arXiv:2304.09716v1 [math.FA] 19 Apr 2023

论 Berger-Coburn 现象

ZHANGJIAN HU 和 JANI A. VIRTANEN

ABSTRACT. 在此前的工作中，作者证明了当 $1 < p < \infty$ 时，广义 Fock 空间上紧的及 Schatten S_p 类 Hankel 算子 H_f 的 Berger-Coburn 现象，即对于有界符号 f，如果 H_f 是一个紧算子或 Schatten 类算子，那么 $H_{\bar{f}}$ 也是如此。最近，J. Xia 给出了一个简单的例子，表明在经典 Fock 空间 F^2 上，迹类 Hankel 算子不存在 Berger-Coburn 现象。利用 Xia 的例子，我们证明，对于任意 $0 < p \leq 1$，广义 Fock 空间 F^2_φ 上的 Schatten S_p 类 Hankel 算子均不存在 Berger-Coburn 现象。我们的方法基于 Schatten 类 Hankel 算子的刻画，而 Xia 的方法则较为初等，并大量利用了 F^2 的显式基向量，而对于我们所研究的加权 Fock 空间，这些显式基向量并不存在。我们还提出了四个未解决问题。

1. INTRODUCTION

给定一个权 $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$，我们称可测函数$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 属于 L^2_φ，如果

$$\|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dv(z) \right)^{1/2} < \infty,$$

其中， v 是 $\mathbb{C}^n$上的标准 Lebesgue 测度。对于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，我们用 $H(\Omega)$ 表示$\mathbb{C}^n$上所有全纯函数构成的空间。加权 Fock 空间 F^2_φ 定义为

$$F^2_\varphi = H(\mathbb{C}^n) \cap L^2_\varphi.$$

2020 数学学科分类。主要分类：47B35、47B10；次要分类：32A25、32A37。关键词和短语。Schatten 类、紧算子、Hankel 算子、Fock 空间。Z. HU 获得国家自然科学基金（12071130、12171150）的部分资助，J. Virtanen 获得工程与自然科学研究委员会项目 EP/T008636/1 的部分资助。

在本文中，我们考虑满足以下条件的权 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$：存在两个正常数 m 和 M，使得

$$m\omega_0 \le \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi \le M\omega_0 \tag{1}$$

在流的意义下，其中 $\omega_0 = \mathrm{i}\partial\overline{\partial}|z|^2$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的欧几里得-K¨ahler 形式。表达式 (1) 也记作 $\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\varphi \simeq \omega_0$，并且当 $n = 1$ 时，它简化为形式

$$m \le \Delta\varphi \le M,$$

其中，$\Delta\varphi$ 是 φ的拉普拉斯算子。

注意，标准径向权函数 $\varphi(z) = \alpha|z|^2$ with $\alpha > 0$满足 (1)。鉴于其在 Fock 空间理论的诸多重要发展中所发挥的作用，我们特别指出经典 Fock 空间 F^2 of 标准高斯平方可积整函数，它对应于$\alpha = 1$。此外，每个 Fock-Sobolev 空间 $F^{2,m}$ 由整函数 f 组成，这些整函数满足 $\partial^\alpha f \in F^2$ for all 多重指标 $|\alpha| \le m$，可以视为一个 F^2_φ，其中某个 φ 满足 (1)。

本文关注由符号函数 $f \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$ 定义的 Hankel 算子 H_f：

$$H_f g = (I - P)(fg) \tag{2}$$

其中 $g \in F^2_\varphi$。显然，当 $f \in L^\infty$ 时，H_f: $F^2_\varphi \to L^2_\varphi$ 是有界算子。记 H^2 为单位圆 $\mathbb{T}$ 上的 Hardy 空间，记 $A^2(\mathbb{B}_n)$ 为单位球上的 Bergman 空间

$$\mathbb{B}_n = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\|^2 = \langle z, z\rangle = z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n < 1 \right\},$$

