)$。 □

我们重申，只要我们规定 $T(\emptyset) = \emptyset$，该结论对无限多个交集成立 .

定义 II.9. 若一个 Δ (∇) 集合 A 存在上（下）界 $x \in A$，即对于任意 $y \in A$，则称其有界。

$$y \preceq x \quad (x \preceq y)\,. \tag{18}$$

命题 II.10. 如果一个 Δ (∇) 集合 A 有界，那么在 A 中存在唯一的上（下）界。

证明。证明显然。给定 x，$y \in A$ 两个上界 $x \preceq y$ 和 $y \preceq x$，只有在 $x = y$ 时才可能如此。对于 ∇ 集合，证明类似。 □

我们称唯一的上（下）界 $x \in A$ 为 A 的上（下）顶点。从定义可清楚看出，任何有界的 Δ （∇）集合都是一个不完整上（下）菱形区域的子集。存在既是 Δ 又是 ∇ 的集合。菱形$C[x,y]$ 显然属于此类，并且同时具有一个上顶点 y 和一个下顶点 x。

定义 II.11. 将 $C_\Delta(M) = \{U \subseteq M | U$称为 $\Delta\}$，将 $C_\nabla(M) = \{U \subseteq M | U$称为 $\nabla\}$，它们分别是 Δ和 ∇的子集族，且都属于 M。称集合 A为严格 Δ，当且仅当 $A \in C_\Delta(M) - C_\nabla(M) \equiv C_+(M)$；称其为严格 ∇，当且仅当 $A \in C_\nabla(M) - C_\Delta(M) \equiv C_-(M)$。

显然，根据定义，$C_+(M)$ 与 $C_-(M)$ 不相交。We have that Δ and ∇ 集合带有 with 两种自然 l 代数运算

$$\begin{aligned}
&\cap : C_\Delta(M) \times C_\Delta(M) \to C_\Delta(M)\\
&\cap : C_\nabla(M) \times C_\nabla(M) \to C_\nabla(M)\\
&T : C_\Delta(M)(C_\nabla(M)) \to C_\nabla(M)(C_\Delta(M)).
\end{aligned}$$

我们可以引入另一种运算，即因果并。对于因果集而言，它被视为拓扑中开集的并集的对应概念。顾名思义，它通过两个给定的因果集定义出一个更大的因果集。

定义 II.12。两个 Δ (∇) 集合 A 和 B 的因果并是包含 A 和 B的最小 Δ (∇) 集合:

$$A \cup_C B = \bigcap_{X \in C_\Delta(M)(C_\nabla(M)):A \cup B \subseteq X} X \,. \tag{19}$$

两个集合 A、B 的因果并是同时具有 Δ 和 ∇，并包含 $A \cup B$ 的最小集，其中这两个集合都具有 Δ 和 ∇。一个同时具有 Δ 和 ∇ 的集合 A 与一个 Δ（∇）集合 B 的因果并，是包含 $A \cup B$ 的最小 Δ（∇）集。一个严格 Δ 集与一个严格 ∇ 集的因果并是空集。

引入上述定义的最后两个陈述，是为了使 Δ 和 ∇ 集的集合在因果并下保持闭合。必须认识到，因果并这一运算仅由因果序导出。在下一节中，我们将把因果并视为已给定的，并由此导出一个偏序关系。以下性质成立

命题 II.13。以下性质对于收敛并和发散并均成立。为简便起见，我们假设所涉及的集合都是收敛的（包括平凡集）。设 A、B、$C \subseteq M$ 为收敛因果集。那么

1. $A, B \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} B$2. $A \cup_{\mathcal{C}} A = A$3. $A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C) = (A \cup_{\mathcal{C}} B) \cup_{\mathcal{C}} C$4. $C \cap (A \cup_{\mathcal{C}} B) = (C \cap A) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap B)$ 5. $A \cup_{\mathcal{C}} (B \cap C) = (A \cup_{\mathcal{C}} B) \cap (A \cup_{\mathcal{C}} C)$
6. $T(A \cup_{\mathcal{C}} B) = T(A) \cup_{\mathcal{C}} T(B)$

证明。性质 I 和 II 直接由定义得出。为便于证明其他性质，令我们引入这些集族

$$\mathcal{C}(A, B) \doteq \{V \subseteq M \,:\, V \; is \; \triangle \; and \; A \cup B \subseteq V\} \tag{20}$$

and

$$\mathcal{C}(A, B, C) \doteq \{V \subseteq M \,:\, V \; is \; \triangle \; and \; A \cup B \cup C \subseteq V\} \tag{21}$$

于是，根据定义，有

$$A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C) = \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A, B \cup_{\mathcal{C}} C)} V \tag{22}$$

显然有 $\mathcal{C}(A, B \cup_{\mathcal{C}} C) \subseteq \mathcal{C}(A, B, C)$，因此定义

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \doteq \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A, B, C)} V \tag{23}$$

我们有

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C) \tag{24}$$

类似地推理可得

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \subseteq (A \cup_{\mathcal{C}} B) \cup_{\mathcal{C}} C \tag{25}$$

因此

$$[(A \cup_{\mathcal{C}} B) \cup_{\mathcal{C}} C] \cap [A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C)] \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \tag{26}$$

另一方面，很明显，

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \tag{27}$$

$$B \cup_{\mathcal{C}} C \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \tag{28}$$

$$A, C \subseteq A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \tag{29}$$

Thus

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \in \mathcal{C}(A \cup_{\mathcal{C}} B, C) \tag{30}$$

$$A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \in \mathcal{C}(A, B \cup_{\mathcal{C}} C) \tag{31}$$

