arXiv:2304.09747v1 [math.GR] 17 Apr 2023

子扭结的补性

K.J. Amsberry J.A. Bergquist T.A. Horstkamp M.H. Lee D.N. Yetter

2022年8月

摘要

Saki 和 Kiani 证明，若架 R 是有限的，则其子架格必定可补；若 R 是无限的，则不一定可补。本文进一步探讨与子夸群补性相关的问题。Saki 和 Kiani 给出的一个没有补集的无限架的例子是一个 quandle，它既非归纳有限，也非逆有限。我们给出一个子对象格不可补的归纳有限 quandle 的例子，并猜想拟有限 quandle 的子对象格都是可补的。此外，我们完整分类了其集合论补集也是子 quandle 的子夸群，并将这类子夸群称为强补子夸群；同时给出强补子夸群链中补性的一个部分传递性判据。用于证明这一结论的一个技术引理也具有独立意义：子 quandle 的内自同构群总是环境 quandle 的内自同构群的子商。

1 引言

拟群结最初由 Joyce [1] 于1982年引入，作为一种在反转方向意义下的完备经典纽结不变量。近年来，拟群结和架在纽结理论与代数拓扑中获得了众多应用。除这些应用之外，拟群结作为一种代数结构本身也颇具趣味。事实上，拟群结是群的一种抽象，因为任意群都可以在右共轭运算下成为一个拟群结。利用高崎运算 [6]，还可以从阿贝尔群构造拟群结。

与其他代数结构一样，拟群也有子对象。这些子对象，即子拟群，难以研究，因为拟群缺少单位元之类的常元，因此夸德尔同态没有核的概念，也就不存在与正规子群相对应的概念。尽管如此，人们在理解子拟群的有趣性质方面仍取得了一些进展。最近，Saki 和 Kiani[4] 证明，有限拟群的子拟群格必然是可补的，但无限扭结可能存在不可补的子拟群。本文

探讨了若干与子拟群格、子拟群的内自同构群，以及集合论补集本身也是子拟群的子拟群相关的问题。

2 背景与定义

定义 2.1. [1] 拟群是一个集合 Q，配备二元运算 $\triangleright$ 和$\triangleright^{-1}$，并满足以下公理（对所有 x、y、$z \in Q$）：

Q1. $x \triangleright x = x$。Q2. $(x \triangleright y)$ $\triangleright^{-1} y = x = (x \triangleright^{-1} y) \triangleright y$。Q3. $(x \triangleright y)$ $\triangleright z = (x \triangleright z)$ $\triangleright (y \triangleright z)$。

换言之，$\triangleright$是幂等的、右可逆的且右分配的。请注意，如果满足于将拟群描述为一阶理论的模型，而非等式理论的模型，那么提及 $\triangleright^{-1}$ 并非必要，因为对于所有 $y \in Q$，Q2 等价于 $(-)\triangleright y$ 的双射性。仅满足 Q2 和 Q3 的代数结构 $(Q, \triangleright)$ 的模型称为架。

例 2.2. 泰特拟群 $(\mathrm{T}_3, \triangleright)$ 是一个拟群，其底集为 $\{1, 2, 3\}$，运算定义如下：

$\triangleright$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

图 1：T_3 的乘法表

关于拟群乘法表的更多内容，参见 [2]。

例 2.3. 对称群 S_n 中的对换在共轭运算下构成一个拟群。事实上，泰特拟群可以实现为 S_3中的对换。

例 2.4. 对任意群 G，定义 $\triangleright$ 为 $x \triangleright y = x^{-1}yx$，即可在相同的底集上赋予拟群结构。这个拟群记为 Conj(G)。

事实上，Conj 是一个从群范畴到拟群范畴的函子，并且有一个左伴随，记为 Adconj。该左伴随通过取底集上的自由群对满足如下关系的关系商得到：生成元 $q \triangleright r$ 等于生成元 q 经生成元 r 右共轭后的结果。

以下这个拟群与我们尤其相关，因为它将在后面的几个例子中出现。

例 2.5. [6]设 A是一个阿贝尔群。那么，若我们对任意的 $x, y \in A$定义 $x \triangleright_{\text{dih}} y = 2y - x$，则 $(A, \triangleright_{\text{dih}})$ 构成一个拟群。我们称这个拟群为Takasaki拟群，记作 $T(A)$。 $T(A)$的运算 $\triangleright_{\text{dih}}$ 称为二面体作用。

这些是 Takasaki 研究的一类特殊拟群结的例子，早在 Joyce 的工作之前 [6]很久 [1]:

定义 2.6。kei 或对合拟群是满足 $(x \triangleright y) \triangleright y = x$ 对所有 x、 $y \in K$均成立的拟群 $(K, \triangleright)$。

定义 2.7。给定拟群 $(Q_1, \triangleright_1)$ 和 $(Q_2, \triangleright_2)$，夸нд尔同态是一个映射 $h\colon\ Q_1 \to Q_2$，满足 $h(x \triangleright_1 y) = h(x) \triangleright_2 h(y)$，对所有 x、 $y \in Q_1$均成立。

拟群同构 ρ 是一个双射拟群同态；如果它将 $Q \to Q$映射，则 ρ 是一个拟群自同构。 Q 的自同构集合在复合运算下构成一个群 Aut(Q)。

定义 2.8。对于任意拟群 Q 和固定的 $y \in Q$，映射 $S_y\colon\ x \to x \triangleright y$ 称为 y处的对称变换。根据第二和第三条公理，对称变换是拟群自同构。由对称变换生成的 Aut(Q) 的子群记为 Inn(Q)，称为 Q的内自同构群。其元素，即对称变换及其逆的复合，称为内自同构。

根据 Joyce 的一个结果， [1],Inn(Q) 总是 Aut(Q) 的正规子群 .

定义 2.9。 $s \in Q$ 的轨道是 $s \cdot \text{Inn}(Q) := \{\rho(s)\colon\ \rho \in \text{Inn}(Q)\}$。注意，Inn($Q$) 通过函数应用在 Q 上作右作用，即 $x \cdot \rho = \rho(x)$。

定义 2.10。拟群 Q 是连通的，如果 Inn(Q) 在 Q 上的作用只有一个轨道，即 Q 自身。也就是说，对于所有 $x \in Q$, $x \cdot \text{Inn}(Q) = Q$.

Aut(Q) 和 Inn(Q) 都与拟群 Q 有另一种关系：它们是增广群（由 Joyce [1]定义）。

定义 2.11。拟群 Q 的增广是一个映射 $|\ |\colon\ Q \to G$，从 Q到一个群 G，并配有 G 在 Q 上的右作用，该作用由夸нд尔同态给出，且满足

- $q \triangleright r = q|r|$，以及
- $|\ |$ 关于该作用以及 G 自身在右共轭作用下的作用是 G-等变的。

Joyce [1] 实际上将“增广拟群”定义为一个带有等变条件且满足条件 $p|p| = p$ 的 G-集，随后在该集合上诱导出拟群结构。就我们的目的而言，拟群已经给定，上述定义等价于 Joyce 的概念中诱导出该给定拟群的情形。

映射 $q \to S_q$ 为任意拟群 Q 在 Inn(Q) 和 Aut(Q) 中给出一个增广。此外，任意拟群 Q 都在 Adconj(Q) 中有一个增广，其映射 $|\,|: Q \to$Adconj(Q) 由生成元的包含给出。如 [1], 所示，这实际上是 Q的初始增广，因此第五位作者一直倾向于将 Adconj(Q) 称为“ Q的泛增广群”。