即,

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f_k = 0 \text{ for } k < 0\},$$

其中 f_k 是 f 的第 k 个傅里叶系数，并且

$$A^2 = \left\{ f \in H(\mathbb{B}_n) : \int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^2 \, dv(z) < \infty \right\}.$$

我们用 P 表示从 $L^2(\mathbb{T})$ 到 H^2 的正交投影（亦称 Riesz 投影），以及从 $L^2(\mathbb{B}_n)$ 到 A^2 的正交投影（亦称 Bergman 投影）。给定一个有界符号 f，我们按式 (2) 定义 Hankel 算子 H_f。

特别值得关注的是以下性质，我们称之为算子理想 $\mathcal{M}$ 的 Berger-Coburn 现象。

定义 1. 设 P 为希尔伯特空间 H 上的一个正交投影，A 为 H 上的一个线性算子。定义（抽象）汉克尔算子H_A： $P(H) \to H$ 为

$$H_A = (I - P)A.$$

给定算子理想 $\mathcal{M}$ in $B(P(H)\ H)$ 和一组线性算子 A: $H \to H$，如果满足以下条件，则称 Berger-Coburn 现象（BCP）对 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ 成立。

$$H_A \in \mathcal{M} \iff H_{A^*} \in \mathcal{M} \tag{3}$$

对于每个 $A \in \mathcal{A}$，其中 A^* 是 A 的伴随算子。

在下文中，我们只考虑上述定义的 Hankel 算子 $H_f = H_{M_f}$，它们从 Fock 空间、Bergman 空间或 Hardy 空间作用到相应的 L^2 空间，其中 $\mathcal{A} = \{M_f : \ f \in L^\infty\}$。不过，我们是在一个相当一般的背景下给出了前面的定义，因为它在更抽象的情形中可能会引起兴趣。注意，在这三种情形下 $M_f^* = M_{\bar{f}}$，因此（3）等价于

$$H_f \in \mathcal{M} \iff H_{\bar{f}} \in \mathcal{M}$$

对于每个 $f \in L^\infty$。

最重要的算子理想包括紧算子和 Schatten 类算子的算子理想。为了定义两个希尔伯特空间之间的有界线性算子 $T : H_1 \to H_2$，我们用 $s_j(T)$ 表示 T 的奇异值，即，

$$s_j(T) = \inf\{\|T - K\| : K : H_1 \to H_2,\ \operatorname{rank} K \le j\}, \tag{4}$$

其中，\(\operatorname{rank}\{v1\}\) 表示 K 的秩。回顾一下，算子 T 是紧的，当且仅当 $s_j(T) \to 0$，我们用 $K(H_1, H_2)$ 表示所有从 H_1 到 H_2 的紧算子构成的算子理想。对于 $0 < p < \infty$，我们称 T 属于 Schatten 类 S_p，并记为 $T \in S_p(H_1, H_2)$，如果 $\|T\|_{S_p}^p = \sum_{j=0}^\infty (s_j(T))^p < \infty$，当 $1 \le p < \infty$ 时，这定义了一个范数，否则定义了一个拟范数。注意，S_p 也称为 Schatten-von Neumann 类或迹理想；更多细节可参见例如 [10]。

2. Berger-Coburn phenomenon for compact operators

设 $f \in L^\infty$。1987年，Berger 和 Coburn [2] 利用冯·诺依曼代数和希尔伯特空间理论的复杂工具，证明了 BCP 对于 $K(F^2, L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2} dv))$ 成立。几年后，Stroethoff [11], 给出了这一结果的一个更初等的证明，他将其推导为自己对紧性的刻画的推论，即，当且仅当 H_f 是紧的。

$$\|(I - P)(f \circ \tau_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} \to 0 \text{ as } |\lambda| \to \infty, \tag{5}$$

其中 $\tau_\lambda(z) = z + \lambda$ 是平移。

Berger 和 Coburn 的紧性结果之所以格外引人注目，其中一个原因是，在 Hardy 空间和 Bergman 空间的情形下，类似的结论并不成立，以下例子便可说明这一点。