最后，由于因果并的定义：

$$(A \cup_{\mathcal{C}} B) \cup_{\mathcal{C}} C = [(A \cup_{\mathcal{C}} B) \cup_{\mathcal{C}} C] \cap [A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C] = A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C \tag{32}$$

$$= [A \cup_{\mathcal{C}} B \cup_{\mathcal{C}} C] \cap [A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C)] = A \cup_{\mathcal{C}} (B \cup_{\mathcal{C}} C) \tag{33}$$

证明 III。为证明 IV，注意到根据定义，

$$C \cap (A \cup_{\mathcal{C}} B) = C \cap \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A,B)} V = \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A,B)} V \cap C \tag{34}$$

由于 $\mathcal{C}(C \cap A, C \cap B)$ 中的任意元素都具有 $U \cap C$ 的形式，其中某个 $U \in \mathcal{C}(A, B)$，因此可以写成

$$C \cap (A \cup_{\mathcal{C}} B) = \bigcap_{V \in \mathcal{C}(C \cap A, C \cap B)} V = (C \cap A) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap B) \tag{35}$$

采用类似的推理，我们可以证明 V。事实上，根据定义

$$A \cup_{\mathcal{C}} (B \cap C) = \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A, B \cap C)} V \tag{36}$$

但由于任意集合 $V \in \mathcal{C}(A, B \cap C)$ 都包含并集 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，显然它具有 $V = X \cap Y$ 的形式，其中某个 $X \in \mathcal{C}(A, B)$ 和 $Y \in \mathcal{C}(A, C)$。因此我们可以写成

$$A \cup_{\mathcal{C}} (B \cap C) = \bigcap_{X \in \mathcal{C}(A,B)} \bigcap_{Y \in \mathcal{C}(A,C)} X \cap Y = \bigcap_{X \in \mathcal{C}(A,B)} X \cap \bigcap_{Y \in \mathcal{C}(A,C)} Y = (A \cup_{\mathcal{C}} B) \cap (A \cup_{\mathcal{C}} C) \tag{37}$$

最后一个性质需要更多一些工作。我们首先证明 $T(\mathcal{C}(A, B)) = \mathcal{C}(T(A) \; T(B))$。对于每个 $z \in A \cup B$，根据命题 II.8，$T(z) \in T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$。因此，每个包含 $A \cup B$ 的集合经由 T 映射后，都映射为一个包含 $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$ 的集合，即 $T(\mathcal{C}(A, B)) \subseteq \mathcal{C}(T(A) \; T(B))$。另一方面，每个包含 $T(A) \cup T(B) = T(A \cup B)$ 的集合经由 T^{-1} 映射后，都映射为一个包含 $A \cup B$ 的集合。因此 $T^{-1}(\mathcal{C}(T(A) \; T(B))) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$，且 $\mathcal{C}(T(A) \; T(B)) = T(T^{-1}(\mathcal{C}(T(A) \; T(B)))) \subseteq T(\mathcal{C}(A, B))$。

现在，根据定义

$$T(A \cup_{\mathcal{C}} B) = T\left(\bigcap_{V \in \mathcal{C}(A,B)} V\right) = \bigcap_{V \in \mathcal{C}(A,B)} T(V)$$

其中 l 相等性遵循命题 II.8。最后，由于刚刚证明的陈述，我们可以写出 te

$$T(A \cup_{\mathcal{C}} B) = \bigcap_{U \in T(\mathcal{C}(A,B))} U = \bigcap_{U \in \mathcal{C}(T(A), T(B))} U = T(A) \cup_{\mathcal{C}} T(B)$$

其中最后一个等式由定义可得。 □

引入因果并后，集合族 $C_\Delta(M)$ 和 $C_\nabla(M)$ 各自获得了一种类似于拓扑和 σ-代数的代数结构。由于无限多个集合的交集至多为空集，且无限多个集合的因果并不会超出整个流形 M，如果 $\emptyset$ 和 M 属于 $C_\Delta(M)$ 和 $C_\nabla(M)$，则 $C_\Delta(M)$ 和 $C_\nabla(M)$ 对可数多个集合的交集和可数多个集合的因果并封闭。按定义，只有空集属于 $C_\Delta(M)$ $C_\nabla(M)$（因为空集平凡地满足相关公理），而 M 不一定属于这两个集合族中的任何一个。一般而言，只能确保对可数多个集合的交集和有限多个因果并封闭。

命题II.14. 图像 严格 T 集在 Δ 下的像是严格 ∇ 的，而严格 T 集在 ∇ 下的像是严格 Δ 的 .

证明。该证明可由 II.14 直接推出，因为假设 $A = T(B)$ 同时是 Δ 和 ∇，那么 B 也同时是 Δ 和 ∇。 □

III. 因果集的抽象代数

到目前为止，我们假设基空间 M 上存在底层序关系 $\preceq$，并根据 $\preceq$ 确定了 M 的两个特殊子集类。现在我们反过来，在不假设 M 上存在任何偏序的情况下，抽象地赋予与 Δ 集和 ∇ 集相对应的数据。我们给出如下定义。

定义 III.1. 集合 M 上的因果集代数是一个五元组 $(M, C_\Delta(M)\ C_\nabla(M)\ \cup_{\mathcal{C}}, T)$，其中 *re*