定义 2.12. 拟群 $(Q, \triangleright)$ 的子集 Q'，若在相同运算的限制下仍为拟群，则称为 Q 的子 quandle。特别地，要证明 Q' 是 Q 的子 quandle，只需证明 Q' 在 $\triangleright|_{Q'}$. 下封闭。我们用 $Q' \preccurlyeq Q$ 和 $Q' \prec Q$ 分别表示 Q' 是 Q 的子 quandle 和真子 quandle。

显然，在内自同构群的作用下形成的轨道都是子 quandle。事实上，这些轨道对于 quandle 理论至关重要，因为 Ehrman 等人 [3] 证明了它们能够编码环境 quandle 的结构。我们将简要重述他们的定义，以便更明确地描述这一结果。

设 $(Q, \triangleright)$ 是任意一个拟群，并令 $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ 为 Inn(Q) 在 Q 上作用所产生的轨道集合。假设 Q 不连通，否则下面的思路就没有意义。于是，Ehrman 等人的定理 3.1 [3]指出， Q 可唯一表示为 #($Q_1, \ldots, Q_n, M$)，其中 $n \times n$ 是一个由拟群态射 M 构成的矩阵，且 $\triangleright_i = \triangleright|_{Q_i \times Q_i}$；“半不交并”运算 # 将在下文定义 2.13 中定义。

对于每个拟群 $(Q_i, \triangleright_i)$，设泛增广映射 $|\,|_{Q_i}$: $Q_i \to$ Adconj(Q_i) 满足 $x|y|_{Q_i} := x \triangleright_i y$ 对于任意 $x, y \in Q_i$. 。于是，对于每个 $1 \le i \le n$，根据 Adconj(Q_i) 的泛性质，存在唯一的群同态φ_i : Adconj(Q_i) $\to$ Aut(Q_i)，使下图交换（注意 S :$Q_i \to$ Inn(Q_i) 通过 $S(q_i) = S_{q_i}$ 是对称映射）：

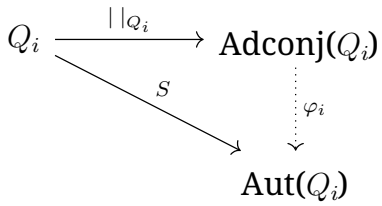


图 2：典范群同态 φ_i

称 φ_i 为从 Adconj(Q_i) 到 Aut(Q_i) 的典范群同态 .

定义 2.13。 [3] 对于每个 $1 \le i, j \le n$，设 $g_{i,j}$: Adconj(Q_i) $\to$ Aut(Q_j) 是满足 $g_{i,i}$ 为典范群同态 φ_i的群同态。另设 $M = (g_{i,j})$ 为群同态矩阵，其元素为 $g_{i,j}$。那么，

$$\#(Q_1, \ldots, Q_n, M) := \left(\coprod_{i=1}^{n} Q_i, \triangleright \right),$$

其中 $x \triangleright y := x g_{i,\ j}(|y|)$，适用于 $x \in Q_j$ 和 $y \in Q_i$.

对于任意拟群 $Q_1, \ldots, Q_n$，若 M满足 [3],中给出的相容条件，则称 M为一个网格；而 #$(Q_1, \ldots, Q_n, M)$ 连同刚刚定义的 $\triangleright$构成一个拟群，称为关于 M的 $Q_1, \ldots Q_n$的半不交并。

定理 2.14. [3] 群同态矩阵 $M = (g)_{ij}$: Adconj(Q_i) →Aut(Q_j) 是一个网格，当且仅当对于所有彼此不同的 i、 j、 k，且满足 $1 \leq i$、 j、 $k \leq n$ 时，下列条件成立:

1. $(xg_{ji})(|y|_{Q_j}) \triangleright_i z = (x \triangleright_i z)g_{ji}(|yg_{ij}(|z|_{Q_i})|)_{Q_j}$， 2. $(xg_{ji}(|y|_{Q_j}))$ $g_{ki}(|z|_{Q_k}) = (xg_{k,\ i}(|z|_{Q_k}))(g_{ji}(|yg_{k,\ j}(|z|_{Q_k})|_{Q_j}))$。

更重要的是，同一批作者证明，总存在一个合适的网格，可将一个拟群分解为其在内自同构群作用下各轨道的半不交并，

定理 2.15. [3] 对于一个拟群 Q ，其在 Inn(Q) 下的轨道分解标记为 Q_1、.....、 Q_n，存在一个网格 M，使得

$$Q \cong \#(Q_1, \ldots, Q_n, M).$$

3 子夸恩德尔格

对于拟群 Q 和 $A \subseteq Q$，我们用 $\langle\langle A \rangle\rangle$ 表示由 A生成的 Q 的子拟群。如 Saki 和 Kiani 在 [4], 中所示，任意拟群 Q的子夸群集合按包含关系构成一个格，我们将其记为 $\mathcal{L}(Q)$。特别地，格运算交和并（稍后将对此进行描述）是定义良好的。给定两个子拟群 Q_1、 $Q_2 \preccurlyeq Q$，它们的交为 $Q_1 \wedge Q_2 = Q_1 \cap Q_2$，并为 $Q_1 \vee Q_2 = \langle\langle Q_1 \cup Q_2 \rangle\rangle$。注意， $Q_1 \wedge Q_2$ 是 Q 中包含于 Q_1和 Q_2的最大子拟群，而 $Q_1 \vee Q_2$是包含 Q_1和 Q_2 的最小子拟群。

还值得注意的是， $Q_1 \vee Q_2$ 不一定是 $Q_1 \cup Q_2$，因为 $Q_1 \cup Q_2$ 可能不是 Q的子拟群。例如，如果 Q 是定义在 $\{1, 2, 3\}$、 $\{1\} \preccurlyeq Q$和 $\{2\} \preccurlyeq Q$ 上的泰特拟群，但 $\{1\} \vee \{2\} = Q$。

定义 3.1. 拟群结 $\mathcal{L}(Q)$ 的子拟群结格若满足：对于任意 $Q_1 \preccurlyeq Q$，都存在某个 $Q_2 \preccurlyeq Q$ ，使得 $Q_1 \vee Q_2 = Q$ 且 $Q_1 \wedge Q_2 = \emptyset$，则称其为可补的。

在 [4], 中，Saki 和 Kiani 证明了以下结果。

定理 3.2. [4]有限架的子架格是可补的。

3.1 强可补子夸群

在本节中，我们研究一类特殊的可补子quandle：其集合论补集也是子quandle的子- 拟群结。正如我们将展示的，鉴于 [3], 这些子架尤其有趣。

定义 3.3. 设 Q 是一个拟群，且 $Q' \preccurlyeq Q$。那么，如果 $Q \setminus Q' \preccurlyeq Q$，则 Q' 在 Q 中是强补的。

为了说明这个定义的意义，我们来看三个例子。

例 3.4。

1. 考虑整数集 $\mathbb{Z}$，其上定义了例 2.5 中所述的二面体运算 $\triangleright_{\mathrm{dih}}$。偶数构成一个子 quandle，奇数也是如此。因此，偶数集和奇数集都是 $\mathbb{Z}$的强补子夸群。
2. 设 G 是一个群，$\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 G的任意一组共轭类。由于 G 的共轭类构成 G 的一个划分，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \preccurlyeq \mathrm{Conj}(G)$ 是 G的一个强补子夸群。3. 对于拟群结 Q，在内自同构群 Inn(Q) 的作用下，任意轨道并都是 Q 中的强补子夸群。