例 2. 令 b 为 Blaschke 乘积

$$b(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad(z\in\mathbb{D}),$$

其中 $\alpha_k=1-\frac{1}{2^k}$。由于 b 是有界解析函数， $H_b=0$ 显然是紧的，但可以证明， b 不属于小 Bloch 空间，因此根据 Axler 关于带有共轭解析符号的紧 Hankel 算子的刻画（见 [3] 第 318–319 页及其中的相关参考文献）， $H_{\bar{b}}$ 不是紧的。因此，对于 $K(A^2,L^2(\mathbb{D}))$，不存在 BCP。 A^2 中还可以利用有界解析函数 $f(z)=\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ 得到另一个具有相同结论的例子，该函数定义于 $z\in\mathbb{D}$。

上面的反例 b 可以加以修改，从而说明对于 $K(A^2,L^2(\mathbb{B}_n))$ 不存在 BCP。事实上，只需令 b 在 $b(z)=b(z_1)$（ $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{B}_n$）处取值，即可将其扩展。于是， b 是 $\mathbb{B}_n$ 上的有界全纯函数，并且 $H_b=0$。另一方面，

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)\frac{\partial b(z)}{\partial z_1}\neq 0$$

因此，正如 [16] 中的定理 16 所示， b 不属于小 Bloch 空间。现在， [4] 中的定理 E 意味着 $H_{\bar{b}}\notin K(A^2,L^2(\mathbb{B}_n))$。

为了说明 $K(H^2,L^2(\mathbb{T}))$不存在 BCP，我们可以选择 $H^\infty\setminus VMO$ 中的一个函数 f（利用 Wolff [12] 关于类 $QA=VMO\cap H^\infty$的一个结果），使得 $H_f=0$是紧的，而 $H_{\bar{f}}$不可能是紧的，因为根据如下刻画， H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 同时为紧的当且仅当 $f\in VMO$。

提出下面这个问题或许是合理的。

开放问题 1：在

$$B(H^2(\mathbb{T}),L^2(\mathbb{T}))\quad\text{or in}\quad B(A^2(\mathbb{B}_n),L^2(\mathbb{B}_n))$$

中，是否存在非平凡的算子理想使 Berger-Coburn 现象成立?

现在我们将注意力重新转回 Fock 空间。尽管我们已经从 Berger 和 Coburn 的结果中得知这一点，但仍值得指出的是，类似于例 2 的构造注定会失败，因为如果 f 是一个有界整函数，那么它必定是常数，因此 $H_{\bar{f}}$ 也必然是紧的。事实上，这也揭示了 BCP 存在的原因。

对于 $K(F^2, L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2}dv)$，但不适用于 $K(A^2, L^2(\mathbb{B}_n))$。Hagger 和 Vir- tanen [3]（使用极限算子技术获得）给出了以下特征的完整解释：设 $\Omega \in \{\mathbb{B}_n, \mathbb{C}^n\}$，$X^2 = A^2_\alpha$ 若 $\Omega = \mathbb{B}_n$，$X^2 = F^2_\alpha$ 若 $\Omega = \mathbb{C}^n$，并记 $\beta\Omega$ 为 Ω 的 Stone-ˇCech 紧化。那么 H_f： $X^2_\alpha \to L^2_\alpha(\Omega)$ 是紧的，当且仅当对于每个 $x \in \beta\Omega \setminus \Omega$，都存在一个 $h_x \in H^\infty(\Omega)$，使得对于 Ω 中收敛于 x 的所有网（z_γ），我们有

$$\|f \circ \phi_{z_\gamma} - h_x\|_{L^p_\alpha} \to 0 \text{ as } z_\gamma \to x, \tag{6}$$