1. $C_\Delta(M)$ 和 $C_\nabla(M)$ 是 M 的子集族，满足 $\emptyset \in C_\Delta(M)$、$\emptyset \in C_\nabla(M)$，且对任意 $p \in M$，单点集 $\{p\}$ 均属于二者；并且它们对（可数多个）交集和（有限多个）因果并封闭

$$\cap : C_\Delta(M) \times C_\Delta(M) \to C_\Delta(M)\ , \qquad \cup_{\mathcal{C}} : C_\Delta(M) \times C_\Delta(M) \to C_\Delta(M)$$
$$\cap : C_\nabla(M) \times C_\nabla(M) \to C_\nabla(M)\ , \qquad \cup_{\mathcal{C}} : C_\nabla(M) \times C_\nabla(M) \to C_\nabla(M)$$

2. T 是 $C_\Delta(M) \cup C_\nabla(M)$ 上的可逆映射，使得 $T(C_\Delta(M)) = C_\nabla(M)$、$T(C_\nabla(M)) = C_\Delta(M)$，且 $T(\emptyset) = \emptyset$。此外，T 满足性质 II.8（它与交集和并集可交换）。

3. 因果并运算 $\cup_{\mathcal{C}}$ 与反演 T 满足 II.13 的性质 .

下面我们证明，因果集代数所包含的信息至少与 M 上的因果性一样多。我们将明确地从上文给出的五元组构造偏序关系。首先给出一些辅助定义。与前文一样，我们将严格因果集的集族记为 $C_+(M) = C_\Delta(M) - C_\nabla(M)$ 和 $C_-(M) = C_\nabla(M) - C(\Delta)(M)$。我们还将 $C_\pm(p) = \{A \in C_\pm(M) | p \in A\}$ 记为。

定义 III.2。一对 经过 $p \in M$ 的严格 Δ 和 ∇ 集，$(A, B) \in C_+(p) \times C_-(p)$，若满足以下条件，则称其在 p 上为带状 f

$$A \cap B = \{p\}\ .$$

我们称集合 $R(p) = \{(A, B) \in C_+(p) \times C_-(p) | (A, B)$ 在 $p\}$ 上为带状，称其为 p 上的带状结构。

注意，带状结构可能为空，并且平凡对（$\{p\}$，$\{p\}$）不属于 R（p），因为根据定义，单点集既是Δ 又是 ∇。在某种意义上，带状结构也可能是平凡的，下面将对此加以说明。

定义 III.3。如果对于任意形如 $A' = A \cap V$和 $B' = B \cap W$的非平凡（不是单点集 $\{p\}$）子集，其中 V、$W \in C_+$（p）$\cup C_-$（p），都存在非平凡的 $A'' \subseteq A'$ 和 $B'' \subseteq B'$，使得（A''，B''）$\in R$（p），则称对（A，B）$\in R$（p）在 R（p）中是稠密的。

定义 III.4。当且仅当

1. 每个（A，B）$\in R$（p）在 R（p）中都是稠密的

2. 对于 $\in R$（p）中的任意两个对（A，B）和（C，D），如果（$A \cup C$）$\cap$（$B \cup D$）$= \{p\}$，则有

$$(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap (B \cup_{\mathcal{C}} D) = \{p\}$$

正则带的条件确保有足够多的点对来构造偏序关系。我们不会将不具有正则带的点置于关系之中。它们的重要性很快就会显现出来。对于具有正则带的点，我们定义如下关系

定义 III.5. 两个点对 (A, B)、$(C, D) \in R(p)$ 是同余的，记作 $(A, B) \simeq (C, D)$，当且仅当 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in R(p)$。

引理 III.6. 如果 $(A, B) \simeq (C, D)$，则有 $A \cap D = B \cap C = \{p\}$。

证明。根据同余的定义

$$(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap (B \cup_{\mathcal{C}} D) = \{p\}$$

反复使用 II.13 的性质，我们可以写成

$$(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap (B \cup_{\mathcal{C}} D) = [(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap B] \cup_{\mathcal{C}} [(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap D] = (A \cap B) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap B) \cup_{\mathcal{C}} (A \cap D) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap D) = \{p\}$$

最后一个等式成立的条件是，每个交集所包含的元素不超过 p。另一方面，由于所有涉及的集合都包含 p，因此有 $A \cap B = C \cap B = A \cap D = C \cap D = \{p\}$。 □

定理 III.7. 同余是正则带上的等价关系。

证明。自反性和对称性显然，因为 $A \cup_{\mathcal{C}} A = A$ 和 $A \cup_{\mathcal{C}} B = B \cup_{\mathcal{C}} A$ 对于任意 A, B。要证明传递性，假设 $(A, B) \simeq (C, D)$ 且 $(C, D) \simeq (E, F)$。考虑集合

$$(A \cup E) \cap (B \cup F) = (A \cap B) \cup (A \cap F) \cup (E \cap B) \cup (E \cup F)$$

其中等式由基本的集合论恒等式得出。由于 $(A, B) \in R(p)$ 且 $(E, F) \in R(p)$，$A \cap B = \{p\} = E \cap F$。鉴于所涉及的所有集合都包含 p 这一元素，我们可以写出

$$(A \cup E) \cap (B \cup F) = (A \cap F) \cup (E \cap B) .$$

现在，假设 $A \cap F$ 包含 p 以外的点。由于 p 是正则的，因此存在一个属于 $C_+(p)$ 的非平凡子集 $G \subseteq A \cap F \subseteq A$。鉴于 (C, D) 在 $R(p)$ 中稠密，以下陈述至少有一项成立

$$\{p\} \subset G \cap C \subseteq A \cap F \cap C$$
$$\{p\} \subset G \cap D \subseteq A \cap F \cap D$$