我们将证明，拟群结 Q 的强补子夸群也可以用 Inn(Q) 的作用来描述；定理 3.7 将明确给出这种描述。在继续之前，我们先介绍 Inn(Q) 的两种不同作用，它们将在本文中贯穿使用。我们将广泛使用这两种作用，而且常常同时使用，因此必须有一种有效的方法来区分它们。

第一个作用是通常的右作用 $\cdot\colon Q\times\mathrm{Inn}(Q) \to Q$ 由 $q\cdot\sigma = \sigma(q)$ 给出。如前所述，Inn(Q) 的作用会为每个 $q \in Q$ 生成一个轨道，我们记作 $q\cdot\mathrm{Inn}(Q)$。类似地，对于 $Q' \preccurlyeq Q$，我们用记号 $Q'\cdot\mathrm{Inn}(Q)$ 表示 Q' 中各元素轨道的并，即 $Q'\cdot\mathrm{Inn}(Q) = \bigcup_{q\in Q'} q\cdot\mathrm{Inn}(Q)$。我们称之为 Q' 的轨道闭包。这个名称不仅仅是因为轨道闭包在 Inn(Q) 的作用下是封闭的。回顾：

定义 3.5. 偏序集 $(X, \leq)$ 上的闭包运算是一个函数 $\mathrm{cl}\colon X \to X$，它具有扩张性，即 $x \leq \mathrm{cl}(x)$，并且具有幂等性，即 $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(x)) = \mathrm{cl}(x)$。

于是我们有：

命题 3.6。轨道闭包是子夸群格上的一种闭包运算。

对于第二种作用，设 $Q' \preccurlyeq Q$。第二种作用是右作用 $\cdot\colon \mathcal{L}(Q)\times\text{内自同构群}(Q) \to \mathcal{L}(Q)$ 由 $Q'\cdot\sigma = \sigma[Q']$ 给出，或者说是 Q' 在 σ 作用下的像。因此，我们用记号 $[Q']\cdot\text{内自同构群}(Q)$ 表示 Q' 在内自同构群(Q) 中各元素作用下所得像的集合，即 $[Q']\cdot\text{内自同构群}(Q) = \{Q'\cdot\sigma\colon q \in Q'\}$. 我们用这一记号来刻画内自同构群($Q$) 在子拟群结格 $\mathcal{L}(Q)$ 上的作用。

最后，为便于记号，我们将用 $q\sigma$ 代替 $q\cdot\sigma$，用 $Q'\sigma$ 代替 $Q'\cdot\sigma$，其中 $q \in Q$ 和 $Q' \preccurlyeq Q$。定义了这两个作用后，我们给出强补子夸群的分类：

定理 3.7. 设 Q 为一个拟群，且 $Q' \preccurlyeq Q$。将 Q 的子拟群结格记为 $\mathcal{L}(Q)$。以下各项等价：

1. $Q \setminus Q' \preccurlyeq Q$，2. Q' 是在 Inn(Q) 作用于 Q 下的轨道并，3. Q' 是 Inn(Q) 作用于 $\mathcal{L}(Q)$ 下的不动点，4. 对于一个网格 M，$Q = \#(Q', Q \setminus Q', M)$。

证明。
(2) $\Leftrightarrow$(3)：首先，假设 $Q' = Q \cdot \mathrm{Inn}(Q)$，因此对于某个指标集$\mathcal{I}$，$Q' = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i$，且每个 Q_i 都是 Inn(Q) 作用于 Q 上的一个轨道。现在，任取 $x \in Q'$ 以及任意$\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$。于是，$x \in Q_i$ 对于某个 $i \in \mathcal{I}$成立，并且由于 Q_i 是一个轨道，$x\sigma \in Q_i \subseteq Q'$。由于 $x \in Q'$ 是任意的，$Q'\sigma \subseteq Q'$。此外，由于 σ 是任意的内自同构，$Q'\sigma^{-1} \subseteq Q'$，这意味着 $x\sigma^{-1} \in Q'$。另外，$x = (x\sigma^{-1})\sigma$，所以 $Q' \subseteq Q'\sigma$。因此，由于 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$ 是任意的，$[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{Q'\sigma : \ q \in Q'\} = \{Q'\}$，正如所需。

现在设 $[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{Q'\}$，并任取 $x \in Q'$。由于 $x\sigma \in Q'$对于任意 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$，$x \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{x\sigma : \ \sigma \in \mathrm{Inn}(Q)\} \subseteq Q'$。因为 $x \in Q'$ 是任意的，所以 $Q' \cdot \mathrm{Inn}(Q) \subseteq Q'$. 此外，$Q' \subseteq Q \cdot \mathrm{Inn}(Q)$，因为每个 $x = x \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Inn}(Q)} \in x \cdot \mathrm{Inn}(Q)$。因此，$Q' = Q \cdot \mathrm{Inn}(Q)$，如所要求。

在继续之前，我们先建立一个有用的引理：
引理 3.8。如果 Q' 不是 Inn(Q) 在 $\mathcal{L}(Q)$ 上的作用下的不动点，那么存在某个 $x \in Q \setminus Q'$ 使得 $Q' \cdot S_x \neq Q'$。换言之，存在某个 $x \in Q \setminus Q'$ 和某个 $y \in Q'$ 使得 $y \triangleright x \notin Q'$。

证明。根据定义，由于 $[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) \neq \{Q'\}$，存在某个 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$，使得 $Q' \cdot \sigma \neq Q'$。现在，为了导出矛盾，假设 Q中所有元素的对称变换都固定 Q'。那么，任意数量的对称变换及其逆变换的复合也必定固定 Q'。因此，Inn(Q)中的所有元素都必须固定 Q'，这就产生了矛盾。所以，必定存在某个 x，其对称变换不固定 Q'。相应地，存在某个 $y \in Q'$，使得 $y \triangleright x \notin Q'$。显然，$x$ 不可能属于Q'，因为 Q' 是子 quandle，并且在 $\triangleright$下封闭。因此，$x \in Q \setminus Q'$，证毕。 □

(2) $\Leftrightarrow$ (1)：如果 Q' 是轨道并，那么 $Q \setminus Q'$也是。由于轨道并是子 quandle，Q' 是强补的。反过来，反设 $Q' \preccurlyeq Q$ 是强补的，但不是轨道并。因为 Q' 不是轨道并，Q' 在内自同构群 Inn(Q) 对$\mathcal{L}(Q)$的作用下不是不动点。因此，根据前述引理，存在某个 $q \in Q'$ 和某个 $y \in Q \setminus Q'$，使得 $q \triangleright y \in Q \setminus Q'$。由于 $Q \setminus Q'$ 是子拟群结，它在 $\triangleright^{-1}$下封闭，因此$q = (q \triangleright y) \triangleright^{-1} y \in Q \setminus Q'$。于是，$q \in Q' \cap (Q \setminus Q')$，矛盾。

(1) $\Leftrightarrow$ (4)：如果 Q' 是强补的，那么 Q' 是轨道并。由于定理 2.15 对轨道并的半不相交并也成立，我们得到 Q =#($Q', Q \setminus Q', M$)，其中某个网格为 M。反向结论直接由半不相交并的定义得出。

□

由此立即得到一个推论：连通拟群 Q 的强补子夸群只有 Q 和空拟群，因为 Q 是 Inn(Q) 在 Q 上的作用的唯一轨道。另一个显然的推论是，由强补子夸群构成的子格是布尔代数。