其中，当 $\Omega = \mathbb{C}^n$ 时，$\phi_z(w) = w - z$；当 $\Omega = \mathbb{B}_n$ 时，ϕ_z 是交换 0 和 z 的（唯一）测地对称变换。现在，根据刘维尔定理，¯，当 $\Omega = \mathbb{C}^n$ 时，(6) 中的条件关于 f 和 f 是对称的，因此H_f： $F^2_\alpha \to L^2_\alpha$ 是紧的，当且仅当 $H_{\bar{f}}$ 是紧的。

最后提及，Berger 和 Coburn 结果的第四种证明见 [5]（参见定理 1.2），它以权的形式处理了目前已知的最一般情形 ϕ（甚至证明了，当 $0 < p \leq q < \infty$ 或 $1 \leq q < p < \infty$ 时，H_f： $F^p_\phi \to L^q_\phi$ 是紧的，当且仅当 $H_{\bar{f}}$ 是紧的）。虽然 [5] 中考虑的权满足的条件比 (1) 略强，但我们指出，对于满足 (1) 的权，我们可以证明 $p = q = 2$ 的情形。

3. Berger-Coburn phenomenon for Schatten class operators

研究 Schatten 类 S_p 上是否成立 Berger-Coburn 现象的问题，自然成为上一节工作的下一步。在 H^2 或 A^2的情形下，我们可以立即从例 2 得到否定答案。

接下来我们考虑 Fock 空间上的 Hankel 算子。2004 年，对于 F^2 上的 Hilbert-Schmidt Hankel 算子，Bauer [1] 采用了类似于 [11]的方法，肯定地回答了这一问题。此外，在 [14] 的第 1384 页（见 2003 年 1 月 31 日添加的注释）中，Xia 和 Zheng 声明，他们 2000 年 9 月的预印本已经包含了 Bauer 在一维情形下的结果。他们还评论道，由于他们的方法“相当特别”，而 Bauer [1]（2002 年 4 月）和 Stroethoff（2002 年 9 月，未发表）的预印本证明了 $\mathbb{C}^n$中的结果，因此他们决定不将自己的结果纳入[14]的最终版本。他们的注释将剩余情形描述为“颇具挑战性”。事实上，直到 Hu 和 Virtanen [6, 7]给出以下结果之前，都没有取得进一步进展。

定理 3. 设 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 满足 (1) 中的条件。若 $1 < p < \infty$，则 BCP 对 $S_p(F^2_\varphi, L^2_\varphi)$ 成立，即对于 $f \in L^\infty$, $H_f \in S^p$

当且仅当 $H_{\bar{f}} \in S_p$ 满足带有 S_p-范数估计的条件时

$$\|H_{\bar{f}}\|_{S_p} \leq C\|H_f\|_{S_p},$$

其中常数 C 与 f 无关。

经典 Fock 空间的情形 $p = 1$ 最近由 Xia [13], 解决，他证明了如果

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{if } |z| \geq 1 \\ 0 & \text{if } |z| < 1 \end{cases} \tag{7}$$

那么， H_f: $F^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}\, dv)$ 属于迹类，但 $H_{\bar{f}}$ 不属于，因此对于 $S_1(F^2(\mathbb{C})\ L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}\, dv))$，不存在 BCP。我们注意到，Xia 的工作无法推广到加权 Fock 空间 F^2_φ。

我们提出一种适用于满足（1）的权的替代方法。事实上，利用 Hu 和 Virtanen 对 Schatten 类 Hankel 算子的刻画 [6], ，我们证明 Xia 的例子可用于证明：对于任意满足 $0 < p \leq 1$ 的 $S_p(F^2_\varphi, L^2_\varphi)$，均不存在 BCP。为此，我们需要一些预备知识。

For $f \in L^2_{\text{loc}}$ （ $\mathbb{C}^n$ 上所有局部平方可积函数的集合）和 $0 < q < \infty$, 定义

$$G_{q,r}(f)(z) = \inf_{h \in H(B(z,r))} \left(\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f - h|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{8}$$