但是，$(A, B) \simeq (C, D)$，这意味着 $A \cap D = \{p\}$ 和 $(C, D) \simeq (E, F)$，因此，根据引理 III.6，$C \cap F = \{p\}$。于是，右侧的每个交集都等于 $\{p\}$，从而导致矛盾 $\{p\} \subset \{p\}$。由此我们得出结论：$A \cap F = \{p\}$。通过类似的推理，可以证明 $E \cap B = \{p\}$。总而言之，我们已经证明了

$$(A \cup E) \cap (B \cup F) = \{p\} .$$

最后，由于根据假设，p 具有一个正则带，因此可得 $(A \cup_{\mathcal{C}} E, B \cup_{\mathcal{C}} F) \in R(\{v5)$。 □

引理 III.8. 设 $R(p)$ 是正则带状结构，并且 (A, B)、$(C, D) \in R(p)$ 是任意两对。那么以下陈述至少有一个成立。

$$A \cap C = \{p\}$$
$$B \cap C = \{p\}$$

以及 D 马会

$$A \cap D = \{p\}$$
$$B \cap D = \{p\} .$$

证明。假设 $A \cap C$ 和 $B \cap C$ 均包含除 p 之外的点。那么 $A \cap C$ 和 $B \cap C$ 是 A 和 B 的非平凡子集，并且根据正则性，存在 $G \subseteq A \cap C$ 和 $G \subseteq B \cap C$，使得 $(G, H) \in R(p)$。那么 $(A, B) \simeq (G, H)$，因为 $A \cup_{\mathcal{C}} G = A$ 和 $B \cup_{\mathcal{C}} H = H$；$(G, D)$、$(G, B) \in R(p)$，因为 $G \subseteq C$ 和 $G \subseteq A$；并且 $(G, D) \simeq (G, B)$，因为

$$G \cap (D \cup B) = (G \cap D) \cup (G \cap B) = \{p\} \cup \{p\} = \{p\}$$

其中第二个等式更是由 $A \cap B = \{p\} = C \cap D$ 得出。此外，$(A, B) \simeq (G, B)$ 且 $(G, D) \simeq (C, D)$ 显然成立，因为 $A \cup_{\mathcal{C}} G = A$ 和 $C \cup_{\mathcal{C}} G = C$。下面的同余链成立

$$(A, B) \simeq (G, B) \simeq (G, D) \simeq (C, D)$$

从而 $(A, B) \simeq (C, D)$。因此，根据引理 III.6，$B \cap C = \{p\}$ 和 ，这与假设相矛盾。对于 D 陈述，证明是类似的。 □

T定理 III.9. 对于一个正则带 $R(p)$，至多存在两个不同的同余类 e.

证明。考虑任意三个非平凡对 (A, B)、(C, D)、$(E, F) \in R(p)$，并假设其中任意两个都不同余。根据引理 III.8，不失一般性，假设

$$A \cap E = B \cap F = C \cap E = D \cap F = A \cap C = B \cap D = \{p\} \tag{38}$$

但随后

$$(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap (B \cup_{\mathcal{C}} D) = [(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap B] \cup_{\mathcal{C}} [(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap D] = (A \cap B) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap B) \cup_{\mathcal{C}} (A \cap D) \cup_{\mathcal{C}} (C \cap D) = (C \cap B) \cup_{\mathcal{C}} (A \cap D)$$

现在，要么（$C \cap B$）与（$A \cap D$）中至少有一个是非平凡的，要么交集等于 $\{p\}$，从而（A, B） $\simeq$（C, D），这与假设相矛盾。假设（$C \cap B$）是非平凡的。鉴于（A, B）是稠密的，存在一个非平凡的 $G \subseteq C \cap B \in C_+$（$p$），使得（$G, D$） $\in R$（p），因为$G \cup_{\mathcal{C}} C = C$。那么，由于（$E, F$）同样是稠密的，以下陈述中至少有一个为真

$$\{p\} \subset G \cap E$$
$$\{p\} \subset G \cap F\ .$$

在第一种情况下，我们有 $\{p\} \subset G \cap E \subseteq (C \cap B) \cap E = \{p\}$；在第二种情况下，我们有 $\{p\} \subset G \cap F \subseteq (C \cap B) \cap F = \{p\}$，两者都自相矛盾。由 $A \cap D$ 的非平凡性也可得出类似结论，因此必须排除这一假设。对于引理 III.8 中所有其他可能的陈述组合，证明过程类似。 □

上述定理确保第 th. t 类。 每个（非空）正则带状结构都容纳一个同余类或两个不同的#+#+#+#+

A. 从集合代数导出的因果序

有了前面的结果，我们现在继续从因果集代数构造偏序关系。

定义 III.10. 设 $p, q \in M$ 具有正则带 $R(p)$ $R(q)$。当且仅当存在两个（非空）全等类 $\alpha \in R(p)/\simeq$ 和 $\gamma \in R(q)/\simeq$，且下列陈述之一成立时，我们称 p 与 q 相关：

1. $(A \cup_{\mathcal{C}} C, D) \in \gamma$ 和 $(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$
2. $(A \cup_{\mathcal{C}} C, B) \in \alpha$ 和 $(C, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \gamma$

$\forall (A, B) \in \alpha$ 和 $\forall (C, D) \in \gamma$.