3.2 强补子夸群的链

现在我们考虑强补拟群的链。下文的定理 4.9 表明，嵌套于强补子 quandle 与其环境 quandle 之间的任何子 quandle 也都是强补的。我们还将在定理 4.13 中给出强补性的传递性判据。首先，我们证明一个本身也很有用的引理:

引理 3.9. 设 Q 是一个拟群，且假设 $Q' \preccurlyeq Q$。那么，存在某个子群 $S_{Q'} \leq$Inn(Q) 以及某个正规子群 $K_{Q'} \trianglelefteq S_{Q'}$，使得 Inn($Q'$) $\cong S_{Q'}/K_{Q'}$。

换言之，子 quandle 的内自同构群是环境 quandle 的内自同构群的子商。

证明。定义 $S_{Q'} := \langle \{S_q : q \in Q'\} \rangle \leq$ Inn(Q)，其中每个 $S_q \in$ Inn(Q)。考虑由 $\tau(f) = f|_{Q'}$. 定义的限制映射 τ: $S_{Q'} \to$Inn(Q')
断言 3.10。 τ 是良定义的。

证明。对于 $z \in Q$ 和 $\epsilon \in \{-1, 1\}$，我们将 S_z^ϵ 写作表示对称变换 ($x \mapsto x \triangleright^\epsilon z$) $\in$Inn(Q)。我们需要使用保持给定子集不变的双射的两个相当明显的性质：首先，设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $Q' \subseteq Q$ 为集合。对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 $f_i : Q \to Q$满足 $f_i[Q'] \subseteq Q'$. 那么，

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)|_{Q'} = (f_n|_{Q'}) \circ (f_{n-1}|_{Q'}) \cdots \circ (f_1|_{Q'}).$$

注意，根据假设 $f_i[Q'] \subseteq Q'.$，每个限制 $f_i|_{Q'}$ 都是定义良好的。其次，设 $Q' \subseteq Q$ 为集合，并假设 $f : Q \to Q$ 是一个满足 $f[Q'] = Q'$ 的双射。那么 $(f|_{Q'})^{-1} = f^{-1}|_{Q'}$.

第一个事实允许我们自由地将限制移入和移出对 Q' 内自同构群的对称变换进行复合。第二个事实允许我们自由地将 Q 的对称变换的逆映射移入和移出对 Q' 的限制。现在，为了证明 τ 将 $S_{Q'}$ 的每个元素映射

到 Inn(Q') 中，假设 $f \in S_{Q'}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $x_i \in Q'$、$\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ 有一个分解 $f = S_{x_n}^{\epsilon_n} \circ S_{x_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1}$。那么，

$$\begin{aligned}\tau(f) &= (S_{x_n}^{\epsilon_n} \circ S_{x_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1})|_{Q'} \\ &= (S_{x_n}^{\epsilon_n}|_{Q'}) \circ \cdots \circ (S_{x_1}^{\epsilon_1}|_{Q'}) \\ &= (S_{x_n}|_{Q'})^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ (S_{x_1}|_{Q'})^{\epsilon_1} \in \mathrm{Inn}(Q').\end{aligned}$$

因此，$\tau[S_{Q'}] \subseteq$内自同构群(Q')。 □

断言 3.11. τ 是满射。

证明。固定 $\alpha \in$内自同构群(Q')，并假设$\alpha = T_{x_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ T_{x_1}^{\epsilon_1}$，其中每个 $T_{x_i}^{\epsilon_i} \in$内自同构群(Q')都由$T_{x_i}^{\epsilon_i}(x) := x \rhd^{\epsilon_i} x_i$定义。注意，$S_{x_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1}$是内自同构群($Q$)的一个元素。此外，

$$\begin{aligned}\tau(S_{x_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1}) &= (S_{x_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1})|_{Q'} \\ &= S_{x_n}^{\epsilon_n}|_{Q'} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\epsilon_1}|_{Q'} \\ &= (S_{x_n}|_{Q'})^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ (S_{x_1}|_{Q'})^{\epsilon_1} \\ &= T_{x_n}^{\epsilon_n} \circ \cdots \circ T_{x_1}^{\epsilon_1} = \alpha.\end{aligned}$$

□

断言 3.12. τ 是群同态。

证明。任取 $f\ g \in S_{Q'}$ $f = S_{x_n}^{e_n} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{e_1}$ $g = S_{y_m}^{f_m} \circ \cdots \circ$，并假设 $S_{y_1}^{f_1}$ $m\ n \in \mathbb{N}$ $x_i\ y_j \in Q'$ $e_i\ f_j \in \{-1, 1\}$ 和，满足，，且每个，，，。由于每个对称变换都固定 Q'，因此 f 和 g 也必须固定 Q'，因为它们是对称变换及其逆的复合。因此，根据事实 1，$\tau(f \circ g) = (f \circ g)|_{Q'} = f|_{Q'} \circ g|_{Q'} = \tau(f) \circ \tau(g)$。 □

因此，τ 是一个满射群同态。由第一同构定理，$S_{Q'}/\ker(\tau) \cong \mathrm{Inn}(Q')$，证毕。 □

定理 3.13。假设 $Q'' \preccurlyeq Q' \preccurlyeq Q$，且 Q'' 在 Q 中是强补的。那么，Q'' 在 Q' 中是强补的。

证明。根据定理 3.7，只需证明 Q'' 是 Inn(Q') 在 $\mathcal{L}(Q')$ 上的作用下的不动点。为此，任取 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q')$。考虑 $S_{Q'} := \langle S(Q') \rangle \leq \mathrm{Inn}(Q)$，其中 $S(Q')$ 表示通过将元素映射到其对称变换的函数得到的 Q' 的像。由于引理 3.9 中的限制映射 $\tau : S_{Q'} \to \mathrm{Inn}(Q')$ 是满射，因此存在某个 $\sigma' \in S_{Q'}$ 延拓 σ.。于是，由于 Q'' 在 Q 中是强补的，根据定理 3.7，它是 Inn(Q) 在 $\mathcal{L}(Q)$ 上的作用下的不动点。特别地，$Q''\sigma' = Q''$。但是，由于 σ' 延拓了 $\sigma : Q' \to Q'$，且由于 $Q'' \subseteq Q'$，我们还必须有 $Q''\sigma = Q''$。因此，由于 $\sigma \in$Inn(Q) 是任意的，Q'' 确实是 Inn(Q') 在 $\mathcal{L}(Q')$ 上的作用下的不动点，证毕。 □

To 为建立我们的传递性判据，我们需要几个技术引理。

引理 3.14. 假设 $Q'' \preccurlyeq Q' \preccurlyeq Q$ 使得 Q'' 在Q' 中是强补的，并且 Q' 在 Q中是强补的。那么， $Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q) \subseteq Q'$。

证明。根据 $Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q)$ 的定义，只需证明对于任意 $q \in Q''.$， $q \cdot \mathrm{Inn}(Q) \subseteq Q'$。为此，任取 $q \in Q''$ 和 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$。由于 Q' 在 Q 中是强补的，根据定理 3.7， $[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{Q'\}$，因此对于任意 $f \in \mathrm{Inn}(Q)$，都有 $Q'f = Q'$。特别地，由于 $q \in Q'$ 且 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$， $q\sigma \in Q'$。但由于 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$ 是任意的，因此可得 $q \cdot \mathrm{Inn}(Q) \subseteq Q'$，证毕。 □