对于 $0 < s \leq \infty$，空间 IDA$^{s,\ q}$ （到解析函数的积分距离）由所有满足以下条件的 $f \in L^2_{\text{loc}}$ 构成：

$$\|f\|_{\text{IDA}^{s,q}} = \|G_{q,r}(f)\|_{L^s} < \infty \tag{9}$$

对某个 $r > 0$。当 $1 \leq q < \infty$ 和 $0 < s < \infty$时，注意在 IDA$^{s,\ q}$ 参数 r 被省略，因为该空间与 r 无关，而且 r 的不同取值在每个空间上都会给出等价范数（参见 [5]的注 3.8）。

我们指出，IDA^{p,2} 型条件最初由 Luecking [9] 在研究单位圆盘上的 Bergman 空间 A^2 上的 Schatten 类 Hankel 算子时引入。

将 thespaces IDA^{s,q} 与具有有界平均振荡的函数空间 BMO^p 进行比较可能会有所帮助。回顾一下，空间 BMO^p 定义为

$$\text{BMO}^p = \left\{ f \in L^p_{\text{loc}} : \sup_{z \in \mathbb{C}^n} MO_{p,r}(f)(z) < \infty \right\},$$

其中

$$MO_{p,r}(f)(z) = \left(\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f - \widehat{f}_r(z)|^p \, dv \right)^{1/p}$$

且 $\widehat{f}_r$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的平均函数，其定义为

$$\widehat{f}_r(z) = \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} f \, dv.$$

众所周知，空间 BMO^p 与 r无关。

现在我们可以明确指出 IDA^{s,q} 中一大类不属于 BMO^{p}的整函数。

命题 4. 如果 $f \in H(\mathbb{C})$且 f' 不是常数，那么

$$f \in \mathrm{IDA}^{s,q} \setminus \mathrm{BMO}^p$$

只要 $1 \le p$、$q < \infty$ 和 $0 < s \le \infty$。

证明。由于 $f \in H(\mathbb{C})$，对于所有 $0 < q < \infty$ 和 $0 < s < \infty$，$f \in \mathrm{IDA}^{s,q}$ 是 $G_{q,r}(f) \equiv 0$ 的一个显而易见的推论。另一方面，由 [8] 的引理 2.1 可知，存在一个正常数 C，它仅依赖于 p 和 r，使得

$$|f'(z)| \le C \left(\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f - f(z)|^p dv \right)^{\frac{1}{p}}.$$

此外，由于 $f'' \neq 0$,

$$\limsup_{z \to \infty} |f'(z)|^s = \infty,$$

因此

$$\limsup_{z \to \infty} MO_{p,r}(f)(z)^s = \infty,$$

这意味着 $f \notin$BMO^p。 □

以下结果根据 IDA^p 刻画了 Schatten 类 Hankel 算子，并且包含在 [6]，的定理 1.1 中，其中 IDA^p = IDA^{p,2}。关于（无权）Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 上的 Hankel 算子属于 Schatten 类 S_p 的类似刻画在 $1 \le p < \infty$ 时由 Luecking [9] 得到。

定理 5. 设 $f \in L^\infty$、$\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 为实值函数，且满足 $i\partial\overline{\partial}\varphi \simeq \omega_0$, 以及 $0 < p < \infty$。则 $H_f \in S_p(F^2_\varphi, L^2_\varphi)$ 当且仅当 $f \in$IDA^p。

我们还需要一个关于 Hankel 算子同时具有 Schatten 类归属的结果。为此，对于 $0 < s \leq \infty$，我们将空间 IMO^s （积分平均振荡函数空间）定义为

$$\mathrm{IMO}^s = \left\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}} : MO_{2,r}(f) \in L^s \right\}. \tag{10}$$

注意到，空间 IMO^s 与 r无关。以下结果包含在 [6]的定理 6.2 中。

定理 6. 设 $f \in L^\infty$、 $\varphi \in C^2$（$\mathbb{C}^n$）为实值函数，且满足 i$\partial\overline{\partial}\varphi \simeq \omega_0$，以及 $0 < p < \infty$。则 H_f和 $H_{\bar{f}}$都属于 S_p（F^2_φ、 L^2_φ），当且仅当 $f \in$IMO^p。