定义 III.10 仅规定了何时两个具有正则带的点相关。需要注意的是，因果集代数同时包含因果序及其逆序的信息，因此区分二者只是一种约定。我们采用如下约定：若定义 III.10 的情况 1 成立，则令 $p \preceq q$：

定义 III.11. 我们规定 $p \preceq q$ 当且仅当存在两个全等类 $\alpha \in R(p)/\simeq$ 和 $\gamma \in R(q)/\simeq$，使得$(A \cup_{\mathcal{C}} C, D) \in \gamma$且$(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$ $\forall (A, B) \in \alpha$，并且 $\forall (C, D) \in \gamma$。

定理 III.12. III.11 中定义的关系是在具有正则带状结构的 M 点之间的偏序关系。

证明. • 自反性。令 $p \in M$，且 $R(p)$ 正则。给定一个同余类 $\alpha \in R(p)/\simeq$，根据定义，对于任意(A, B)、$(C, D) \in \alpha$（$A \cup_{\mathcal{C}} C, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$，均成立。已知$(A \cup_{\mathcal{C}} C, D)$和$(A \cup_{\mathcal{C}} C, B \cup_{\mathcal{C}} D)$满足

$$[(A \cup_{\mathcal{C}} C) \cup_{\mathcal{C}} (A \cup_{\mathcal{C}} C)] \cap [(B \cup_{\mathcal{C}} D) \cup_{\mathcal{C}} D] = (A \cup_{\mathcal{C}} C) \cap B \cup_{\mathcal{C}} D) = \{p\}$$

我们有 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, D)$ 是 $R(p)$ 中与 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, B \cup_{\mathcal{C}} D)$ 同余的元素，从而当然也与 (A, B) 和 (C, D) 同余。于是 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, D) \in \alpha$。类似地，$(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$。因此，关系 III.11 对于 $\gamma = \alpha$ 成立。

• 反对称性。显然，根据定义 III.10 的对称性，如果第一个陈述对应于 $p \preceq q$，那么第二个陈述就对应于 $q \preceq p$。为了证明反对称性，只需证明这两个陈述能够同时成立，当且仅当 $p = q$。设 $R(p)$ 和 $R(q)$ 是正则的，并假设这两个陈述均成立。那么$\forall (A, B) \in \alpha$且 $\forall (C, D) \in \gamma$我们有 $(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$和 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, B) \in \alpha$。然而，根据同余的定义，$(A \cup_{\mathcal{C}} C, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in R(p)$，从而更强地意味着

$$(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{p\}\ .$$

另一方面

$$(A \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (C \cap B) \cup (C \cap D) = \{p\} \cup (A \cap D) \cup (C \cap B) \cup \{q\}$$

其中，最后一步是因为根据假设，$(A, B) \in R(p)$ 且 $(C, D) \in R(q)$。当且仅当 $p = q$ 时，这两个方程相容。

• 传递性 设 p、q、r 具有正则带 $R(p)$ $R(q)$ $R(r)$，并假设 $p \preceq q$和 $q \preceq r$。记 $\alpha \in R(p)/\simeq$、$\gamma \in R(q)/\simeq$和 $\epsilon \in R(r)/\simeq$为相关陈述成立的对象。对于所有 $(A, B) \in \alpha$、$(C, D) \in \gamma$、$(E, F) \in \epsilon$，有

– $(A \cup_{\mathcal{C}} C, D) \in \gamma$ and $(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$
– $(C \cup_{\mathcal{C}} E, F) \in \epsilon$ and $(C, D \cup_{\mathcal{C}} F) \in \gamma$

取定 $C' = A \cup_{\mathcal{C}} C$，其中 $(C', D) \in \gamma$，有

$$(C' \cup_{\mathcal{C}} E, F) = (A \cup_{\mathcal{C}} C \cup_{\mathcal{C}} E, F) \in \epsilon$$

鉴于 $r \in A \cup_{\mathcal{C}} E$，并且更不用说（$A \cup_{\mathcal{C}} E$）$\cap F = \{r\}$，我们得出结论（$A \cup_{\mathcal{C}} E, F$）$\in \epsilon$，因为它显然与（$A \cup_{\mathcal{C}} C \cup_{\mathcal{C}} E, F$）全等。同样地，取 $D' = D \cup_{\mathcal{C}} F$) 我们有

$$(A.B \cup_{\mathcal{C}} D') = (A, B \cup_{\mathcal{C}} D \cup_{\mathcal{C}} F) \in \alpha$$

根据上述相同的推理，得到 $(A, B \cup_{\mathcal{C}} F) \in \alpha$。我们已经证明 $\forall (A, B) \in \alpha$ 和 $\forall (E, F) \in \epsilon (A \cup_{\mathcal{C}} E, F) \in \epsilon$，且 $(A, B \cup_{\mathcal{C}} F) \in \alpha$，即 $p \preceq r$。

□

现在我们必须通过反转 III.11 中定义的顺序来检查反演 T 是否按预期发挥作用。我们有以下

引理 III.13. 如果 $p \in M$ 有正则带 $R(p)$，点 $T(p) \in M$ 也有正则带 $R(T(p))$。

证明。我们通过显式构造来证明这一点。令 $R(T(p)) = \{(T(B)\ T(A)) | (A, B) \in R(p)\}$。由于 $p \in A, B$，显然$T(p) \in T(A)\ T(B)$。此外，根据性质 II.8，$T(A) \cap T(B) = T(A \cap B) = \{T(p)\}$。于是 $(T(B)\ T(A) \in C_+(T(p)) \times C_-(T(p))$，这是由 II.14 得出的，并且显然是覆盖 $T(p)$ 的带状结构。覆盖 $T(p)$ 的所有可能带对都具有这种形式，因为假设 (C, D) 是覆盖 $T(p)$ 的带对。那么，根据与上文相同的论证，$(T^{-1}(D)\ T^{-1}(C))$ 是覆盖 p 的带对。因此，$R(T(p))$ 确实是覆盖 $T(p)$ 的带状结构。正则性直接由$R(p)$的正则性得出，因为 T 与交、并和因果并可交换。 □