事实证明， $Q \setminus (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q))$ 将补集 Q'' 于 $\mathcal{L}(Q)$ 中，而上述引理将有助于证明这一点。

引理 3.15。设 $Q'' \preccurlyeq Q' \preccurlyeq Q$，使得 Q'' 在 Q' 中是强补的，且 Q' 在 Q 中是强补的。那么，对于任意 $\gamma \in \mathrm{Inn}(Q)$， $Q''\gamma$ 在 Q' 中是强补的。

证明。由于 Q'' 在 Q' 中是强补的，且 Q' 在Q中是强补的，由定理 3.7可知， $Q' \setminus Q'' \preccurlyeq Q'$ 且 $[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{Q'\}$。任取$\gamma \in \mathrm{Inn}(Q)$。由于子夸群在$Q$ 的内自同构作用下的像仍是 Q的子夸群，因此$(Q' \setminus Q'')\gamma \preccurlyeq Q$。此外，由于 $Q' \setminus Q'' \subset Q'$ 和$\gamma : Q' \to Q'$，$(Q' \setminus Q'')\gamma \subset Q'$。但是，由于我们已证明$(Q' \setminus Q'')\gamma$ 是一个拟群，$(Q' \setminus Q'')\gamma \preccurlyeq Q'$。我们还知道 $Q'\gamma = Q'$，因为 $[Q'] \cdot \mathrm{Inn}(Q) = \{Q'\}$。另外，由于$\gamma$ 是双射，$(Q' \setminus Q'')\gamma = Q'\gamma \setminus Q''\gamma$。结合前面两条结论，可得$(Q' \setminus Q'')\gamma = Q' \setminus Q''\gamma \preccurlyeq Q'$。因此，由于其集合论补集是 Q'的一个子夸群， $Q''\gamma$ 在 Q'中是强补的。 □

引理 3.16. 设 $Q'' \preccurlyeq Q' \preccurlyeq Q$，使得 Q'' 在 Q' 中是强补的，并且 Q' 在 Q 中是强补的。令 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$。则存在某个 $\sigma' \in \langle \{S_x : x \in Q \setminus Q'\} \rangle \leq \mathrm{Inn}(Q)$，使得 $Q''\sigma = Q''\sigma'$。

证明。由于 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q)$，我们可以固定 $\sigma = S_{x_1}S_{x_2}\cdots S_{x_n}$ 的一个表示，将 σ 表示为一串对称变换，其中每个 $x_i \in Q$ 且 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$。我们的策略是：移除 Q' 中出现在 $S_{x_1}S_{x_2}\cdots S_{x_n}$ 里的元素所对应的所有对称变换后，得到另一个 $\sigma' \in \mathrm{Inn}(Q)$，并且它在 $\mathcal{L}(Q)$ 中作用于 Q'' 时与 σ 相同。

从字符串 $S_{x_1}S_{x_2}\cdots S_{x_n}$ 构造 σ' 的一种系统方法是检查 x_1 是否属于 Q'，若是则移除 S_{x_1}，然后以同样方式检查 x_2 并视情况移除 S_{x_2}，依此类推。为得出矛盾，假设在这一过程中存在某个指标 k，使得 $x_k \in Q'$，并且当从字符串 $S_{x_1}S_{x_2}\cdots S_{x_n}$ 中移除 S_{x_k} 时，所得的内自同构在作用于 Q'' 时与 σ 的作用不同。令 i 为第一个这样的指标 k，于是对于所有满足 $x_j \in Q'$ 的 $1 \leq j < i$，移除 S_{x_j} 不会改变在 Q'' 上得到的作用，但移除 S_{x_i} 会改变该作用。

然后，设 $\gamma = S_{x_1}\cdots S_{x_{i-1}}$和 $\gamma' = S_{x_{i+1}}\cdots S_{x_n}$，于是我们有 $\sigma = \gamma S_{x_i}\gamma'$。根据群作用的结合律，我们有 $Q''\sigma = ((Q''\gamma)S_{x_i})\gamma'$。此外，根据前述引理， $Q''\gamma$ 在 Q'中是强补的。因此， $Q''\gamma$ 是一个不动点

由 Inn(Q') 在 $\mathcal{L}(Q')$上的作用产生的不动点，这可由定理 3.7 得出。此外，由于 $x_i \in Q'$，我们知道 $S_{x_i}|_{Q'}$ 是 Inn(Q')中的一个元素，而且对于任意 $x \in Q'$，我们还有$xS_{x_i}|_{Q'} = xS_{x_i}$。由此及前述结论可知，$(Q''\gamma)S_{x_i} = (Q''\gamma)S_{x_i}|_{Q'} = Q''\gamma$。现在代入可得恒等式

$$Q''\sigma = ((Q''\gamma)S_{x_i})\gamma' = (Q''\gamma)\gamma' = Q''(\gamma\gamma').$$

因此，移除 S_{x_i} 不会改变所得字符串（即 $\gamma\gamma'$）对 Q''的作用，这与我们关于其作用确实发生改变的假设相矛盾。因此，不存在这样的索引 i，所以从 $S_{x_1}S_{x_2}\cdots S_{x_n}$ 中移除 Q' 处元素的所有对称变换，也不会改变所得字符串（即 σ'）对 Q''的作用。 □

定理 3.17。设 $Q'' \preccurlyeq Q' \preccurlyeq Q$，使得 Q'' 在Q'内强补，而 Q' 在 Q内强补。则 Q'' 在Q内可补。

证明。由于 Q'' ·内自同构群(Q)按构造是轨道并，根据定理 3.7，可得 $Q\setminus$(Q''·内自同构群(Q)) $\preccurlyeq Q$。又由于 $Q'' \subseteq Q''$·内自同构群(Q)，$Q''\cap Q\setminus$(Q''·内自同构群(Q)) $=\emptyset$。因此，为证明 $Q \setminus$(Q'' · 内自同构群(Q)) 是 Q'' 在 $\mathcal{L}(Q)$ 中的一个补集，还需证明 $Q'' \vee Q \setminus$(Q'' · 内自同构群(Q)) $= Q$。为此，只需证明Q'' · 内自同构群(Q) $\subseteq Q'' \vee Q \setminus$ (Q'' · 内自同构群(Q))——若此式成立，我们将得到

$$\underbrace{(Q \setminus (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q))) \cup (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q))}_{Q} \subseteq Q'' \vee Q \setminus (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q)),$$

这意味着 $Q = Q'' \vee Q \setminus$(Q'' · 内自同构群(Q)).