与前述定理相关，我们注意到，Xia 和 Zheng [14] 此前针对经典 Fock 空间F^2 与 Schatten 类 S_p 的同时归属（当 $1 \leq p < \infty$时），以“标准差”为术语给出了另一种刻画。

还值得注意的是， H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 在加权 Bergman 空间上的同时 Schatten 类归属，可以用单位圆盘上的 IMO^p 来表述；例如，参见 [15] 的第 4 节，其中介绍了一种受 Luecking 的工作 [9] 启发的方法；关于其他方法以及单位球上的 Bergman 空间情形，另请参见其中的参考文献。然而，与开放问题 1 相关的是，这似乎并未提供任何进一步的洞见。

现在我们可以证明主要结果了。

定理 7. 假设 $\varphi \in C^2(\mathbb{C})$ 满足条件 (1)。如果 $0 < p \leq 1$，那么 Schatten 类 $S_p(F^2_\varphi(\mathbb{C}) \ L^2_\varphi(\mathbb{C}))$ 不存在 Berger-Coburn 现象，也就是说，存在一个符号 $f \in L^\infty(\mathbb{C})$，使得 $H_f \in S_p$ 但 $H_{\bar{f}} \notin S_p$。

证明。设 f 为式 (7) 中给出的函数，即当 $|z| \geq 1$ 时， $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ ；否则， $f(z) = 0$ 。如上所述，IDA^p 的定义与 r 无关，为简化起见，我们令 $r = 1$ 。此外，我们用 C 表示正的常数，这些常数可能随推导过程中的不同步骤而变化，但不依赖于所考虑的函数。

现在，如果 $|z| \geq 2$，那么 f 在 $B(z, 1)$ 中是全纯的，因此显然

$$(G_1(f)(z))^2 = \inf_{h \in H(B(z,1))} \frac{1}{|B(z,1)|} \int_{B(z,1)} |f - h|^2 dv = 0.$$

此外，很容易看出存在一个常数 C ，使得

$$G_1(f)(z) < C$$

对所有 $|z| < 2$ 均成立。因此， $\|G_1(f)\|_{L^p} < C$，故 $f \in$ IDA^p ，由定理 5 可知 $H_f \in S_p$。

为了证明 $H_{\bar{f}}$ 不属于 Schatten 类 S_p，我们应用定理 6。¯如果 $|z| \geq 2$, 那么 f 在 $B(z,1)$ 中是调和函数，因此根据平均值性质，我们有

$$\widehat{\bar{f}}_1(z) = \frac{1}{|B(z,1)|}\int_{B(z,1)} \bar{f}dv = \overline{f(z)}.$$

因此，对于 $|z| \geq 2$,

$$\begin{aligned}(MO_{2,1}(f)(z))^2 &= \frac{1}{|B(z,1)|}\int_{B(z,1)} \left|\overline{f(w)} - \overline{f(z)}\right|^2 dv(w)\\ &= \frac{1}{|B(z,1)|}\int_{B(z,1)} \frac{|w-z|^2}{|wz|^2} dv(w)\\ &\simeq \frac{1}{|z|^4},\end{aligned}$$

因此。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} (MO_{2,1}(\bar{f})(z))^p \, dv(z) &\simeq \int_{\mathbb{C}} \min\left\{1, \frac{1}{|z|^{2p}}\right\} dv(z)\\ &= \begin{cases} C < +\infty & \text{if } p > 1\\ +\infty & \text{if } 0 < p \leq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，根据定理 6， $H_{\bar{f}} \notin S_p$ 如果 $0 < p \leq 1$。 □