定理 III.14. 若 $p \preceq q$ 根据 III.11，则 $T(q) \preceq T(p)$。

证明。设 $\alpha \in R(p)/\simeq$ 和 $\gamma \in R(q)/\simeq$ 为两个相关的同余类。令 $T(\alpha) = \{(T(B)\ T(A)) | (A, B) \in \alpha\}$ 和 $T(\gamma) = \{(T(D)\ T(C)) | (C, D) \in \gamma\}$。由 III.13 可知，$T(\alpha)$ 和 $T(\gamma)$ 分别是 $R(T(p))$ 和 $R(T(q))$ 中的同余类。根据假设，$\forall (A, B) \in \alpha$ 和 $\forall (C, D) \in \gamma$，我们有 $(A \cup_{\mathcal{C}} C, D) \in \gamma$ 和 $(A, B \cup_{\mathcal{C}} D) \in \alpha$。但是

$$(T(D), T(A \cup_{\mathcal{C}} C)) = (T(D), T(A) \cup_{\mathcal{C}} T(C)) \in T(\gamma)$$
$$(T(B \cup_{\mathcal{C}} D), T(A)) = (T(B) \cup_{\mathcal{C}} T(D), T(A)) \in T(\alpha)$$

因此，存在全等类 $T(\gamma)$ 和 $T(\alpha)$，使得对于任意 $(E, F) \in T(\gamma)$ 以及任意 $(G, H) \in T(\alpha)$，都有 $(E \cup_{\mathcal{C}} G, H) \in T(\alpha)$ 和 $(E, F \cup_{\mathcal{C}} H) \in T(\gamma)$；与 III.11 对照可知，这意味着 $T(q) \preceq T(p)$。

□

我们以讨论抽象定义 III.11 如何与给定的因果序一致来结束本节，前提是后者已给定且足够正则。其识别过程如下。给定因果序 $\preceq$ 时，我们可以通过考察分别由 p 从下方和上方有界的严格 ∇ 集与 Δ 集，显式构造 p 上带状结构中的一个同余类。若该序足够正则（即因果集足够稠密），那么具有相同顶点 p 的集合 A、B 的因果并仍是一个顶点为 p 的集合，因为因果并选取的是包含 A 和 B 的最小可能集合。对于闵可夫斯基时空中的光锥，这一点显而易见。现在，若 $p \preceq q$，任何由 p 有界的 Δ 集都可以扩展为由 q 有界的 Δ 集，而任何由 q 有界的 ∇ 集都可以扩展为由 p 有界的 ∇ 集。这就是抽象定义 III.11 的实际意义。识别所需的最小条件如下（此处所有运算均由给定的因果序 $\preceq$ 所诱导）：

定义 III.15. • $\forall p \in M$，且对于所有由 p 有界的 $A, B \in C_+(p)$，$A \cup_{\mathcal{C}} B \in C_+(p)$ 有界于 p。

• $\forall p \in M$，并且对于所有被 p、$A \cup_{\mathcal{C}} B \in C_-(p)$ 有界的 A、$B \in C_-(p)$，且被 p 有界

• 该序关系足够稠密：若对每个由 p 有界的 $A \in C_+(p)$，都存在一个由 q 有界的 $B \in C_+(q)$，使得 $A \subseteq B$；反之亦然，对每个由 q 有界的 $A \in C_-(q)$，都存在一个由 p 有界的 $B \in C_-(p)$，使得$A \subseteq B$。若因果性 $(M, \preceq)$ 满足上述要求及交叉性质，我们称其为正则的。

基流形 M 在某些区域可能无法满足这些要求，在这种情况下，识别的定义域将限制为满足这些要求的 M 子集。鉴于这些考虑，因果集的抽象代数所诱导的因果序等价于正则因果性。

IV. 因果测度

有一种有意义的方式可以对因果集代数的元素进行加权。为理解这一点，让我们聚焦于给定代数的 ∇ 集中的 $C_\nabla(M)$ 部分。让我们回顾统计力学中微观状态数的概念：对于一个处于平衡态、总能量为 E 的系统，我们将其记为 $\Omega(E)$。一个由两个孤立子系统组成、能量分别为 E_1 和 E_2 的系统，其微观状态总数为 $\Omega_{1+2}(E_1+E_2) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2)$，其中 $\Omega_i(E)$ 是子系统 i的微观状态数。我们希望得到一种乘法测度，使因果集具备这一性质。

设定 $A \in C_\nabla(M)$，并赋予函数 $\sigma\colon\ C_\nabla(M) \to [1,\infty)$。如果 $A = \{p\}$ 由单个点组成，则赋予 $\sigma(A) = 1$。我们期望，如果 A、$B \in C_\nabla(M)$ 不相交，则希望 $\sigma(A \cup B) = \sigma(A)\sigma(B)$。如果 A、B 不相交，我们必须消除重叠部分 $A \cap B$ 的重复计数，因此设定 $\sigma(A \cup B) = \sigma(A)\sigma(B)\,\sigma(A\cap B)$。如果进一步规定 $\sigma(\emptyset) = 1$，则这两个要求是一致的。然而，我们必须记住，对于因果集而言，相关运算不是并，而是因果并。因此，我们施加较弱的要求：$\sigma(A \cup_{\mathcal{C}} B) \geq \sigma(A)\sigma(B)\,\sigma(A\cap B)$，当 $A \cup B = A \cup_{\mathcal{C}} B$ 时取等号。于是我们得到如下结果

定义 IV.1. 因果测度（可发散）是一个映射 $\sigma\colon C_\nabla(M) \to [1,\infty]$，满足

1. $\sigma(\emptyset) = \sigma(\{p\}) = 1\ \forall p \in M$
2. $\forall A, B \in C_\nabla(M)$ 成立

$$\sigma(A \cup_{\mathcal{C}} B) \geq \frac{\sigma(A)\sigma(B)}{\sigma(A \cap B)}$$