为此，任取 $x \in Q''$ ·内自同构群(Q)。于是，存在某个 $\sigma \in$ 内自同构群(Q) 使得 $x \in Q''\sigma$。由引理 3.16，存在某个 $\sigma' \in \langle\{S_x : x \in Q\setminus Q'\}\rangle$ 使得 $Q''\sigma' = Q''\sigma$。固定 $q_1, \ldots, q_n \in Q \setminus Q'$ 以及 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$，使得 $\sigma' = S_{q_1}^{\epsilon_1} \ldots S_{q_n}^{\epsilon_n}$。根据内自同构群($Q$) 的作用定义，$Q''\sigma' = \{q \rhd^{\epsilon_1} q_1 \ldots \rhd^{\epsilon_n} q_n : q \in Q''\}$。因此，$x = q \rhd^{\epsilon_1} q_1 \ldots \rhd^{\epsilon_n} q_n$ 对某个 $q \in Q''$ 成立。特别地，$x \in \langle\langle Q'' \cup (Q \setminus Q')\rangle\rangle$。此外，由引理 3.14，我们知道 Q'' · 内自同构群(Q) $\subseteq Q'$，因此 $Q \setminus Q' \subseteq Q \setminus$($Q''$ · 内自同构群(Q))。因此，

$$x \in \langle\langle Q'' \cup (Q \setminus Q')\rangle\rangle \subseteq \langle\langle Q'' \cup (Q \setminus (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q)))\rangle\rangle = Q'' \vee Q \setminus (Q'' \cdot \mathrm{Inn}(Q))$$

根据 join 的定义。但是，由于 $x \in Q''$ ·Inn(Q) 是任意的，因此可得 Q'' · Inn(Q) $\subseteq Q'' \vee Q \setminus$ (Q'' · Inn(Q))，证毕。 □

该定理不仅表明，当 Q'' 在 Q 的强补子夸群有限链中向下两层时，它是可补的；它还给出了 Q'' 的一个显式补集，即 $Q\setminus$(Q·Inn(Q))。此外，由于 Q'' 的这个补集是轨道并，它在 Q 中是强补的，具体而言，其补集为 Q·Inn(Q)。

一个值得探讨的自然问题是：在由强补子夸群组成的有限链中，可补性是否会沿着更深层的关系继续传递。更明确地说，假设我们有一条强补子夸群链，$Q_3 \preccurlyeq Q_2 \preccurlyeq Q_1 \preccurlyeq Q$。

一种自然的尝试是考察 $Q \setminus (Q_3 \cdot \mathrm{Inn}(Q))$ 是否可以作为 $\mathcal{L}(Q)$ 中 Q_3 的补集。然而，要验证它满足成为补集所需的生成要求，并没有那么简单。我们希望未来的研究能够证明，可补性会沿任意有限长度的强补子夸群链传递，或者找到一个反例。

3.3 无限扭结

有限拟群的子拟群结格是否可补这一问题，先前的研究已经给出了答案。更明确地说，由于拟群是架，下面的定理表明，有限拟群的子拟群结格必然可补。

定理 3.18. [4]设 R 为有限架。则以下结论成立：

1. 所有极大子架的交集为空。 R
2. 假设 $R_1, R_2 \preccurlyeq R$。那么 R_1 可由 R_2的某个子集在 $\mathcal{R}(R_1 \vee R_2)$ 中补足。

推论 3.19. [4] 若 R 是有限架，则 $\mathcal{R}(R)$ 可补。

这一结果自然引出了一个问题：无限架以及由此得到的无限拟群结，其子对象格是否必然可补？某些无限架，例如平凡架，具有可补的子对象格。然而，下述定理表明，情况并非总是如此：

定理 3.20. [4] 架 $(\mathbb{Q}, \triangleright_{\mathrm{dih}})$ 的子架格不是可补的。特别地，单元素集合 $\{0\} \preccurlyeq \mathbb{Q}$ 没有补集。

要理解定理 3.20 的证明，我们首先需要以下定义。

定义 3.21. 我们称 $M \prec Q$ 为极大元，如果不存在 $N \prec Q$ 使得 $M \prec N$。等价地， Q 是 M 在 $\mathcal{L}(Q)$中的唯一真延拓。

注意，由于单元素集合始终是子 quandle，拟群 Q 的任意极大子 quandle M都必须由任意 $x \in Q \setminus M$的 $\{x\}$ 补足。然而，这对架并不成立，因为架不一定具有单元素子架。

定理 3.20 的证明依赖于这样一个事实：有限架R 中的所有子架都包含在 R [4]的某个极大子架中。特别地， R 的子架格的“顶层”由一组两两不相交的极大子架组成，而 R 的其他每个真子架都包含于其中某个极大子架之下。然而，对于无限扭结，这一策略不再适用，因为如下结果表明，极大子夸恩德尔甚至可能不存在。

命题 3.22。$(\mathbb{Q}, \triangleright_{\mathrm{dih}})$ 没有极大子夸群。

证明。任取 $M \prec \mathbb{Q}$。我们利用这样一个事实：极大子夸群必须能被其集合论补集中的每个单元素集合补足，并证明这对 M 不成立。我们还将用到一个关于群的类似事实：

引理 3.23. 设 G 是一个群。那么，当且仅当对于每个 $x \in G \setminus M$ 都有 $\langle M \cup \{x\} \rangle = G$ 时， $M \lneq G$ 是极大子群。

证明。正向蕴含显然成立。现在设对于每个 $x \in$ 都有 $\langle M \cup \{x\} \rangle = G$ $G \setminus M$。任取适当地扩张 M 的 $N \leq G$。那么，存在某个非空的 $S \subseteq G \setminus M$ 使得 $N = \langle M \cup S \rangle$. 。固定某个 $s \in S$，我们看到

$$G = \langle M \cup \{s\} \rangle \subseteq \langle M \cup S \rangle = N,$$

因此 $N = G$。于是，适当地扩张 M 的 G 的唯一子群就是 G 本身，所以 M 是极大子群。 □

根据定理 3.20， $\{0\}$ 在 $\mathcal{L}(\mathbb{Q})$ 中没有补集，因此 $\{0\}$ 不是 M 的补集。因此，如果 $0 \notin M$， M 不可能是极大子群。现在设 $0 \in M$. 。根据 [4] 中的引理 5.1， M 是 $(\mathbb{Q}, +)$ 的子群。由于 $\mathbb{Q}$ 没有极大子群，根据引理 3.23，存在某个 $q \in \mathbb{Q} \setminus M$，使得 $\langle M \cup \{q\} \rangle$ 是 $\mathbb{Q}$. 的真子群。因此，$\langle \langle M \cup \{q\} \rangle \rangle \subseteq \langle M \cup \{q\} \rangle \subset Q$，所以 $\{q\}$ 不是 M 在 $\mathcal{L}(Q)$ 中的补集。因此， M 不可能是极大子群。 □

3.4 归纳有限夸恩德尔

尽管 $\mathbb{Q}$ 是一个具有非可补子格的无限拟群， $\mathbb{Q}$ 与确实具有可补子格的有限夸恩德尔之间并没有明显的关系。本节通过考察归纳有限夸恩德尔，探讨无限拟群与有限夸恩德尔可能存在的一种关系。我们还给出一个例子，说明归纳有限夸恩德尔的子夸恩德尔格不一定是可补的。

定义 3.24. 若集合 $(A, \leq)$ 满足：对于任意 a、 $b \in A$，都存在某个 $c \in A$ 使得 $a \leq c$ 和 $b \leq c$，则称其为有向的。换言之， A 中每一对元素都有一个上界。

定义 3.25. 若非空拟群 Q 存在一个由有向集 $(\mathcal{I}, \leq)$ 索引的有限夸恩德尔族 $\{Q_i\}_{i \in \mathcal{I}}$，且对于所有 i、 $j \in \mathcal{I}$，

1. $Q_i \preccurlyeq Q$, 2. $|Q_i| < \infty$, 3. $i \leq j$ 蕴含 $Q_i \preccurlyeq Q_j$， 以及
4. $Q = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i$.