本节最后提出一些未解决问题：定理 3、定理 7 以及 Berger 和 Coburn 的定理，对于倍增Fock空间是否仍然成立。回顾一下，如果存在某个常数 $M > 0$，使得 νon $\mathbb{C}$，则称正博雷尔测度 νon $\mathbb{C}$ 为倍增测度。

$$\nu(D(z,2r)) \leq M\nu(D(z,r))$$

对于 $z \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$，其中 $D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < r\}$。设 ϕ 是一个在 $\mathbb{C}$ 上不恒为零的次调和函数，并假设 $\nu = \Delta\phi \, dv$ 是倍增的。我们称 F^2_ϕ 为倍增Fock空间。注意，如果 $\varphi \in C^2(\mathbb{C})$ 满足 (1) 中的条件，那么 F^2_φ 是一个倍增Fock空间。

公开问题 2. 设 F^2_ϕ 是一个倍增 Fock 空间。对于哪些 p, Berger-Coburn 现象对 $S_p(F^2_\phi, L^2_\phi)$ 成立?

事实上，对于紧性，类似的问题似乎也尚无定论:

开放问题 3。设 F^2_ϕ 是一个加倍的 Fock 空间，且 $f \in L^\infty$。如果 $H_f\colon F^2_\phi \to L^2_\phi$ 紧的，那么 $H_{\bar{f}}$ 也紧的吗?

4. Unbounded symbols

除了有界符号函数之外，Hankel 算子在无界符号函数的情形下也得到了广泛研究。定义这类算子的通常方法如下。假设 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 满足 (1)，并令

$$\Gamma = \operatorname{span}\{K_z : z \in \mathbb{C}^n\},$$

其中，$K_z = K(\cdot, z)$ 是 F^2_φ 的再生核（参见 [6] 的第 2.1 节），并考虑符号函数类

$$\mathcal{S} = \left\{ f \text{ measurable on } \mathbb{C}^n : fg \in L^2_\varphi \text{ for } g \in \Gamma \right\}.$$

给定 $f \in \mathcal{S}$ 和 $g \in \Gamma$，Hankel 算子 H_f 有良好定义。由于 Γ 在 F^2_φ 中稠密，因此 $H_f = (I-P)M_f$ 在 F^2_φ 上稠密定义。显然，$L^\infty \subset \mathcal{S}$。

下面的例子表明，对于无界符号，一般而言，F^2_φ 上的紧 Hankel 算子或 Schatten 类 Hankel 算子并不存在 Berger-Coburn 现象。

例 8. 设 $f(z) = z$ for $z \in \mathbb{C}^n$。那么，对于所有 $0 < p < \infty$，$H_f = 0$ 都属于 S_p，但不难看出，对于任意 $0 < p < \infty$，$f \notin \mathrm{IMO}^p$。事实上，我们可以证明 $f \notin \mathrm{IMO}^\infty$，因此 $H_{\bar{f}}$ 不可能是紧的，因为 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 同时是紧的，当且仅当 $f \in \mathrm{IMO}^\infty$（见 [5]）。

我们注意到，函数 $f(z) = z$ 定义于 $z \in \mathbb{C}$，曾出现在 [1], 第 2995 页的例子中，并在那里用于说明存在无界函数，使得 $H_f \in S_2$，但 $H_{\bar{f}} \notin S_2$。前一段表明，利用我们的刻画可以非常容易地看出这一点以及更多结论，从而避免对 [1]进行初等计算。

事实上，前面的例子可以推广到所有次数至少为一的多项式。我们省略细节，转而说明：如果 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是整函数，且满足 $f' \neq 0$，那么对所有 $0 < p < \infty$都有 $H_f = 0 \in S_p$，但 $H_{\bar{f}}$ 不属于 S_p。事实上，

$$MO_2 f(z) = \frac{1}{|B(z,1)|} \int_{B(z,1)} |f(w) - f(z)|^2 \, dv(w) = \widehat{|f|^2}(z) - |f(z)|^2,$$