且当 $A \cup B = A \cup_{\mathcal{C}} B$ 时等式成立。

该定义可以用两种不同方式扩展到 M 的所有子集。对于任意 $A \subseteq M$，令 $C_\nabla(A) = \{X \in C_\nabla(M) | A \subseteq X\}$，以及 $C^*_\nabla(A) = \{X \in C_\nabla(M) | X \subseteq A\}$。于是定义 $\sigma(A) = \inf_{X\in C_\nabla(A)} \sigma(X)$ 和 $\sigma^*(A) = \sup_{X\in C_{*\nabla}(A)} \sigma(X)$。这两种扩展不一定一致，我们将优先采用 σ^* 而非 σ。

类似地，可以在 $C_\Delta(M)$ 上定义收敛的因果测度。因果测度具有以下直观性质：

命题IV.2. 如果 $A \subseteq B$，则 $\sigma(A) \leq \sigma(B)$。

证明。如果 A 是空集或单元素集，则证明是平凡的，因为根据定义，$\sigma(A) = 1$ 且 $\sigma(B) \geq 1$。设 $\sigma(A) > 1$。写作 $B = (B - A) \cup (B \cap A)$，显然有 $B = (B - A) \cup_{\mathcal{C}} (B \cap A)$。于是

$$\sigma(B) = \frac{\sigma(B - A)\sigma(B \cap A)}{\sigma((B - A) \cap (B \cap A))} = \frac{\sigma(B - A)\sigma(A)}{\sigma(\emptyset)} = \sigma(B - A)\sigma(A)$$

在此，如果 $B - A$ 不是一个 ∇ 集，则理解为两个扩展 σ、σ^* 中的任意一个。鉴于根据定义 $\sigma(B - A) \geq 1$，我们得到该结论。□

对于给定的因果测度，我们可以将相关的形式熵定义为 $S(A) = k_B \log(\sigma(A))$，其中 k_B 是玻尔兹曼常数。根据上述命题，$S(A)$ 是可加的，即如果 $A \subseteq B$

$$S(B) = S(B - A) + S(A)\,.$$

该结果通过归纳法可推广到集合 B 的任意由不相交子集 $B = \bigcup_i X_i$ 构成的划分，从而 $S(B) = \sum_i S(X_i)$。随后，形式熵具有勒贝格意义下的测度的性质，因为它同样是非负的，并满足 $S(\emptyset) = 0$。当然，我们也可以反过来，指定一个形式熵 S，并通过 $\sigma = \exp S/k_B$ 定义因果测度。我们注意到，定义 IV.1 及其随后的性质 IV.2 意味着形式熵具有某种单调性，即对于 $A \subseteq B$，$S(A) \leq S(B)$。这一看似微不足道的方面排除了一些更为奇特的熵定义，例如具有 $q > 1$ 的类似 Tsallis 的熵（例如参见 [8]），对于这些熵，关系

$$S_q(A \cup B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{(1-q)}{k_B} S_q(A) S_q(B) \tag{39}$$

将意味着，对于 $A \subset B$，B 的熵

$$S_q(B) = S_q\left(A \cup (B - A)\right) = S_q(A) + S_q(B - A) + \frac{(1-q)}{k_B} S_q(A) S_q(B - A) \tag{40}$$

对于 $q > 1$，它可以小于 $S_q(A)$。从某种意义上说，这种奇异的熵与我们对因果性的朴素直觉背道而驰。

A. 视界熵

在洛伦兹流形上，存在一种自然的形式熵概念。为简单起见，我们聚焦于闵可夫斯基时空，并刻画其因果集。选取一组直角坐标，并将其记为 $p \in M^{1,3}$, $x_p^\mu \equiv (x_p^0, x_p^1, x_p^2, x_p^3)$。自然地，在任何由正洛伦兹变换联系起来的坐标系中，因果序的描述都相同，因为正洛伦兹变换不会影响因果关系。我们已经看到，菱形区域 $C[p,q]$ 既是 ∇，也是 Δ。令 x_p^0 和 x_q^0 为时间坐标，并令 $M(t_1,t_2) = \{p \in M^{1,3} | t_1 \le x_p^0 \le t_2\}$。本质上，我们是在用等时面对 $M^{1,3}$ 进行分叶，并选取由 t_1 和 t_2 处的曲面所夹的 M 子集。对于 $x_p^0 \le t \le x_q^0$，集合 $X[t,q] = M(t, x_q^0) \cap C[p,q]$ 和 $Y[p,t] = M(x_p^0, t) \cap C[p,q]$ 分别是 Δ 和 ∇。收敛性和发散性显而易见，因为 $z \preceq q$ 和 $p \preceq z \; \forall z \in C[p,q]$。为证明完备性，注意到 $C[p,q] = X \cup Y$，并考虑任意两个点 $r, s \in X$。如果 r, s 不相关，或者 $r = s$, $C[r,s] = \emptyset(\{r\})$，则无需证明。接着，不失一般性，假设 $r \prec s$。由于 $r, s \in X, t \le x_r^0 < x_s^0 \le x_q^0$，且 $C[r,s]$ 中的所有点的时间坐标都必须介于 t 和 x_q^0 之间。因此 $C[r,s] \subseteq M(t, x_q^0)$。另一方面，由 $C[p,q]$ 的完备性可知，$C[r,s] \subseteq C[p,q]$。因此 $C[r,s] \subseteq M(t, x_q^0) \cap C[p,q] = X$。关于 Y 完备性的证明也类似。其他因果集可以通过将不完整菱形 $C[p,\infty]$ 和 $C[\infty,p]$ 截取至时间 $t \le (\ge) x_p^0$ 而得到。回顾一下，不完整菱形本身就是 Δ (∇) 集。