这里有一种等价的归纳有限表述，马上就会派上用场。该表述需要依赖选择公理。

引理 3.26。设 Q 是一个非空拟群。当且仅当 Q 的每个有限生成子 quandle 都是有限的时， Q 才是归纳有限的。
证明。假设 Q 是归纳有限的，且具有 $Q = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} Q_i$，并固定 Q的任意一个有限生成子 quandle Q'。令 Q'的一个生成集为 $\{g_1, \ldots, g_n\}$。那么，对于每个 $1 \leq j \leq n$，由于 $g_j \in Q$，存在某个 $i(j) \in \mathcal{I}$，使得 $g_j \in Q_{i(j)}$。显然，

$$Q' = \langle\langle\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}\rangle\rangle \subseteq \langle\langle Q_{i(1)}, \ldots, Q_{i(n)}\rangle\rangle = \langle\langle\cup_{1\leq j\leq n} Q_{i(j)}\rangle\rangle.$$

但是，由于 4 是 $\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}$上的全序，$\bigcup_{1\leq j\leq n} Q_{i(j)} = Q_m$，其中 $m = \max_{1\leq j\leq n} i(j)$。因此，$\langle\langle Q_{i(1)}, \ldots, Q_{i(n)}\rangle\rangle = \langle\langle Q_m\rangle\rangle = Q_m$。由于按假设 Q_m是有限的，且 $Q' \subseteq Q_m$， Q' 也必定是有限的。

现在假设 Q的每个有限生成子 quandle 都是有限的。任取 $x \in Q$，并定义 $Q_0 = \langle\langle x\rangle\rangle$ 和 $\mathcal{I} = |Q|$ （它是一个不一定有限的基数）。对于每个 $i \in \mathcal{I}$，当 $\bigcup_{k\leq i} Q_k \neq Q$时，令 $Q_{i+1} = \langle\langle Q_i, y\rangle\rangle$，其中某个$y \in Q \setminus \bigcup_{k\leq i} Q_k$.由于按照构造，每个 Q_i都是 Q的有限生成子 quandle，因此每个 Q_i 也必定是有限的。此外，由于通过这种构造可以到达 Q 的每个元素，并且对每个 $i \in \mathcal{I}$都有 $Q_i \prec Q_{i+1}$，所以 $\bigcup_{i\in|Q|} Q_i = Q$。根据定义， Q 是归纳有限的。 □

因此，我们得出推论：无限拟群结 $\mathbb{Q}$ 不可能是归纳有限的。

推论 3.27。$(\mathbb{Q}, \triangleright_{\text{dih}})$ 不是归纳有限的。

证明。任取满足 $x < y$ 的 $x, y \in \mathbb{Q}$。根据 [5], 中定理 3.3 的第 (5) 部分

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \{r_0 x + r_1 y\},$$

其中 $r_0, r_1 \in \mathbb{Z}$ 中恰有一个为奇数，且 $r_0 + r_1 = 1$。特别地，$\{y + j(y - x) : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \langle\langle x, y\rangle\rangle$. 因此， $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 是 $\mathbb{Q}$ 的有限生成无限子拟群结，所以根据前述引理，$\mathbb{Q}$ 不可能是归纳有限的。 □

不过，事实证明，我们可以相当轻松地变换 $\mathbb{Q}$，从而构造出一个归纳有限拟群结。我们还将看到，变换后的拟群结仍然具有子拟群结格不可补且不存在极大子夸恩德尔的性质，由此证明归纳有限拟群结的子夸恩德尔格不一定是可补的。

命题 3.28. $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \triangleright_{\text{dih}})$ 是归纳有限的。

证明。容易看出，将阿贝尔群赋予高崎运算构成拟群时，任意子群都是子 quandle。因此，$\langle\frac{1}{n!} + \mathbb{Z}\rangle$ 对每个 $n \in \mathbb{N}.$ 都是一个（有限）子 quandle。于是注意到， $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是由阶乘倒数的陪集生成的子群的递增并，即$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle\frac{1}{n!} + \mathbb{Z}\rangle$, 因此很容易看出它是归纳有限的。 □

命题 3.29. $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \triangleright_{\text{dih}})$ 不具有可补的子拟群结格，也没有极大子夸群。

证明。注意， $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{[\frac{m}{n}]\colon\ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\}$，其中 $[\frac{m}{n}] = \frac{m}{n} + \mathbb{Z}$.我们假设$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 配备了（定义良好的）运算 $[x] \triangleright_{\text{dih}} [y] = [2x - y]$，其中$x, y \in \mathbb{Q}$。因此，在 $[4]$，中引理 5.1 和定理 5.2 的证明里，我们可以将元素 $x \in \mathbb{Q}$ 替换为其对应的陪集 $[x] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，从而得到关于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的以下类似结果:

1. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的非空子夸群恰好是$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.的子群的陪集。2. $\mathcal{L}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \triangleright_{\text{dih}}))$不是可补的。特别地， $\{\mathbb{Z}\}$ 没有补集。

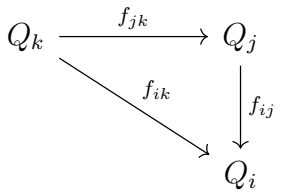
为证明 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 没有极大子夸群，任取一个 $M \prec \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ——我们将证明 M 不是极大的。如命题 3.22 所示，若 $\mathbb{Z} \notin M$，则 M 不可能是极大的。此外，若 $\mathbb{Z} \in M$，注意到$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$没有极大子群，因此用命题 3.22 中的同样论证可知， M 不可能是极大的。 □

3.5 逆有限夸群

逆有限夸群是归纳有限夸群的对偶——正如归纳有限夸群是有限夸群的有向系统的直接极限，逆有限夸群是有限夸群的逆系统的逆极限。本节将形式化定义逆有限夸群，并给出若干无限逆有限夸群的例子。我们将逆有限夸群格是否可补留作未来研究的问题。

定义 3.30. 设 $(\mathcal{I}, \leq)$ 是一个有向集，且 $\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是由 $\mathcal{I}$ 索引的拟群族。假设我们有一族拟群同态 $\{f_{ij} : Q_j \to Q_i\colon\ i, j \in \mathcal{I},\ i \leq j\}$，使得对于所有 $i, j, k \in \mathcal{I}$,

1. $f_{ii} = \mathrm{id}_{Q_i}$，以及 2. 若 $i \leq j \leq k$, $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$。



那么，二元组 $(\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{ij}\}_{i\leq j\in\mathcal{I}})$ 称为关于 $\mathcal{I}$.的拟群及态射的逆系统

定义 3.31。给定一个逆系统（$\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}$、 $\{f_{ij}\}_{i\leq j\in\mathcal{I}}$），我们将该系统的逆极限定义如下:

$$Q = \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Q_i = \left\{ \vec{q} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} Q_i : q_i = f_{ij}(q_j) \text{ for all } i \leq j \text{ in } \mathcal{I} \right\}.$$

如果拟群 Q 是由一族有限夸恩德尔及其态射组成的逆系统的逆极限，则称其为逆有限拟群。事实上，这一构造总能得到一个拟群：

命题 3.32. 逆有限拟群在逐坐标运算下仍是拟群 s.