因此 $MO_2(f) \notin L^p$，由此可像之前一样推出 $H_{\bar{f}} \notin S_p$。

另一方面，我们可以给出一些无界函数的例子，它们满足 BCP。显然，我们需要考虑非整函数。例如，函数 f on $\mathbb{C}^n$ so that $f \in L^2(B(0,1))$ and $f = 0$ outside $B(0,1)$，还可以进一步修改，使得 f 在任何紧集之外都无界。我们以以下一般性问题作结。

开放问题 4. 刻画在 Fock 空间上使 BCP 对紧算子或 Schatten 类算子 H_f 成立的无界符号函数 f。

Acknowledgments

这项工作的绝大部分内容由第二作者在克拉科夫举行的第33届算子理论及其应用国际研讨会（IWOTA）上报告。第二作者谨向主要组织者 M. Ptak 和 M. Wojtylak 致谢，感谢他们的邀请。

References

[1] W. Bauer：Segal-Bargmann 空间上的 Hilbert-Schmidt Hankel 算子。《美国数学会会刊》132 (2004)，第 10 期，2989–2996。[2] C. A. Berger，L. A. Coburn：Segal-Bargmann 空间上的 Toeplitz 算子。《美国数学会汇刊》301 (1987)，第 2 期，813–829。[3] R. Hagger，J. Virtanen：具有有界符号的紧 Hankel 算子。《算子理论杂志》 86 (2021)，第 2 期，317–329。[4] H. Li：强伪凸域 Bergman 空间上的 BMO、VMO 与 Hankel 算子。《泛函分析杂志》106 (1992)，第 2 期，375–408。[5] Z. Hu，J. Virtanen：Fock 空间上的 IDA 与 Hankel 算子。《偏微分方程分析》（即将出版）arXiv:2111.04821。[6] Z. Hu，J. Virtanen：Segal-Bargmann 空间上的 Schatten 类 Hankel 算子与 Berger-Coburn 现象。《美国数学会汇刊》375 (2022)，第 5 期，3733–3753[7] Z. Hu，J. Virtanen：“Segal-Bargmann 空间上的 Schatten 类 Hankel 算子与 Berger-Coburn 现象”勘误。《美国数学会汇刊》（即将出版）。[8] D. H. Luecking：Bergman 空间中函数及其导数的正向与反向 Carleson 不等式。《美国数学杂志》107 (1985)，第 1 期，85–111。[9] D. H. Luecking：单位圆盘 Bergman 空间上某些类 Hankel 算子的刻画。《泛函分析杂志》110 (1992)，第 2 期，247–271。[10] B. Simon：算子理论。《分析综合教程》第 4 部分。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015。[11] K. Stroethoff：Fock 空间上的 Hankel 算子与 Toeplitz 算子。《密歇根数学杂志》39 (1992)，第 1 期，3–16。[12] T. H. Wolff：两个有界函数代数。《杜克数学杂志》49 (1982)，第 2 期，321–328。[13] J. Xia：Fock 空间上 Hankel 算子的 Berger-Coburn 现象，《复分析与算子理论》17 (2023)，论文编号 35。[14] J. Xia，D. Zheng：Segal-Bargmann 空间上的标准差与 Schatten 类 Hankel 算子。《印第安纳大学数学杂志》53 (2004)，第 5 期，1381–1399。[15] Z. Zeng，X. Wang，Z. Hu：指数 Bergman 空间上的 Schatten 类 Hankel 算子。《西班牙皇家精确、物理与自然科学院杂志 A 辑：数学》117 (2023)，第 1 期，论文编号 23，共 19 页。′1–16。

[16] K. Zhu：Bergman 空间、布洛赫空间和格里森问题，《美国数学会汇刊》309（1998），第1期，253–268。

Department of Mathematics, Huzhou University, Huzhou, Zhejiang,China

电子邮箱地址：huzj@zjhu.edu.cn

Department of Mathematics and Statistics, University of Reading, Reading, England

电子邮件地址：j.a.virtanen@reading.ac.uk