每个因果集显然都有一个由类空曲面 S 和零区域 H 组成的边界。对于延伸至无穷远的集合，S 可能不存在，但 H 总是有定义的。我们称 H 为给定因果集的视界，并用 $H_t = H \cap \Sigma_t$ 表示 H 与 t 处等时曲面的交集。我们将形式熵定义如下：

定义 IV.3. 设 A 为一个因果集，$H(A)$ 是其视界（边界的零部分）。若 $H_t(A)$ 是 $H(A)$ 与 t 处等时曲面的交集，则定义视界熵

$$S(A) = \alpha \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}(H_t(A))$$

其中 $\mathcal{A}$ 表示 $2d$ 区域 $H_t(A)$ 的面积，α 为一个有量纲的正数常量。

该定义自然可加地推广到不相交并集 $A \cup B$，即 $S(A \cup B) = \alpha \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}(H_t(A)) + \alpha \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{A}(H_t(B))$。为理解这种定义的含义，我们来计算形如 $Y[p,t] = M \; x_p^0 \; t \; \cap C[p,\infty]$ $H_{t'} \; Y[p,t]$ $z \in M^{1\,3}$ t' $\eta_{\mu\nu} \; x_z^\mu - (\,,\,)$ 的 $x_p^\mu \quad x_z^\nu - x_p^\nu \quad = 0$ 发散集合的视界熵。交集 ( ) 是由满足 ( )(( )) 的时间坐标的点组成的集合。显式写出

$$(t' - x_p^0)^2 - (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p})^2 = 0 \Rightarrow R^2(t') = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p})^2$$

其中 $R^2(t') = (t' - x_p^0)^2$，粗体字母是空间分量的简写。这只是一个以 $\boldsymbol{p}$ 为中心、半径为 $R(t')$ 的二维球面，因此其面积为 $\mathcal{A}(H_{t'}(Y[p,t])) = 4\pi R^2(t')$。显然，当 $t' = t$ 时其面积最大，（对于 $t' > t$，交集为空），于是 $S(Y[p,t]) = 4\alpha\pi R^2(t)$。如果选取 p 作为原点，视界熵便呈现出一种颇具启发性的形式：

$$S(Y[0,t]) = 4\alpha\pi t^2 \, .$$

如果 S 要具有熵的单位，那么 $\alpha \sim \frac{k_B}{L^2}$，其中 k_B 为玻尔兹曼常数，L 为长度，另有一个可能的数值系数。普朗克长度 $L = l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ 似乎是自然的选择。贝肯斯坦-霍金熵 [2] 由 $\alpha = \frac{k_B}{4l_p^2}$ 得到。通过规定 B 为任意非因果集合，并令 $S(B) = \sup_{A \in C_\nabla(M) | A \subseteq B} S(A)$，便可将视界熵推广到任意非因果集合。在闵可夫斯基时空中，视界熵在某种程度上是人为的，因为它与任何形式的曲率都没有关系。在一般的洛伦兹流形中，其定义则更为重要，只需将相等的 t 曲面替换为一般的柯西曲面即可。以施瓦西黑洞为例 $\mathcal{B}$（例如参见 [9]）。显然，在给定的柯西曲面上，我们可以容纳 $\mathcal{B}$ 个与 $\mathcal{B}$ 具有相同视界的 ∇ 集合（但不能更多），因此，按上述方式定义的视界熵必然与贝肯斯坦-霍金熵一致。这一构造具有自然性，从雅各布森 [5] 的著名结果中也可明显看出。

五、结论

我们已经给出了从一个特殊的集合代数（因果集）构造因果序关系的方法，该方法事先不假设任何拓扑或微分概念。这一构造完全独立于背景，也就是说，无需在底层集合上预先假设任何几何结构。在没有给定底层几何的情形下，这一点可能会成为一个重要优势，因为量子引力中大概正是如此。我们讨论了因果集如何具有一种自然的测度，

在洛伦兹流形的特定情形下，这种测度可以取为与视界熵一致。通过这一点，热力学与时空因果结构之间的关系变得清晰起来。这里提出的构造可以在未来的发展中得到完善，并最终在更一般的基础上与其他集合代数构造（拓扑、σ-代数等）进行比较。此外，值得注意的是，我们处理的是一种极其经典的因果性概念。这可以作为构造量子因果性概念的基础，后者是对前者的适当推广。

致谢

谨此感谢 MIUR 和 INFN 提供的部分经费支持。A.C. 和 G.L. 还感谢 COST Action CA1511“宇宙学与天体物理理论进展及培训行动网络”（CANTATA）。

[1] S. W. Hawking, 《Comm. Math. Phys.》43，199-220（1975）。[2] J. D. Bekenstein, 《Phys. Rev. D》9，3292（1974）。[3] J. M. Bardeen、B. Carter 和 S. W. Hawking, 《Comm. Math. Phys.》31，161-170（1973）。[4] R. M. Wald, 《Living Reviews in Relativity》4，6（2001）。[5] T. Jacobson, 《Phys. Rev. Lett.》75，1260（1995）。[6] D. B. Malament, 《J. Math. Phys.》18，1399（1977）。[7] Alexandroff P., 《Diskrete R¨aume》, 《Mat. Sb.》（N.S.）2，501–518（1937）。[8] C. Tsallis, 《Braz. J. of Physics》39，2A，八月（2009）。[9] R. M. Wald, 《广义相对论》，芝加哥大学出版社（1984）。