证明。设 $Q = \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Q_i$，其中 $(\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{ij}\}_{i\le j\in\mathcal{I}})$ 是由有限拟群构成的逆系统。再设每个 Q_i 对应的拟群运算为 $\triangleright_i$。由于每个 Q_i 在 $\triangleright_i$下都是拟群，因此 Q 满足公理 Q1、Q2 和 Q3，因为这些公理在各坐标中都成立。但是，由于 Q 可能是无限集，我们还必须验证 Q 在其运算 $\triangleright$下封闭。不失一般性，设 $\mathcal{I} = \mathbb{N}$。再任取 $(q_1, q_2, \dots)$、$(r_1, r_2, \dots) \in Q$。于是，

$$(q_1, q_2, \dots) \triangleright (r_1, r_2, \dots) = (q_1 \triangleright_1 r_1, q_2 \triangleright_2 r_2, \dots),$$

因此，根据 Q的定义，只需证明对于任意的 i、$j \in \mathcal{I}$、$f_{ij}(q_j \triangleright_j r_j) = q_i \triangleright_i r_i$。但是，由于 f_{ij}是夸анд尔同态，$f_{ij}(q_j \triangleright_j r_j) = f_{ij}(q_j) \triangleright_i f_{ij}(r_j) = q_i \triangleright_i r_i$。因此，$Q$ 在 $\triangleright$下封闭，证毕。 □

接下来，我们给出一种从逆有限阿贝尔群构造逆有限拟群的规范方法：按照例 2.5 中的定义，将该群视为 Takasaki kei。

命题 3.33. 设 $(\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{ij}\}_{i\le j\in\mathcal{I}})$ 是由有限阿贝尔群及其态射构成的逆系统。那么，其逆极限 Q 在逐坐标运算下是一个逆有限的 Takasaki kei。

证明. 由于每个 Q_i 都是阿贝尔群，因此它是一个 Takasaki kei。此外，根据下述引理，每个群同态 f_{ij} 都是夸דנ尔同态：

引理 3.34. 设 $(Q_1, \triangleright_{\text{dih}})$ 和 $(Q_2, \triangleright_{\text{dih}})$ 是 Takasaki拟群，并设 $(Q_1, +)$ 和 $(Q_2, +)$ 是相应的群。那么，任意群同态$f : Q_1 \to Q_2$ 也是夸דנ尔同态。

这个引理证明，将阿贝尔群视为 Takasaki拟群，便得到一个到 Kei 的函子；Kei 是 Quand 的满子范畴，其对象为 kei。我们将为它命名。

定义 3.35. 高崎函子，记作 Tak : Ab $\to$ Kei，将每个阿贝尔群映射为相应的 Takesaki kei。

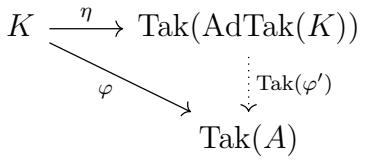
因此，$(\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{ij}\}_{i\le j\in\mathcal{I}})$ 也是一个有限 Takasaki quandles 的逆系统。要证明这个逆系统的逆极限是一个拟有限 quandle，只需证明函子 Tak 有一个左伴随，因为这将表明它保留所有极限。我们将显式构造这个左伴随。

定义 3.36. 设 K 是一个 kei。则我们将 AdTak(K) 定义为商群

$$\mathrm{AdTak}(K) = \langle K \rangle_{Ab} / \langle x \triangleright y - 2y + x : x, y \in K \rangle_{Ab}$$

容易看出，AdTak 是 Tak 的左伴随。

命题 3.37。设 η 为包含映射 $x \mapsto \overline{x}$。再设 A 为阿贝尔群，且 φ 为 kei 的态射 φ: $K \to \mathrm{Tak}(A)$。那么 φ 唯一地经由 $\mathrm{Tak}(\varphi')$ 分解为阿贝尔群的唯一态射 φ'，如下方交换图所示。



证明。映射 η 可视为集合范畴中包含映射$K \hookrightarrow \mathrm{AdTak}(K)$与 p: $\langle K\rangle_{Ab} \to \langle K\rangle_{Ab}/\langle x \triangleright y - 2y + x : x, y \in K\rangle_{Ab}$（视为底层集合之间的函数）的复合。根据自由阿贝尔群的泛性质，函数 φ诱导出唯一的群同态 $\varphi' : \langle K\rangle_{Ab} \to A$。根据 Takasaki kei 的定义，对于任意元素 $x, y \in K$，有 $\varphi(x \triangleright y) = \varphi(x) \triangleright \varphi(y) = 2\varphi(y) - \varphi(x)$。因此 $\varphi(x \triangleright y) - 2\varphi(y) + \varphi(x) = \varphi(x \triangleright y - 2y + x) = 0$。故 $\langle x \triangleright y - 2y + x : x, y \in K\rangle_{Ab} \subseteq \ker(\varphi')$，这意味着 $\langle x \triangleright y - 2y + x : x, y \in K\rangle_{Ab} \trianglelefteq \ker(\varphi')$。根据阿贝尔群商群的泛性质，$\varphi'$又诱导出一个（唯一的）阿贝尔群同态 $\mathrm{Tak}(\varphi') : \mathrm{AdTak}(K) \to A$。 □

因此，根据命题 3.33，$(\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{ij}\}_{i\le j\in\mathcal{I}})$ 的逆极限在逐坐标运算下构成一个逆有限拟群。 □

由于 Tak 存在左伴随，因此它保留所有极限，尤其是将逆有限阿贝尔群表示为其所有有限商群所组成图表的极限的那些极限。这一观察产生了一大类逆有限 kei:

例 3.38。

1. 假设 $p \in \mathbb{N}$ 是一个素数。那么， p-进整数 $\mathbb{Z}_p$ 构成一个逆有限Takasaki拟群。 ˆ 2. 逆有限整数环$\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ 的加法群构成一个逆有限Takasaki拟群。

将相同的论证应用于函子 Conj，可得:

Ex例 3.39. 如果 G 是一个逆有限群，那么 Conj(G) 是一个逆有限 quandl e.

显然，有些逆有限拟群结具有补子拟群格。例如，除了有限拟群结之外，以无限逆有限集合（即无限的全不连通紧豪斯多夫空间）为底集的平凡拟群结 [4]，也是拟有限 quandle，因为它是由有限平凡拟群结构成的图式的逆极限。

此外，这些拟群结与所有平凡拟群结一样，其由所有子集构成并赋予平凡拟群结构的布尔代数（必然可补）构成一个子 quandle 格。

然而，一般而言，若 Q 是无限的，则很难判断 $\mathcal{L}(Q)$ 是否可补，因为即使是 $\mathcal{L}(Q)$ 的子拟群结格也难以考察，这是由于上述两类例子的底层集合都是不可数的。

尽管如此，我们猜想，逆有限拟群的子拟群结格是可补的。

4 致谢

作者谨此感谢美国国家科学基金会通过 NSF DMS-1659123号资助，为本研究提供经费支持。前四位作者谨此感谢第五位作者，以及 Marianne Korten 和 Kim Klinger-Logan，在 SUMaR 2023 期间及之后给予他们的指导与支持，并感谢堪萨斯州立大学在本科生研究体验项目期间给予的热情接待。

5 参考文献

参考文献

[1] David, Joyce. “纽结的一种分类不变量——纽结拟群。”纯粹与应用代数杂志，第23卷，第37-65页，1982年。[2] Ho, Benita 和 Sam Nelson. “矩阵与有限拟群结。”《同调、同伦与应用》，第7卷，第197-208页，2005年。[3] G. Ehrman, A. Gurpinar, M. Thibault, D.N. Yetter. “有限拟群结的分类初探。”纽结理论及其分支杂志，第17卷，第511-520页，2008年。[4] A. Saki 和 D. Kiani，“子架的有补格。”《代数组合学杂志》，第53卷，第455-468页，2021年。[5] A. Saki 和 D. Kiani，“Takasaki拟群的子夸群格。”代数通讯，第49卷第1期，第99-113页，2021年。[6] M. Takasaki，“对称变换的抽象化。”《东北数学杂志》49，第145-207页，1943年。